السنة الدراسية: 2023-2024 الشعب العلمية	سلسلة المتتاليات العددية	أستاذ الرياضيات - خروبي تازي

تعريف: متتالية عددية حقيقية u هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n ،أكبر من أو يساوي عدد طبيعي n_0 معطى، العدد $u(n)$.

$$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,.....\}$$

$$\mathbb{N}^*=\{1,2,3,4,.....\}$$

ترميز: نرمز إلى صورة n بالمتتالية u بـ u_n بدلا من $u(n)$.هذا الترميز الجديد يسمى الترميز بدليل .

المتتالية u يرمز لها $(u_n)_{n\geq n_0}$ إذا كانت المتتالية u معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0.

المتتالية u يرمز لها $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو (u_n) إذا كانت المتتالية u معرفة على $\mathbb{N}$.

u_n هو الحد الذي دليله n و يسمى كذالك الحد العام للمتتالية u .

u_{n_0} هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة من أجل n أكبر من أو يساوي n_0 .

u_0 هو الحد الأول للمتتالية u إذا كانت معرفة على $\mathbb{N}$.

أمثلة:

- المتتالية (u_n) حيث : $u_n=-n^3+1$ معرفة على $\mathbb{N}$.
- المتتالية v حيث : $v_n=\dfrac{5+n}{n}$ معرفة على $\mathbb{N}^*$ و نكتب $(v_n)_{n\geq 1}$.
- المتتالية w حيث : $w_n=\dfrac{-n+3}{n-4}$ معرفة من أجل $n\geq 5$ و نكتب $(w_n)_{n\geq 5}$.

ملاحظة: في الحد u_n ، n هو دليل الحد وليس رتبته .

مثال: المتتالية w حيث أن $w_n=\dfrac{n+3}{n-5}$ معرفة من أجل $n\geq 6$ ، 6 هو دليل الحد w_6 وأما رتبته فهي الرتبة الأولى حيث w_6 هو الحد الأول.

رتبة حد u_b $(b\in\mathbb{N})$ من متتالية u بالنسبة إلى الحد u_a (a عدد طبيعي أصغر من b) هو العدد الطبيعي $b-a+1$.

رتبة الحد =دليل الحد تامطلوب تعيينه-دليل الحد الأول +1

دليل الحد المراد حسابه =رتبة الحد المراد حسابه+دليل الحد الأول -1

المحطة الأولى : طرق توليد متتاليات

متتالية معرفة بعبارة الحد العام $u_n = f(n)$	متتالية معرفة بعلاقة تراجعية $u_{n+1} = f(u_n)$
إذا كان الحد العام لمتتالية عددية معطى بدلالة n فإنها معرفة تماما . و لحساب حد u_{n_0} من الحدود يكفي تعويض n بالقيمة n_0 .	لتكن دالة عددية f معرفة على مجال D وحيث أن من أجل $x \in D$ فإن $f(x) \in D$. المتتالية u المعرفة بحدها الأول u_{n_0} و العلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ تسمى متتالية تراجعية. تسمح هذه العلاقة بحساب u_{n+1} إذا علم u_n من أجل كل $n \geq n_0$. الدالة العددية f تسمى الدالة المرفقة بالمتتالية u.
لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعبارة $u_n = 2n^2 - 1$ في هذه الحالة، $u_0 = -1$ ، $u_1 = 2\times 1^2 - 1 = 1$ ، $u_2 = 2\times 2^2 - 1 = 7$ ،	: لتكن v المتتالية المعرفة بحدّها الأوّل v_0، حيث $v_0 = 2$ والعلاقة $v_{n+1} = 3v_n - 1$. لدينا $v_1 = 3v_0 - 1 = 3\times 2 - 1 = 5$ ، $v_2 = 3v_1 - 1 = 3\times 5 - 1 = 14$ ، $v_3 = 3v_2 - 1 = 41$ ، ...

المحطة الثانية : البرهان بالتراجع

المعطيات: P n خاصية متعلقة بعدد طبيعي n ; n_0 عدد طبيعي .

المطلوب : البرهان على صحة الخاصية P n من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0

مرحلة التحقق	نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي P n_0 .
مرحلة الفرضية	نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر أو يساوي n_0، أي "$P(n)$ صحيحة "
مرحلة البرهان	نثبت صحت الخاصية $P(n)$ من أجل $n+1$، أي صحة $P(n+1)$.

1- لتكن المتتالية (U_n) المعرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ : $U_0 = 6$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{3}$. باستعمال الاستدلال بالتراجع ، أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي n، $U_n \succ \frac{2}{3}$.

2- (U_n) لمتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $U_0 = \frac{13}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 3 + \sqrt{U_n - 3}$

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < U_n < 4$

-3 (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $U_0 = e^2 - 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = (1 + U_n)e^{-2} - 1$

1) أحسب : U_1 ، U_2 و U_3 .

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 + U_n > 0$

4- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [1;2]$ بالعبارة : $f(x) = \frac{x+2}{-x+4}$

أ- بين أن الدالة f متزايدة على I.

ب-بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I ، f(x) ينتمي إلى I.

(u_n) هي المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يأتي : $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$

ت- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، u_n ينتمي إلى I.

المحطة الثالثة : اتجاه تغير

لدراسة اتجاه تغير متتالية (U_n) يمكن أن:		
1) ندرس إشارة $U_{n+1} - U_n$ إذا كان $u_{n+1} - u_n \geq 0$ فإن (u_n) متزايدة إذا كان $u_{n+1} - u_n \leq 0$ فإن (u_n) متناقصة إذا كان : $u_{n+1} - u_n = 0$ فإن (u_n) ثابتة	2) نقارن بين $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ و 1 (U_n ، U_{n+1} موجبين تماما). إذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة و إذا كان $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة	3) إذا وجدت دالة f حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = f(n)$ ندرس تغيرات الدالة f إذا كانت f متزايدة على المجال $]0;+\infty[$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة و إذا كانت f متناقصة على المجال $]0;+\infty[$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة

المحطة الرابعة: المتتاليات المحدودة و المتقاربة

المتتالية المحدودة من الأعلى	نقول عن متتالية u_n أنها محدودة من الأعلى إذا وجد عدد حقيقي ثابت A بحيث من أجل كل عدد n: $\boxed{u_n \leq A}$ و يسمى العدد A الحد الأعلى للمتتالية u_n .
المتتالية المحدودة من الأسفل	نقول عن متتالية u_n أنها محدودة من الأسفل إذا وجد عدد حقيقي ثابت B بحيث من أجل كل عدد n: $\boxed{u_n \geq B}$ و يسمى العدد B الحد الأدنى للمتتالية u_n .
المتتالية المحدودة	نقول عن المتتالية u_n أنها محدودة إذا وفقط إذا كانت محدودة من الأسفل و من الأعلى أي: $\boxed{B \leq u_n \leq A}$

استنتاج تقارب المتتالية انطلاقا من معرفة اتجاه تغير و المتتالية المحدودة

كل متتالية محدودة من الأعلى و متزايدة فهي متقاربة	كل متتالية محدودة من الأسفل و متناقصة فهي متقاربة

تطبيق: ادرس اتجاه تغير المتتاليات السابقة و استنتج تقاربها

نقول عن متتالية عددية u_n أنها متقاربة إذا إذا كانت $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell}$ حيث ℓ عدد حقيقي .

تطبيق : أدرس إتجاه تغير كل من المتتالية (U_n)، (V_n) و (W_n) ثم استنتج تقاربها التالية:

(1 $U_n = -2n+3$ (2 $V_n = \dfrac{2-4n}{n+2}$ (3 $W_n = (n-5)^2$ (4 $t_n = \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$

المحطة الخامسة تمثيل حدود متتالية عددية

تمثيل متتالية تراجعية: تمثيل متتالية عددية (u_n) هو تعيين النقط $M_n(u_n ; u_{n+1})$ من المستوي المزود بمعلم متعامد ومتجانس

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة بحدها الأول u_0 و بالعلاقة: $u_{n+1} = f(u_n)$

لتمثيل المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نقوم بما يلي:

- نرسم C_f منحنى الدالة f و نرسم المستقيم D ذو معادلة: $y = x$
- نضع على محور الفواصل الحد الأول u_0

- نرسم القطعة الموازية لمحور التراتيب من هذه النقطة حتى المنحنى C_f.

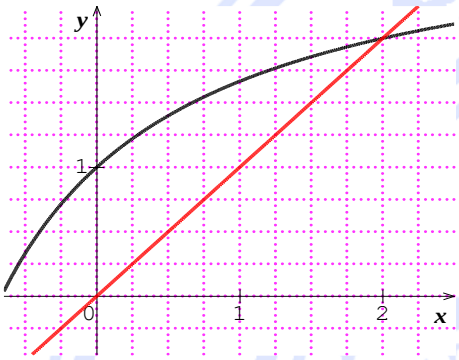
نحصل على النقطة $M_0(u_0 ; u_1)$

- نرسم القطعة الموازية لمحور الفواصل من هذه النقطة حتى المستقيم D .

نحصل على النقطة ذات الإحداثيات $(u_1 ; u_1)$

- نعيد العملية.

التطبيق الأول :



في الشكل المقابل (C) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $]-2;+\infty[$

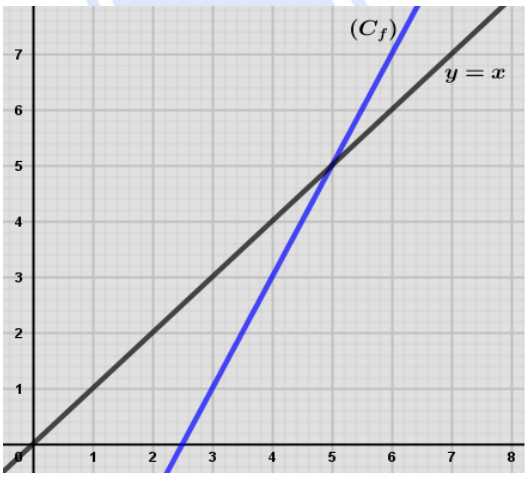
بـ: $f(x)=\dfrac{3x+2}{x+2}$، والمستقيم (d) معادلته: $y=x$.

(u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_0=0$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=f(u_n)$

1- انقل الشكل المقابل ومثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها .

2- ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n)وتقاربها .

التطبيق الثاني :



الشكل المقابل (C) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $]-2;+\infty[$

بـ: $f(x)=2x-5$، والمستقيم (d) معادلته: $y=x$.

(u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_0=\dfrac{9}{2}$ ومن أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=f(u_n)$

1- انقل الشكل المقابل ومثل على محور الفواصل الحدود u_0، u_1، u_2 و u_3 دون حسابها .

2- ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n)وتقاربها .

المحطة السادسة المتتالية الحسابية و الهندسية

	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
تعريف	الانتقال من حد إلى الحد التالي يكون **بإضافة** نفس الثابت r، ويسمى أساس المتتالية	الانتقال من حد إلى الحد التالي يكون **بالضرب** في نفس الثابت q، ويسمى أساس المتتالية
العلاقة التراجعية	$u_{n+1}=u_n+r$	$u_{n+1}=u_n\times q$
الحد العام	$u_n=u_0+nr$ ← الحد الأول u_0 $u_n=u_1+(n-1)r$ ← الحد الأول u_1	$u_n=u_0\times q^n$ ← الحد الأول u_0 $u_n=u_1\times q^{n-1}$ ← الحد الأول u_1
العلاقة بين حدين	من أجل كل عددين طبيعيين $n\geq p$: $u_n=u_p+(n-p)r$	من أجل كل عددين طبيعيين $n\geq p$: $u_n=u_p\times q^{n-p}$
مجموع حدود متتابعة	$S=u_0+u_1+\ldots+u_n=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$ **بصفة عامة:** $S=$ عدد الحدود $\times\frac{\text{الحد الأول + الحد الأخير}}{2}$ **حالة خاصة أساسية:** $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$	$S=u_0+u_1+\ldots+u_n=u_0\times\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ **بصفة عامة:** $S=$ الحد الأول $\times\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$ **حالة خاصة أساسية:** $1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ مع $q\neq 1$
النهايات	$r>0\to\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ $r<0\to\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$	$q>1\to\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=+\infty$ $q=1\to\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=1$ $-1<q<1\to\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0$ $q\leq -1\to$ نهاية (q^n) غير موجودة
الوسط الهندسي و الحسابي	**الوسط الحسابي** a,b,c) حدود متتابعة من متتالية حسابية (يكافئ $2b=a+c$ "يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c	**الوسط الهندسي** a,b,c) حدود متتابعة من متتالية هندسية (يكافئ $b^2=a\times c$ "يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c

المحطة السابعة: المتتاليتان المتجاورتان

بما أن (u_n) متزايدة و (v_n) متناقصة و $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$

المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتين

تطبيق1: (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان كما يلي: $u_n = \frac{-2}{n}$ و $v_n = \frac{1}{\ln n}$ ، حيث: $n > 1$

1. أدرس إتجاه تغير كل من (u_n) و (v_n)

2. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n)$ ، هل (u_n) و (v_n) المتتاليتان متجاورتان؟

الحل:

1/دراسة إتجاه تغير كل من (u_n) و (v_n):

-ندرس إشارة الفرق: $u_{n+1} - u_n = \frac{-2}{n+1} + \frac{2}{n} = \frac{-2n+2n+2}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}$

نلاحظ أن $u_{n+1} - u_n > 0$ و منه (u_n) متزايدة

-ندرس إشارة الفرق: $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\ln(n+1)} - \frac{1}{\ln(n)}$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $n+1 > n$ ومنه $\ln(n+1) > \ln(n)$ وعليه $\frac{1}{\ln(n+1)} < \frac{1}{\ln(n)}$ أي $\frac{1}{\ln(n+1)} - \frac{1}{\ln(n)} < 0$ و أخيرا نجد:

$v_{n+1} - v_n < 0$ ومنه (v_n) متناقصة

2/ لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-2}{n} - \frac{1}{\ln n}\right) = 0$

الإستنتاج: المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتين.

تطبيق2: لتكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$u_0 = 12$ ، $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$ و $v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = u_n - v_n$ و $t_n = 3u_n + 8v_n$.

1) أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .أحسب w_n بدلالة n .ما هي نهاية (w_n) ؟

2) أثبت أن المتتالية (t_n) متتالية ثابتة . ما هي نهاية (t_n) ؟

3) أثبت أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

4) استنتج نهاية u_n و نهاية v_n .

حل التطبيق

) لدينا $w_{n+1}=u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2v_n}{3}-\frac{u_n+3v_n}{4}$ و $w_{n+1}=\frac{4u_n+8v_n-3u_n-9v_n}{12}=\frac{u_n-v_n}{12}$ أي $w_{n+1}=\frac{1}{12}w_n$ إذن المتتالية (w_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{12}$ وحدها الأول $w_0=11$

من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n=11\left(\frac{1}{12}\right)^n$. بما أن $-1<\frac{1}{12}<1$ (w_n) متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$

2) $t_{n+1}=3u_{n+1}+8v_{n+1}=\frac{3(u_n+2v_n)}{3}+\frac{8(u_n+3v_n)}{4}$

أي $t_{n+1}=u_n+2v_n+2u_n+6v_n=3u_n+8v_n$ و منه $t_{n+1}=t_n$ و المتتالية (t_n) متتالية ثابتة على $\mathbb{N}$

. $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=t_0=44$

3) • $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+2v_n}{3}-u_n=\frac{u_n+2v_n-3u_n}{3}$ و منه : $u_{n+1}-u_n=\frac{-2(u_n-v_n)}{3}=-\frac{2}{3}w_n$

إذن: $u_{n+1}-u_n=-\frac{22}{3}\left(\frac{1}{12}\right)^n$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}-u_n<0$ والمتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

• $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+3v_n}{4}-v_n=\frac{u_n+3v_n-4v_n}{4}$ ومنه : $v_{n+1}-v_n=\frac{(u_n-v_n)}{4}=\frac{1}{4}w_n$

إذن: $v_{n+1}-v_n=\frac{11}{4}\left(\frac{1}{12}\right)^n$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1}-v_n>0$ و المتتالية (v_n) متزايدة على $\mathbb{N}$.

• نعلم أن $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$ و أن $w_n=u_n-v_n$ و بالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n-v_n=0$.

إذن (u_n) متناقصة و (v_n) متزايدة و الفرق بينهما يؤول إلى 0 . إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان

4) المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان .

إذن المتتاليتان (u_n) و (v_n) متقاربتان و لهما نفس النهاية .

نعلم أن $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=t_0=44$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}3u_n+8v_n=44$ نستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=4$