الملخص العام

- **الاستمرارية في نقطة:**

النهاية	التفسير الهندسي
$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$	الدالة f مستمرة في النقطة x_0
$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$	الدالة f مستمرة على يسار النقطة x_0
$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$	الدالة f مستمرة على يمين النقطة x_0

ملاحظة:

إذا كانت f مستمرة على يمين x_0 ومستمرة على يسار x_0 فهي إذن مستمرة في النقطة x_0.

- **الاستمرارية على مجال:**

- تكون f مستمرة على مجال مفتوح $]a,b[$ إذا كانت f مستمرة في كل نقطة من المجال $]a,b[$.
- تكون f مستمرة على مجال مغلق $[a,b]$ إذا كانت f مستمرة على المجال المفتوح $]a,b[$ ومستمرة على يمين a ومستمرة على يسار b.

- **العمليات على الدوال المستمرة:**

لتكن f و g دالتين مستمرتين على مجال I، و k عدد حقيقي.
- الدوال $f+g$، $f \times g$، kf مستمرة على المجال I.
- إذا كانت g لا تنعدم على I، فإن الدالتين $\frac{k}{g}$ و $\frac{f}{g}$ مستمرتين على المجال I.

- **نتائج:**

- كل دالة كثير حدود مستمرة على $\mathbb{R}$.
- كل دالة ناطقة مستمرة على مجال تعريفها.
- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرة على $\mathbb{R}^+$.
- الدالتان $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ مستمرتان على $\mathbb{R}$.
- الدالة $x \mapsto \tan x$ مستمرة على مجال تعريفها $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- **استمرارية مركب دالتين:**

إذا كانت f مستمرة على مجال I، و g مستمرة على مجال J،
بحيث: $f(I) \subset J$ فإن gof مستمرة على المجال I.

- **مبرهنة القيم المتوسطة:**

إذا كانت f مستمرة على مجال $[a,b]$ فإنه لكل عدد حقيقي β محصور بين العددين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $[a,b]$ بحيث:
$f(\alpha) = \beta$

- **نتيجة:**

إذا كانت f مستمرة على مجال $[a,b]$ وكان $f(a) \times f(b) < 0$، فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا α ينتمي إلى المجال $[a,b]$.

إذا كانت f مستمرة ورتيبة تماما على مجال $[a,b]$ وكان $f(a) \times f(b) < 0$، فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $[a,b]$.

- **طريقة التفرع الثنائي:**

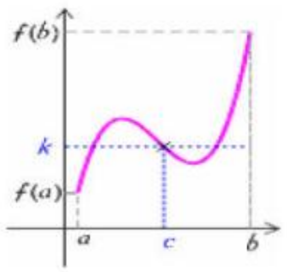
لتكن f دالة مستمرة ورتيبة تماما على مجال $[a,b]$ بحيث: $f(a) \times f(b) < 0$.
وليكن α الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[a,b]$.

إذا كان:	$f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$	فإن:	$a < \alpha < \frac{a+b}{2}$
إذا كان:	$f(b) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$	فإن:	$\frac{a+b}{2} < \alpha < b$

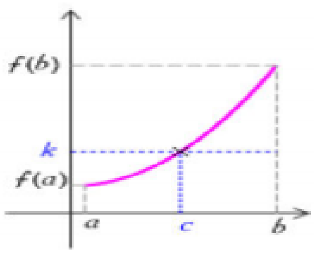
- **ملاحظة:**

يمكن إعادة هذه الطريقة عدة مرات للحصول على حصر دقيق للعدد α.

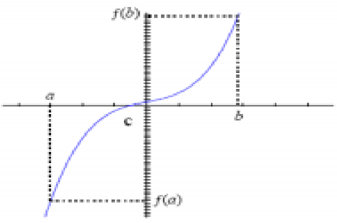
تمثيلات توضيحية حول مبرهنة القيم المتوسطة



المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حل على المجال $[a;b]$



المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيد على المجال $[a;b]$



حالة خاصة : $f(x)=0$
$(f(a)\times f(b)\prec 0)$

التمرين رقم 01 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-3\}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x^2-9}{x+3} & ; \quad x\le 2 \\ f(x)=\sqrt{x^2-4}-1 & ; \quad x>2 \end{cases}$$

- أدرس استمرارية f عند $x_0=2$

التمرين رقم 02 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & ; \quad x\ne 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

- بين أن f مستمرة عند $x_0=0$

التمرين رقم 03 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1-\sqrt{1+x}}{x} & ; x\succ 0 \\ f(x)=\frac{1-x^2}{x-2} & ; x\le 0 \end{cases}$$

1) احسب $f(0)$ ، ثم أدرس استمرارية f عند 0.

2)أدرس استمرارية f على $\mathbb{R}$

التمرين رقم 04 :

لتكن الدالة f المعرفة بـ :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & x\in[-1;0[\cup]0;+\infty[\\ f(x)=\frac{1}{2} & x=0 \end{cases}$$

هل الدالة f مستمرة عند 0 ؟

التمرين رقم 05 :

لتكن الدالة f المعرفة على R^* كمايلي :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{2x^2-\alpha+3}{x} & x\le 2 \\ f(x)=x^2+2x-\alpha & x>2 \end{cases}$$

عين قيمة α حتى تكون الدالة f مستمرة عند 2.

التمرين رقم 06 :

لتكن الدالة f المعرفة بـ :

$$\begin{cases} f(x)=3x^2-4x+5 & x\ge 0 \\ f(x)=x^2+7\alpha-9 & x<0 \end{cases}$$

حدد α حتى تكون الدالة f مستمرة على R .

التمرين رقم 07 :

لتكن الدالة f المعرفة بـ :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x^2-4}{x-2} & x\in R-\{2\} \\ f(x)=\beta & x=2 \end{cases}$$

حدد β حتى تكون الدالة f مستمرة عند 2.

التمرين رقم 08 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x} & ; x\ne 0 \\ f(0)=\alpha \end{cases}$$

1)جد $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة الأخيرة هندسيا

2)عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون f مستمرة عند 0

التمرين رقم 09 :

لتكن f الدالة المعرفة كمايلي:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2} : x\ne 0 \\ f(0)=\frac{1}{2} \end{cases}$$

1) بين أن : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{2}$ (استعمل $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$)

2)هل الدالة f مستمرة عند 0؟.علل

التمرين رقم 10 :

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{2;4\}$ كما يلي :

$$f(x)=\frac{|x-3|+1}{(x-2)(4-x)}$$

1) أكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .

2) أدرس استمرارية f عند 3 .

التمرين رقم 11 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x^2+|x|}{x^2-|x|} & ; \quad x=0 \\ f(0)=-1 \end{cases}$$

1) أكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة

2) هل f مستمرة عند $1, 0, -1$

3) أدرس استمرارية f على $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$ ، $[2;5]$

التمرين رقم 12 :

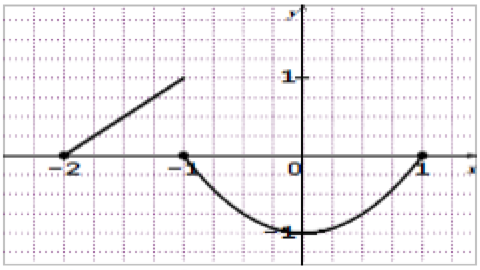
لتكن الدالة f المعرفة بـ :

$$\begin{cases} f(x) = \sin 2x + 1 & x \geq 0 \\ f(x) = \sqrt{x^2+2} + 3\alpha & -1 \leq x < 0 \\ f(x) = x^2 + 4x + 2\beta & x < -1 \end{cases}$$

حدد α و β حتى تكون الدالة f مستمرة على R .

التمرين رقم 13 :

لتكن f دالة عددية معرفة على [-2;1] بالمنحنى المقابل :



❶ بقراءة بيانية عين النهايتين من اليمين و من اليسار عند -1 .

❷ هل تقبل الدالة f نهاية عند -1 ؟ هل هي مستمرة عند -1 ؟

❸ حدد المجالات التي تكون عليها الدالة f مستمرة.

التمرين رقم 14 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;2[$ كما يلي :

$$f(x) = xE(x) + 1$$

1) عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية :
$[-1;0[$ ، $[0;1[$ ، $[1;2[$

2) أدرس استمرارية f عند 0 ثم عند 1 .

3) أنشئ C_f على المجال $[-1;2[$.

4) هل f مستمرة على $[-1;1[$ ؟ على $[-1;2[$ ؟ على $[1;2[$ ؟

التمرين رقم 15 :

f دالة معرفة بـ : $f(x) = x^3 + x + 1$

جدول تغيراتها معطى كما يلي :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

1) بين أن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث :
$\alpha \in \left]-1; -\frac{1}{2}\right[$

2) فسر النتيجة بيانيا .

3) عين حصرا لـ α سعته 0.1

4) عين إشارة $f(x)$ حسب قيم x

التمرين رقم 16 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^3 - 3x - 3$
جدول تغيراتها معطى بـ :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-5	↗	$+\infty$

1) عين عدد حلول كل من المعادلتين التاليتين على $\mathbb{R}$.
$f(x) + 2 = 0$ و $f(x) = 4$

2) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]2; 2.5[$ ثم عين إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$

3) عين حصرا لـ α سعته 0.1

4) بين انه إذا كان $-1 < x < 0$ يكون $-3 < f(x) < -1$

5) بين أنه إذا كان $-2 \leqslant x \leqslant -1$ يكون $f(x) \in [-5; -1]$

التمرين رقم 17 :

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = ax^3 + bx + c$
جدول تغيراتها معطى كما يلي :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	$-\infty$

- استعمل المعلومات الموجودة في جدول التغيرات لتعيين الأعداد c , b , a .
- برهن أن المعادلة $f(x) = 3$ تقبل ثلاث حلول α_0 ، α_1 ، α_2 حيث : $\alpha_1 \in]-1; 1[$
- عين حصرا لـ α_1 سعته 10^{-1}
استعن بالجدول التالي :

x	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$f(x)$	2.59	2.87	3.13	3.37	3.67	3.75

التمرين رقم 18 :

I - f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 + 2x - 1$

1°- أدرس تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

2°- بين أن المعادلة f(x)=0 تقبل حلا وحيدا $\beta \in]0;1[$.
ثم استنتج إشارة f(x) على $\mathbb{R}$.
أ- أعط قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد β .

II- لتكن الدالة h والمعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x^2 - 2x$$

1°) أدرس تغيرات الدالة h على $\mathbb{R}$.

2°) - أ) أثبت أن $h(\beta) = \dfrac{\beta(2\beta - 3)}{2}$

ب) جد حصرا لـ $h(\beta)$، استنتج عدد حلول المعادلة: $h(x) = 0$

التمرين رقم 19 :

أ) h دالة عددية حيث: $h(x)=x^3-3x+4$

1) أدرس تغيرات الدالة h.

2) أثبت أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha\in]-2{,}2;-2{,}19[$ ثم استنتج اشارة $h(x)$.

ب) f دالة عددية حيث: $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+4x$

1- احسب $f'(x)$ و استنتج إشارته بإستعمال أ).

2- ادرس تغيرات الدالة f.

3- أثبت أن $f(\alpha)=\frac{3\alpha(4-\alpha)}{4}$، جد حصرا للعدد $f(\alpha)$

4- عين عدد جذور كثير الحدود $f(x)$.

التمرين رقم 20 :

f دالة معرفة ومستمرة وقابلة للإشتقاق على كلا من $]-\infty;2[$ و $]2;+\infty[$ جدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$
f(x)	4 ↘	1 ↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	0 ↘	-2

وليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1-أ) فسر بيانيا كل نهاية لـ f، عيّن نهاية $f\left(\frac{1}{x}\right)$ عند $+\infty$.

ب) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=\frac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا على $]2;3[$.

2-) g دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بالشكل :

$$g(x)=\frac{1}{f(x)};x\neq 2 \text{ و } g(2)=0$$

أ) بيّن أن g مستمرة عند العدد 2 .

ب) عين نهايات الدالة g عند $+\infty$، $-\infty$ و3.

جـ) شكل جدول تغيرات الدالة g.

التمرين رقم 21 :

لتكن g الدالة المعرفة على R : ب: $g(x)=2x^3+3x^2-2$

أدرس تغيرات الدالة g

بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\propto$ على المجال $[0,1]$

أعطي حصرا لـ $\propto$ بتقريب 10^{-1}

حدد اشارة $g(x)$

لتكن f الدالة المعرفة على $R-\{1\}$: ب: $f(x)=\frac{x^3+2}{x+1}$

بين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ثم استنتج تغيرات الدالة f

استنتج تغيرات الدالة f

بين أن $f(\propto)=\frac{3\propto^2-4}{2(\propto+1)}$

تعريف: نسمي الدالة الجزء الصحيح الدالة المعرفة على R و التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الصحيح n حيث $n\le x<n+1$ و نرمز لها بالرمز E أو $[\ ]$.

التمرين رقم 22 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;2[$ كما يلي :

$$f(x)=xE(x)+1$$

1) عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية : $[-1;0[$ ، $[0;1[$ ، $[1;2[$

2) أدرس استمرارية f عند 0 ثم عند 1 .

3) أنشئ $\mathcal{C}_f$ على المجال $[-1;2[$.

4) هل f مستمرة على $[-1;1[$ ؟ على $[-1;2[$ ؟ على $[1;2[$ ؟

التمرين رقم 23 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;2[$ كمايلي : $f(x)=x+1+E(x)$

1. أكتب و حسب قيم x, $f(x)$ بدون العبارة $E(x)$
2. أرسم المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس من المستوي.
3. هل f مستمرة على $[0;2[$ ؟
4. حدد المجالات التي تكون عليها الدالة f مستمرة.

التمرين رقم 24 :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2;1[$ كما يلي: $f(x)=x(x+E(x))$

حيث $x\mapsto E(x)$ هي دالة الجزء الصحيح

1) عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية:

$[-2;-1[$ ، $[-1;0[$ ، $[0;1[$

2) ارسم في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ المنحنى الممثل للدالة f .

3) هل الدالة f مستمرة على $[-2;-1[$، $[-2;0[$، $[-2;1[$؟