

التمرين الأول ☺

I - لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = -2x^2 + 2 - \ln x$

- أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

II - دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{-1 + \ln x}{x} - 2x + 2e$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- ب - بين أن المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -2x + 2e$ مقارباً مائلاً له عند $+\infty$.
- ج - حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

2. أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

- استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- أ - أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً x_0 في المجال $]0, 4; 0, 5[$.
- ب - أنشئ (Δ) و (C_f) .

الحل ☺

I - لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = -2x^2 + 2 - \ln x$

1. دراسة تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} -2x^2 + 2 = 2 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(-2x + \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty$$

الدالة g تقبل الإشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدينا: $g'(x) = -4x - \frac{1}{x}$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $-4x < 0$ و $-\frac{1}{x} < 0$ عندئذٍ $g'(x) < 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماماً على المجال $]0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g .

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	-
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

2. حساب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

$$g(1) = 2(1)^2 + 2 - \ln 1 = 0$$

من أجل $x \in]0; 1[$ ، $g(x) > 0$

من أجل $x \in]1; +\infty[$ ، $g(x) < 0$

II - f دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{-1 + \ln x}{x} - 2x + 2e$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{x} + \frac{\ln x}{x} - 2x + 2e \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-1 + \ln x}{x} - 2x + 2e \right) = -\infty \quad \text{لدينا} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1 + \ln x}{x} = -\infty$$

ب - تبين أن المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -2x + 2e$ مقارباً مائلاً له عند $+\infty$.

$$\text{لدينا} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-2x + 2e) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1 + \ln x}{x} - 2x + 2e + 2x - 2e \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \ln x}{x} = 0$$

مقارباً مائلاً له عند $+\infty$.

ج - تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$.

$$f(x) - y = \frac{-1 + \ln x}{x} - (-2x + 2e) = \frac{-1 + \ln x}{x} + 2x - 2e$$

$$f(x) - y = 0 \quad \text{يكافئ} \quad -1 + \ln x = 0 \quad \text{ويكافئ} \quad \ln x = 1 \quad \text{أي} \quad x = e$$

$$f(x) - y > 0 \quad \text{يكافئ} \quad -1 + \ln x > 0 \quad \text{ويكافئ} \quad \ln x > 1 \quad \text{أي} \quad x > e$$

x	0	e	$+\infty$
$f(x) - y$		-	0
الوضعية النسبية		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)
		(C_f) يقطع (Δ)	
		في النقطة $B(e; 0)$	

2. أ - تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (-1 + \ln x)}{x^2} - 2 = \frac{2 - \ln x - 2x^2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ب - استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$.

من أجل $x \in]-\infty; 1[$ ، $f'(x) > 0$ ؛ ومن أجل $x \in]1; +\infty[$ ، $f'(x) < 0$.

إذن الدالة f متزايدة تماماً على $]-\infty; 1[$ ومنتقصية تماماً على $]1; +\infty[$.

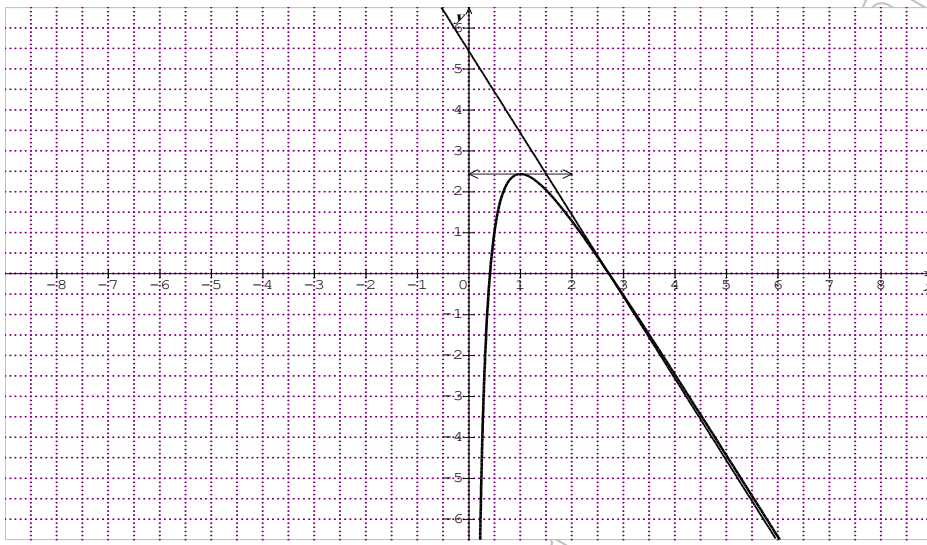
جدول تغيّرات الدالة f .

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	$-\infty$	$2e-3$	$-\infty$

3. أ - إثبات أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $]0,4;0,5[$.

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;1[$ وخاصة على المجال $]0,4;0,5[$ ولدينا $f(0,4) \approx -0,15$ و $f(0,5) \approx 1,04$ إذن يوجد عدد حقيقي وحيد x_0 من المجال $]0,4;0,5[$ بحيث $f(x_0)=0$ وهذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

ب - رسم (Δ) و (C_f) .



التمرين الثاني

I - لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln(x)$

1. ادرس تغيّرات الدالة g واحسب $g(1)$.

2. استنتج أنّه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $g(x) > 0$.

II - دالة عددية معرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ - احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب - بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (D) ذا المعادلة $y = x$ مقاربا مائلا له عند $+\infty$.

ج - حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) .

2. أ - بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب - استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها.

3. أ - بيّن أنّه يوجد مماس وحيد (Δ) للمنحنى (C_f) ، مواز للمستقيم (D) .

ب - اكتب معادلة (Δ) .ج - بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.د - أنشئ المستقيمين (Δ) و (D) والمنحنى (C_f) .هـ - ناقش بياناً، حسب قيم العدد الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $mx - 2\ln(x) = 0$.**الحل**I - لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln(x)$.1. ادرس تغيرات الدالة g واحسب $g(1)$.لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2\ln x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 2 = 2$ عندئذ $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 2 - 2\ln x = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(x + \frac{2}{x} - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x} \quad \text{لدينا } x > 0 \text{ ومنه إشارة } g'(x) \text{ هي من نفس إشارة } x^2 - 1$$

x	0	1	$+\infty$
$x^2 - 1$		- 0 +	

$$g(1) = 1 + 2 + 2\ln 1 = 3$$

جدول تغيرات الدالة g .

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	$+\infty$	3	$+\infty$

2. استنتاج أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.بما أن 3 هي قيمة حدية صغرى للدالة g على المجال $]0; +\infty[$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $g(x) \geq 3$ وبالتالي $g(x) > 0$.II - دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{2\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.1. أ - حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{2\ln x}{x} = +\infty \quad \text{فيكون} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x + \frac{2\ln x}{x} = -\infty \quad \text{فيكون} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\ln x}{x} = -\infty$$



ب - تبين أن المنحنى (C_f) يقبل المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقاربا مانلا له عند $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = 0$$

ج - تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

$$\text{لدينا } f(x) - x = \frac{2 \ln x}{x} \text{ ؛ إشارة } f(x) - x \text{ هي من نفس إشارة } \ln x.$$

$$f(x) - x = 0 \text{ يكافئ } \ln x = 0 \text{ أي } x = 1$$

$$f(x) - x > 0 \text{ يكافئ } \ln x > 0 \text{ وبكافئ } x > 1$$

$$f(x) - x < 0 \text{ يكافئ } \ln x < 0 \text{ وبكافئ } 0 < x < 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$		0	+
الوضعية النسبية		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)
		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$	

2. أ - تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = 1 + 2 \left[\frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} \right] = 1 + \frac{2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ب - استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $g(x) > 0$ و $x^2 > 0$ إذن $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على $]0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3. أ - تبين أنه يوجد مماس وحيد (T) للمنحنى (C_f) ، مواز للمستقيم (Δ) .

(T) يوازي (Δ) يعني $f'(x_0) = 1$.

$$f'(x_0) = 1 \text{ يكافئ } \frac{g(x_0)}{x_0^2} = 1 \text{ وبكافئ } x_0^2 + 2 - 2 \ln x_0 = x_0^2 \text{ وبكافئ } \ln x_0 = 1 \text{ أي } x_0 = e$$

إذن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) موازيا لـ (Δ) في النقطة التي إحداثيتها $\left(e; e + \frac{2}{e}\right)$.

ب - كتابة معادلة (Δ) .

$$y = f'(e)(x - e) + f(e) \text{ ومنه } y = (x - e) + e + \frac{2}{e} \text{ أي } y = x + \frac{2}{e}.$$

ج - تبين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محاور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

لدينا الدالة f مستمرة على المجال $]0; +\infty[$ وبالأخص على المجال $[0,5;1]$ و $f(0,5) \approx -2,27$ و $f(1) = 1$ أي $f(0,5) \times f(1) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $]0,5;1[$ بحيث $f(\alpha) = 0$ وبما أن الدالة f متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$ فإن α وحيد أي (C_f) يقطع حامل محاور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث $0,5 < \alpha < 1$

د - رسم المستقيمين (Δ) و (T) والمنحنى (C_f) .

هـ - المناقشة بيانياً، حسب قيم العدد الحقيقي m ،

$$\text{عدد حلول المعادلة : } mx - 2\ln(x) = 0.$$

$$mx - 2\ln(x) = 0 \text{ تكافئ } mx = 2\ln(x)$$

$$\text{وتكافئ } m = \frac{2\ln(x)}{x} \text{ وتكافئ}$$

$$f(x) = x + m \text{ أي } x + m = x + \frac{2\ln(x)}{x}$$

ومنه حلول المعادلة هي فواصل النقاط المشتركة بين

$$(C_f) \text{ والمستقيم ذي المعادلة } y = x + m$$

بقراءة بيانية:

إذا كان $m \leq 0$ فإن المعادلة تقبل حلاً واحداً.

إذا كان $0 < m < \frac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $m = \frac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلاً مضاعفاً.

إذا كان $m > \frac{2}{e}$ فإن المعادلة لا تقبل حلولاً.

حذار: قيم m لا علاقة لها بمجموعة تعريف الدالة f .

التمرين الثالث

1- h دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ بـ: $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$.

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$.

2. بين أنه، من أجل x من $]-1; +\infty[$: $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$ ، ثم شكّل جدول تغيّرات h .

3. احسب $h(0)$ واستنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .



II- f دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$.

نسمة (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وفسر النتيجة بيانياً.

ب- باستخدام النتيجة $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، برهن أن: $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$.

ج- استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

د- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

هـ- ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

2. بيّن أنه، من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ، ثم شكّل جدول تغيّرات f .

3. بيّن أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4.

4. ارسم (C_f) .

الحل

I- h دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ بـ: $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$.

1. حساب $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

$\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 2x = -1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x = +\infty$.

2. تبين أنه، من أجل كل x من $]-1; +\infty[$: $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$.

$$h'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)(x+1)+1}{x+1} = \frac{2(x+1)^2+1}{x+1}$$

من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $h'(x) > 0$ ، وعليه الدالة h متزايدة تماماً على $]-1; +\infty[$.

جدول تغيّرات h .

x	-1	0	+
$h'(x)$		+	+
$h(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

3. حساب $h(0)$

$$h(0) = 0^2 + 2(0) + \ln(0+1) = 0$$

استنتاج إشارة $h(x)$ حسب قيم x .

x	-1	0	$+\infty$
$h(x)$		-	+

II- f دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ- حساب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وفسر النتيجة بيانياً.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} x+1 = 0^+$$

$$\text{ومنه } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$$

ب- باستخدام النتيجة $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، برهن أن: $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$.

نضع $u = e^t$ عندئذ $t = \ln u$ إذا كان t ينوّل إلى $+\infty$ فإن u ينوّل إلى $+\infty$.

$$\text{ومنه } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{\ln u} = +\infty \text{ وعليه } \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$$

ج- استنتاج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\text{لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln u}{u} = 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$$

د- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ واستنتاج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$$

هـ- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل.

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$.

$$\text{لدينا } f(x) - y = \frac{-\ln(x+1)}{x+1} \text{ ؛ من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من المجال }]-1; +\infty[\text{ ، } x+1 > 0 \text{ ومنه إشارة}$$

$$f(x) - y \text{ هي نفس إشارة } -\ln(x+1).$$

$$f(x) - y = 0 \text{ يكافئ } -\ln(x+1) = 0 \text{ ويكافئ } \ln(x+1) = 0 \text{ ويكافئ } x+1 = 1 \text{ أي } x = 0$$

$$f(x) - y > 0 \text{ يكافئ } -\ln(x+1) > 0 \text{ ويكافئ } \ln(x+1) < 0 \text{ ويكافئ } 0 < x+1 < 1 \text{ أي } -1 < x < 0$$

$$f(x) - y < 0 \text{ يكافئ } -\ln(x+1) < 0 \text{ ويكافئ } \ln(x+1) > 0 \text{ ويكافئ } x+1 > 1 \text{ أي } x > 0$$

x	-1	0	$+\infty$
$f(x) - y$	+	0	-
الوضعية النسبية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(0; -1)$	(C_f) تحت (Δ)

2. تبين أنه، من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$.

$$f'(x) = 1 - \left[\frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} \right] = 1 - \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1 + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $h(x)$.

جدول تغيرات f .

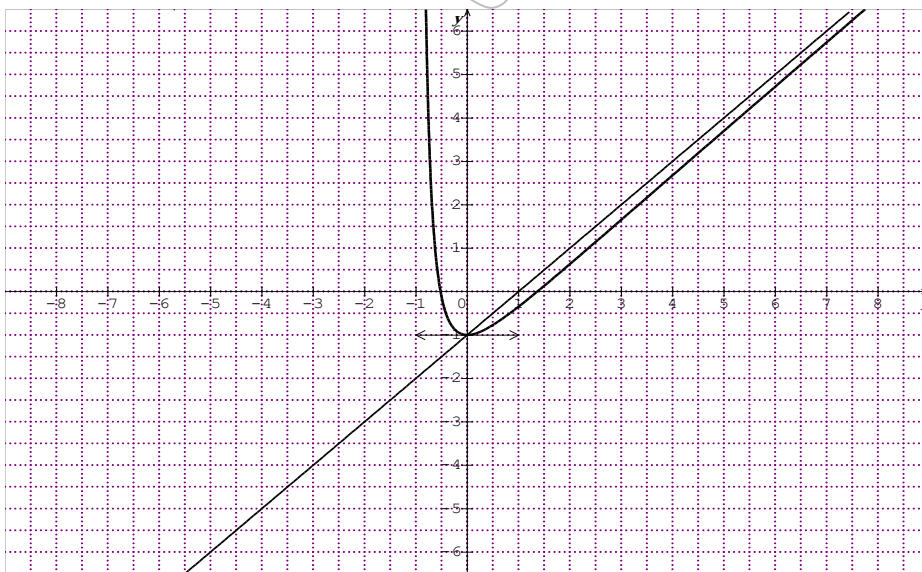
x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

3. تبين أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4.

الدالة f مستمرة على المجال $[0; +\infty[$ بالتالي هي مستمرة على المجال $[3,3; 3,4]$ ولدينا $f(3,3) \approx 1,96$ و $f(3,4) \approx 2,06$ أي $f(3,3) < 2 < f(3,4)$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال $[3,3; 3,4]$ بحيث $f(\alpha) = 2$ أي (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها α محصورة بين 3,3 و 3,4.

3,4 و 3,3.

4. رسم (C_f) .



التمرين الرابع

I- g هي الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

1. ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
2. أ) بَيِّنْ أَنَّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل على المجال $]0; +\infty[$ حلا وحيدا α حيث $1,5 < \alpha < 2$.
ب) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II- f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ؛ فسّر النتائج هندسيا.
ب) عبّر عن $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ واستنتج تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
2. بَيِّنْ أَنَّ $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ واستنتج حصر العدد $f(\alpha)$.
3. اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.
4. ارسم (Δ) و (C_f) .

5. ناقش بياننا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $f(x) = \frac{1}{2}x + m$.

III- h هي الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = \frac{|\ln x|}{x^2 + 1}$

اشرح كيف يمكن رسم (C_h) منحنى الدالة h اعتمادا على (C_f) ، ثم ارسم (C_h) .

الحل

I- g هي الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

1. دراسة تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0} 2x^2 \ln x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} 1 + x^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2 \ln x \right) = -\infty$$

$$g'(x) = 2x - 2 \left(2x \ln x + \frac{1}{x} x^2 \right) = 2x - 4x \ln x - 2x = -4x \ln x$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $-4x < 0$ ، ومنه إشارة $g'(x)$ هي عكس إشارة $\ln x$.

من أجل $x \in]0; 1[$ ، $\ln x < 0$ ومنه $g'(x) > 0$

ومن أجل $x \in]1; +\infty[$ ، $\ln x > 0$ ومنه $g'(x) < 0$

بالتالي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0; 1[$ و متناقصة تماما على المجال $]1; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة g .

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	1	2	$-\infty$

2. أ) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل على المجال $]0; +\infty[$ حلا وحيدا α حيث $1,5 < \alpha < 2$.

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0; 1]$ وتأخذ قيمها في المجال $]1; 2]$ و $0 \notin]1; 2]$ إذن على المجال $]0; 1]$ ، $g(x) \neq 0$.

ولدينا الدالة g مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]1; +\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $]2; +\infty[$ و $0 \in]2; +\infty[$ إذن

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1; +\infty[$ ؛ وبما أن $g(1,5) \approx 1,42$ و $g(2) \approx -0,55$ أي $g(1,5) \times g(2) < 0$ فإن $1,5 < \alpha < 2$.

ب) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

II- الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 + 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x^2 + 1} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

تفسير النتائج هندسيا.

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$ (محور الترتيب)

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 0$ (محور الفواصل) بجوار $+\infty$.

ب) التعبير عن $f'(x)$ بدلالة $g(x)$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x^2 + 1) - 2x \ln x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 + 1) - 2x^2 \ln x}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{g(x)}{x(x^2 + 1)^2}$$

واستنتاج تغيرات الدالة f

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $x(x^2 + 1)^2 > 0$ ، ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$.

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; \alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

2. تبين أن $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$

لدينا $g(\alpha) = 0$ يكافئ $1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \ln \alpha = 0$ أي $\ln \alpha = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2}$

إذن $f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{\alpha^2 + 1} = \frac{\frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2}}{\alpha^2 + 1} = \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha^2(\alpha^2 + 1)} = \frac{1}{2\alpha^2}$

استنتاج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

لدينا $1,5 < \alpha < 2$ معناه $2,25 < \alpha^2 < 4$ ويكافئ $4,5 < 2\alpha^2 < 8$ ويكافئ $\frac{1}{8} < \frac{1}{2\alpha^2} < \frac{1}{4,5}$ أي

$$0,12 < f(\alpha) < 0,23$$

3. كتابة معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ ومنه $y = \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}$ أي $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

4. رسم (Δ) و (C_f) .

5. المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي

m ، عدد حلول المعادلة: $f(x) = \frac{1}{2}x + m$.

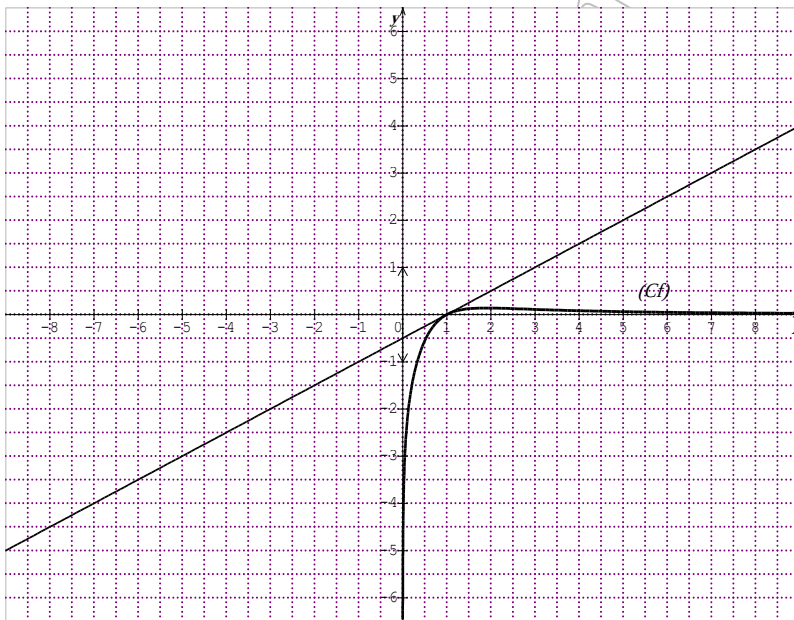
إذا كان $m < -\frac{1}{2}$ فإن المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $m = -\frac{1}{2}$ فإن المعادلة تقبل حلا واحدا

مضاعفا.

إذا كان $m > -\frac{1}{2}$ فإن المعادلة ليس لها حلول.

III- h هي الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = \frac{|\ln x|}{x^2 + 1}$



شرح كيف يمكن رسم (C_h) منحنى الدالة h اعتمادا على (C_f) ،

$$\left\{ \begin{array}{l} h(x) = f(x); x \in [1; +\infty[\\ h(x) = -f(x); x \in]0; 1] \end{array} \right. \text{ ومنه } \left\{ \begin{array}{l} h(x) = \frac{\ln x}{x^2 + 1}; \ln x \geq 0 \\ h(x) = \frac{-\ln x}{x^2 + 1}; \ln x \leq 0 \end{array} \right. \text{ لدينا}$$

إذن في المجال $[1; +\infty[$ يكون (C_h) منطبق على (C_f)
وفي المجال $]0; 1]$ ، (C_h) يناظر (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

التمرين الخامس

f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ، نسمي (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول $2cm$

1. أ - احسب $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وفسر النتيجةين بيانيا.

ب - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

ج - ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

2. أ - بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف E يطلب تعيين إحداثياتها.

ب - اكتب معادلة المماس (D) للمنحنى (C) الذي يشمل المبدأ O .

3. ارسم (Δ) ، (D) و (C) .

4. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m ، عدد حلول المعادلة $m^x = x$.

الحل

f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ، نسمي (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي

المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول $2cm$

1. أ - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} x = 0^+$$

تفسير النتيجةين بيانيا.

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ فإن (C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 0$ (محور الفواصل)

و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ ومنه (C) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$ (محور الترتيب)

ب - تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

ج - دراسة اتجاه تغير الدالة f

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $1-\ln x$.

$f'(x) = 0$ معناه $1-\ln x = 0$ وكافئ $\ln x = 1$ أي $x = e$.

$f'(x) > 0$ معناه $1-\ln x > 0$ وكافئ $\ln x < 1$ أي $0 < x < e$.

$f'(x) < 0$ معناه $1-\ln x < 0$ وكافئ $\ln x > 1$ أي $x > e$.

إذن الدالة f متزايدة تماماً على $]0; e]$ ومتناقصة تماماً على $[e; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$			

2. أ - تبين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف E يطلب تعيين إحداثياتها.

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}x^2 - 2x(1-\ln x)}{x^4} = \frac{-x - 2x(1-\ln x)}{x^4} = \frac{-1-2+2\ln x}{x^3} = \frac{-3+2\ln x}{x^3}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $x^3 > 0$ ومنه إشارة $f''(x)$ هي نفس إشارة $-3+2\ln x$.

$f''(x) = 0$ معناه $-3+2\ln x = 0$ وتكافئ $\ln x = \frac{3}{2}$ أي $x = \sqrt{e^3}$.

$f''(x) > 0$ معناه $-3+2\ln x > 0$ وتكافئ $\ln x > \frac{3}{2}$ أي $x > \sqrt{e^3}$.

x	0	$\sqrt{e^3}$	$+\infty$
$f''(x)$		- 0 +	

$f''(x)$ تتعدم عند العدد $\sqrt{e^3}$ وتغير من إشارتها بجوار $\sqrt{e^3}$ ومنه النقطة $E(\sqrt{e^3}; f(\sqrt{e^3}))$ هي نقطة انعطاف

للمنحني (C) .

ج - كتابة معادلة المماس (D) للمنحنى (C) الذي يشمل المبدأ O .

معادلة المماس من الشكل $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$O \in (D) \text{ معناه } 0 = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0) \text{ وتكافئ } -x_0 \left(\frac{1-\ln x_0}{x_0^2} \right) + \frac{\ln x_0}{x_0} = 0 \text{ وتكافئ } -1 + 2\ln x_0 = 0$$



$$\text{وتكافئ } x_0 = \sqrt{e} \text{ أي } \ln x_0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{إذن معادلة المماس هي } y = f'(\sqrt{e})x \text{ أي } y = \frac{1}{2e}x$$

3. رسم (D) و (C).

4. المناقشة بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب

تماماً m ، عدد حلول المعادلة $m^x = x$.

$$m^x = x \text{ تكافئ } \ln m^x = \ln x \text{ وتكافئ } x \ln m = \ln x$$

$$\text{وتكافئ } \ln m = \frac{\ln x}{x} \text{ أي } f(x) = \ln m$$

إذا كان $0 < m \leq 1$ فإن $\ln m \leq 0$ وبالتالي المعادلة تقبل حلاً وحيداً.

إذا كان $1 < m < e^{\frac{1}{e}}$ فإن $0 < \ln m < \frac{1}{e}$ وبالتالي المعادلة

تقبل حلين متميزين

إذا كان $m = e^{\frac{1}{e}}$ فإن $\ln m = \frac{1}{e}$ وبالتالي المعادلة تقبل

حلاً مضاعفاً.

إذا كان $m > e^{\frac{1}{e}}$ فإن $\ln m > \frac{1}{e}$ وبالتالي المعادلة ليس لها حلول.

التمرين السادس

(I) الدالة العددية g معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

1. ادرس اتجاه تغير الدالة g .

2. احسب $g(1)$ ثم استنتج تبعاً لقيم x إشارة $g(x)$.

(II) الدالة العددية f معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$

$$1. \text{ أ - احسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

ب - احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

2. أ - بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

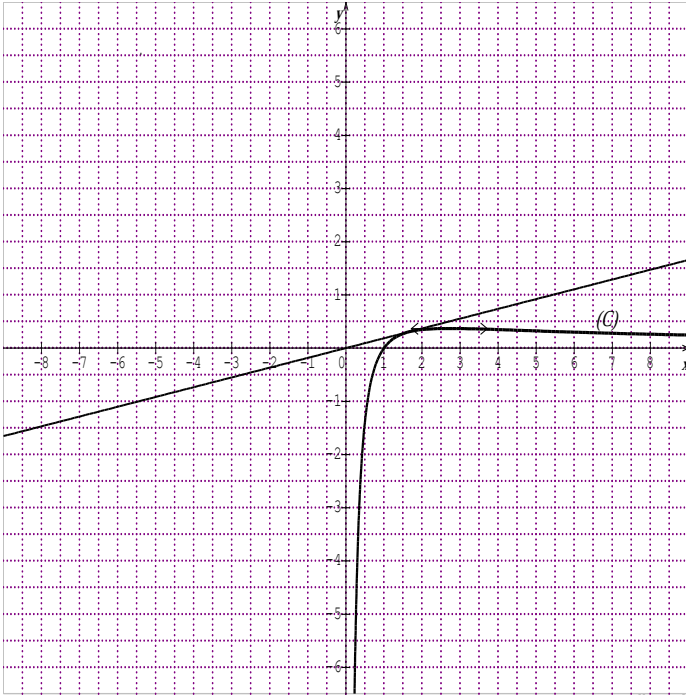
ب - شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. أ - بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب - ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D).

4. بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1 - \frac{1}{e}$ يمسّ المنحنى في نقطة A يطلب تعيين إحداثيتها.

5. ارسم (Δ)، (D) و (C_f) .



الحل

(I) الدالة العددية g معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

1. دراسة اتجاه تغير الدالة g .

الدالة g تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدينا: $g'(x) = -2x - \frac{1}{x}$

من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ ، $g'(x) < 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماماً على $]0; +\infty[$.

2. حساب $g(1)$ واستنتاج تبعاً لقيم x إشارة $g(x)$.

$$g(1) = 1 - 1^2 - \ln 1 = 0$$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

(II) الدالة العددية f معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$

1. أ - حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 - \frac{\ln x}{x} = +\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$$

ب - حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

تفسير النتيجة هندسياً.

(C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$ (محور الترتيب).

2. أ - تبين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$

$$f'(x) = 1 - \left[\frac{\frac{1}{x}(x) - \ln x}{x^2} \right] = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{-g(x)}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $g(x)$

من أجل $x \in]0; 1[$ ، $g(x) > 0$ ومنه $f'(x) < 0$.

ومن أجل $x \in]1; +\infty[$ ، $g(x) < 0$ ومنه $f'(x) > 0$.

إذن الدالة f متناقصة تماماً على $]0; 1[$ و متزايدة تماماً على $]1; +\infty[$.

ب - جدول تغيرات الدالة f .

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

3. أ - تبين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$$

ب - دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) .

$$\text{لدينا } f(x) - (x - 1) = \frac{-\ln x}{x} \text{ ومنه إشارة } f(x) - (x - 1) \text{ هي عكس إشارة } \ln x.$$

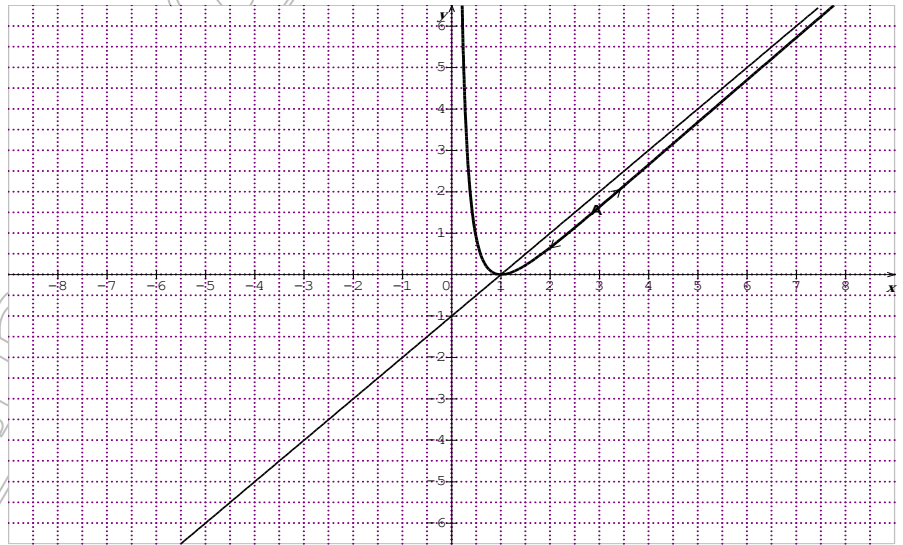
x	0	1	$+\infty$	
$f(x)-y$		+	0	-
الوضعية النسبية		(C_f) فوق (D)		(C_f) تحت (D)
		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;0)$		

4. تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1 - \frac{1}{e}$ يمسّ المنحنى (C_f) في نقطة A يطلب تعيين إحداثياتها.

$$f'(x_0) = 1 \text{ تعني } \frac{-g(x)}{x^2} = 1 \text{ ويكافئ } x^2 - 1 + \ln x = x^2 \text{ ويكافئ } \ln x = 1 \text{ أي } x = e$$

$$\text{ولدينا } f(e) = e - 1 - \frac{1}{e} \text{ و } y = e - 1 - \frac{1}{e} \text{ إذن المستقيم } (\Delta) \text{ يمسّ المنحنى } (C_f) \text{ في النقطة } A\left(e; e - 1 - \frac{1}{e}\right)$$

5. رسم (Δ) ، (D) و (C_f) .



التمرين السابع

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ؛ فسّر النتائج هندسياً.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

- (2) أ) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = 1$.
 ب) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.
 ج) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; 1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$.
 (3) أنشئ (T) و (C_f) .

(4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ كما يلي: $h(x) = 1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|}$.

- وليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.
 أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x) - h(-x) = 0$. ماذا تستنتج؟
 ب) أنشئ المنحنى (C_h) اعتمادا على المنحنى (C_f) .
 ج) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2 = (m-1)|x|$.

الحل

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \frac{2 \ln x}{x} = -\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2 \ln x}{x} = 1 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

تفسير النتائج هندسيا.

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$ (محور الترتيب).

ولدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 1$ بجوار $+\infty$.

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2}{x}\right)x - 2 \ln x}{x^2} = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $1 - \ln x$.

$$f'(x) = 0 \text{ تعني } 1 - \ln x = 0 \text{ يكافئ } \ln x = 1 \text{ أي } x = e.$$

$$f'(x) > 0 \text{ تعني } 1 - \ln x > 0 \text{ يكافئ } \ln x < 1 \text{ أي } 0 < x < e$$

$$f'(x) < 0 \text{ تعني } 1 - \ln x < 0 \text{ يكافئ } \ln x > 1 \text{ أي } x > e$$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $]0; e]$ ومتناقصة تماما على $[e; +\infty[$.

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		$1 + \frac{2}{e}$	1

(2) أ) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = 1$.

$$\text{لدينا } f(x) - 1 = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$f(x) - 1 = 0 \text{ معناه } \frac{2 \ln x}{x} = 0 \text{ تكافئ } \ln x = 0 \text{ أي } x = 1$$

$$f(x) - 1 > 0 \text{ معناه } \frac{2 \ln x}{x} > 0 \text{ تكافئ } \ln x > 0 \text{ أي } x > 1$$

$$f(x) - 1 < 0 \text{ معناه } \frac{2 \ln x}{x} < 0 \text{ تكافئ } \ln x < 0 \text{ أي } 0 < x < 1$$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - 1$		-	0 +
الوضعية النسبية		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)
		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1;1)$	

ب) كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1) \text{ ومنه } y = 2(x - 1) + 1 \text{ أي } y = 2x - 1$$

ج) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; 1[$ حلا وحيدا α ، حيث $e^{-0.4} < \alpha < e^{-0.3}$.

الدالة f مستمرة على المجال $]0; 1[$ فهي مستمرة على المجال $[e^{-0.4}; e^{-0.3}]$ ولدينا $f(e^{-0.4}) \approx -0.19$ ،

$f(e^{-0.3}) \approx 0.19$ أي $f(e^{-0.4}) \times f(e^{-0.3}) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي α من المجال

$[e^{-0.4}; e^{-0.3}]$ بحيث $f(\alpha) = 0$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $]0; 1[$ فإن α وحيد.

$$(4) \text{ لتكن الدالة } h \text{ المعرفة على } \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ كما يلي: } h(x) = 1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|}$$

وليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم، $h(x) - h(-x) = 0$. ماذا تستنتج؟

ليكن x عددا حقيقيا غير معدوم:

$$h(x) - h(-x) = 1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|} - 1 - \frac{2 \ln |-x|}{|-x|} = \frac{2 \ln |x|}{|x|} - \frac{2 \ln |x|}{|x|} = 0$$

من أجل $x \in \mathbb{R}^* \text{ لدينا } -x \in \mathbb{R}^*$



ولدينا $h(x) - h(-x) = 0$ ومنه $h(x) = h(-x)$ إذن الدالة h زوجية.

ب) الرسم

ج) المناقشة بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ،
عدد حلول المعادلة: $\ln x^2 = (m-1)|x|$.

$$\ln x^2 = (m-1)|x| \text{ تكافئ } m = \frac{\ln x^2}{|x|} + 1 \text{ تكافئ}$$

$$h(x) = m \text{ أي } m = \frac{2 \ln |x|}{|x|} + 1$$

حلول المعادلة إن وجدت هي فواصل النقاط المشتركة بين (C_h) والمستقيم الأفقي ذي المعادلة $y = m$.

إذا كان $m \leq 1$ فإن المعادلة تقبل حلين.

إذا كان $1 < m < 1 + \frac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل أربعة حلول.

إذا كان $m = 1 + \frac{2}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلين مضاعفين.

إذا كان $m > 1 + \frac{2}{e}$ فإن المعادلة ليس لها حلول.

التمرين الثامن

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{2}x + \ln(1 + e^{-x})$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ ، على الشكل: $f(x) = -\frac{1}{2}x + \ln(1 + e^x)$.

2. برهن أن الدالة f زوجية.

3. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

4. ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

5. أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') يطلب تعيين معادلتيهما.

6. ارسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) .

7. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ: $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$.

أ - تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; +\infty[$ ، $g(x) = f(\ln x)$.

- استنتج اتجاه تغير الدالة g .

ب - شكّل جدول تغيرات الدالة g .

الحل

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{2}x + \ln(1+e^{-x})$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. تبين أنه يمكن كتابة $f(x)$ ، على الشكل: $f(x) = -\frac{1}{2}x + \ln(1+e^x)$.

$$\text{لدينا } f(x) = \frac{1}{2}x + \ln(1+e^{-x}) = f(-x) = \frac{1}{2}(-x) + \ln(e^x + 1)$$

$$= -\frac{1}{2}x + \ln e^x + \ln(e^x + 1)$$

$$= -\frac{1}{2}x - x + \ln(e^x + 1)$$

$$= -\frac{1}{2}x + \ln(e^x + 1)$$

2. إثبات أن الدالة f زوجية.

من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$ ولدينا $f(-x) = -\frac{1}{2}(-x) + \ln(1+e^x) = \frac{1}{2}x + \ln(1+e^x) = f(x)$ ومنه الدالة f زوجية.

3. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^x) = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x) = -\frac{1}{2}(-x) + \ln(1+e^x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = +\infty$$

4. دراسة اتجاه تغير الدالة f .

$$f'(x) = \frac{-1}{2} + \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{-1-e^x+2e^x}{2(e^x+1)} = \frac{e^x-1}{2(e^x+1)}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $2(e^x+1) > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة e^x-1 .

$$f'(x) = 0 \text{ تعني } e^x - 1 = 0 \text{ ويكافئ } e^x = 1 \text{ أي } x = 0$$

$$f'(x) > 0 \text{ تعني } e^x - 1 > 0 \text{ ويكافئ } e^x > 1 \text{ أي } x > 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ تعني } e^x - 1 < 0 \text{ ويكافئ } e^x < 1 \text{ أي } x < 0$$

إذن الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 0]$ و متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\ln 2$	$+\infty$

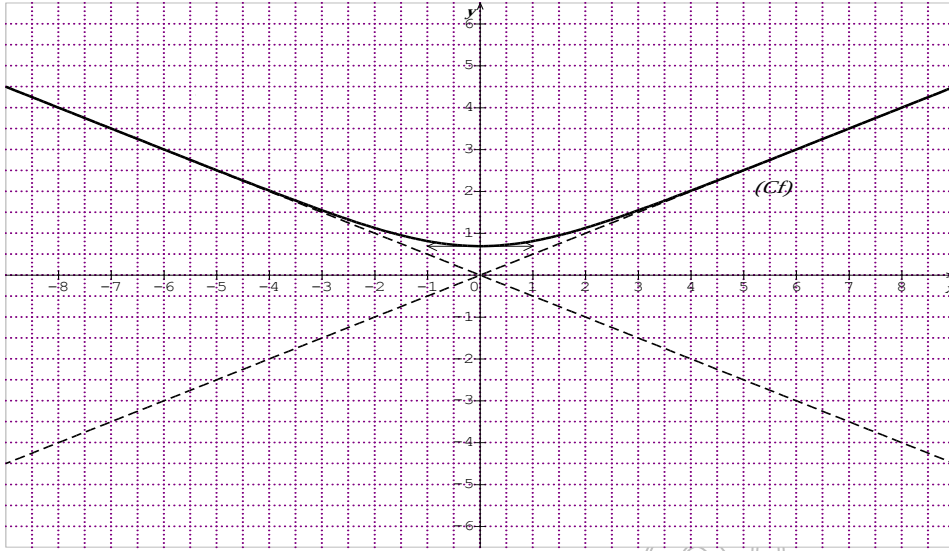
5. إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') يطلب تعيين معادليهما.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$ إذن للمنحنى (C_f) مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y = \frac{1}{2}x$ بجوار $+\infty$.

ولدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(-\frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^x) = 0$ إذن للمنحنى (C_f) مستقيم مقارب مائل (Δ') معادلته

$y = -\frac{1}{2}x$ بجوار $-\infty$.

6. رسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) .



7. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ: $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)$.

أ - التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; +\infty[$ ، $g(x) = f(\ln x)$.

لدينا $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right) = \ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln x = -\frac{1}{2}\ln x + \ln(e^{\ln x} + 1) = f(\ln x)$

- استنتاج اتجاه تغير الدالة g .

نلاحظ أن الدالة g هي مركب الدالة $\ln$ متبوعة بالدالة f ($g = f \circ \ln$)

لدينا الدالة اللوغارتمية النيبيرية $\ln$ متزايدة تماماً على المجال $[1; +\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $[0; +\infty[$ والدالة f

متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$ إذن للدالتين نفس الاتجاه وبالتالي يكون دالة متزايدة تماماً على المجال

$[1; +\infty[$ أي الدالة g متزايدة تماماً على المجال $[1; +\infty[$.

ب - جدول تغيرات الدالة g .

x	1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$\ln 2$	$+\infty$

التمرين التاسع

I - الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$

(1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) استنتج أنه، من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

II- f الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. فسّر النتيجة بيانياً.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أ) بين أنه، من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث f' هي مشتقة الدالة f .

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

ج) بين أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم تحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.

(3) أ) بين أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(4) نقبل أنّ المستقيم (T) ذا المعادلة: $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

أ) احسب x_0 .

ب) أرسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f) .

ج) عيّن بيانياً قيم الوسيط الحقيقي m ، بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متمايزين.

الحل

I- g الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$

(1) دراسة تغيّرات الدالة g .

$$\lim_{x \rightarrow -1} 2\ln(x+1) = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + 2x + 4 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 \left(\frac{x^2 + 2x + 4}{x+1} - 2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right) = +\infty$$

$$g'(x) = 2x + 2 - \frac{2}{x+1} = \frac{2x^2 + 4x}{x+1} = \frac{2x(x+2)}{x+1} \text{ ولدينا: }]-1; +\infty[\text{ من أجل كل } x \in]-1; +\infty[, x+1 > 0 \text{ و } x+2 > 0 \text{ ومنه إشارة } g'(x) \text{ هي نفس إشارة } x.$$

إذن الدالة g متناقصة تماماً على المجال $]-1; 0[$ و متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g .

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	4	$+\infty$

(2) استنتاج أنه، من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$.

نلاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) \geq 4$ ، وبالتالي $g(x) > 0$.

II- الف الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول 2cm)

(أ) حساب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x - \frac{1-2\ln(x+1)}{x+1} = -\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-2\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$$

تفسير النتيجة بيانياً.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = -1$.

(ب) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(x+1)}{x+1} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{x+1} + \frac{2\ln(x+1)}{x+1} = +\infty$$

(2) (أ) تبين أنه، من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ، حيث f' هي مشتقة الدالة f .

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{-2}{x+1}(x+1) - 1 + 2\ln(x+1) \\ &= 1 - \frac{-3 + 2\ln(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{g(x)}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

(ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$.

لدينا من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $g(x) > 0$ و $(x+1)^2 > 0$ إذن $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة

تماماً على $]-1; +\infty[$

جدول تغيّرات الدالة f .

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(ج) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم التحقق أن $0 < \alpha < 0,5$.
 الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$ وتأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ إذن من أجل كل عدد حقيقي k المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-1; +\infty[$ وبالأخص المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1; +\infty[$ وبما أن $f(0) \times f(0,5) < 0$ فإن $0 < \alpha < 0,5$.
 (3 أ) تبين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x+1} + 2\frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

(ب) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

لدينا $f(x) - x = -\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1} = \frac{2\ln(x+1)-1}{x+1}$ ومنه إشارة $f(x) - x$ هي من نفس إشارة $2\ln(x+1)-1$
 $f(x) - x = 0$ معناه $2\ln(x+1)-1=0$ وتكافئ $\ln(x+1) = \frac{1}{2}$ أي $x = \sqrt{e} - 1$
 $f(x) - x > 0$ معناه $2\ln(x+1)-1 > 0$ وتكافئ $\ln(x+1) > \frac{1}{2}$ أي $x > \sqrt{e} - 1$

x	-1	$\sqrt{e} - 1$	$+\infty$
$f(x) - x$		0	+
الوضعية		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

و (C_f) يقطع (Δ) في النقطة التي إحداثياتها $(\sqrt{e} - 1; \sqrt{e} - 1)$.

(4) نقبل أن المستقيم (T) ذا المعادلة: $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$ ، مماس للمنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها x_0 .

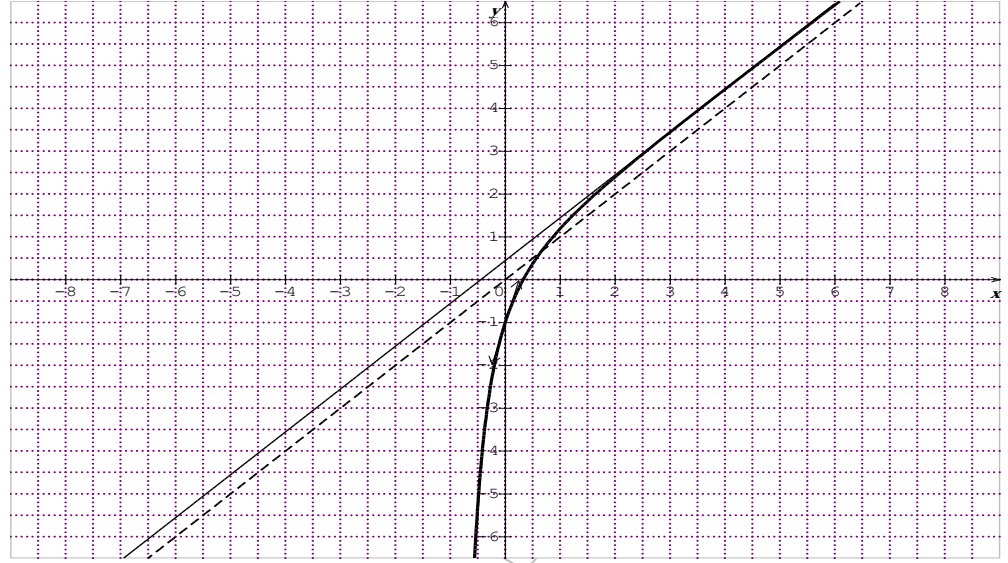
أ) حساب x_0 .

المستقيم (T) ميله يساوي 1 ومنه $f'(x_0) = 1$.

$$f'(x_0) = 1 \text{ معناه } \frac{g(x_0)}{(x_0+1)^2} = 1 \text{ تكافئ } x_0^2 + 2x_0 + 4 - 2\ln(x_0+1) = x_0^2 + 2x_0 + 1 \text{ وتكافئ } \ln(x_0+1) = \frac{3}{2}$$

$$\text{أي } x_0 = e^{\frac{3}{2}} - 1$$

(ب) رسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثم المنحنى (C_f).



(ج) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m ، بحيث تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متمايزين.

المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلين متمايزين من أجل قيم m من المجال $\left] 0; \frac{2}{\sqrt{e^3}} \right[$.

التمرين العاشر

I - لتكن الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = 2x - 1 - \ln x$

1. ادرس تغيّرات الدالة g ثم شكل جدول تغيّراتها.

2. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

3. تحقق أنّ $g(1) = 1$ وبيّن أنّ المعادلة $g(x) = 1$ تقبل حلا آخر α حيث $0,1 < \alpha < 0,3$.

II - لتكن الدالة f المعرفة على كما يلي: $f(x) = x^2 - x \ln x$ و $f(0) = 0$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; i, j)$.

1. أ - احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ وفسّر النتيجة هندسيا.

ب - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. أ - بيّن أنّه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = g(x)$.

ب - استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

ج - بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها.

د - عيّن دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ وفسّر النتيجة بيانيا.

3. أ - أثبت أنّ $f(x) = x[g(x) - x + 1]$ ، ثم احسب $f(\alpha)$.

ب - أعط حصرًا لـ $f(\alpha)$.

4. أثبت أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') ميلهما يساوي 1، يطلب كتابة معادلة كل منهما.

5. ارسم (T) ، (T') والمنحني (C_f) .

الحل

I - لتكن الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = 2x - 1 - \ln x$

1. دراسة تغيرات الدالة g

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - 1 - \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

الدالة g تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدينا: $g'(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x - 1}{x}$
إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $2x - 1$ لأن $x > 0$.

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	

الدالة g متناقصة تماماً على المجال $]0; \frac{1}{2}]$ و متزايدة تماماً على المجال $[\frac{1}{2}; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة g .

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$\ln 2$	$+\infty$

2. استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

لدينا الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى وهي $\ln 2$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ $g(x) \geq \ln 2$ وبالتالي $g(x) > 0$.

3. التحقق أن $g(1) = 1$

$$g(1) = 2(1) - 1 - \ln 1 = 1$$

تبيين أن المعادلة $g(x) = 1$ تقبل حلاً آخر α حيث $0,1 < \alpha < 0,3$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماماً على المجال $]0; \frac{1}{2}]$ وبالأخص على المجال $[0,1; 0,3]$ ولدينا $g(0,1) \approx 1,5$ ،

$g(0,3) \approx 0,8$ أي $g(0,3) < 1 < g(0,1)$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0,1; 0,3[$ بحيث $g(\alpha) = 1$.

II - لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x^2 - x \ln x$ و $f(0) = 0$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ - حساب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x - \ln x = +\infty$$

التفسير: الدالة f لا تقبل الاشتقاق على يمين 0 ومنحنائها البياني (C_f) له نصف مماس مواز لمحور الترتيب

ب - حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

2. أ - تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = g(x)$

$$f'(x) = 2x - \left[\ln x + \frac{1}{x} \cdot x \right] = 2x - 1 - \ln x = g(x)$$

ب - استنتاج اتجاه تغير الدالة f .

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $g(x) > 0$ ومنه $f'(x) > 0$

إذن الدالة f متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$+\infty$

ج - بَيِّن أَنَّ المنحنى يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيينها.

لدينا $f''(x) = g'(x)$ ومنه إشارة $f''(x)$ هي من نفس إشارة $g'(x)$.

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

$f''(x)$ تتعدم من أجل $\frac{1}{2}$ وتغير من إشارتها ومنه النقطة $\omega\left(\frac{1}{2}; f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

د - تعيين دون حساب $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ وفسر النتيجة بيانياً.

الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ وبالأخص عند α ولدينا:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = g(\alpha) = 1$$

ميله يساوي 1.

3. أ - إثبات أن $f(x) = x[g(x) - x + 1]$

$$f(x) = x^2 - x \ln x = x(x - \ln x) = x(2x - 1 - \ln x - x + 1) = x[g(x) - x + 1]$$

حساب $f(\alpha)$.

$$f(\alpha) = \alpha[g(\alpha) - \alpha + 1] = \alpha(1 - \alpha + 1) = \alpha(2 - \alpha)$$

ب - حصر $f(\alpha)$.

$$0,1 < \alpha < 0,3 \text{ معناه } -0,1 < -\alpha < -0,3 \text{ يكافئ } 1,7 < 2 - \alpha < 1,9$$

$$\text{ومنه } 1,7 \times 0,1 < \alpha(2 - \alpha) < 1,9 \times 0,3 \text{ أي } 0,17 < f(\alpha) < 0,57$$

4. إثبات أن المنحني (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') ميلاهما يساوي 1.

$$f'(x_0) = 1 \text{ يكافئ } g(x_0) = 1 \text{ ومنه } x_0 = 1 \text{ أو } x_0 = \alpha$$

إذن (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') ميلاهما يساوي 1 عند النقطتين اللتين فاصلتيهما 1 و α .

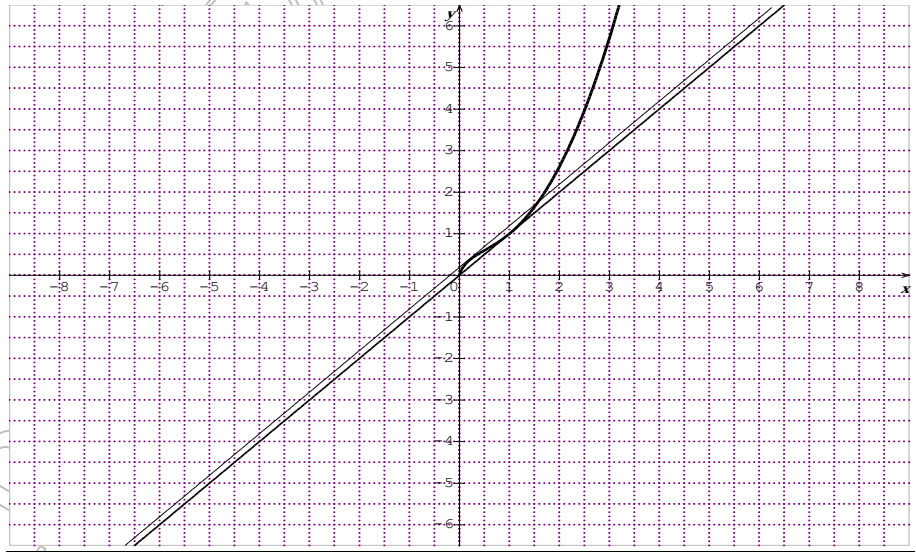
كتابة معادلة كل منهما.

معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$$(T): y = x \text{ أي } y = f'(1)(x - 1) + f(1) \text{ ومنه } y = (x - 1) + 1$$

معادلة المماس (T') عند النقطة ذات الفاصلة α .

$$(T'): y = x - \alpha^2 + \alpha \text{ أي } y = (x - \alpha) + \alpha(2 - \alpha) \text{ ومنه } y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$$

5. رسم (T) ، (T') والمنحني (C_f) .

التمرين الحادي عشر

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة: $f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.1. ادرس تغيرات الدالة f .2. أثبت أن المنحني (C_f) يقطع المستقيم $y = 1$ في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما.3. احسب $f(-x) + f(x)$ ، ماذا تستنتج؟

4. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]-0,71; -0,70[$
5. أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمس المنحنى (C_f) في نقطتين.
- يطلب حساب إحداثيات كل منهما، اكتب معادلة المماس (T) .

6. أرسم المماس (T) والمنحنى (C_f) .

7. ناقش بيانها، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = mx + 1$

8. h الدالة العددية للمتغير الحقيقي x حيث: $h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|}$.

(أ) بين أن h دالة زوجية.

(ب) دون دراسة تغيرات h ، أرسم (C_h) ، علل ذلك.

الحل ☺

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بالعلاقة: $f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. دراسة تغيرات الدالة f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{2 \ln -x}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2 \ln t}{t} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{2 \ln x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - \frac{\ln x^2}{x} = -\infty \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln x^2}{x} = +\infty \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln x^2 = -\infty$$

$$\text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{\ln x^2}{x} = +\infty \quad \text{إذن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x^2}{x} = -\infty \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x^2 = -\infty$$

$$f'(x) = -\frac{\left(\frac{2}{x}\right)x - \ln x^2}{x^2} = \frac{\ln x^2 - 2}{x^2}$$

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $\ln x^2 - 2$.

$$f'(x) = 0 \quad \text{معناه} \quad \ln x^2 - 2 = 0 \quad \text{ويكافئ} \quad \ln x^2 = 2 \quad \text{ويكافئ} \quad x^2 = e^2 \quad \text{أي} \quad x = e \quad \text{أو} \quad x = -e$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{معناه} \quad \ln x^2 - 2 > 0 \quad \text{ويكافئ} \quad \ln x^2 > 2 \quad \text{ويكافئ} \quad x^2 > e^2 \quad \text{أي} \quad x > e \quad \text{أو} \quad x < -e$$

إشارة $f'(x)$.

x	$-\infty$	$-e$	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	+

الدالة f متزايدة على كل من $[-e; 0[$ و $]e; +\infty[$ ومتناقصة على كل من $]0; e]$.

جدول تغيّرات الدالة f .

x	$-\infty$	$-e$	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	1	$\frac{e+2}{e}$	$+\infty$	$\frac{e-2}{e}$	1

2. إثبات أن المنحنى (C_f) يقطع المستقيم $y=1$ في نقطتين يطلب تعيين إحداثياتهما.

$$f(x)=1 \text{ معناه } 1 - \frac{\ln x^2}{x} = 1 \text{ يكافئ } \ln x^2 = 0 \text{ ويكافئ } x^2 = 1 \text{ أي } x = 1 \text{ أو } x = -1$$

$$\text{إذن } (C_f) \cap (\Delta) = \{A(1;1), B(-1;1)\}$$

3. حساب $f(-x) + f(x)$.

$$f(-x) + f(x) = 1 - \frac{\ln(-x)^2}{-x} + 1 - \frac{\ln x^2}{x} = 2 + \frac{\ln x^2}{x} - \frac{\ln x^2}{x} = 2$$

من أجل $x \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ لدينا $x \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ ولدينا $f(-x) + f(x) = 2$ وعليه النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f)

4. تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-0,71; -0,70[$

الدالة f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-0,71; -0,70[$ ولدينا $f(-0,71) \approx 0,04$ ، $f(-0,70) \approx -0,02$ أي

$$f(-0,71) \times f(-0,70) < 0 \text{ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد } \alpha \text{ في المجال}$$

$$]-0,71; -0,70[\text{ بحيث } f(\alpha) = 0$$

5. إثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمس المنحنى (C_f) في نقطتين.

لدينا معادلة المماس (T) من الشكل: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$$A(0;1) \in (T) \text{ معناه } 1 = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0) \text{ وتكافئ } 1 - \frac{\ln x_0^2}{x_0} = 1 \text{ وتكافئ } -x_0 \left(\frac{\ln x_0^2 - 2}{x_0^2} \right) + 1 - \frac{\ln x_0^2}{x_0} = 1$$

$$\text{وتكافئ } \left(\frac{-\ln x_0^2 + 2}{x_0} \right) - \frac{\ln x_0^2}{x_0} = 0 \text{ وتكافئ } \frac{-2\ln x_0^2 + 2}{x_0} = 0 \text{ وتكافئ } \ln x_0^2 = 1 \text{ ومنه } x_0^2 = e$$

أي $x_0 = \sqrt{e}$ أو $x_0 = -\sqrt{e}$. إذن (C_f) يقبل مماسين يشملان النقطة $A(0;1)$ عند النقطتين اللتين فاصلتيهما $\sqrt{e}$ و $-\sqrt{e}$

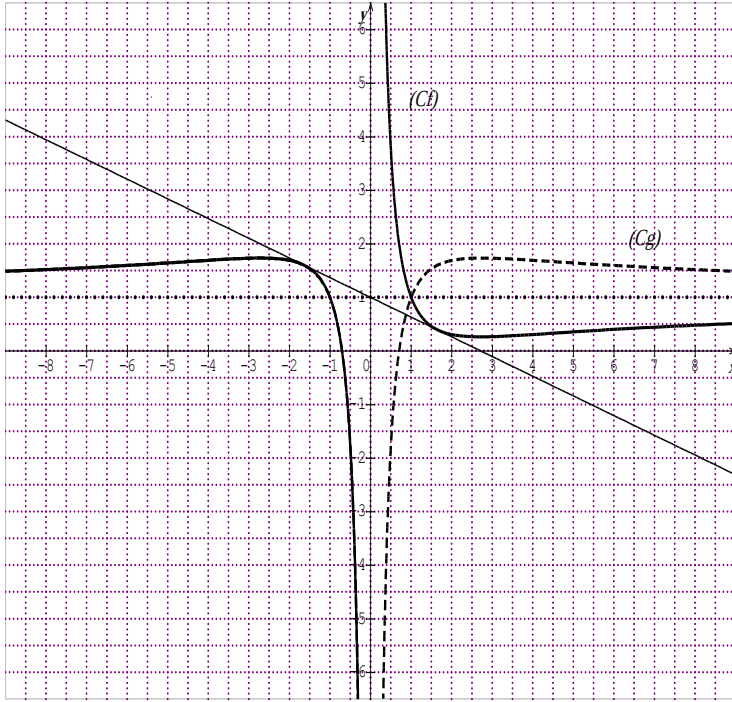
$$\text{ولدينا } f'(\sqrt{e}) = -\frac{1}{e} \text{ و } f'(-\sqrt{e}) = -\frac{1}{e} \text{ إذن المماسان متوازيان وبالتالي هما متطابقان أي أن المنحنى } (C_f)$$

يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمس المنحنى (C_f) في النقطتين اللتين إحداثيتيهما $(\sqrt{e}; f(\sqrt{e}))$ و $(-\sqrt{e}; f(-\sqrt{e}))$

$$\cdot (-\sqrt{e}; f(-\sqrt{e}))$$

كتابة معادلة المماس (T) .

$$y = \frac{-1}{e}x + 1 \text{ ومنه } y = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + f(\sqrt{e})$$



6. رسم المماس (T) والمنحنى (C_f) .

7. المناقشة بيانياً، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m

عدد حلول المعادلة: $f(x) = mx + 1$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) والمستقيم $y = mx + 1$ ذي المعادلة

إذا كان $m < -\frac{1}{e}$ فإن المعادلة ليس لها حلول.

إذا كان $m = -\frac{1}{e}$ فإن المعادلة تقبل حلين مضاعفين.

إذا كان $-\frac{1}{e} < m < 0$ فإن المعادلة تقبل أربعة حلول.

إذا كان $m \geq 0$ فإن المعادلة تقبل حلين.

8. h الدالة العددية للمتغير الحقيقي x حيث: $h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|}$

(أ) تبين أن h دالة زوجية.

من أجل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا $-x \in \mathbb{R}^*$

$$h(-x) = 1 + \frac{\ln(-x)^2}{|-x|} = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|} = h(x) \text{ ولدينا}$$

$$\begin{cases} h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{x}; x > 0 \\ h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{-x}; x < 0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} h(x) = f(-x); x > 0 \\ h(x) = f(x); x < 0 \end{cases}$$

إذن (C_h) ينطبق على (C_f) في المجال $]-\infty; 0[$ وبما أن h زوجية فإن (C_h) متناظر بالنسبة إلى حامل محور الترتيب.

التمرين الثاني عشر

I الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$

(C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب نهاية الدالة f عند 0 وعند $+\infty$ وفسر النتيجة هندسياً.

2. ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3. اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الترتيب 0.

4. بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها.

5. بيّن أن المنحنى (C) يقطع المستقيم (d) إذا المعادلة $y = \frac{1}{2}$ في نقطتين فاصلتهما α و β حيث: $0,4 < \alpha < 0,5$ و $5,3 < \beta < 5,4$.

6. ارسم كلا من (T) و (C).

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x^2}{2x}$. وليكن (γ) منحناها البياني في المعلم السابق.

1. بيّن أن الدالة g فردية.
2. بيّن أن $g(x) = f(x)$ على مجال يطلب تحديده.
3. دون دراسة الدالة g شكل جدول تغيراتها.
4. اعتمادا على المنحنى (C) اشرح كيفية رسم المنحنى (γ)، ثم ارسمه.

الحل

I الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$

(C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. حساب نهاية الدالة f عند 0 وعند $+\infty$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \ln x = -\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x} = -\infty$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$

تفسير النتيجة هندسيا

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ إذن يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = 0$ (حامل محور الترتيب)

ولدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ إذن يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = 0$ (حامل محور الفواصل)

2. دراسة اتجاه تغير الدالة f.

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدينا: $f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)' - 1 - \ln x}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $\ln x$.

من أجل $x \in]0; 1[$ ، $\ln x < 0$ ومنه $f'(x) > 0$

ومن أجل $x \in]1; +\infty[$ ، $\ln x > 0$ ومنه $f'(x) < 0$ و $f'(1) = 0$.

إذن الدالة f متزايدة تماما $]0; 1[$ على ومتناقصة تماما على $]1; +\infty[$.

جدول التغيرات.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	1	0

3. كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة ذات الترتيب 0.

$$f(x_0) = 0 \text{ معناه } \frac{1 + \ln x_0}{x_0} = 0 \text{ تكافئ } 1 + \ln x_0 = 0 \text{ أي } x_0 = e^{-1}$$

$$\text{ومنه } y = f'(e^{-1})(x - e^{-1}) + f(e^{-1}) \text{ أي } y = e^2(x - e^{-1}) \text{ وعليه } (T): y = e^2x - e$$

4. تبين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها.

$$f''(x) = \frac{\left(\frac{-1}{x}\right)x^2 + 2x \ln x}{x^4} = \frac{-x + 2x \ln x}{x^4} = \frac{-1 + 2 \ln x}{x^3} : \text{ ولدنا }]0; +\infty[\text{ إشارة } f''(x) \text{ هي من نفس إشارة } -1 + 2 \ln x.$$

$$f''(x) = 0 \text{ معناه } -1 + 2 \ln x = 0 \text{ ويكافئ } \ln x = \frac{1}{2} \text{ أي } x = \sqrt{e}$$

$$f''(x) > 0 \text{ معناه } -1 + 2 \ln x > 0 \text{ ويكافئ } \ln x > \frac{1}{2} \text{ أي } x > \sqrt{e}.$$

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$f''(x)$		0	+

$f''(x)$ تتعدم عند العدد $\sqrt{e}$ وتغير من إشارتها بجوار $\sqrt{e}$ ومنه النقطة $\omega(\sqrt{e}; f(\sqrt{e}))$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C).

5. تبين أن المنحنى (C) يقطع المستقيم (d) ذا المعادلة $y = \frac{1}{2}$ في نقطتين فاصلتهما α و β حيث:

$$0,4 < \alpha < 0,5 \text{ و } 5,3 < \beta < 5,4.$$

الدالة f مستمرة و متزايدة تماماً على المجال $[0;1]$ وبالأخص على المجال $[0,4;0,5]$ ولدنا $g(0,4) \approx 0,20$ ،

$g(0,5) \approx 0,61$ إذن $f(0,4) < \frac{1}{2} < f(0,5)$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من

$$\text{المجال }]0,4;0,5[\text{ بحيث } f(\alpha) = \frac{1}{2}$$

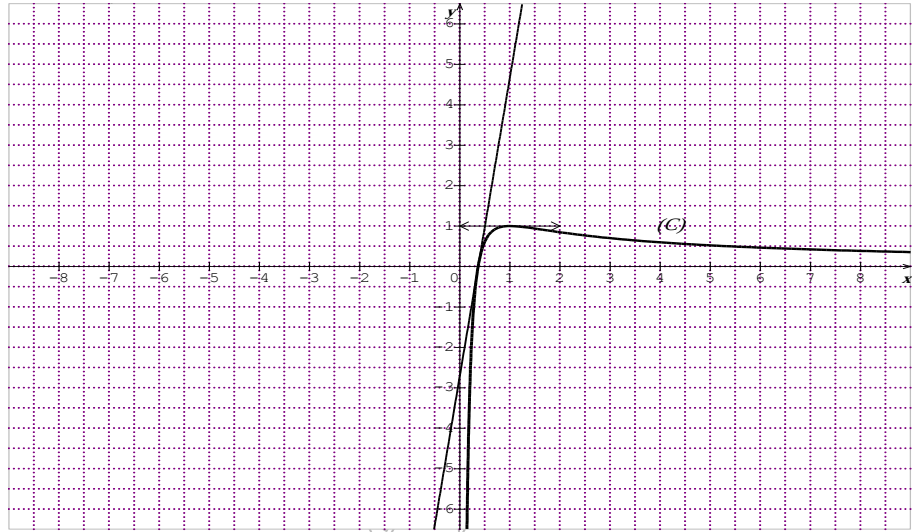
ولدنا الدالة f مستمرة و متناقصة تماماً على المجال $[1;+\infty[$ وبالأخص على المجال $[5,3;5,4]$ ولدنا

$g(5,3) \approx 0,503$ ، $g(5,4) \approx 0,497$ إذن $f(5,3) < \frac{1}{2} < f(5,4)$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد

حقيقي وحيد β من المجال $[5,3;5,4]$ بحيث $f(\beta) = \frac{1}{2}$ وبالتالي المنحنى (C) يقطع المستقيم (d) ذا المعادلة

$$y = \frac{1}{2} \text{ في نقطتين فاصلتهما } \alpha \text{ و } \beta \text{ حيث: } 0,4 < \alpha < 0,5 \text{ و } 5,3 < \beta < 5,4.$$

6. رسم كلا من (C) و (T).



نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ كما يلي: $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x^2}{2x}$. وليكن (γ) منحناها البياني في المعلم السابق.

1. تبين أن الدالة g فردية.

من أجل $x \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$ لدينا $-x \in \mathbb{R}^* \setminus \{0\}$

ولدينا من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x :

$$g(-x) = \frac{1}{-x} + \frac{\ln(-x)^2}{-2x} = -\left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x^2}{2x}\right) = -g(x)$$

ومنه الدالة g فردية.

2. تبين أن $g(x) = f(x)$ على مجال يطلب تحديده.

$$\begin{cases} g(x) = \frac{1 + \ln x}{x}; x > 0 \\ g(x) = \frac{1 + \ln(-x)}{x}; x < 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} g(x) = \frac{1}{x} + \frac{2 \ln x}{2x}; x > 0 \\ g(x) = \frac{1}{x} + \frac{2 \ln(-x)}{2x}; x < 0 \end{cases}$$

لدينا $g(x) = \frac{1}{x} + \frac{2 \ln|x|}{2x}$ ومنه

إذن من أجل $x \in]0; +\infty[$: $g(x) = f(x)$

3. جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0		0	
$g(x)$	0	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	0
		-1	$+\infty$	$-\infty$	

4. شرح كيفية رسم المنحنى (γ)

(γ) ينطبق على (C_f) في المجال $]0; +\infty[$ وبما أن g فردية فإن (γ) متناظر بالنسبة إلى O مبدأ المعلم.

التمرين الثالث عشر:

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right); x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. الوحدة 5cm

I- الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2 + 1}$

1. بَيِّن أنه، من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)^2}$

2. ادرس إشارة $g'(x)$ حسب قيم x .

3. شكل جدول تغيّرات الدالة g .

4. برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,5 < \alpha < 0,6$.

5. حدد إشارة $g(x)$.

II- 1. أ. بَيِّن أنه، من أجل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = g(x)$

ب. استنتج إتجاه تغيّرات الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

2. أ. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x)$ ؛ يمكن وضع $t = \frac{1}{x^2}$

ب. استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. أ. بَيِّن أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = x \ln(x^2 + 1) - 2x \ln x$

ب. احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ج. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0.

4. أنشئ جدول تغيّرات الدالة f ، ثم ارسم (C). نأخذ $0,8 \leq f(\alpha)$.

الحل ☺

$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right); x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. الوحدة 5cm

I- الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2 + 1}$

1. تبيين أنه، من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)^2}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{-2x}{x^4} + \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{-2}{x(x^2 + 1)} + \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{-2(x^2+1)}{x(x^2+1)^2} + \frac{4x^2}{x(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$$

2. دراسة إشارة $g'(x)$ حسب قيم x .

من أجل كل عدد حقيقي من المجال $]0; +\infty[$ ، $x(x^2+1)^2 > 0$ ، ومنه إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $x^2 - 1$.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+

3. جدول تغيرات الدالة g .

x	0	α	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	- 0 +	
$g(x)$		$+\infty$	0	$\ln 2 - 1$

4. تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,5 < \alpha < 0,6$.

5. تحديد إشارة $g(x)$.

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		+	0 -

II-1. أتبين أنه، من أجل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ $f'(x) = g(x)$.

$$f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{-2x}{x^2+1} \cdot \frac{x^4}{x^2}$$

$$f'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{-2x}{x^4} \cdot \frac{x^2}{x^2+1} \cdot x = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1} = g(x)$$

ب. استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; \alpha[$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$.

2. أ. حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x)$ ؛ يمكن وضع $t = \frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}}$$

نضع $t = \frac{1}{x^2}$ إذا كان x يؤول إلى $+\infty$ فإن t يؤول إلى 0.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

ب. استنتاج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 1$$

3. أ. تبين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = x \ln(x^2 + 1) - 2x \ln x$

$$f(x) = x \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right) = x (\ln(x^2 + 1) - \ln x^2) = x \ln(x^2 + 1) - 2x \ln x$$

ب. حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x^2 + 1) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x^2 + 1) - 2x \ln x = 0$$

ج. دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند 0.

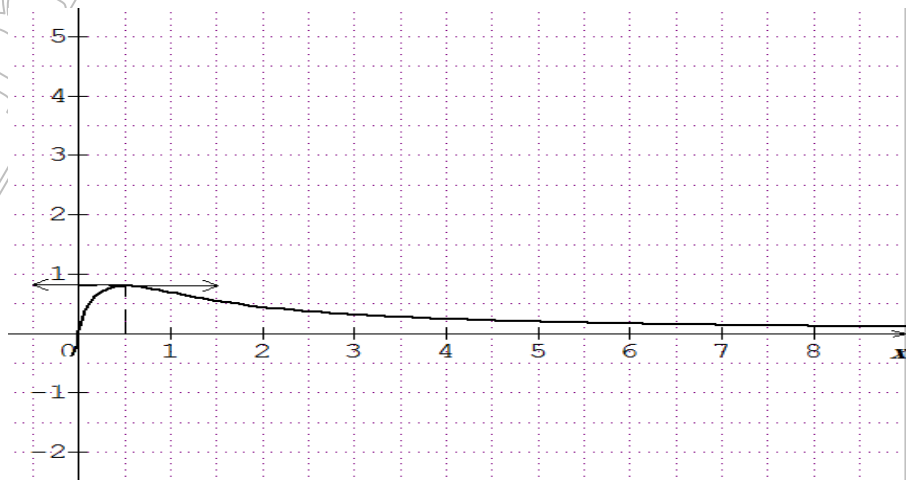
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

إذن الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند 0.

4. جدول تغيرات الدالة f .

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	0

رسم (C).



التمرين الرابع عشر ④

I- g هي الدالة المعرفة على $]-1;3]$ كما يلي: $g(x) = 2\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$.

(1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) بيّن أنّ المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α يحقق $-0,8 < \alpha < -0,7$.

(3) عيّن، حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(4) h هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;3]$ بـ: $h(x) = [g(x)]^2$.

أ) احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $g(x)$ و $g'(x)$.

ب) عيّن إشارة $h'(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة h .

II- f هي الدالة المعرفة على المجال $]-1;3]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{\ln(x+1)}, x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$).

1- بيّن أنّ الدالة f تقبل الاشتقاق عند الصفر، ثم اكتب معادلة (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

2- أ) بيّن أنّه، من أجل كل x من $]-1;0[\cup]0;3]$ ، $f'(x) = \frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

ب) بيّن أنّ: $f(\alpha) = 2\alpha(\alpha+1)$ ، ثم عيّن حصراً $f(\alpha)$.

ج) احسب $f(3)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f .

3- أ) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]-1;3]$ فإن: $x - \ln(x+1) \geq 0$.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المماس (T).

4- عيّن معادلة للمستقيم (T') الموازي لـ (T) والذي يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3.

5- ارسم (T)، (T') و (C_f).

6- ناقش بيانها، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$.

الحل ⑤

I- g هي الدالة المعرفة على $]-1;3]$ كما يلي: $g(x) = 2\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$.

(1) دراسة تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} [2(x+1)\ln(x+1) - x] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+1} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} 2(x+1)\ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow 0} 2t \ln t = 0$$

$$g(3) = 2\ln 4 - \frac{3}{4}$$

الدالة g تقبل الاشتقاق على $]-1;3]$ ولدينا :

$$g'(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)-1}{(x+1)^2} = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$$

إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $2x+1$.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	3
$g'(x)$	-	0	+

نستنتج هكذا أن الدالة g متناقصة تماماً على المجال $]-1; -\frac{1}{2}]$ ومتزايدة تماماً على المجال $[-\frac{1}{2}; 3]$.

جدول تغيرات الدالة g .

x	-1	α	$-\frac{1}{2}$	0	3
$g'(x)$	-	-	0	+	+
$g(x)$	$+\infty$		$-2\ln 2 + 1$	$4\ln 2 - \frac{3}{4}$	

(2) تبين أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما مغدوم والآخر α يحقق $-0,8 < \alpha < -0,7$.

الدالة g مستمرة ومتناقصة تماماً على المجال $]-1; -\frac{1}{2}]$ وتأخذ قيمها في المجال $[-2\ln 2 + 1; +\infty[$ و

$0 \in [-2\ln 2 + 1; +\infty[$ إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-1; -\frac{1}{2}]$ وكذلك لدينا الدالة g

مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $[-\frac{1}{2}; 3]$ وتأخذ قيمها في المجال $[-2\ln 2 + 1; 4\ln 2 - \frac{3}{4}]$ و

$0 \in [-2\ln 2 + 1; 4\ln 2 - \frac{3}{4}]$ إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً β في المجال $[-\frac{1}{2}; 3]$. وبما أن

$$g(0) = 2\ln(0+1) - \frac{0}{0+1} = 0 \quad \text{فإن } \beta = 0 \text{ ولدينا } g(-0,8) \approx 0,8 \text{ و } g(-0,7) \approx -0,8$$

$$g(-0,8) \times g(-0,7) < 0 \quad \text{ومنه } -0,8 < \alpha < -0,7$$

(3) تعيين، حسب قيم x إشارة $g(x)$.

x	-1	α	0	3
$g(x)$	+	0	-	+

(4) h هي الدالة المعرفة على المجال $]-1; 3]$ بـ: $h(x) = [g(x)]^2$.

أ) حساب $h'(x)$ بدلالة كل من $g(x)$ و $g'(x)$.

$$h'(x) = 2g'(x) \times g(x)$$

(ب) تعيين إشارة $h'(x)$.

x	-1	α	$-\frac{1}{2}$	0	3
$g(x)$	+	-	0	0	+
$g'(x)$	-	-	0	+	+
$h'(x)$	-	+	0	-	+

الدالة h متزايدة تماماً على كل من $[\alpha; -\frac{1}{2}]$ و $[0; 3]$ ومتناقصة تماماً على كل من $]-1; \alpha]$ و $]-\frac{1}{2}; 0]$.

جدول تغيرات الدالة h .

x	-1	α	$-\frac{1}{2}$	0	3
$h'(x)$	-	0	+	0	-
$h(x)$	$+\infty$	0	$(-2\ln 2 + 1)^2$	0	$h(3)$

II- f هي الدالة المعرفة على المجال $]-1; 3]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{\ln(x+1)}, x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- تبين أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند الصفر.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{\ln(x+1)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(x+1)}{x}} = 1$$

إذن الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0.كتابة معادلة (T) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.

$$(T): y = x \quad \text{ومنه} \quad y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$2- \text{ أ) بيّن أنه، من أجل} \quad f'(x) = \frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$$

من أجل $]-1; 0[\cup]0; 3]$ لدينا:

$$f'(x) = \frac{2x \ln(x+1) - \frac{1}{x+1} \cdot x^2}{(\ln(x+1))^2} = \frac{x \left[2\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \right]}{(\ln(x+1))^2} = \frac{xg(x)}{(\ln(x+1))^2}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f

x	-1	α	0	3
$g(x)$	+	0	-	+
x	-	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+	+

نستنتج هكذا أن الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-1; \alpha]$ و متزايدة تماماً على المجال $[\alpha; 3]$.

(ب) تبين أن: $f(\alpha) = 2\alpha(\alpha+1)$.

$$g(\alpha) = 0 \text{ معناه } 2\ln(\alpha+1) - \frac{\alpha}{\alpha+1} = 0 \text{ تكافئ } \ln(\alpha+1) = \frac{\alpha}{2(\alpha+1)} \text{ تكافئ } \frac{1}{\ln(\alpha+1)} = \frac{2(\alpha+1)}{\alpha}$$

$$\text{ومنه } f(\alpha) = 2\alpha(\alpha+1) \text{ أي } \frac{\alpha^2}{\ln(\alpha+1)} = \frac{2\alpha^2(\alpha+1)}{\alpha} = 2\alpha(\alpha+1)$$

تعيين حصراً $f(\alpha)$.

$$-0,8 < \alpha < -0,7 \text{ معناه } -1,6 < 2\alpha < -1,4 \text{ ويكافئ } (1) 1,6 < -2\alpha < 1,4$$

$$\text{ولدينا } (2) 0,2 < \alpha+1 < 0,3$$

$$\text{إذن } 0,28 < -2\alpha(\alpha+1) < -0,48 \text{ ومنه } -0,48 < 2\alpha(\alpha+1) < -0,28 \text{ أي } -0,48 < f(\alpha) < -0,28.$$

(ج) حساب $f(3)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

$$f(3) = \frac{3^2}{\ln(3+1)} = \frac{9}{\ln 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{\ln(x+1)} = 0$$

جدول تغيرات الدالة f .

x	-1	α	3
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	$\frac{9}{\ln 4}$

3- أ) تبين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; 3]$ فإن: $x - \ln(x+1) \geq 0$.

$$\text{نضع } u(x) = x - \ln(x+1)$$

$$\text{من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من }]-1; 3] \text{ لدينا : } u'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

إشارة $u'(x)$ هي نفس إشارة x .

$$\text{من أجل }]-1; 0[, u'(x) < 0 \text{ ومن أجل }]0; 3[, u'(x) > 0$$

إن الدالة u متناقصة تماماً على المجال $]-1; 0]$ ومتزايدة تماماً على المجال $[0; 3]$ ولها قيمة حدية صغرى على المجال $]-1; 3]$ وهي $u(0) = 0$ إذن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; 3]$ ، $u(x) \geq 0$ أي $x - \ln(x+1) \geq 0$.

ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى المماس (T) .

$$f(x) - x = \frac{x^2}{\ln(x+1)} - x = \frac{x^2 - x \ln(x+1)}{\ln(x+1)} = \frac{x(x - \ln(x+1))}{\ln(x+1)} = \frac{xu(x)}{\ln(x+1)}$$

$$\ln(x+1) > 0 \text{ يكافئ } x+1 > 1 \text{ أي } x > 0$$

$$\ln(x+1) < 0 \text{ يكافئ } 0 < x+1 < 1 \text{ أي } -1 < x < 0$$

x	-1	0	3
x	-	0	+
$u(x)$	+	0	+
$\ln(x+1)$	-	0	+
$f(x) - x$	+	0	+
الوضعية	(C_f) فوق (T) (C_f) فوق (T) (T) يمس (C_f) في النقطة O		

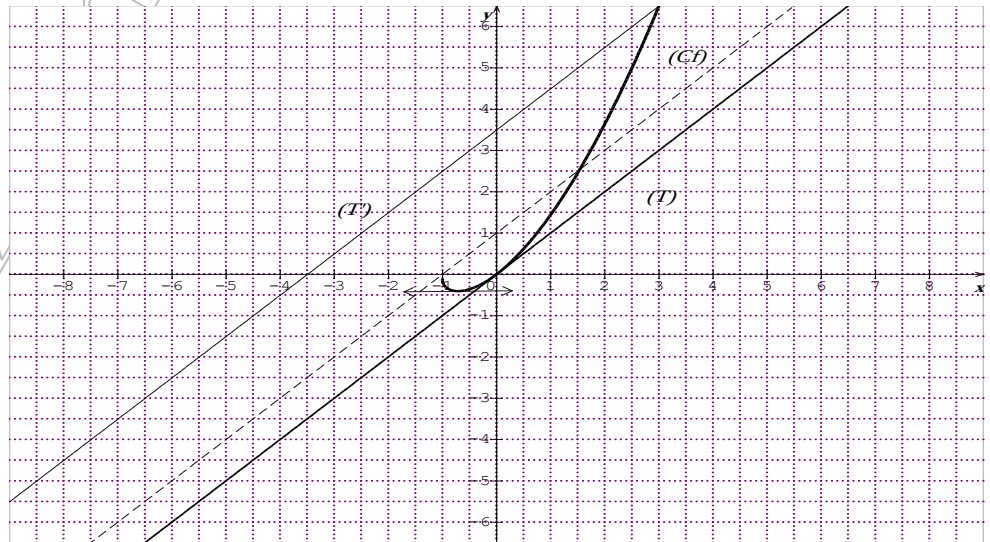
4- تعيين معادلة للمستقيم (T') الموازي لـ (T) والذي يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3.

معادلة المستقيم (T') من الشكل $y = x + b$ وبما أنه يتقاطع مع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 3 فهو يشمل النقطة

$$A\left(3; \frac{9}{\ln 4}\right) \text{ إذن } \frac{9}{\ln 4} = 3 + b \text{ ومنه } b = \frac{9}{\ln 4} - 3.$$

$$\text{وعليه معادلة المستقيم } (T') \text{ هي } y = x + \frac{9}{2 \ln 2} - 3.$$

5- رسم (T) ، (T') و (C_f) .



6- المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$.
حلول المعادلة إن وجدت هي فواصل النقط المشتركة بين (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y = x + m$.

إذا كان $m < 0$ أو $m > \frac{9}{2\ln 2} - 3$ فإن المعادلة لا تقبل حلا.

إذا كان $m = 0$ فإن المعادلة لها حلا واحدا مضاعفا.

إذا كان $0 < m < 1$ فإن المعادلة لها حلان مختلفان.

إذا كان $1 \leq m \leq \frac{9}{2\ln 2} - 3$ فإن المعادلة لها حل وحيد.

التمرين الخامس عشر

f دالة معرفة بـ: $f(x) = \ln(x + e^{-x})$ و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1. أ - بَيِّن أَنَّهُ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $x + e^{-x} \geq 1$.

ب - استنتج أن f معرفة على $\mathbb{R}$.

2. أ - تحقق من صحة المعلومات التالية:

- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x) = -x + \ln(1 + xe^x)$.

- من أجل كل $x > 0$ ، لدينا $f(x) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right)$.

ب - عَيِّن نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

ج - استنتج من السؤال السابق أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$.

3. ماهي نهاية $[f(x) - \ln x]$ عند $+\infty$ ؛ ماذا تستنتج؟

4. ادرس تغيّرات الدالة f وشكل جدول تغيّراتها.

5. ارسم (d) ، (C) و (Γ) حيث (Γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$.

الحل:

f دالة معرفة بـ: $f(x) = \ln(x + e^{-x})$ و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1. أ - تبين أَنَّهُ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $x + e^{-x} \geq 1$.

نضع $g(x) = x + e^{-x}$

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g'(x) = 1 - e^{-x}$.

$g'(x) = 0$ معناه $1 - e^{-x} = 0$ ويكافئ $e^{-x} = 1$ أي $x = 0$

$g'(x) > 0$ معناه $1 - e^{-x} > 0$ ويكافئ $e^{-x} < 1$ ويكافئ $-x < 0$ أي $x > 0$

$g'(x) < 0$ معناه $1 - e^{-x} < 0$ ويكافئ $e^{-x} > 1$ ويكافئ $-x > 0$ أي $x < 0$.

إذن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ و متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ ولها قيمة حدية صغرى وهي

$g(0) = 1$ وعليه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq 1$ أي $x + e^{-x} \geq 1$.

ب - استنتج أن f معرفة على $\mathbb{R}$.

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $x + e^{-x} \geq 1$ ومنه $x + e^{-x} > 0$ إذن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

2. أ. التحقق من صحة المعلومات التالية :

- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f(x) = -x + \ln(1 + xe^x)$.

$$f(x) = \ln(x + e^{-x}) = \ln e^{-x} (xe^x + 1) = \ln e^{-x} + \ln(xe^x + 1) = -x + \ln(xe^x + 1)$$

- من أجل كل $x > 0$ ، لدينا $f(x) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right)$.

$$f(x) - \ln x = \ln(x + e^{-x}) - \ln x = \ln\left(\frac{x + e^{-x}}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right)$$

ب. تعيين نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + e^{-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x + 1 = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \ln(xe^x + 1) = +\infty$$

ج. استنتاج من السؤال السابق أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$.

لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(xe^x + 1) = 0$ ومنه المستقيم (d) مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{e^{-x}}{x} = 1 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right) = 0$$

4. دراسة تغيرات الدالة f .

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $x + e^{-x} > 0$ ومنه إشارة هي نفس إشارة $1 - e^{-x}$.

$$f'(x) > 0 \text{ يكافئ } x > 0$$

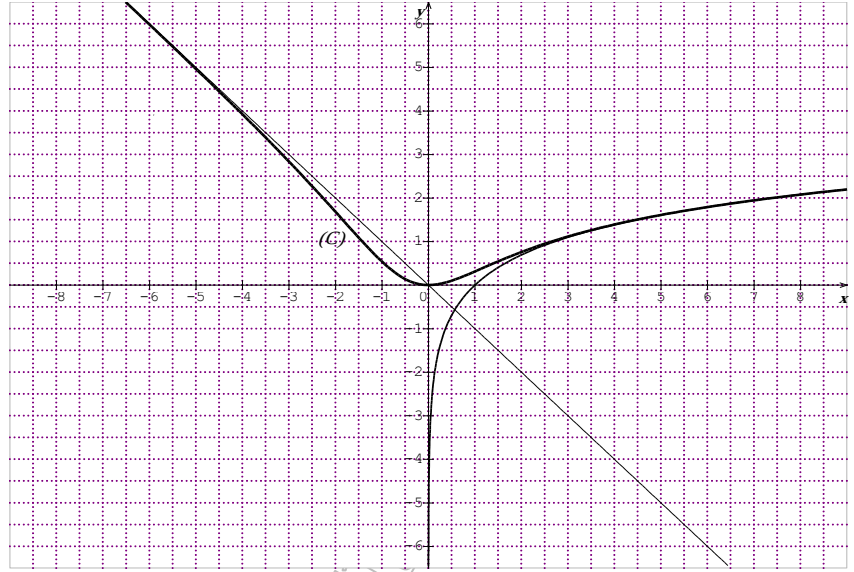
$$f'(x) < 0 \text{ يكافئ } x < 0$$

إذن الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; 0]$ و متزايدة تماماً على المجال $[0; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

5. رسم (d) ، (C) و (Γ) حيث (Γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$.



التمرين السادس عشر

I- الدالة g معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$.

- 1- ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1; +\infty[$.
- 2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,31 < \alpha < 0,32$ وأن: $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$.
- 3- استنتج، حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II- الدالة f معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $f(x) = (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2$.

(C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

2- أثبت أنه، من أجل كل x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$.

3- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4- بين أن: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2 (1 + (\alpha+1)^2)$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5- مثل المنحنى (C_f) على المجال $]-1; 2]$.

III- المنحنى الممثل للدالة h المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $h(x) = \ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1; 2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x .

1- أثبت أن المسافة AM تعطى بالعلاقة $AM = \sqrt{f(x)}$.

2- الدالة k معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $k(x) = \sqrt{f(x)}$.

أ- بين أن للدالتين k و f نفس اتجاه التغير على المجال $]-1; +\infty[$.

ب- عيّن إحداثيتي النقطة B من (Γ) ، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

ج- بين أن: $AB = (\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2 + 1}$.

الحل ☺

I- الدالة g معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$.

1- دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]-1; +\infty[$.

الدالة g تقبل على الاشتقاق على $]-1; +\infty[$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$:

$$g'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x+1}$$

من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $x+1 > 0$ و $\frac{1}{x+1} > 0$ ومنه $g'(x) > 0$ إذن الدالة g متزايدة

تماما على $]-1; +\infty[$.

2- تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,31 < \alpha < 0,32$ وأن: $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$.

الدالة g مستمرة على $]-1; +\infty[$ لأنها تقبل الاشتقاق على $]-1; +\infty[$ وهي متزايدة تماما على هذا المجال و خاصة على

المجال $[0,31; 0,32]$ ولدينا $g(0,31) \approx -0,01$ ، $g(0,32) \approx 0,02$ أي $g(0,32) \times g(0,31) < 0$ ومنه حسب

مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]0,31; 0,32[$ بحيث $g(\alpha) = 0$

$$g(\alpha) = 0 \text{ معناه } (\alpha+1)^2 - 2 + \ln(\alpha+1) = 0 \text{ أي } \ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2.$$

3- استنتاج، حسب قيم x إشارة $g(x)$.

من أجل $x \in]-1; \alpha[$ لدينا $g(x) < g(\alpha)$ أي $g(x) < 0$

ومن أجل $x \in]\alpha; +\infty[$ لدينا $g(x) > g(\alpha)$ أي $g(x) > 0$ و $g(\alpha) = 0$.

II- الدالة f معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $f(x) = (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2$.

(C_f) منحنى f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \ln(x+1))^2 = +\infty$$

$$\text{إذن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2 = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -1} (2 - \ln(x+1))^2 = +\infty$$

2- إثبات أنه، من أجل كل x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$.

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]-1; +\infty[$ ولدينا:

$$f'(x) = 2(x+1) + 2\left(\frac{-1}{x+1}\right)(2 - \ln(x+1)) = 2(x+1) - \frac{2(2 - \ln(x+1))}{x+1} = \frac{2(x+1)^2 - 2(2 - \ln(x+1))}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{2[(x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)]}{x+1} = \frac{2g(x)}{x+1}$$

3-دراسة اتجاه تغير الدالة f .

من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $\frac{2}{x+1} > 0$ ، ومنه إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$.

أي f' سالبة على $]-1; \alpha[$ وموجبة على $[\alpha; +\infty[$

نستنتج هكذا أن الدالة f متناقصة تماماً على $]-1; \alpha[$ ومتزايدة تماماً على $[\alpha; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$		0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

4- تبين أن: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2(1+(\alpha+1)^2)$

لدينا $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$ إذن $f(\alpha) = (\alpha+1)^2 + (2 - \ln(\alpha+1))^2 = (\alpha+1)^2 + (2 - (2 - (\alpha+1)^2))^2$

$$f(\alpha) = (\alpha+1)^2 + (\alpha+1)^4 = (\alpha+1)^2(1+(\alpha+1)^2)$$

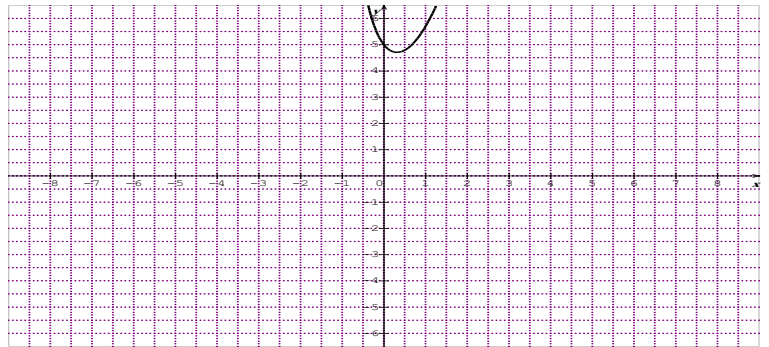
استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$.

$0,32 < \alpha < 0,32$ معناه $1,31 < \alpha+1 < 1,32$ يكافئ $1,7424 < (\alpha+1)^2 < 1,7161$ ويكافئ

$2,7161 < 1+(\alpha+1)^2 < 2,7424$ ومنه $1,7424 \times 2,7424 < (\alpha+1)^2(1+(\alpha+1)^2) < 1,7161 \times 2,7161$ أي

$$4,6611 < f(\alpha) < 4,7789$$

5- تمثيل المنحنى (C_f) على المجال $]-1; 2]$.



III- المنحنى الممثل للدالة h المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $h(x) = \ln(x+1)$

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1; 2)$ و M نقطة من (Γ) فاصلتها x .

1- إثبات أن المسافة AM تعطى بالعلاقة $AM = \sqrt{f(x)}$.

لدينا $M(x; \ln(x+1))$ ومنه

$$AM = \sqrt{(x+1)^2 + (\ln(x+1) - 2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2} = \sqrt{f(x)}$$

2- الدالة k معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $k(x) = \sqrt{f(x)}$.

أ - تبين أن للدالتين k و f نفس اتجاه التغير على المجال $]-1; +\infty[$.

الدالة f تقبل الاشتقاق على $]-1; +\infty[$ وهي موجبة على هذا المجال إذن الدالة k تقبل الاشتقاق على $]-1; +\infty[$

$$\text{ولدينا } k'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $2\sqrt{f(x)} > 0$ ، ومنه إشارة $k'(x)$ هي نفس إشارة $f'(x)$ وبالتالي للدالتين k و f نفس اتجاه التغير على المجال $]-1; +\infty[$.

ملاحظة: يمكن إتباع طريقة اتجاه تغير مركب دالتين.

ب - تعيين إحداثيتي النقطة B من (Γ) ، بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن.

لدينا الدالة k متناقصة تماماً على $]-1; \alpha[$ ومتزايدة تماماً على $[\alpha; +\infty[$ فهي تقبل قيمة حدية صغرى على المجال

$]-1; +\infty[$ تبلغها من أجل $x = \alpha$ ومنه AM تكون أصغر ما يمكن من أجل $x = \alpha$ أي عند النقطة $B(\alpha; \ln(\alpha+1))$

ج - تبين أن: $AB = (\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2 + 1}$.

$$AB = k(\alpha) = \sqrt{f(\alpha)} = \sqrt{(\alpha+1)^2 (1 + (\alpha+1)^2)} = (\alpha+1)\sqrt{1 + (\alpha+1)^2}$$

التمرين السابع عشر ☺

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $g(x) = \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^x}$.

1- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

2- ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

3- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x) = e^x \ln(1+e^{-x})$.

1- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (يمكن وضع $t = \frac{1}{e^x}$).

2- بيّن أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -xe^x + e^x \ln(1+e^x)$.

- استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3- ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

- استنتج مجموعة صور $\mathbb{R}$ بواسطة الدالة f .

4- بيّن أن المعادلة: $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حلاً وحيداً α .

5- ارسم (C_f) منحنى الدالة f في مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

6- ناقش بياناً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $e^x \ln(1+e^{-x}) - m = 0$.

الحل:

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $g(x) = \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^x}$.

1- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^x} = +\infty \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^x} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^{-x}) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^x} = 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^{-x}) = 0$$

2- دراسة اتجاه تغير الدالة g

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$g'(x) = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-1}{1+e^x} + \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-1-e^x+e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{-1}{(1+e^x)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $g'(x) < 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	$+\infty$	0

3- استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

نلاحظ من جدول تغيرات الدالة g أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) > 0$.

II- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $f(x) = e^x \ln(1+e^{-x})$.

1- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

نضع $t = \frac{1}{e^x}$ عندئذ $e^x = \frac{1}{t}$ إذا كان x يتوّل إلى $+\infty$ فإن t يتوّل إلى 0 .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln(1+t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

2- تبين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = -xe^x + e^x \ln(1+e^x)$.

$$f(x) = e^x \ln(1+e^{-x}) = e^x \ln(e^{-x}(e^x + 1)) = e^x [-x + \ln(e^x + 1)] = -xe^x + e^x \ln(e^x + 1)$$

- استنتاج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -xe^x + e^x \ln(e^x + 1) = 0 \text{ ومنه } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(e^x + 1) = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} -xe^x = 0$$

3- دراسة اتجاه تغير الدالة f .

$$f'(x) = e^x \ln(1+e^{-x}) - \left(\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)e^x = e^x \ln(1+e^{-x}) - \frac{1}{1+e^{-x}} = g(x)$$

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) > 0$ ، ومنه $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.
جدول تغيّرات الدالة f .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		
$f(x)$	0	1

- استنتاج مجموعة صور $\mathbb{R}$ بواسطة الدالة f .

الدالة f مستمرة ورتيبة تماماً على $\mathbb{R}$ ولدينا $f([-\infty; +\infty[) =]1; 2]$

4- تبين أن المعادلة: $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حلاً وحيداً α .

الدالة f مستمرة ومتزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ وتأخذ قيمها في المجال $]1; 2]$ و $\frac{1}{2} \in]1; 2]$ إذن المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حلاً

وحيداً α .

5- رسم (C_f)

6- المناقشة بياناً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد

حلول المعادلة: $e^x \ln(1+e^{-x}) - m = 0$.

$e^x \ln(1+e^{-x}) = m$ تكافئ أي $e^x \ln(1+e^{-x}) - m = 0$

$f(x) = m$

إذا كان $m \leq 0$ أو $m \geq 1$ فإن المعادلة لا تقبل أي حل.

إذا كان $0 < m < 1$ فإن المعادلة تقبل حلاً واحداً.

التمرين الثامن عشر

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}$; $x \in]0; e[\cup]e; +\infty[$
 $f(0) = -1$

نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$ (يمكن وضع $t = \ln x$) ثم أدرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليمين.

ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ ثم فسر النتيجة هندسياً.

(2) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ ثم فسر النتيجة هندسياً.

$$(3) \text{ أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ ، حيث } x \in]0; e[\cup]e; +\infty[\text{ ، } f'(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)^2} .$$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

(4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني ($\mathcal{C}_f$) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$$(5) \text{ بين أنه من أجل } x \in]0; e[\cup]e; +\infty[\text{ ، } f''(x) = \frac{1+\ln x}{x^2(1-\ln x)^3} \text{ ، ثم استنتج أن المنحني } (\mathcal{C}_f) \text{ يقبل نقطة}$$

انعطاف يطلب تعيينها .

(6) أحسب $f(4)$ أرسم (T) و ($\mathcal{C}_f$) .

(7) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-e; e\}$: $g(x) = f(|x|)$.

أ) بين أن الدالة g زوجية .

ب) اشرح كيفية الحصول على ($\mathcal{C}_g$) انطلاقاً من ($\mathcal{C}_f$) ثم ارسم ($\mathcal{C}_g$) .

الحل ☺

$$\text{لتكن } f \text{ الدالة العددية المعرفة بما يلي : } \begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{1-\ln x}; & x \in]0; e[\cup]e; +\infty[\\ f(0) = -1 \end{cases}$$

نسمي ($\mathcal{C}_f$) المنحني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس ($O, \vec{i}, \vec{j}$)

(1) أ) تبين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$ ثم أدرس استمرارية الدالة f عند 0 من اليمين .

نضع $t = \ln x$ إذا كان $x \xrightarrow{x>0} 0$ فإن $t \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \xrightarrow{x>0} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{x>0} 0} \frac{\ln x}{1-\ln x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t}{1-t} = -1$$

بما أن $\lim_{x \xrightarrow{x>0} 0} f(x) = f(0) = -1$ فإن الدالة f مستمرة على يمين 0.

$$\text{ب) حساب } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$\lim_{x \xrightarrow{x>0} 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \xrightarrow{x>0} 0} \frac{\frac{\ln x}{1-\ln x} + 1}{x} = \lim_{x \xrightarrow{x>0} 0} \frac{1}{x(1-\ln x)} = \lim_{x \xrightarrow{x>0} 0} \frac{1}{x - x \ln x} = +\infty$$

$$\text{لأن } \lim_{x \xrightarrow{x>0} 0} (x - x \ln x) = 0^+$$

التفسير: الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند 0 ومنحناها البياني يقبل حامل محور الترتيب مماساً له عند النقطة التي إحداثياتها $(0; -1)$

(2) تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ و تفسير النتيجة هندسياً .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1-\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{t}{1-t} = -1$$

التفسير: يقبل مستقيم مقارب معادلته $y = -1$ بجوار $+\infty$.

(3) أ) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \in]0; e[\cup]e; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{1}{x(1-\ln x)^2}$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1-\ln x) + \frac{1}{x} \ln x}{(1-\ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x}(1-\ln x + \ln x)}{(1-\ln x)^2} = \frac{1}{x(1-\ln x)^2}$$

ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f

من أجل كل $x \in]0; e[\cup]e; +\infty[$ يكون $f'(x) > 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة تماماً على $]0; e[$ و $]e; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة f .

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	-1		-1

(4) كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \text{ ومنه } y = 1(x-1) + f(1)$$

(5) تبين أنه من أجل $x \in]0; e[\cup]e; +\infty[$ ، $f''(x) = \frac{1+\ln x}{x^2(1-\ln x)^3}$ ثم استنتج أن المنحني (C_f) يقبل نقطة

انعطاف يطلب تعيينها .

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2} \quad \text{تذكير:}$$

من أجل $x \in]0; e[\cup]e; +\infty[$ لدينا:

$$f''(x) = \frac{-\left[(1-\ln x)^2 + 2x \left(-\frac{1}{x}\right)(1-\ln x)\right]}{x^2(1-\ln x)^4} = \frac{-\left[(1-\ln x)^2 - 2(1-\ln x)\right]}{x^2(1-\ln x)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-(1-\ln x)(1-\ln x - 2)}{x^2(1-\ln x)^4} = \frac{1+\ln x}{x^2(1-\ln x)^3}$$

إشارة $f''(x)$ هي نفس إشارة $1+\ln x$ لأن $x^2(1-\ln x)^3 > 0$ من أجل كل $x \in]0; e[\cup]e; +\infty[$

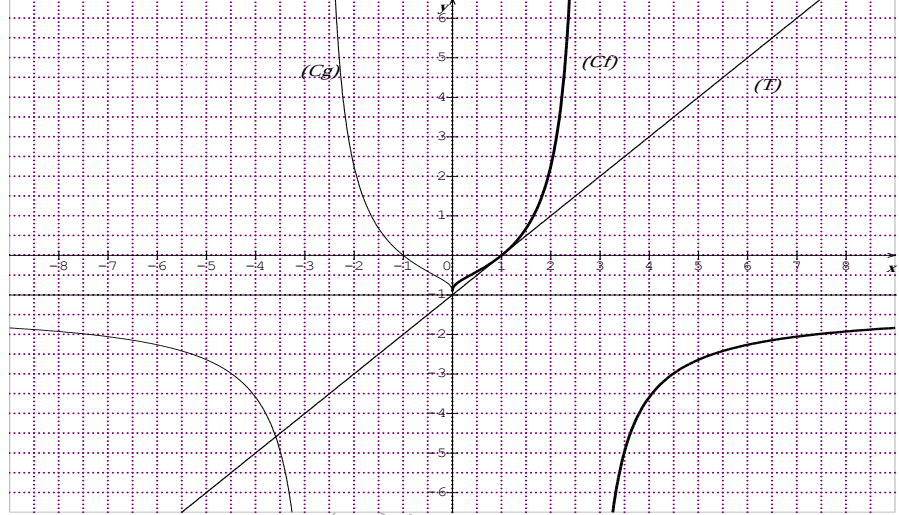
$$f''(x) = 0 \text{ تعني } 1+\ln x = 0 \text{ وتكافئ } \ln x = -1 \text{ أي } x = \frac{1}{e}$$

$$f''(x) > 0 \text{ تعني } 1+\ln x > 0 \text{ وتكافئ } \ln x > -1 \text{ أي } x > \frac{1}{e}$$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

$f''(x)$ تنعدم عند العدد $\frac{1}{e}$ وتغير من إشارتها و منه النقطة ذات الإحداثيتين $\left(\frac{1}{e}; -\frac{1}{2}\right)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f) .

(6) حساب $f(4)$ ثم ارسم (T) و (C_f) .



(7) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-e; e\}$ بـ : $g(x) = f(|x|)$.

(أ) تبين أن الدالة g زوجية .

لدينا D_g متناظر بالنسبة لـ 0

$$g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x)$$

(ت) شرح كيفية الحصول على (C_g) انطلاقاً من (C_f) ثم ارسم (C_g) .

$$\begin{cases} g(x) = f(x); x \in [0; e[\cup]e; +\infty[\\ g(x) = f(-x); x \in]-\infty; -e[\cup]-e; 0[\end{cases}$$

لما $x \in [0; e[\cup]e; +\infty[$ يكون (C_g) منطبق على (C_f) وبما أن الدالة g زوجية فإن (C_g) يكون متناظر بالنسبة لمحور الترتيب