تمارين محلولة على مبرهنة القيم المتوسطة

تمرين 01

نعتبر دالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^3+3x+8$

1) أ) ادرس تغيرات g.

ب) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا واحيدا α حيث $-1.52<\alpha<-1.51$.

ج) عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

الحل

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^3+3x+8$

1) أ) دراسة تغيرات الدالة g.

حساب النهايات عند أطراف مجال التعريف

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$

حساب $g'(x)$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة g' حيث : $g'(x)=3x^2+2$

نحل أولا المعادلة $g'(x)=0$ وهذا يعني $3x^2+3=0$

نحسب المميز Δ مع $a=3$ و $b=0$ و $c=3$

لدينا $\Delta=b^2-4ac$ ومنه $\Delta=0^2-4(3)(-3)$ وبتالي $\Delta=-36$

بمأن $\Delta<0$ فإنّ المعادلة لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$ و إشارة $g'(x)$ من إشارة a

نستنتج إشارة $g'(x)$

جدول الإشارة

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$

و بالتالي لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $g'(x)>0$. إذن الدالة g متنازيدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول التغيرات

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

ب) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1.52<\alpha<-1.51$ ..

لدينا $g(-1.52)=-0.07$ ، $g(-1.51)=0.03$ ومنه $g(-1.52)\times g(-1.51)<0$.

g دالة مستمرة و رتيبة تماما على $\mathbb{R}$و بصفة خاصة على المجال $[-1.52;-1.51]$.

إذن المعادلة $g(x)=0$تقبل حلا وحيدا α حيث $-1.52<\alpha<-1.51$

ج) تعين إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

هذا العمل صدقة لروح أمي الطاهرة رحمها الله

حجاج براهيم

تمرين 02

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^3-3x-3$

1) أ) ادرس تغيرات g.

ب) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$ ثم تحقق أن $2.10<\alpha<2.11$.

ج) عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

2) بين أن $\alpha=\frac{1}{3}\alpha^3-1$

الحل

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^3-3x-3$

1)أ) دراسة تغيرات الدالة g.

حساب النهايات عند أطراف مجال التعريف

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^3\right)=+\infty \quad \lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^3\right)=-\infty$$

حساب $g'(x)$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة g' حيث : $g'(x)=3x^2-3$

نحل أولا المعادلة $g'(x)=0$ وهذا يعني $3x^2-3=0$

نحسب المميز Δ مع $a=3$ و $b=0$ و $c=-3$

لدينا $\Delta=b^2-4ac$ ومنه $\Delta=0^2-4(-3)(-3)$ وبتالي $\Delta=36$

بما أن $\Delta>0$ فإنّ المعادلة تقبل حلّين متماميزان x_1 ، x_2 : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

ومنه $x_1=\frac{-0-\sqrt{36}}{2\times3}=\frac{-6}{6}=-1$ ، $x_2=\frac{-0+\sqrt{36}}{2\times3}==\frac{6}{6}=1$

نستنتج إشارة $g'(x)$

جدول الإشارة

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إتجاه تغير الدالة g

و بالتالي لدينا $g'(x)\geq0$ من أجل كل عدد حقيقي $x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$ ،إذن الدالة g متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[1;+\infty[$.

لدينا $g'(x)\leq0$ من أجل كل عدد حقيقي $x\in[-1;1]$ ،إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $[-1;1]$.

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

ب) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

من جدول التغيرات نلاحظ

1.على المجال $]-\infty;-1]$ الدالة f مستمرة و متزايدة تماما و تأخذ قيمها في المجال $]-\infty;-1]$ و $0\notin]-\infty;-1]$ ومنه المعادلة $g(x)=0$ لا تقبل حل على المجال $]-\infty;-1]$

2. على المجال $[-1;1]$ الدالة f مستمرة و متناقصة تماما و تأخذ قيمها في المجال $[-5;-1]$ و $0\notin[-5;-1]$ ومنه المعادلة $g(x)=0$ لا تقبل حل على المجال $[-1;1]$.

3. على المجال $[1;+\infty[$ الدالة f مستمرة و متزايدة تماما و تأخذ قيمها في المجال $[-5;+\infty[$ و $0\in[-5;+\infty[$ ومنه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد على المجال $[1;+\infty[$.

الخلاصة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

تحقق أن $2.10<\alpha<2.11$.

لدينا $g(2.10)=-0.06$ ، $g(2.11)=0.04$ و $g(2.11)\times g(2.10)<0$.

و g دالة مستمرة و رتيبة تماما على $\mathbb{R}$ و بصفة خاصة على المجال $[2.10;2.11]$.

إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2.10<\alpha<2.11$

ج) تعين إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

2) تبيان أن $\alpha=\frac{1}{3}\alpha^3-1$

نعلم أن $g(\alpha)=0$ ومنه $\alpha^3-3\alpha-3=0$

و بنالي $3\alpha=\alpha^3-3$

و بنالي $\alpha=\frac{\alpha^3-3}{3}$

و بنالي $\alpha=\frac{\alpha^3}{3}-\frac{3}{3}$ و بنالي $\alpha=\frac{1}{3}\alpha^3-1$ محققة

هذا العمل صدقة لروح أمي الطاهرة رحمها الله

تمرين 03

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^3+3x^2+2$

1) أ) ادرس تغيرات g.

ب) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا واحيدا α في المجال $[-4;-3]$.

2) عين العدد الطبيعي n بحيث حصرا لـ $-\frac{n+1}{10}<\alpha<-\frac{n}{10}$.

ج) عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

3) بين أن $\alpha=-\frac{\alpha^3+2}{3}$

الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^3+3x^2+2$

1) دراسة تغيرات الدالة g.

حساب النهايات عند أطراف مجال التعريف

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3\right)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3\right)=-\infty$

حساب $g'(x)$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة g' حيث: $g'(x)=3x^2+6x$

نحل أولا المعادلة $g'(x)=0$ وهذا يعني $3x^2+6x=0$

نحسب المميز Δ مع $a=3$ و $b=6$ و $c=0$

لدينا $\Delta=b^2-4ac$ ومنه $\Delta=6^2-4(3)(0)$ وبتالي $\Delta=36$

بما أن $\Delta>0$ فإنّ المعادلة تقبل حلّين x_1 ، x_2: $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

ومنه $x_1=\frac{-6-\sqrt{36}}{2\times3}=\frac{-6-6}{6}=-2$ ، $x_2=\frac{-6+\sqrt{36}}{2\times3}==\frac{-6+6}{6}=0$

نستنتج إشارة $g'(x)$

جدول الإشارة

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و بالتالي لدينا $g'(x)\geq0$ من أجل كل عدد حقيقي $x\in]-\infty;-2]\cup[0;+\infty[$ ،إذن الدالة g متزايدة تماما على المجالين $]-\infty;-2]$ و $[0;+\infty[$.

لدينا $g'(x)\leq0$ من أجل كل عدد حقيقي $x\in[-2;0]$ ،إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $[-2;0]$.

جدول التغيرات

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	6	↘	2	↗	$+\infty$

ب) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا واحيدا α في المجال $[-4;-3]$.

لدينا $g(-4)=-0.06$ ، $g(-3)=0.04$ و $g(-4)\times g(-3)<0$.

و g دالة مستمرة و رتيبة تماما على $]-\infty;-2]$ و بصفة خاصة على المجال $[-4;-3]$.

إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-4<\alpha<-3$

- عين العدد الطبيعي n بحيث حصرا لـ $-\frac{n+1}{10}<\alpha<-\frac{n}{10}$

لتعين حصرا لـ α نستعين بالجدول التالي

x	-4	-3.9	-3.8	-3.7	-3.6	-3.5	-3.4	-3.3	-3.2	-3.1	-3
$f(x)$	-14					-4.13			-0.05	1.04	2

ومنه نلاحظ أن $g(-3.1)=1.04$ و $g(-3.2)=-0.05$ ومنه $g(-3.2)\times g(-3.1)<0$ و بتالي يمكن نعتبر $-3.2<\alpha<-3.1$

ومنه $-\frac{32}{10}<\alpha<-\frac{31}{10}$ أي $-\frac{31+1}{10}<\alpha<-\frac{31}{10}$ وبتالي $n=31$

ملاحظة

لا يجب حساب كل الصور في كل مرة نحسب القيمة التي في منتصف المجال ثم المجال الذي يكون اطرافه من نفس إشارة نلغيه أي لا نحسب صور القيم التي تنتمي إليه .

ج) تعين إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2) تبيان أن $\alpha=-\frac{\alpha^3+2}{3}$

نعلم أن $g(\alpha)=0$ ومنه $\alpha^3+3\alpha+2=0$

و بنالي $-3\alpha=\alpha^3+2$

و بنالي $\alpha=\frac{\alpha^3+2}{-3}$

و بنالي $\alpha=-\frac{\alpha^3+2}{3}$ و بنالي $\alpha=\frac{1}{3}\alpha^3-1$ محققة

هذا العمل صدقة لروح أمي الطاهرة رحمها الله

تمرين 04

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^3-x^2+3x+1$

1) أ) ادرس تغيرات g.

ب) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا واحدا في α المجال في المجال $[-1;0]$.

- أعط حصرا لـ α سعته 10^{-2} .

ج) عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

2) بين أن $\alpha^2=-3-\dfrac{4}{\alpha-1}$

الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^3-x^2+3x+1$

1) دراسة تغيرات الدالة g.

حساب النهايات عند أطراف مجال التعريف

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$

حساب $g'(x)$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة g' حيث $g'(x)=3x^2-2x+3$:

نحل أولا المعادلة $g'(x)=0$ وهذا يعني $3x^2-2x+3=0$

نحسب المميز Δ مع $a=3$ و $b=-2$ و $c=3$

لدينا $\Delta=b^2-4ac$ ومنه $\Delta=2^2-4(3)(3)$ وبتالي $\Delta=-32$

بمأن $\Delta<0$ فإنّ المعادلة لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$ و إشارة $g'(x)$ من إشارة a

نستنتج إشارة $g'(x)$

جدول الإشارة

x	$-\infty$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$

و بالتالي لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $g'(x)>0$. إذن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول التغيرات

x	$-\infty$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

ب) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا واحدا في α المجال في المجال $[-1;0]$.

لدينا $g(-1)=-0.07$ ، $g(0)=1$ و $g(-1)\times g(0)<0$.

و g دالة مستمرة و رتيبة تماما على $\mathbb{R}$ و بصفة خاصة على المجال $[0;1]$.

إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0<\alpha<1$

- أعط حصرا لـ α سعته 10^{-2} .

نستعمل طريقة التنصيف

الخطوة	a	b	$\frac{a+b}{2}$	$g(a)$	$g(b)$	$g\left(\frac{a+b}{2}\right)$	السعة $b-a$
01	-1	0	-0.5	-4	1	-0.88	1
02	-0.5	0	-0.25	-0.88	1	0.17	0.5
03	-0.5	-0.25	-0.38	-0.88	0.17	-0.34	0.25
04	-0.38	-0.25	-0.32	-0.34	0.17	-0.01	0.13
05	-0.32	-0.25	-0.29	-0.01	0.17	0.02	0.07
06	-0.32	-0.29	-0.31	-0.01	0.02	-0.06	0.03
07	-0.31	-0.29	-0.30	-0.06	0.02	-0.02	0.02
08	-0.30	-0.29		-0.02	0.02		0.01

ومنه نلاحظ أن $g(-0.30)=-0.02$ و $g(-0.29)=0.02$ ومنه $g(-0.30)\times g(-0.29)<0$ و بتالي

يمكن نعتبر $-0.30<\alpha<-0.29$

ومنه أ $-\frac{30}{100}<\alpha<-\frac{29}{100}$

ج) تعين إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

2) تبيان أن $\alpha^2=-3-\frac{4}{\alpha-1}$

نعلم أن $g(\alpha)=0$ ومنه $\alpha^3-\alpha^2+3\alpha+1=0$

و بنالي $\alpha^3-\alpha^2=-3\alpha-1$

و بنالي $\alpha^2(\alpha-1)=-3\alpha+3-4$

و بنالي $\alpha^2(\alpha-1)=-3(\alpha-1)-4$

و بنالي $\alpha^2=\frac{-3(\alpha-1)}{(\alpha-1)}-\frac{4}{(\alpha-1)}$

و بنالي $\alpha^2=-3-\frac{4}{(\alpha-1)}$ محققة

هذا العمل صدقة لروح أمي الطاهرة رحمها الله

تمرين 05

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3+x^2-5x+4$

1) أ) ادرس تغيرات f .

ب) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

- أعط حصرا لـ α سعته 10^{-1} .
- أعط حصرا لـ α سعته 10^{-2} .

ج) عين إشارة $f(x)$ حسب قيم x.

الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3+3x^2+3x-5$

1) أ) ادراسة تغيرات الدالة f .

حساب النهايات عند أطراف مجال التعريف

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^3)=+\infty \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^3)=-\infty$$

حساب $g'(x)$

الدالة fقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' حيث $f'(x)=3x^2+2x-5$:

نحل أولا المعادلة $f'(x)=0$ وهذا يعني $3x^2+2x-5=0$

نحسب المميز Δمع $a=3$ و $b=2$ و $c=-5$

لدينا $\Delta=b^2-4ac$ ومنه $\Delta=2^2-4(3)(-5)$ وبتالي $\Delta=64$

بمأن $\Delta>0$ فإنّ المعادلة تقبل حلّين x_1 ، x_2 : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

ومنه $x_1=\dfrac{-2-\sqrt{64}}{2\times3}=\dfrac{-2-8}{6}=\dfrac{-10}{6}=-\dfrac{5}{3}$ ، $x_2=\dfrac{-2+\sqrt{64}}{2\times3}=\dfrac{-2+8}{6}=\dfrac{6}{6}=1$

نستنتج إشارة $f'(x)$

جدول الإشارة

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

و بالتالي لدينا $f'(x)\geq0$ من أجل كل عدد حقيقي $x\in\left]-\infty;-\frac{5}{3}\right]\cup[1;+\infty[$ ،إذن الدالة fمتزايدة تماما على المجالين $\left]-\infty;-\frac{5}{3}\right]$ و $[1;+\infty[$.

لدينا $f'(x)\leq0$ من أجل كل عدد حقيقي $x\in\left[-\frac{5}{3};1\right]$ ،إذن الدالة fمتناقصة تماما على المجال $\left[-\frac{5}{3};1\right]$.

جدول التغيرات

x	$-\infty$		$\frac{-5}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{283}{27}$	↘	2	↗	$+\infty$

ب) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

من جدول التغيرات نلاحظ

1. على المجال $\left]-\infty;-\frac{5}{3}\right[$ الدالة f مستمرة و متزايدة تماما و تأخذ قيمها في المجال $\left]-\infty;\frac{283}{27}\right[$ و $0\in\left]-\infty;\frac{283}{27}\right[$ ومنه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $\alpha\in\left]-\infty;-\frac{5}{3}\right[$
2. على المجال $\left]-\frac{5}{3};1\right]$ الدالة f مستمرة و متناقصة تماما و تأخذ قيمها في المجال $\left[1;\frac{283}{27}\right]$ و $0\notin\left[1;\frac{283}{27}\right]$ ومنه المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل حل على المجال $\left]-\frac{5}{3};1\right]$.
3. على المجال $[1;+\infty[$ الدالة f مستمرة و متزايدة تماما و تأخذ قيمها في المجال $[1;+\infty[$ و $0\notin[1;+\infty[$ ومنه المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل حل على المجال $[1;+\infty[$.

الخلاصة

المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

- **تعين حصرا لـ α سعته 10^{-1} .**

مما سبق وجدنا أن $\alpha\in\left]-\infty;-\frac{5}{3}\right[$

بإستعمال الألة الحاسبة نبحث عن قيمة $a<-\frac{5}{3}$ بحيث $f(a)<0$

x	-4	-3	-2	$-\frac{5}{3}$
$f(x)$	-24	1	10	10.48

ومنه نلاحظ أن $f(-3)=1$ و $f(-4)=-24$ ومنه $f(-4)\times f(-3)<0$ و بتالي يمكن نعتبر $\alpha\in]-4;-3[$

لتعين حصرا لـ α سعته 10^{-1}

نستعين بالجدول التالي

x	-4	-3.9	-3.8	-3.7	-3.6	-3.5	-3.4	-3.3	-3.2	-3.1	-3
$f(x)$	-24	-20.61	-17.43	-14.46	-11.70	-9.31	-6.74	-20.61	-4.55	-0.68	1

ومنه نلاحظ أن $f(-3)=1$ و $f(-3.1)=-0.68$ ومنه $f(-3.1)\times f(-3)<0$ و بتالي يمكن نعتبر $\alpha\in]-3.1;-3[$

• **تعين حصرا لـ α سعته 10^{-2} .**

لتعين حصرا لـ α سعته 10^{-2} نستعين بالجدول التالي

x	-3.1	-3.09	-3.08	-3.07	-3.06	-3.05	-3.04	-3.03	-3.02	-3.01	-3
$f(x)$	-24			-0.16	0.01	0.18					1

ومنه نلاحظ أن $f(-3.07)=-0.16$ و $f(-3.06)=-0.01$ ومنه $f(-3.07)\times f(-3.06)<0$ و بتالي يمكن نعتبر $\alpha\in]-3.07;-3.06[$

ملاحظة

لا يجب حساب كل الصور في كل مرة نحسب القيمة التي في منتصف المجال ثم المجال الذي يكون اطرافه من نفس إشارة نلغيه أي لا نحسب صور القيم التي تنتمي إليه .

ج) تعين إشارة $f(x)$ حسب قيم x.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

هذا العمل صدقة لروح أمي الطاهرة رحمها الله

تمرين 06

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=2x^3-4x^2+7x$.

1) أ)احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب)ادرس اتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ) بيّن أن المعادلة $g(x)=4$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.7<\alpha<0.8$.

ب)استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)-4$.

الحل

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=2x^3-4x^2+7x$.

1) أ)احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3)=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^3)=+\infty$

ب)ادرس اتجاه تغيّر الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة g' حيث : $g'(x)=6x^2-8x+7$

نحل أولا المعادلة $g'(x)=0$ وهذا يعني $6x^2-8x+7=0$

نحسب المميز Δ مع $a=6$ و $b=-8$ و $c=7$

لدينا $\Delta=b^2-4ac$ ومنه $\Delta=(-8)^2-4(7)(6)$ وبتالي $\Delta=-104$

بما أن $\Delta<0$ فإنّ المعادلة $g'(x)=0$ لاتقبل حلول في $\mathbb{R}$ و إشارة $g'(x)$ من إشارة a

نستنتج إشارة $g'(x)$

إتجاه تغير الدالة g

و بالتالي لدينا $g'(x)\geq 0$ من أجل كل عدد حقيقي x ،إذن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

2) أ) بيّن أن المعادلة $g(x)=4$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.7<\alpha<0.8$.

من جدول التغيرات نلاحظ

g دالة مستمرة ورتيبة (متزايدة تماما) على $\mathbb{R}$ و بصفة خاصة على المجال $[0.7;0.8]$ و

$\begin{cases} g(0.7)=3.626 \\ g(0.8)=4.064 \end{cases}$ ومنه $g(0.7)<4<g(0.8)$ إذن المعادلة $g(x)=4$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.7<\alpha<0.8$.

ب)استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)-4$.

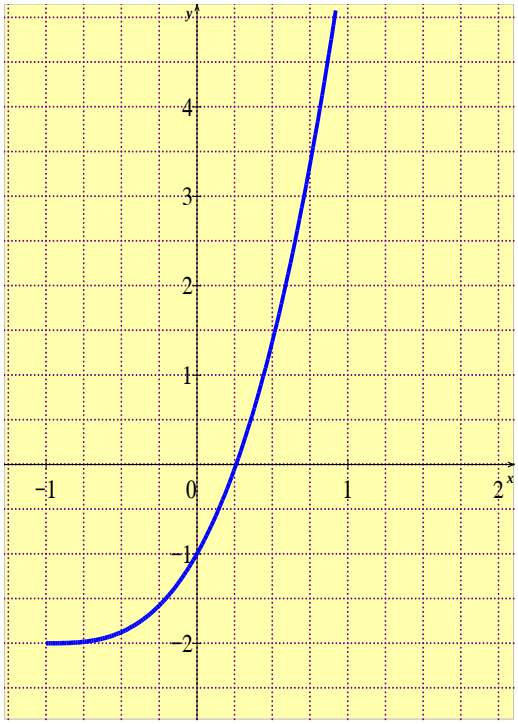
x	$-\infty$	a	$+\infty$
$g(x)-4$	$-$	0	$+$

هذا العمل صدقة جارية إلى روح أمي الطاهرة رحمة الله الواسعة عليها .

حجاج براهيم

تمرين 07

بكالوريا علمي دورة 2008 التمرين الرابع من الموضوع الأول



المنحنى (C) المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية g
المعرفة على المجال $I=]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^3+3x^2+3x-1$
1-أ)بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g
وحدّد $g(0)$ وإشارة $g(0.5)$
ب)علّل وجودعدد حقيقي $\alpha\in]0;0,5[$ يحقق: $g(\alpha)=0$
جـ)استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I

الحل

المعرفة على المجال $I=]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=x^3+3x^2+3x-1$

1-أ)بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g

x	-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	$+\infty$
	-2		

وحدّد $g(0)$ وإشارة $g(0.5)$
لدينا $g(0)=-1$ و $g(0.5)>0$

ب)علّل وجودعدد حقيقي $\alpha\in]0;0,5[$ **يحقق:** $g(\alpha)=0$ من جدول التغيرات نلاحظ

g دالة مستمرة ورتيبة (متزايدة تماما) على $]-1;+\infty[$ و بصفة خاصة على المجال $[0;0.5]$و

$\begin{cases} g(0)=-1 \\ g(0.5)>0 \end{cases}$ ومنه $g(0)\times g(0.5)<0$ إذن المعادلة $g(x)=0$تقبل حلا وحيدا α حيث $0.7<\alpha<0.8$.

جـ)استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I

x	-1	α	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

هذا العمل صدقة لروح أمي الطاهرة رحمها الله

تمرين 08

الجدول المقابل يمثل تغيرات الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2x^3+9x+24$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

1) أ.بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل بضبط حل وحيد α على $\mathbb{R}$.

ب. تحقق أن α يحقق $-1.70<\alpha<-1.71$

2) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x اشارة $g(x)$.

3) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x اشارة $g(-x)$.

الحل

الجدول المقابل يمثل تغيرات الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2x^3+9x+24$.

1) أ.بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل بضبط حل وحيد α على $\mathbb{R}$.

من جدول التغيرات نلاحظ

g دالة مستمرة ورتيبة (متزايدة تماما) على $\mathbb{R}$وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ و $0\in\mathbb{R}$ المعادلة $g(x)=0$تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$

ب. تحقق أن α يحقق $-1.70<\alpha<-1.71$

لدينا و $\begin{cases} g(-1.70)=-0.122 \\ g(-1.71)=0.003 \end{cases}$ ومنه $g(-1.70)\times g(-1.71)<0$ إذن $\alpha\in]-1.70;-1.71[$.

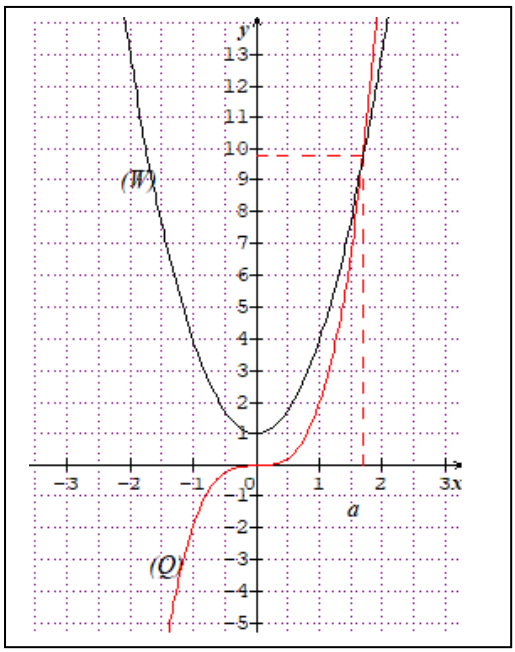
2)استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

3)استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(-x)$.

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$g(-x)$	$+$	0	$-$

هذا العمل صدقة لروح أمي الطاهرة رحمها الله



تمرين 09

i)المستوى منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(Q)التمثيل البياني للدالة $x\mapsto 2x^3$ و(w)التمثيل البياني للدالة $x\mapsto 3x^2+1$ و α هي فاصلة نقطة تقاطع (Q)و(w)

1)بالقراءة البيانية حدد الوضع النسبي للمنحنين (Q) و (w) .

1) نعتبر الدالة gالمعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2x^3-3x^2-1$

عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

2) تحقق أن $1.6<\alpha<1.7$

الحل

المستوى منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(Q)التمثيل البياني للدالة $x\mapsto 2x^3$ و(w)التمثيل البياني للدالة $x\mapsto 3x^2+1$ و α هي فاصلة نقطة تقاطع (Q)و(w)

1)بالقراءة البيانية حدد الوضع النسبي للمنحنين (Q) و (w) .

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;\alpha[$ فان $2x^3-(3x^2+1)<0$ و (Q) تحتق (w)

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]\alpha;+\infty[$ فان $2x^3-(3x^2+1)>0$ و (Q) فوق (w)

من أجل $x=\alpha$ فان $2x^3-(3x^2+1)=0$ و (Q) يقطع (w)في النقطة ذات الاحداثيات $(\alpha;2\alpha^3)$

1) نعتبر الدالة gالمعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2x^3-3x^2-1$

عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

من دراسة الوضع النسبي للمنحنين (Q) و (w) نستنتج ان .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

2) تحقق أن $1.6<\alpha<1.7$

لدينا و $\begin{cases} g(1.60)=-0.488 \\ g(1.7)=0.156 \end{cases}$ ومنه $g(1.70)\times g(1.60)<0$ إذن $\alpha\in]1.60;1.70[$.

هذا العمل صدقة لروح أمي الطاهرة رحمها الله

تمرين 10

(Γ)التمثيل البياني للدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $x\mapsto(2x-1)e^{2x}$

و المستقيم (D) ذو المعادلة $y=1$ ، α فاصلة نقطة

تقاطع (Γ) و (D) (لاحظ الشكل المقابل)

1)بقراءة البيانية حدد وضعية (Γ) إلى (D)

2)الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $g(x)=(2x-1)e^{2x}-1$

استنتج حسب قيم x إشارة $g(-x)$ ثم تحقق أن $0.6<\alpha<0.7$

الحل

1)بقراءة البيانية حدد وضعية (Γ) بالنسبة إلى (D)

من أجل $x\in]-\infty;\alpha[$ يكون (Γ) تحت (D)

من أجل $x\in]\alpha;+\infty[$ يكون (Γ) فوق (D)

من أجل $x=\alpha$ يكون (Γ) يقطع (D) في النقطة ذات الإحداثيات $(\alpha;1)$

2)الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $g(x)=(2x-1)e^{2x}-1$

نلاحظ لتحديد وضعية (Γ)بالنسبة إلى (D) حسابيا علينا دراسة إشارة الفرق $(2x-1)e^{2x}-1$ ونلاحظ أن الفرق $g(x)=(2x-1)e^{2x}-1$

وبتالي تكون $g(x)>0$ إذاكان يكون (Γ) فوق (D) أي من أجل $x\in]\alpha;+\infty[$

وبتالي تكون $g(x)<0$ إذاكان يكون (Γ) فوق (D) أي من أجل $x\in]-\infty;\alpha[$

وبتالي تكون $g(x)=0$ إذاكان يكون (Γ) يقطع (D) أي من أجل $x=\alpha$

جدول الإشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

استنتج حسب قيم x إشارة $g(-x)$

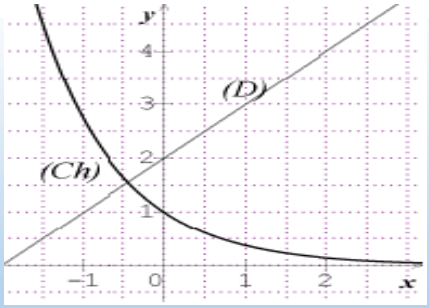
x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$g(-x)$	$+$	0	$-$

ثم تحقق أن $0.6<\alpha<0.7$

لدينا و $\begin{cases}g(0.60)=-0.34\\g(0.7)=0.62\end{cases}$ ومنه $g(0.70)\times g(0.60)<0$ إذن $0.6<\alpha<0.7$.

هذا العمل صدقة لروح أمي الطاهرة رحمها الله

تمرين 11



(C_h)التمثيل البياني للدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $h(x)=e^{-x}$

و المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+2$ ، α فاصلة نقطة تقاطع (C_h) و (D) (لاحظ الشكل المقابل)

1)بقراءة البيانية حدد إشارة $g(x)$ حيث بـِ: $g(x)=e^{-x}-x-2$

2) حدد إشارة $g(x-2)$.

3)حدد إشارة $g(1-x)$.

الحل

)بقراءة البيانية حدد إشارة $g(x)$ حيث بـِ: $g(x)=e^{-x}-x-2$

من البيان ومن وضعية (C_h) بالنسبة الى (D)نستنتج أن

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

2) حدد إشارة $g(x-2)$.

لدينا $g(x-2)=0$ ومنه $x-2=\alpha$ و بتالي $x=\alpha+2$

جدول الإشارة $g(x-2)$

x	$-\infty$	$a+2$	$+\infty$
$g(x-2)$	$+$	0	$-$

استنتج حسب قيم x إشارة $g(-x)$

3)حدد إشارة $g(1-x)$.

لدينا $g(1-x)=0$ ومنه $1-x=\alpha$ و بتالي $x=1-\alpha$

جدول الإشارة $g(1-x)$

x	$-\infty$	$1-a$	$+\infty$
$g(1-x)$	$-$	0	$+$

هذا العمل صدقة لروح أمي الطاهرة رحمها الله

تمرين 12

)الجدول المقابل يمثل تغيرات الدالة g المعرفة على $]-2;+\infty[$ بـ: $g(x)=x+\ln(x+2)$

x	-2	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

1)أثبت أن المعادلة $g(x)$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.45<\alpha<-0.44$.

2)حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $]-2;+\infty[$.

3)حدد حسب قيم x إشارة $g(-x)$ على $]-2;+\infty[$.

الحل

أ)أثبت أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.45<\alpha<-0.44$.

من جدول التغيرات لدينا g دالة مستمرة ورتيبة على المجال $[-0.45;-0.44]$ و $\begin{cases} g(-0.45)=-0.4 \\ g(-0.44)=+0.01 \end{cases}$

ومنه $g(-0.44)\times g(-0.45)<0$ و بتالي المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.45<\alpha<-0.44$.

2)استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $]-2;+\infty[$.

جدول الإشارة

x	-2	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

3)حدد حسب قيم x إشارة $g(-x)$ على $]-2;+\infty[$.

جدول الإشارة

x	$-\infty$	$-\alpha$	2
$g(-x)$	$+$	0	$-$

هذا العمل صدقة لروح أمي الطاهرة رحمها الله

التمرين 13

g الدالة العددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=x^3-x^2+3x+1$ و بجدول تغيراتها المقابل

x	$g(x)$
-0.32	-0.09
-0.31	-0.05
-0.30	-0.02
-0.29	0.02
-0.28	0.06

1)أ.أدرس تغيرات الدالة و شكل جدول تغيراتها .

2)أ..بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $-1<\alpha<0$.

ب. بإستعمال الجدول المقابل أعط حصرا للعدد .

جـ.استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x اشارة $g(x)$.

الحل

)أ.أدرس تغيرات الدالة و شكل جدول تغيراتها .

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=+\infty$

gقابلة لفشتقاق على $\mathbb{R}$و دالتها المشتقة g' حيث : $g'(x)=3x^2-2x+3$

لدينا $g'(x)=0$ معناه $3x^2-2x+3=0$ومنه المعادلة لا تقبل حل في $\mathbb{R}$

لأن $\Delta=-32<0$و إشارة $g'(x)$ من إشارة a

ومنه $g'(x)>0$ من أجل كل عدد حقيقي من $\mathbb{R}$و g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول التغيرات

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

2)أ..بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $-1<\alpha<0$.

gدالة مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$و بصفة خاصة على المجال $[-1;0]$ و لدينا $\begin{cases}g(-1)=-4\\f(0)=1\end{cases}$ ومنه

هـ $g(0)\times g(-1)<0$وبتاليي المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $-1<\alpha<0$.

ب. بإستعمال الجدول المقابل أعط حصرا للعدد α .

من الجدول لدينا $\begin{cases}g(-.30)=-0.02\\f(-0.29)=0.02\end{cases}$ و $g(-0.30)\times g(-0.29)<0$ ومنه $-0.30<\alpha<-0.29$

جـ.استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x اشارة $g(x)$.

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

هذا العمل صدقة لروح أمي الطاهرة رحمها الله