

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول (05 ن):

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول Z : $(Z - 2i)(Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4) = 0$.
- (2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C و D ذات اللاحقات
- $$Z_D = -\sqrt{3} - i \text{ و } Z_C = 2i ; Z_B = \sqrt{3} + i ; Z_A = \sqrt{3} - i$$
- أ - علم النقط A ، B ، C و D .
- ب - اكتب العدد $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي . استنتج طبيعة المثلث ABC .
- ج - تحقق أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها .
- (3) لنعتبر التحويل النقطي S الذي يحول O إلى A ويحول C إلى D .
- أ - أثبت أن التحويل S هو تشابه مباشر ثم عين عناصره المميزة (المركز و النسبة و الزاوية) .
- ب - تحقق أن صورة النقطة B بالتشابه S هي النقطة C .
- (4) لتكن النقطة G مرجح النقط A ، B ، C المرفقة بالمعاملات 1 ، -1 ، 2 على الترتيب .
- أ - عين احداثي النقطة G .
- ب - بين أن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 8$
- هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها 1 .

التمرين الثاني (05 ن):

- نعتبر في الفضاء النقط $A(1, 0, 2)$ ، $B\left(\frac{1}{3}, \frac{-8}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ، $C(-3, -1, -1)$ ، $D(1, -1, 4)$
- و المستوي (P) المعروف بالتمثيل الوسيط
- $$\begin{cases} x = 1 + 3\alpha + \beta \\ y = 1 + 3\alpha \\ z = 2 - 3\beta \end{cases}$$
- حيث α و β وسيطان حقيقيان
- (1) أ - بين أن النقط A ، B ، C تعين مستويا
- ب - تحقق أن الشعاع $\vec{n}(2, 1, -3)$ ناظمي للمستوي (ABC) ، ثم اكتب معادلة ديكرتية له
- (2) اكتب معادلة ديكرتية للمستوي (P) ، ثم بين أن (ABC) و (P) متعامدان
- (3) نعتبر المستقيم (Δ) المعروف بالجملة :
- $$\begin{cases} 2x + y - 3z + 4 = 0 \\ 3x - 3y + z - 2 = 0 \end{cases}$$
- أ - تحقق أن $E(-2, -3, -1)$ نقطة من (Δ)

ب- بين ان $u^1(8,11,9)$ شعاع توجيه لـ (Δ) ثم اكتب تمثيلا وسيطيا لـ (Δ)

4 أ- أحسب المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ)

ب- بين ان المثلث ABC قائم ثم احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

التمرين الثالث: (03 نقاط)

يحتوي كيس على 3 كريات بيضاء و 4 كريات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات من الكيس

1- ما هو عدد الحالات الممكنة للسحب

2- ما هو احتمال الحصول على كرتين بالضبط لونهما ابيض

3- ما هو احتمال الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون

4- ما هو احتمال الحصول على كرية بيضاء على الاقل

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $R - \{1\}$ كمايلي: $f(X) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$

(c_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(\vec{0}, \vec{i}, \vec{j})$

1 أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ثم فسر النتائج هندسيا

ب/ بين أنه بوضع $t = \frac{2}{x-1}$ فإن f تكتب على الشكل: $f(t) = \frac{e}{2} t^2 e^t$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$

2 بين أنه من أجل كل x من المجال $R - \{1\}$ فإن: $f'(x) = \frac{-4x}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}}$

3 استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4 بين أن المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حلان أحدهما -1 والآخر α على المجال $]0; 1[$

5 أنشئ المنحنى (c_f)

6 ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) = m$

7 نعتبر الدالة g المعرفة على $R - \{1\}$ كمايلي: $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$

أ/ أحسب $g'(x)$

ب/ أكتب $f(x)$ بدلالة $g'(x)$ و $g(x)$

ج/ استنتج دالة أصلية للدالة f

8 β عدد حقيقي حيث $\beta \in]-\infty; 1[$

أ/ أحسب بدلالة β المساحة $A(\beta)$ المحددة بالمنحنى (c_f) والمستقيمين $x = -\beta$ و $x = \beta$

ب/ أحسب النهاية $\lim_{\beta \rightarrow 1} A(\beta)$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4.5 نقط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $3u_{n+1} = u_n + 4n + 4$.
(1) احسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

(2) أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $n \geq 1$ ، $u_n > \frac{4}{3}n$ و استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

(3) نعرف المتتالية (v_n) بـ : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 2n + 1$.
أ) برهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n - 1$.

ج) احسب بدلالة n . المجموع S_n المعروف من أجل كل عدد طبيعي n بـ :

$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ثم استنتج بدلالة n المجموع T_n حيث : $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

التمرين الثاني: (4.5 نقط)

في الفضاء المزود بالمعلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ المتعامد والمتجانس نعتبر النقط $C(1;0;1)$ ، $B(3;0;1)$ ، $A(1;0;-2)$

1. أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها A وتشمل النقطة B

2. لتكن (Δ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء بحيث :

$$\begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

- بين أن (Δ) مستقيم من الفضاء شعاع توجيهه $\vec{u}(-2;-1;1)$ ويشمل النقطة B

3. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة A ويعامد المستقيم (Δ) .

4. أ- عين احداثيات نقطة تقاطع المستوي (P) و المستقيم (Δ) .

ب- احسب بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) ثم استنتج أن (Δ) يقطع سطح الكرة (S) في نقطتين .

5. t عدد حقيقي و G مرجح الجملة $\{(C;1), (B;e^t)\}$. أ) بين أن : $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{1+e^t} \overrightarrow{BC}$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(t) = \frac{1}{1+e^t}$.

ج) استنتج ان مجموعة النقط G عندما يتغير t في $\mathbb{R}$ هي القطعة $[BC]$.

التمرين الثالث: (4 نقط)

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C صور الأعداد المركبة

$$z_C = \sqrt{3} + i \quad , \quad z_B = -\sqrt{3} + i \quad , \quad z_A = -2i$$

1. أ) اكتب z_A ، z_B ، z_C على الشكل الأسّي .

ب) استنتج مركز ونصف قطر الدائرة (C) التي تشمل النقط A ، B ، C

(ج) علم النقط A ، B ، C ثم أرسم الدائرة (C)

1. اكتب العدد $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

2. ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$

(أ) بين أن النقطة O' ذات اللاحقة $-\sqrt{3} - i$ صورة النقطة O بالدوران r

(ب) بين أن [O'C] قطرا للدائرة (C) ثم انشئ (C') صورة الدائرة (C) بالدوران r.

(ج) تحقق أن الدائرتين (C) و (C') تشتركان في النقطتين A و B

التمرين الرابع: (07 نقط)

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]1, +\infty[$ حيث: $g(x) = x^2 - 2x - 4\ln(x-1)$ (حيث $\ln$: اللوغاريتم النيبيري)
(Γ) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل المقابل.

1) بقراءة بيانية للمنحنى (Γ)، عيّن عدد حلول المعادلة: $g(x) = 0$.

2) أحسب $g(2)$ ، ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $2,87 < \alpha < 2,88$.

3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $]1, +\infty[$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $]1, +\infty[$ حيث: $f(x) = x - 3 + \frac{4\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس. ($O, \vec{i}, \vec{j}$)

1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، وفسر النتيجة بيانياً، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

2) ا) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x - 3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).
ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

3) ا) بين أنه من أجل كل x من $]1, +\infty[$ لدينا: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$.

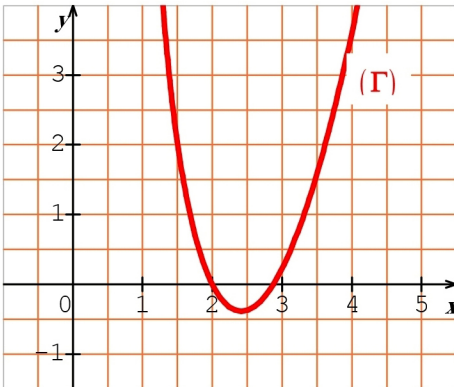
ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

4) أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) (نأخذ: $f(\alpha) = 3,9$)

5) لتكن الدالة h المعرفة على $]1, +\infty[$ كما يلي: $h(x) = [\ln(x-1)]^2$.

ا) أحسب $h'(x)$ ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1, +\infty[$.

ب) أحسب التكامل $\int_2^5 f(x) dx$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً.



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية
مديرية التربية لولاية الأغواط
ثانويات ولاية الأغواط

التصحيح المفصل للبكالوريا التجريبي في مادّة الرياضيات
شعبة : العلوم التجريبية
2016-2015

5012-5012

الموضوع الأول

التمرين الأول:

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول Z :

$$(Z - 2i)(Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4) = 0 \Leftrightarrow (Z - 2i = 0) \vee (Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4 = 0)$$

نحل المعادلة: $(*) Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4 = 0, \dots\dots$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -2\sqrt{3} \\ c = 4 \end{cases} \text{ حيث } \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-2\sqrt{3})^2 - 4(1)(4) = -4 \text{ و منه :}$$

$$Z - 2i = 0 \text{ يعني أن: } Z = 2i$$

المعادلة (*) تقبل حلين مترافقين

$$z' = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{2\sqrt{3} - i\sqrt{4}}{2}$$

$$z' = \sqrt{3} - i$$

$$z'' = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{2\sqrt{3} + i\sqrt{4}}{2}$$

$$z'' = \sqrt{3} + i$$

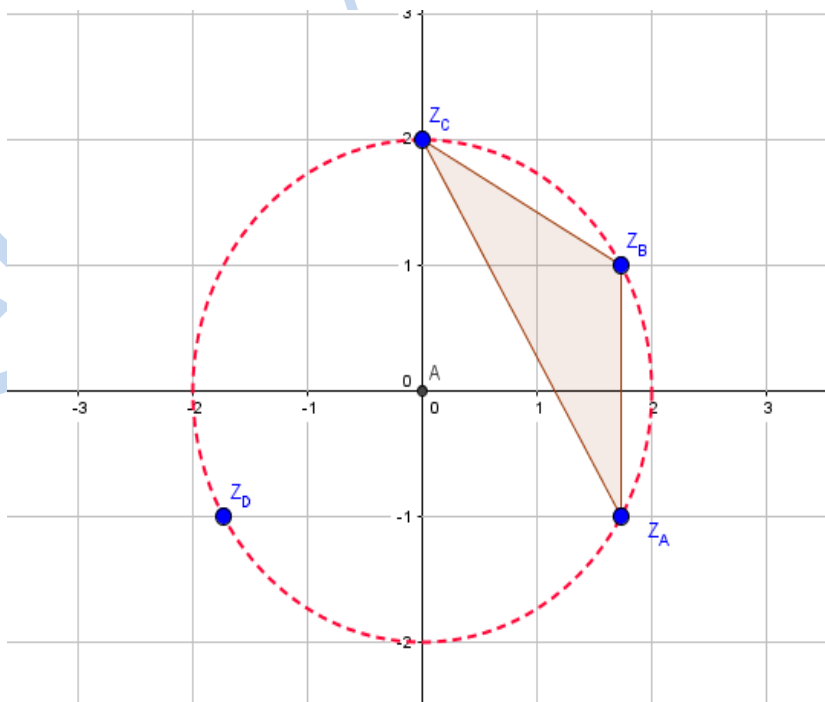
إذن : مجموعة حلول المعادلة $(Z - 2i)(Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4) = 0$ هي :

$$S = \{2i; \sqrt{3} - i; \sqrt{3} + i\}$$

2- المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط $A; B; C; D$ و لاحظها:

$$Z_A = \sqrt{3} - i; Z_B = \sqrt{3} + i; Z_C = 2i \text{ و } Z_D = -\sqrt{3} - i \text{ على الترتيب .}$$

أ- تعليم النقط $A; B; C; D$:



ب- كتابة العدد $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي . استنتج طبيعة المثلث ABC.

- كتابة العدد $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$ على الشكل الجبري:

$$\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = \frac{(\sqrt{3} - i) - (\sqrt{3} + i)}{(2i) - (\sqrt{3} + i)} = \frac{\sqrt{3} - i - \sqrt{3} - i}{2i - \sqrt{3} - i}$$

$$\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = \frac{-2i}{i - \sqrt{3}} = \frac{(-2i)(-i - \sqrt{3})}{(i - \sqrt{3})(-i - \sqrt{3})}$$

$$\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{1 + 3} = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

طويلة العدد: $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$

$$\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ لدينا:}$$

$$\left| \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} \right| = \left| \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 1 \text{ ومنه:}$$

عمدة العدد: $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$

$$\arg\left(\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}\right) = \arg\left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ ومنه } \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = \frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\arg\left(\frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

كتابة العدد $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$ على الشكل الأسّي:

$$\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = e^{i \frac{2\pi}{3}}$$

استنتج طبيعة المثلث ABC:

$$\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B} = e^{i \frac{2\pi}{3}} \text{ و ذلك يعني أن } A \text{ صورة } C \text{ بالدوران الذي مركزه } B \text{ (أي: } BA=BC \text{)} \text{ و زاويته } \frac{2\pi}{3}$$

نستنتج من ذلك أن: المثلث ABC متساوي الساقين .

ج- التحقق أن النقط $C; B; A$ و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O :

النقط $C; B; A$ و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O يعني أن: $OA=OB=OC=OD$.

$$|Z_A| = |Z_B| = |Z_C| = |Z_D| \text{ يعني أن: } OA=OB=OC=OD$$

لدينا:

$$|Z_A| = |\sqrt{3} - i| = 2 \text{ ومنه: } Z_A = \sqrt{3} - i$$

$$|Z_B| = |\sqrt{3} + i| = 2 \text{ ومنه: } Z_B = \sqrt{3} + i$$

$$|Z_C| = |2i| = 2 \text{ ومنه: } Z_C = 2i$$

$$|Z_D| = |-\sqrt{3} - i| = 2 \text{ ومنه: } Z_D = -\sqrt{3} - i$$

$$OA=OB=OC=OD \text{ ومنه:}$$

أي:

النقط $C; B; A$ و D

تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 2

(3) تحويل نقطي يحول O إلى A و يحول C إلى D :

$$S(O) = A \text{ يعني: } (1) \quad Z_A = aZ_O + b, \dots \text{ و } S(C) = D \text{ يعني: } (2) \quad Z_D = aZ_C + b, \dots$$

نطرح (2) من (1) طرف لطرف نجد: $Z_D - Z_A = a(Z_C - Z_O)$

$$a = \frac{Z_D - Z_A}{Z_C - Z_O} \text{ و منه:}$$

$$a = \frac{-\sqrt{3} - i - \sqrt{3} + i}{2i} = \frac{-2\sqrt{3}}{2i} \text{ ت-ع:}$$

$$\text{بالضرب في المرافق: } a = \frac{(-2\sqrt{3})(-2i)}{(2i)(-2i)} = \frac{4i\sqrt{3}}{4} \text{ بالتبسيط نجد: } a = i\sqrt{3}$$

$$a = i\sqrt{3} \text{ و منه: } S \text{ تشابه مباشر: نسبته } |a| = \sqrt{3} \text{ و زاويته } \arg(a) = \frac{\pi}{2}.$$

$$Z_w = \frac{b}{1-a} \text{ و مركزه: } w \text{ ذات اللاحة}$$

لإيجاد b نبحث عن العبارة المركبة لـ S :

$$\text{من العبارة (1) لدينا: } Z_A = aZ_O + b \text{ و منه: } \sqrt{3} - i = i\sqrt{3}(0) + b \text{ و منه: } b = \sqrt{3} - i$$

$$Z_w = \frac{(\sqrt{3} - i)(1 + i\sqrt{3})}{(1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})} \text{ بالضرب في المرافق نجد: } Z_w = \frac{b}{1-a} \Leftrightarrow Z_w = \frac{\sqrt{3} - i}{1 - i\sqrt{3}}$$

$$Z_w = \frac{\sqrt{3} + 3i - i + \sqrt{3}}{1 + 3}$$

$$Z_w = \frac{2\sqrt{3} + 2i}{4} \text{ بالتبسيط نجد: } Z_w = \frac{(\sqrt{3} - i)(1 + i\sqrt{3})}{(1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})}$$

$$Z_w = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

ب- تحقق أن صورة النقطة B بالتشابه S هي النقطة C :

$$\text{صورة النقطة } B \text{ بالتشابه } S \text{ هي النقطة } C \text{ يعني أن: } (Z_C - Z_w) = i\sqrt{3}(Z_B - Z_w)$$

$$\text{و منه: } Z_C = i\sqrt{3}(Z_B - Z_w) + Z_w$$

لدينا:

$$i\sqrt{3}(Z_B - Z_w) + Z_w = i\sqrt{3}\left(\sqrt{3} + i - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$i\sqrt{3}(Z_B - Z_w) + Z_w = i\sqrt{3}\left(\frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{2i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$i\sqrt{3}(Z_B - Z_w) + Z_w = i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$i\sqrt{3}(Z_B - Z_w) + Z_w = \frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$i\sqrt{3}(Z_B - Z_w) + Z_w = 2i$$

$$i\sqrt{3}(Z_B - Z_w) + Z_w = Z_C$$

و منه :صورة النقطة B بالتشابه S هي النقطة C

4- لتكن النقطة G مرجح النقط A ، B ، C المرفقة بالمعاملات 1;-1;2 على الترتيب.

أ- تعين إحداثيي النقطة G:

$$Z_G = \frac{\sqrt{3}-i - \sqrt{3}-i + 2 \times 2i}{2} = i \quad \text{ت ع :} \quad , \quad Z_G = \frac{Z_A - Z_B + 2Z_C}{1-1+2}$$

و منه إحداثيات النقطة G هي: $G(0,1)$

ب- إثبات أن (Γ) دائرة مركزها G و نصف قطرها 1.

لدينا: (*) : $MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 8; \dots$

$$(*) \Leftrightarrow (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 - (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 = 8$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 2 \times \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{MG}^2 - \overrightarrow{GB}^2 - 2 \times \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{GC}^2 + 2 \times 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GC} = 8$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 2 \times \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} - \overrightarrow{MG}^2 - \overrightarrow{GB}^2 - 2 \times \overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{GC}^2 + 2 \times 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GC} = 8$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 - \overrightarrow{GB}^2 + 2\overrightarrow{GC}^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC}) = 8$$

حساب GA ، GB و GC .

$$\overrightarrow{GA} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{GB} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{GC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{لدينا:}$$

و منه: $GA = \sqrt{7}; GB = \sqrt{3}; GC = 1$

إذن:

$$2MG^2 + GA^2 - GB^2 + 2GC^2 = 8 \Leftrightarrow 2MG^2 + 7 - 3 + 2(1) = 8$$

$$\Leftrightarrow 2MG^2 + 6 = 8$$

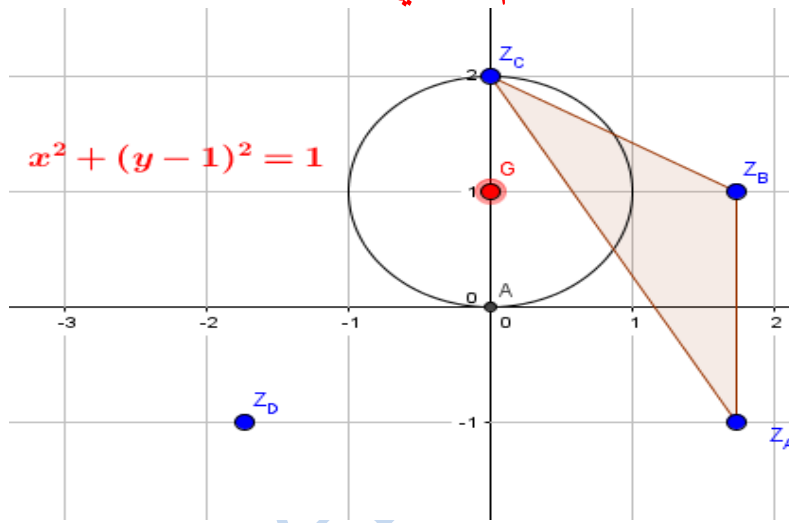
$$\Leftrightarrow 2MG^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow MG^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow MG = 1$$

و منه: (Γ) هي:
دائرة مركزها G نصف قطرها 1

رسم توضيحي - فقط -



طريقة ثانية:

$$(\Gamma): MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 8; \dots (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow |Z - Z_A|^2 - |Z - Z_B|^2 + 2|Z - Z_C|^2 = 8$$

نضع: $Z = x + iy$

$$|x + iy - (\sqrt{3} - i)|^2 - |x + iy - (\sqrt{3} + i)|^2 + 2|x + iy - (2i)|^2 = 8$$

$$|(x - \sqrt{3}) + i(y + 1)|^2 - |(x - \sqrt{3}) + i(y - 1)|^2 + 2|(x) + i(y - 2)|^2 = 8, \dots (\delta)$$

نعلم أنَّ:

$$|Z|^2 = \sqrt{x^2 + y^2}^2 \text{ و منه: } |Z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ فإن: } Z = x + iy, \dots (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ إذا كان:}$$

إذن:

$$\begin{aligned}
 (\delta) &\Leftrightarrow \sqrt{(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2}^2 - \sqrt{(x-\sqrt{3})^2+(y-1)^2}^2 + 2\sqrt{(x)^2+(y-2)^2}^2 = 8 \\
 &\Leftrightarrow (x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2 - (x-\sqrt{3})^2 - (y-1)^2 + 2(x)^2 + 2(y-2)^2 = 8 \\
 &\Leftrightarrow y^2+1+2y - y^2-1+2y + 2x^2+2y^2+8-8y = 8 \\
 &\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+6-4y = 8 \\
 &\Leftrightarrow 2x^2+2y^2-4y = 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2+y^2-2y = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-1)^2-1=0 \\
 &\Leftrightarrow (x-0)^2+(y-1)^2=1
 \end{aligned}$$

إذن: المجموعة المطلوبة هي الدائرة ذات المركز $G(0,1)$ و نصف قطرها 1.

التمرين الثاني:

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

لدينا: $D(1,-1,4); C(-3,-1,-1); B\left(\frac{1}{3}, \frac{-8}{3}, \frac{2}{3}\right); A(1,0,2)$ (1)

أ- إثبات أن النقط C, B, A تعين مستويا

لدينا $\overrightarrow{AB}\left(-\frac{2}{3}; -\frac{8}{3}; -\frac{4}{3}\right)$ و $\overrightarrow{AC}(-4; -1; -3)$ نلاحظ أن: $\frac{-2}{3} \neq \frac{-8}{-1} \neq \frac{-4}{-1}$ و منه: $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطيًا.

أي: النقط C, B, A تعين مستويا

(1)

أ- التحقق أن $\vec{n}(2;1;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

$\vec{n}(2;1;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) يكافئ أن: $(\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}) \wedge (\vec{n} \perp \overrightarrow{AB})$

$(\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}) \wedge (\vec{n} \perp \overrightarrow{AC})$ تكافئ أن: $(\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0) \wedge (\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0)$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2\left(-\frac{2}{3}\right) + 1 \times \left(-\frac{8}{3}\right) - 3 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2(-4) + 1 \times (-1) - 3 \times (-3) = 0 \end{cases}$$

و منه: $\vec{n}(2;1;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

- تعيين معادلة للمستوي (ABC).

معادلة (ABC) من الشكل $2x + y - 3z + d = 0$

و لإيجاد d نعوض إحداثيات A أو B أو C في معادلة (ABC)

نعوض A مثلاً: $2(1) + y(2) - 3(2) + d = 0$ بعد التبسيط نجد: $d = 4$

إذن: $(ABC): 2x + y - 3z + 4 = 0$

(2) المعادلة الديكارتية للمستوي (P)

$$\begin{cases} x = 1 + 3\alpha + \beta \\ y = 1 + 3\alpha \\ z = 2 - 3\beta \end{cases} \quad \text{التمثيل الوسيط للمستوي (P) هو: } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

من (1) لدينا: $\beta = x - 1 - 3\alpha$

من (2) لدينا: $\alpha = \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}$

نعوض α و β في (3) نجد: $z = 2 - 3\left(x - 1 - 3\left(\frac{1}{3}y - \frac{1}{3}\right)\right)$

$$z = 2 - 3(x - 1 - y + 1)$$

$$z = 2 - 3x + 3y$$

$$3x - 3y + z - 2 = 0$$

ومنه :

$$\begin{cases} x = 1 + 3\alpha + \beta \\ y = 1 + 3\alpha \\ z = 2 - 3\beta \end{cases} \quad ; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

من المعادلة (1) لدينا: $\beta = x - 1 - 3\alpha$

$$\begin{cases} x = 1 + 3\alpha + \beta \dots\dots(1) \\ y = 1 + 3\alpha \dots\dots\dots(2) \\ z = 2 - 3\beta \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 3\alpha + \beta \dots\dots(1) \\ y = 1 + 3\alpha \dots\dots\dots(2) \\ z = 2 - 3\beta \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 3\alpha + \beta \dots\dots(1) \\ y = 1 + 3\alpha \dots\dots\dots(2) \\ z = 2 - 3\beta \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

و منه المعادلة الديكارتية للمستوي (P) هي: $(P): 3x - 3y + z - 2 = 0$

- إثبات أن (ABC) و (P) متعامدان:

$$(ABC) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{n}_p \perp \vec{n}_{(ABC)}$$

$$\vec{n}_p \perp \vec{n}_{(ABC)} \Leftrightarrow \vec{n}_p \cdot \vec{n}_{(ABC)} = 0$$

$$\vec{n}_p \cdot \vec{n}_{(ABC)} = (2 \times 3) + (1 \times (-3)) + (1 \times (-3))$$

$$\vec{n}_p \cdot \vec{n}_{(ABC)} = 0$$

(3)

أ- التحقق أن $E(-2; -3; -1)$ نقطة من (Δ) :

$$\begin{cases} 2(-2) + (-3) - 3(-1) + 4 = 0 \\ 3(-2) - 3(-3) - 1 - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow E \in (\Delta) \text{ و منه :}$$

نستنتج أن: $E(-2; -3; -1)$ نقطة من (Δ) .

ب- إثبات أنَّ $\vec{u}(8; 11; 9)$ شعاع توجيه لـ (Δ) ثم اكتب تمثيلا وسيطيا لـ (Δ)

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n}_{(ABC)} = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{n}_{(P)} = 0 \end{cases} \text{ يعني: } \vec{u}(8; 11; 9)$$

و منه:

$$\vec{u}(8; 11; 9) \text{ شعاع توجيه لـ } (\Delta)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n}_{(ABC)} = 0 \text{ و منه: } \vec{u} \cdot \vec{n}_{(ABC)} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 16 + 11 - 27$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n}_{(P)} = 0 \text{ و منه: } \vec{u} \cdot \vec{n}_{(ABC)} = \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 24 - 33 + 9$$

- التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) :
لدينا:

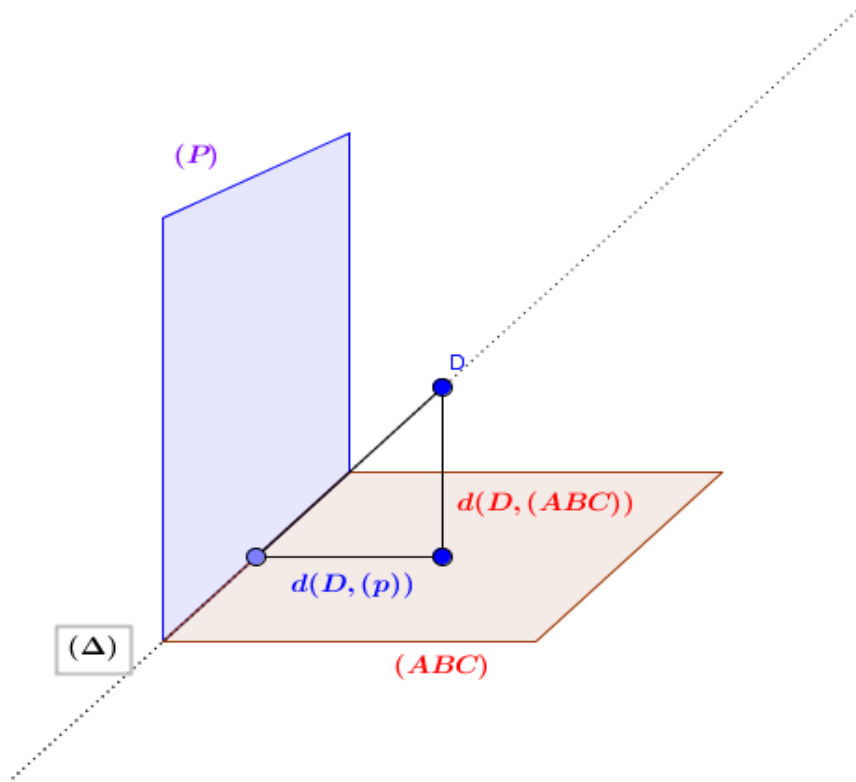
- $\vec{u}(8; 11; 9)$ شعاع توجيه لـ (Δ)

- $E(-2; -3; -1)$ نقطة من (Δ)

$$(\Delta): \begin{cases} x = 8t - 2 \\ y = 11t - 3 \\ z = 9t - 1 \end{cases} \text{ و منه التمثيل الوسيطي للمستقيم : } (t \in \mathbb{R})$$

(4)

أ- حساب المسافة بين النقطة D والمستقيم (Δ) :



$$d(D, (P)) = \frac{|3x_D - 3y_D + z_D - 2|}{\sqrt{(3)^2 + (-3)^2 + (1)^2}}$$

$$d(D, (P)) = \frac{|3(1) - 3(-1) + (4) - 2|}{\sqrt{(3)^2 + (-3)^2 + (1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{19}}$$

$$d(D, (ABC)) = \frac{|2x_D + y_D - 3z_D + 4|}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-3)^2}}$$

$$d(D, (ABC)) = \frac{|2(1) + (-1) - 3(4) + 4|}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-3)^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}}$$

$$(d(D, (\Delta)))^2 = (d(D, (ABC)))^2 + (d(D, (P)))^2$$

$$(d(D, (\Delta)))^2 = \left(\frac{7}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{8}{\sqrt{19}}\right)^2$$

$$d(D, (\Delta)) = \sqrt{\frac{1827}{266}}$$

ب - إثبات أنَّ المثلث ABC قائم:
لدينا :

$$AB = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{28}{3}} \text{ ومنه : } \overrightarrow{AB} \left(-\frac{2}{3}; -\frac{8}{3}; -\frac{4}{3}\right)$$

$$AC = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{26} \text{ ومنه : } \overrightarrow{AC} (-4; -1; -3)$$

$$CB = \sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{3}} \text{ ومنه : } \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+3 \\ -\frac{8}{3}+1 \\ \frac{2}{3}+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix};$$

نلاحظ أنَّ:

$$AB^2 + CB^2 = \frac{28}{3} + \frac{50}{3} = 26$$

$$AB^2 + CB^2 = AC^2$$

و منه : حسب نظرية فيثاغورث نستنتج أنَّ المثلث ABC قائم في B

- حجم رباعي الوجوه ABCD :

$$V_{ABCD} = \frac{S_{ABC} \times d(D, (ABC))}{3}$$

- حساب مساحة المثلث ABC :

$$S_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{\sqrt{\frac{28}{3}} \times \sqrt{\frac{50}{3}}}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{\frac{28}{3}} \times \sqrt{\frac{50}{3}}}{2} = \frac{\sqrt{1400}}{6}$$

$$V_{ABCD} = \frac{\frac{\sqrt{1400}}{6} \times \frac{7}{\sqrt{14}}}{3} = \frac{70}{18}$$

إذن:

$$V_{ABCD} = \frac{35}{9} (\text{unité de volume})$$

التمرين الثالث :

(1) عدد الحالات الممكنة للسحب :

السحب في آن واحد نستعمل التوفيقية :

$$\text{عدد الحالات الممكنة : } \text{card}(\Omega) = C_7^3 = 35$$

(2) الحدث A "الحصول على كرتين بالضبط لونهما ابيض"

تقديره: كرتان بيضاوان، وَ كرية سوداء.

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_3^2 \times C_4^1}{C_7^3}$$

$$p(A) = \frac{3 \times 4}{35} = \frac{12}{35}$$

(3) الحدث B " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "

تقديره: 3 كرات بيضاء أو 3 كرات سوداء

$$p(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_3^3 + C_4^3}{C_7^3}$$

$$p(B) = \frac{1 + 4}{35} = \frac{1}{7}$$

(4) الحدث C " احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل "

نحل هذا السؤال بطريقتين:

الطريقة الأولى:

الحدث C تقديره: الحصول على كرة بيضاء و 2 سوداء، أو 2 بيضاء و واحدة سوداء، أو 3 بيضاء

$$p(C) = \frac{\text{card}(c)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_3^1 \times C_4^2 + C_3^2 \times C_4^1 + C_3^3 \times C_4^0}{C_7^3}$$

$$= \frac{(3 \times 6) + (3 \times 4) + 1}{35} = \frac{31}{35}$$

الطريقة الثانية : نستعمل الحدث العكسي $\bar{C}$

$\bar{C}$ تقديره: عدم الحصول على أية كرة بيضاء أي 3 سوداء

تصبح :

$$P(\bar{C}) = \frac{4}{35} \text{ و منه : } P(\bar{C}) = \frac{\text{card}(\bar{C})}{\text{card}(\Omega)} = \frac{C_4^3}{C_7^3}$$

$$p(C) = 1 - p(\bar{C})$$

$$= 1 - \frac{4}{35}$$

$$= \frac{31}{35}$$

التمرين الرابع :

1/ أ/ حساب النهايات

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(x-1)^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x+1}{x-1}} = e^1 \end{cases} \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} = 0$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{(x-1)^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{x+1}{x-1}} = +\infty \end{cases} \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{(x-1)^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x+1}{x-1}} = e^1 \end{cases} \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} = 0$$

التفسير الهندسي:

✓ $y = 0$ مستقيم مقارب يوازي محور الفواصل.

✓ $x = 1$ مستقيم مقارب يوازي محور الترتيب.

ب/

نضع: (1) $t = \frac{2}{x-1}$ و منه: $t^2 = \frac{4}{(x-1)^2}$ بتقسيم الطرفين على العدد 2. نجد: $\frac{t^2}{2} = \frac{2}{(x-1)^2}$

و لدينا أيضاً: (2) $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

للتوضيح: $\frac{x+1+1-1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

من (1) و (2) نستنتج أن: $\frac{x+1}{x-1} = 1+t$

لدينا: $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$ بتغير المتغير تصبح: $f(t) = \frac{t^2}{2} e^{1+t} = \frac{t^2}{2} e^t e^1$

إذن: $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^2}{2} e^t e^1 = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t)$

2/ تبين أنه من أجل كل x من المجال $R - \{1\}$ فإن: $f'(x) = \frac{-4x}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}}$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left[\frac{2}{(x-1)^2} \right]' e^{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{2}{(x-1)^2} \left[e^{\frac{x+1}{x-1}} \right]' \\
 f'(x) &= \frac{-4(x-1)}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{2}{(x-1)^2} \times \frac{-2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} \\
 f'(x) &= \frac{-4x+4}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}} + \frac{-4}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}} \\
 f'(x) &= \frac{-4x}{(x-1)^4} e^{\frac{x+1}{x-1}}
 \end{aligned}$$

(3) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

إشارة المشتقة $f'(x)$ من إشارة $-4x$ ،

ومنه f متزايدة على المجال $]-\infty; 0]$ و متناقصة على المجالين $[0; 1[$ و $]1; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
$f(x)$	0	$\frac{2}{e}$	$+\infty$	0

(4) تبين أنه على المجال $]1; +\infty[$ ، المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حلان أحدهما -1 والآخر α حيث $0.4 < \alpha < 0.5$

لدينا $f(-1) = \frac{2}{(-1-1)^2} e^0$ ومنه $f(-1) = \frac{1}{2}$ (محققة)

على المجال $[0; 1[$ نلاحظ أن الدالة f :

مستمرة ورتيبة (متناقصة تماما) و $f(0.4) < \frac{1}{2} < f(0.5)$.

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن: المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.4 < \alpha < 0.5$

(5) انشاء المنحنى



(6) المناقشة البيانية: حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (c_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = m$. إذا كان: $m \leq 0$ المعادلة لا تقبل حلولاً.

إذا كان: $0 < m < \frac{2}{e}$ المعادلة تقبل ثلاثة حلول (حلان موجبان والآخر سالب).

إذا كان: $m = \frac{2}{e}$ المعادلة تقبل حلان أحدهما موجب والآخر معدوم.

إذا كان: $m > \frac{2}{e}$ المعادلة تقبل حل واحد موجب.

(7) أ/ حساب $g'(x)$: $g'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$

ب/ كتابة $f(x)$ بدلالة $g(x)$ و $g'(x)$: $f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}}$

$f(x) = -g'(x)e^{g(x)}$

ج/ استنتاج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty; 1[$:

لتكن F أصلية للدالة f ومنه $F(x) = -e^{g(x)}$ أي $F(x) = -e^{\frac{x+1}{x-1}}$

(8) حساب بدلالة β المساحة $A(\beta)$:

$$\begin{aligned} A(\beta) &= \int_{\beta}^0 f(x) dx = [F(x)]_{\beta}^0 \\ &= \left[-e^{\frac{x+1}{x-1}} \right]_{\beta}^0 = -e^{-1} - \left(-e^{\frac{\beta+1}{\beta-1}} \right) \\ &= e^{\frac{\beta+1}{\beta-1}} - e^{-1} \quad (u.a) \end{aligned}$$

ب/ حساب النهاية: $\lim_{\beta \rightarrow -\infty} A(\beta) = e - e^{-1} = \frac{e^2 - 1}{e}$

انتهى بحمد الله وفضله
تصحيح البكالوريا التجريبي "الموضوع الأول"
في مادة: الرياضيات
لسنوات الثالثة علوم تجريبية
بثانويات ولاية الأغواط
راجين من المولى عز وجل
أن يجعل ثوابه في ميزان حسنات الوالدين
آمين

BAC
2016

zebda A

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

مديرية التربية لولاية الأغواط

ثانويات ولاية الأغواط

التصحيح المفصل للبكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات

شعبة : العلوم التجريبية

2016-2015

5012-5012

الوزارة : التربية الوطنية

الموضوع الثَّاني

التمرين الأول:

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{4}{3}n + \frac{4}{3} \end{cases} \text{ و منه } \begin{cases} U_0 = 3 \\ 3U_{n+1} = U_n + 4n + 4 \end{cases} \text{ لدينا:}$$

(1) حساب U_3, U_2, U_1 :

$$\begin{aligned} U_3 = U_{2+1} &= \frac{1}{3}U_2 + \frac{4}{3} \times (2) + \frac{4}{3} & U_2 = U_{1+1} &= \frac{1}{3}U_1 + \frac{4}{3} \times (1) + \frac{4}{3} & U_1 = U_{0+1} &= \frac{1}{3}U_0 + \frac{4}{3} \times 0 + \frac{4}{3} \\ U_3 &= \frac{1}{3} \left(\frac{31}{9} \right) + \frac{4}{3} = \frac{139}{27} & U_2 &= \frac{1}{3} \left(\frac{7}{3} \right) + \frac{4}{3} = \frac{31}{9} & U_1 &= \frac{1}{3}(3) + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

(2)

أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: U_n > 0$

1- التحقق: من أجل $n=0$

لدينا: $U_0 = 3 > 0$ إذن الخاصية مُحَقَّقة

2- الفرضية: نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي: $U_n > 0$

و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي: $U_{n+1} > 0$

لدينا حسب الفرضية: $U_n > 0$

بالمضرب في العدد $\frac{1}{3}$ نجد: $\frac{1}{3}U_n > 0$

نعلم أن: $\frac{4}{3}n + \frac{4}{3} > 0$

و منه: $\frac{1}{3}U_n + \frac{4}{3}n + \frac{4}{3} > 0$ أي: $U_{n+1} > 0$

3- نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل n أي: $U_n > 0$

ب- إستنتاج أن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ فإن: $U_n > \frac{4}{3}$

$$U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{4}{3}n + \frac{4}{3} \Rightarrow U_n = \frac{1}{3}U_{n-1} + \frac{4}{3}(n-1) + \frac{4}{3} \text{ لدينا:}$$

$$U_n = \frac{1}{3}U_{n-1} + \frac{4}{3}(n-1) + \frac{4}{3}$$

$$U_n = \frac{1}{3}U_{n-1} + \frac{4}{3}n - \frac{4}{3} + \frac{4}{3}$$

$$U_n = \frac{1}{3}U_{n-1} + \frac{4}{3}n$$

و منه: $3U_n = 3U_{n-1} + 4n$

$$3U_{n-1} = 3U_n - 4n; \dots (\otimes) \text{ و منه: } 3U_n = 3U_{n-1} + 4n$$

$$U_{n-1} > 0 \text{ و منه: } U_n > 0$$

$$\otimes \Leftrightarrow 3U_n - 4n > 0$$

$$\Leftrightarrow U_n > \frac{4}{3}n$$

ج- نهاية U_n

$$\text{لدينا: } U_n > \frac{4}{3}n \text{ و منه } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n > \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{3}n$$

$$\text{بما أن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{3}n = +\infty \text{ فإن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

(2)

نستنتج أن:

$$\text{بما أن: } U_n > 0 \text{ فإن: } U_{n-1} > 0$$

(3)

من أجل كل $(n \in \mathbb{N})$ لدينا: $V_n = U_n - 2n + 1$

أ- إثبات أن (V_n) متتالية هندسية:

(V_n) هندسية يعني: $V_{n+1} = V_n \cdot q$ حيث $q \in \mathbb{R}$: يسمى أساسها

$$\text{لدينا: } V_n = U_n - 2n + 1$$

و منه:

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 2(n+1) + 1$$

$$= \frac{1}{3}U_n + \frac{4}{3}n + \frac{4}{3} - 2n - 2 + 1$$

$$= \frac{1}{3}U_n + \frac{4}{3}n + \frac{4}{3} - 2n - 1$$

$$= \frac{1}{3}U_n + \frac{4}{3}n + \frac{4}{3} - \frac{6}{3}n - \frac{3}{3}$$

$$= \frac{1}{3}U_n - \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}(U_n - 2n + 1)$$

$$= \frac{1}{3}V_n$$

$$= qV_n$$

و منه: (V_n) متتالية هندسية أساسها: $q = \frac{1}{3}$

$$V_0 = U_0 - 2(0) + 1$$

$$V_0 = 3 + 1 = 4$$

و حدّها العام: $V_n = V_0 \times q^n$

$$\text{ت-ع: } V_n = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

ب- إستنتاج أن: $U_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n - 1$

لدينا: $V_n = U_n - 2n + 1$

و منه:

و منه: $U_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n - 1$ و $U_n = V_n + 2n - 1$

ج- حساب بدلالة n المجموع S_n المعرف من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

$$S_n = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$S_n = 4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}$$

$$S_n = 4 \times \frac{3}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$S_n = 6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

إستنتاج بدلالة n المجموع T_n :

لدينا: $T_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ و مما سبق لدينا: $U_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n - 1$

$$T_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^0 + 2(0) - 1 + 4\left(\frac{1}{3}\right)^1 + 2(1) - 1 + \dots + 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n - 1$$

$$T_n = \underbrace{4\left(\frac{1}{3}\right)^0 + 4\left(\frac{1}{3}\right)^1 + \dots + 4\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{S_n} + \underbrace{2((0) + (1) + \dots + n)}_{=2\left[\frac{(n+1)(0+n)}{2}\right]} - 1(n+1)$$

$$T_n = 6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + (n+1)(n) - 1(n+1)$$

$$T_n = 6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + (n+1)(n-1)$$

التمرين الثاني:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

نعتبر النقط: $A(1; 0; -2), B(3; 1; 0), C(1; 0; 1)$

(1) معادلة سطح الكرة (S) التي مركزها A و تشمل B:

معادلة (S) من الشكل: $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = R^2$

(S) مركزها A و تشمل B يعني نصف قطرها هو AB أي $R=AB$

✓ حساب AB:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(3-1)^2 + (1-0)^2 + (0+2)^2}$$

$$AB = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$$

إذن:

$$(S): (x - 1)^2 + (y - 0)^2 + (z + 2)^2 = 3^2$$

$$(S): x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 + 4z + 4 = 9$$

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z + 5 = 9$$

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 4 = 0$$

(2) (Δ) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء حيث:

$$(\Delta): \begin{cases} x + 2z - 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

(Δ) هو تقاطع المستويين $(Q_1): x + 2z - 3 = 0$ و $(Q_2): y + z - 1 = 0$

$$\begin{cases} (1): \vec{u} \perp \vec{n}_{(Q_1)} \\ (2): \vec{u} \perp \vec{n}_{(Q_2)} \\ (3): B \in (Q_1) \\ (4): B \in (Q_2) \end{cases} \quad \vec{u}(-2; -1; 1) \text{ شعاع توجيه } (\Delta) \text{ و } B \in (\Delta) \text{ يعني:}$$

(4)	(3)	(2)	(1)
$B \in (Q_2) \Leftrightarrow y_B + z_B - 1 = 0$ $(1) + (0) - 1 = 0$ ومنه: $B \in (Q_2)$	$B \in (Q_1) \Leftrightarrow x_B + 2z_B - 3 = 0$ $3 + 2(0) - 3 = 0$ ومنه: $B \in (Q_1)$	$\vec{u} \perp \vec{n}_{(Q_2)} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n}_{(Q_2)} = 0$ $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -0 - 1 + 1 = 0$ ومنه: $\vec{u} \perp \vec{n}_{(Q_2)}$	$\vec{u} \perp \vec{n}_{(Q_1)} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n}_{(Q_1)} = 0$ $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 - 0 + 2 = 0$ ومنه: $\vec{u} \perp \vec{n}_{(Q_1)}$

من الجدول السابق نستنتج أنَّ: **$\vec{u}(-2; -1; 1)$ شعاع توجيه (Δ) و $B \in (\Delta)$**

طريقة ثانية:

$$\begin{cases} x + 2z - 3 = 0, \dots (1) \\ y + z - 1 = 0, \dots (2) \end{cases} \quad \text{نحل الجملة}$$

من (1) لدينا: $x = 3 - 2z$

من (2) لدينا: $y = 1 - z$

نضع: $z = t$ حيث: $(t \in \mathbb{R})$

من (Φ) نستنتج أنَّ **$\vec{u}(-2; -1; 1)$ شعاع توجيه (Δ)**

$$B \in (\Delta) \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 3 - 2t \\ y_B = 1 - t \\ z_B = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = 0 \\ t = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3 = 3 - 2t \\ 1 = 1 - t \\ 0 = t \end{cases} \quad \text{نجد: } (\Delta) \text{ نعوض إحداثيات } B \text{ في التمثيل الوسيط لـ } (\Delta)$$

إذن: **$\vec{u}(-2; -1; 1)$ شعاع توجيه (Δ) و $B \in (\Delta)$**

سؤال إضافي: برهن أن (Δ) هو مستقيم تقاطع المستويين (Q_1) و (Q_2) .

$$\text{حيث: } \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} (\Delta) \text{ و لدينا: } \begin{cases} x + 2z - 3 = 0; \dots (Q_1) \\ y + z - 1 = 0; \dots (Q_2) \end{cases}$$

(Δ) هو تقاطع المستويين $(Q_1): x + 2z - 3 = 0$ و $(Q_2): y + z - 1 = 0$

(Q_1) و (Q_2) غير متوازيين. لأن: $\vec{n}_{(Q_1)}$ و $\vec{n}_{(Q_2)}$ غير مرتبطان خطياً.

يكون (Q_1) و (Q_2) متقاطعان في المستقيم (Δ) إذا تحقق مايلي: $((\Delta) \subset (Q_1)) \wedge ((\Delta) \subset (Q_2))$.

* بتعويض $x; y$ و z الموجودة في التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) في معادلة (Q_1) نجد:

$$3 - 2t + 2t - 3 = 0 \text{ و منه: } (\Delta) \subset (Q_1).$$

* بتعويض $x; y$ و z الموجودة في التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) في معادلة (Q_2) نجد:

$$1 - t + t - 1 = 0 \text{ و منه: } (\Delta) \subset (Q_2).$$

(3) معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A ويعامد (Δ) :

$(P) \perp (\Delta)$ يعني ذلك أن: $\vec{u}(-2; -1; 1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P)

معادلة (P) من الشكل: $(P): -2x - y + z + d = 0$

$$-2(1) - (0) + (-2) + d = 0 \Rightarrow d = 4 \text{ و منه: } A \in (P) \Leftrightarrow -2x_A - y_A + z_A + d = 0$$

$$\text{إذن: } (P): -2x - y + z + 4 = 0$$

(4).

أ- تعيين إحداثيات نقطة تقاطع (Δ) و المستوي (P)

1- نعوض إحداثيات التمثيل الوسيطى لـ: (Δ) في معادلة المستوي (P) .

2- نبحث عن قيمة t .

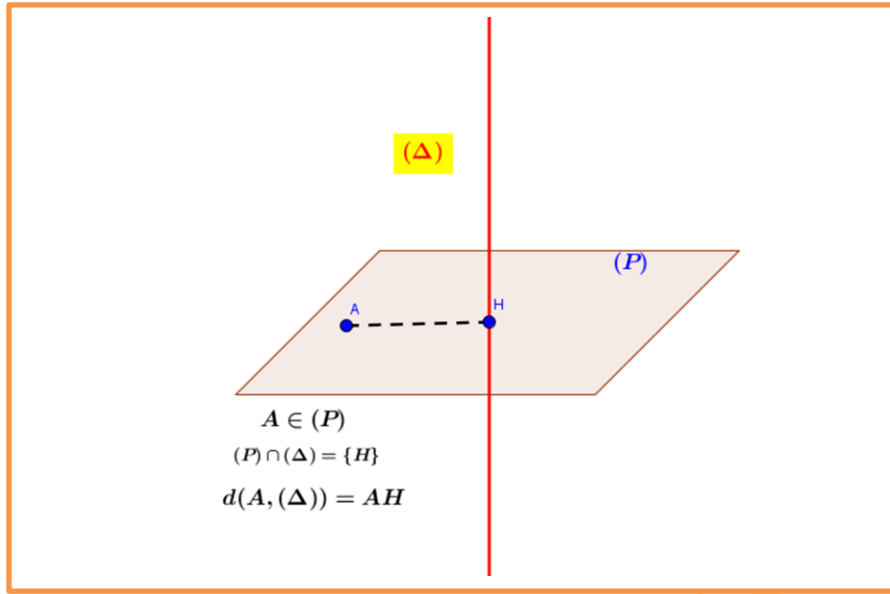
3- نعوض قيمة t في التمثيل الوسيطى لـ: (Δ) .

$$-2(3 - 2t) - (1 - t) + t + 4 = 0 \text{ بعد التبسيط نجد: } t = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ بعد التبسيط نجد: } \begin{cases} x = 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right) \\ y = 1 - \frac{1}{2} \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

نستنتج أن: $(P) \cap (\Delta) = \{H\}$ حيث $H\left(2; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

ب- بعد النقطة A عن المستقيم (Δ) :



$$AH = \sqrt{(x_H - x_A)^2 + (y_H - y_A)^2 + (z_H - z_A)^2}$$

$$AH = \sqrt{(2-1)^2 + \left(\frac{1}{2}-0\right)^2 + \left(\frac{1}{2}+2\right)^2}$$

$$AH = \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$AH = \sqrt{\frac{30}{4}}$$

* إستنتاج أن (Δ) يقطع (S) في نقطتين:

$$AH = \sqrt{\frac{30}{4}} \approx 2.74 \text{ لدينا:}$$

$$d(A, (\Delta)) = AH < R \text{ أي:}$$

و منه: (Δ) يقطع (S) في نقطتين

5) G مرجح الجملة $\{(C; 1), (B; e^t)\}$ حيث $(t \in \mathbb{R})$

$$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{1+e^t} \overrightarrow{BC} \text{ أ- إثبات أن}$$

لدينا: G مرجح الجملة $\{(C; 1), (B; e^t)\}$ يعني ذلك أن: $(\Psi): 1 \times \overrightarrow{GC} + e^t \times \overrightarrow{GB} = \vec{0}, \dots$

$$(\Psi) \Leftrightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BC} + e^t \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (1+e^t) \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (1+e^t) \overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GB} = \frac{-1}{(1+e^t)} \overrightarrow{BC}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{1}{(1+e^t)} \overrightarrow{BC}$$

بـ

لدينا: $f: t \mapsto \frac{1}{1+e^t}$ حيث $t \in \mathbb{R}$

- دراسة تغيرات الدالة f :

1- النهايات

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^t} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(t) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^t} = 1$$

2- الدالة المشتقة:

من أجل كل $t \in \mathbb{R}$ لدينا: $f': t \mapsto \frac{-1}{(1+e^t)^2}$ وهذا ما يدل على أن f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

3- جدول التغيرات:

t	$-\infty$	$+\infty$
$f'(t)$	-	
$f(t)$	1	0

ج- إستنتاج مجموعة النقط G عندما t يسمح $\mathbb{R}$:
لدينا:

$$\overrightarrow{BG} = \frac{1}{(1+e^t)} \overrightarrow{BC} \quad (1)$$

$$\frac{1}{(1+e^t)} \in]0; 1[\quad (2) \quad \text{من جدول تغيرات الدالة } f.$$

إذن: نستنتج أن $\overrightarrow{BG} = k \overrightarrow{BC}$ حيث: $k = \frac{1}{(1+e^t)}$ و $k \in]0; 1[$

و منه: مجموعة النقط G عندما t يسمح $\mathbb{R}$ هي $]BC[$

التمرين الثالث:

لدينا:

المستوي منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{U}; \vec{V})$

النقط A, B و C لواحقتها $Z_A = -2i$ و $Z_B = -\sqrt{3} + i$ و $Z_C = \sqrt{3} + i$

(1)

أ- الشكل الأسي:

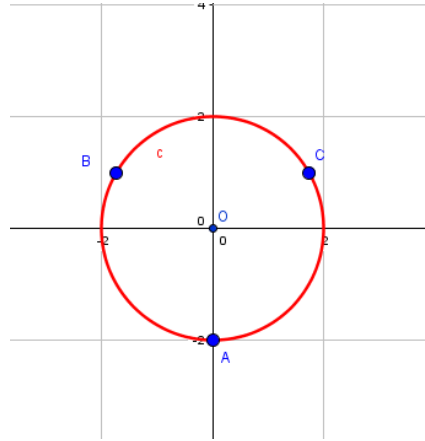
$Z = Z e^{i\alpha}$	$\arg(Z): \begin{cases} \cos \alpha = \frac{x}{ Z } \\ \sin \alpha = \frac{y}{ Z } \end{cases}$	$ Z = \sqrt{x^2 + y^2}$	$Z = x + iy$
$Z_A = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$	$\arg(Z_A): \begin{cases} \cos \alpha = \frac{0}{2} \\ \sin \alpha = \frac{-2}{2} \end{cases}$ $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi. \quad (k \in \mathbb{Z})$	$ Z_A = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$	$Z_A = -2i$
$Z_B = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$	$\arg(Z_B): \begin{cases} \cos \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\alpha = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$ $\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi. \quad (k \in \mathbb{Z})$	$ Z_B = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$	$Z_B = -\sqrt{3} + i$
$Z_C = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$	$\arg(Z_C): \begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi. \quad (k \in \mathbb{Z})$	$ Z_C = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$	$Z_C = \sqrt{3} + i$

ب- مركز و نصف قطر الدائرة (C) :

نلاحظ أن: $OA = OB = OC = 2$ و يعني ذلك أن: $|Z_A| = |Z_B| = |Z_C| = 2$

و منه: النقط A, B و C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها 2.

ج- تعلیم النقط B, A و C :



(2)

1- كتابة العدد $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ على الشكل الجبري ثم الأسّي :

* الشكل الجبري:

$$\begin{aligned}\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} &= \frac{-\sqrt{3} + i - (-2i)}{\sqrt{3} + i - (-2i)} \\ \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} &= \frac{-\sqrt{3} + 3i}{\sqrt{3} + 3i} \\ \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} &= \frac{(-\sqrt{3} + 3i)(\sqrt{3} - 3i)}{(\sqrt{3} + 3i)(\sqrt{3} - 3i)} \\ \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} &= \frac{-3 + 3i\sqrt{3} + 3i\sqrt{3} + 9}{3 + 9} \\ \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} &= \frac{6 + 6i\sqrt{3}}{12} \\ \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} &= \frac{6 + 6i\sqrt{3}}{12} \\ \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} &= \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

الشكل الأسّي:

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

و منه:

$$\begin{aligned} \arg \left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} \right) &= \arg \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \arg \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \left(\frac{\pi}{3} \right) + 2k\pi. \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} \left| \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} \right| &= \left| \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right| \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} \\ &= 1 \end{aligned} \right.$$

نستنتج أن: $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$
* طبيعة المثلث ABC :

$$\left| \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} \right| = \left[1; \frac{\pi}{3} \right], \dots (\Phi)$$

$$\Leftrightarrow (\Phi) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AB}{AC} = 1 \\ \left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB} \right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

(3) r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ- إثبات أن O' صورة النقطة O بالدوران r . حيث: $Z_{O'} = -\sqrt{3} - i$

العلاقة المركبة للدوران r هي: $(Z' - Z_A) = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z - Z_A)$

O' صورة النقطة O بالدوران r يعني $(Z_{O'} - Z_A) = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_O - Z_A)$

$$(-\sqrt{3} - i + 2i) = e^{i\frac{\pi}{3}}(2i) \text{ أي:}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_O - Z_A) &= e^{i\frac{\pi}{3}}(2i) \\ &= 2e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{2}} \\ &= 2e^{i\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}} \\ &= 2e^{i\frac{2\pi + 3\pi}{6}} \\ &= 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{O'} - Z_A &= -\sqrt{3} - i + 2i \\ &= -\sqrt{3} + i \\ &= Z_B \\ &= 2e^{i\frac{5\pi}{6}} \end{aligned}$$

مما سبق نستنتج أنَّ: $(Z_{O'} - Z_A) = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z_O - Z_A)$

أي: O' صورة النقطة O بالدوران r

ب- إثبات أنَّ $[OC]$ قُطر للدائرة (C) :

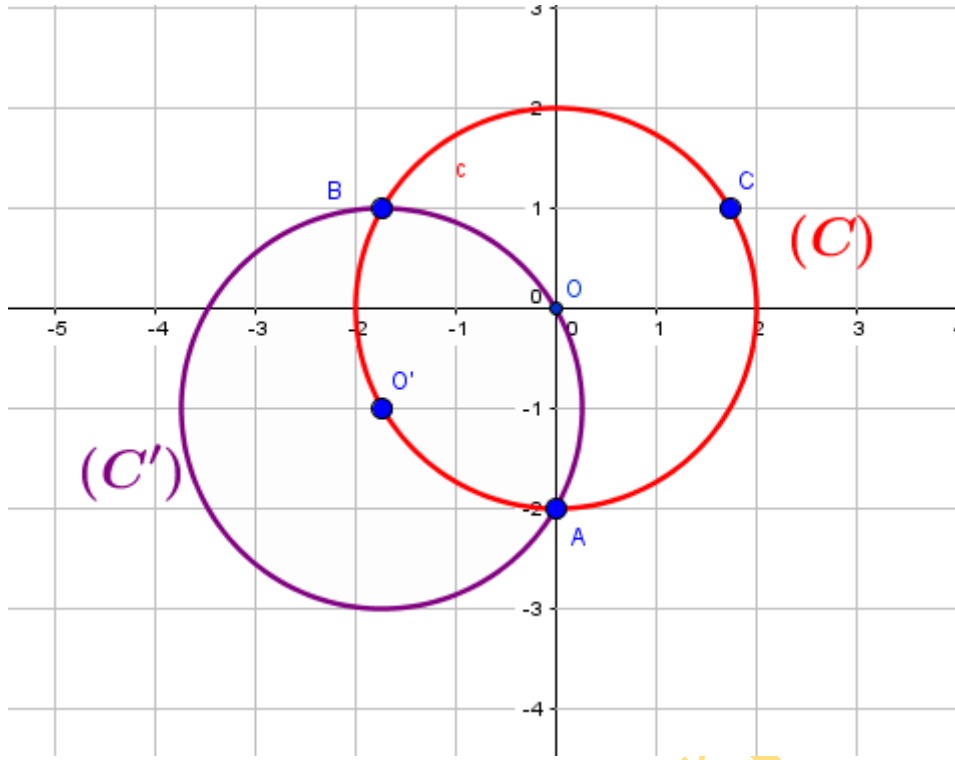
لدينا: قطر الدائرة (C) يساوي $2 \times 2 = 4$ من جهة
و من جهة أخرى لدينا:

$$\begin{aligned} O'C &= |Z_C - Z_{O'}| \\ O'C &= |\sqrt{3} + i - (-\sqrt{3} - i)| \\ O'C &= |2\sqrt{3} + 2i| \\ O'C &= \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2)^2} \\ O'C &= 4 \\ O'C &= 2 \times 2 \end{aligned}$$

نستنتج أنَّ $[OC]$ قُطر للدائرة (C)

إنشاء الدائرة (C') صورة الدائرة (C) بالدوران r

بما أنَّ: O' صورة النقطة O بالدوران r فإنَّ: (C') صورة الدائرة (C) بالدوران r



ج - التحقق أنَّ الدَّائرتين (C) و (C') تشتركان في النقطتين A و B .

من السؤال 1 - ب - لدينا: $(1) \dots (A \in (C)) \wedge (B \in (C))$

نثبت الآن أنَّ: $(A \in (C')) \wedge (B \in (C'))$

$$O'B = |Z_B - Z_{O'}|$$

$$O'B = |-\sqrt{3} + i + \sqrt{3} + i|$$

$$O'B = |2i|$$

$$O'B = 2$$

$$O'A = |Z_A - Z_{O'}|$$

$$O'A = |-2i + \sqrt{3} + i|$$

$$O'A = |-i + \sqrt{3}|$$

$$O'A = 2$$

إذن: $(2) \dots (A \in (C')) \wedge (B \in (C'))$

من (1) و (2) نستنتج أنَّ: (C) و (C') تشتركان في النقطتين A و B .

التمرين الرابع:

الجزء الأول:

لدينا: $g(x) = x^2 - 2x - 4\ln(x-1)$ و (Γ) تمثيلها البياني في الشكل الموالي:

1- تعيين عدد حلول المعادلة $g(x) = 0$ بقراءة بيانية:

من البيان نلاحظ أنَّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما $x = 2$ و الآخر α (مثلاً) حيث $\frac{5}{2} < \alpha < 3$
أي (Γ) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما $x = 2$ و α .

2- حساب $g(2)$:

بياناً: $g(2) = 0$ لأنَّ: (Γ) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $x = 2$

حساباً: $g(2) = (2)^2 - 2(2) - 4\ln(2-1) = 0$

3- إثبات أنَّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $2.87 < \alpha < 2.88$

من البيان: يظهر أنَّ الدالة g :

1- مستمرة على المجال $[1; +\infty[$ و بالتالي على المجال $[2.87; 2.88]$

2- متزايدة تماماً (رتيبة) على المجال $[2.5; +\infty[$ و بالتالي على المجال $[2.87; 2.88]$

ملاحظة: يمكن إثبات ذلك حسابياً.

3- لدينا أيضاً: $g(2.87) = -0.006$ و $g(2.88) = 0.009$ أي: $g(2.87) \times g(2.88) < 0$

إذن: حسب نظرية القيم المتوسطة فإنَّ: المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $2.87 < \alpha < 2.88$.

4- إستنتاج إشارة الدالة g حسب قيم x :

(C_g) : تحت محور الفواصل لما: $x \in]2; \alpha[$ و منه الدالة g سالبة تماماً على المجال $]2; \alpha[$.

(C_g) : تقطع محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين $x = 2$ و $x = \alpha$ و منه الدالة $g(x) = 0$ عند هاتين النقطتين.

(C_g) : فوق محور الفواصل لما: $x \in]1; 2[\cup]\alpha; +\infty[$ و منه الدالة g موجبة تماماً على المجال $]1; 2[\cup]\alpha; +\infty[$.

الجزء الثاني:

لدينا: $f(x) = x - 3 + 4\frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$ و $D_f =]1; +\infty[$

و: (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1)

أ- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 3 + 4\frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1} \right)$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x-1} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x-1} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 3 = +\infty$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u)}{u} = 0$$

إذن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب- حساب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(x - 3 + 4 \frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 1} \left(x - 3 + \frac{4 \ln(x-1) + 5}{(x-1)} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 1} \left(x - 3 + (4 \ln(x-1) + 5) \times \left(\frac{1}{(x-1)} \right) \right) \\&= 1 - 3 + (-\infty) \times (+\infty) \\&= -\infty\end{aligned}$$

للتوضيح

التفسير الهندسي: $x = 1$ مستقيم مقارب لـ (C_f) .

(2)

إثبات أن: $y = x - 3$ (Δ): مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 3)) = 0$ يعني: (C_f) بجوار $+\infty$

لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 3)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 3 + 4 \frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1} - (x - 3) \right) \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1} \right) \\&= 0\end{aligned}$$

ومنه: $y = x - 3$ (Δ): مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ب- إيجاد نقطة تقاطع (C_f) مع (Δ) :

$$f(x) = x - 3$$

لدينا:

$$f(x) = x - 3 \Leftrightarrow x - 3 + 4 \frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1} = x - 3$$

$$\Leftrightarrow 4 \frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4\ln(x-1) + 5}{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\ln(x-1) + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x-1) = \frac{-5}{4}$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(x-1)} = e^{\frac{-5}{4}}$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = e^{\frac{-5}{4}}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{\frac{-5}{4}} + 1$$

ج- دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) :

ندرس إشارة الفرق: $f(x) - (x - 3)$.

لدينا:

$$f(x) - (x - 3) = x - 3 + 4 \frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1} - (x - 3)$$

$$= 4 \frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$$

$$= \frac{4\ln(x-1) + 5}{x-1}$$

بما أن: $x \in]1; +\infty[$ فإن إشارة المقام $(x-1)$ موجبة تماماً.

- ندرس إشارة البسط: $4\ln(x-1) + 5 = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{-5}{4}} + 1$

الوضع النسبي:

لَمَّا: $1 < x < e^{\frac{-5}{4}} + 1$ يعني ذلك أن: $f(x) - (x - 3) < 0$ و منه: (C_f) يقع تحت (Δ) .

لَمَّا: $x = e^{\frac{-5}{4}} + 1$ يعني ذلك أن: $f(x) - (x - 3) = 0$ و منه: (C_f) يقطع (Δ) .

لَمَّا: $x > e^{\frac{-5}{4}} + 1$ يعني ذلك أن: $f(x) - (x - 3) > 0$ و منه: (C_f) يقع فوق (Δ) .

(3)

أ- إثبات أنه من أجل $x \in]1; +\infty[$ فإن: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$

لدينا: $f(x) = x - 3 + 4 \frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$
و منه:

$$f'(x) = 1 - 0 + 4 \times \frac{\frac{1}{x-1} \times (x-1) - (1) \times \ln(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{0 \times (x-1) - (1) \times 5}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{4 - 4\ln(x-1) + 5}{(x-1)^2} \quad \text{بالتبسيط نجد:}$$

نُوحِد المقامات:

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2} + \frac{4 - 4\ln(x-1) - 5}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2} + \frac{4 - 4\ln(x-1) - 5}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 1 + 4 - 4\ln(x-1) - 5}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 5 - 4\ln(x-1) - 5}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 4\ln(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$$

ب- استنتاج تغير الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها:
لدينا:

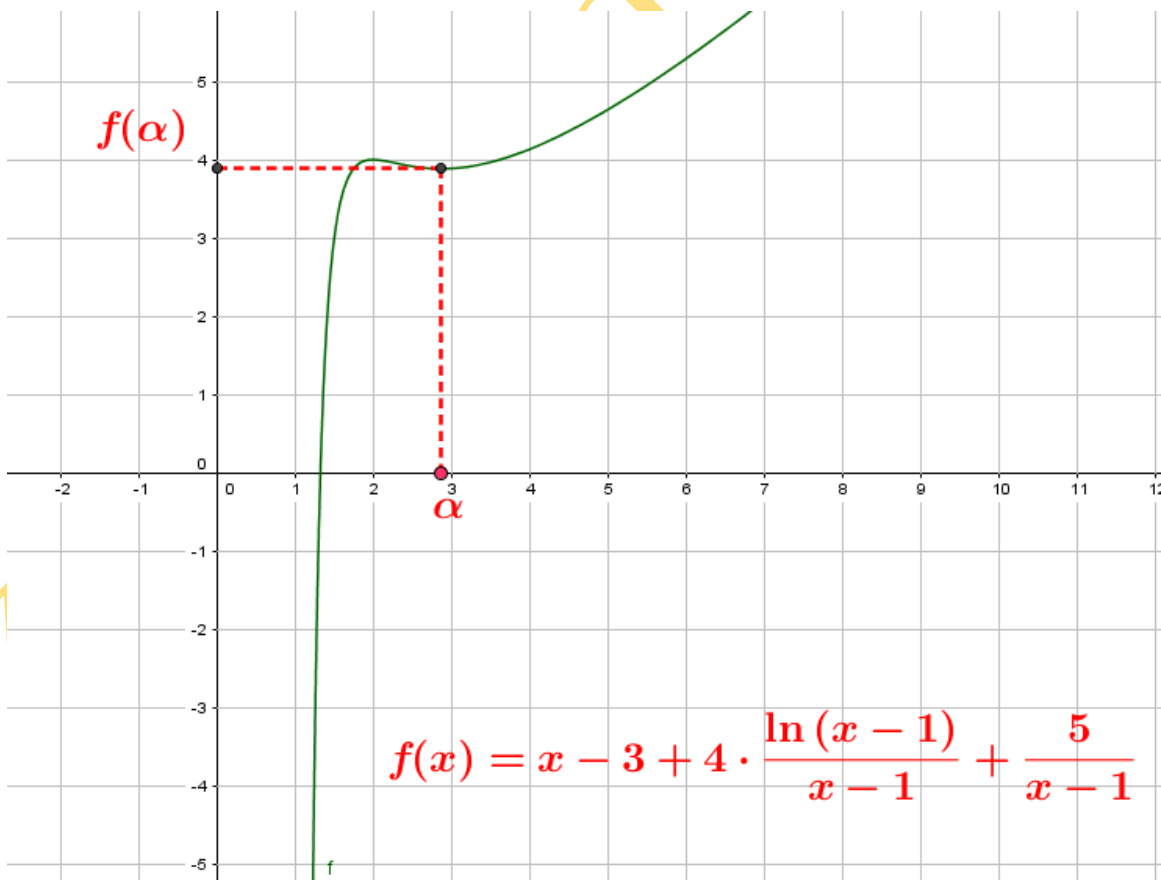
$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2} \text{ و هذا يعني أن إشارة الدالة } f' \text{ هي إشارة الدالة } g.$$

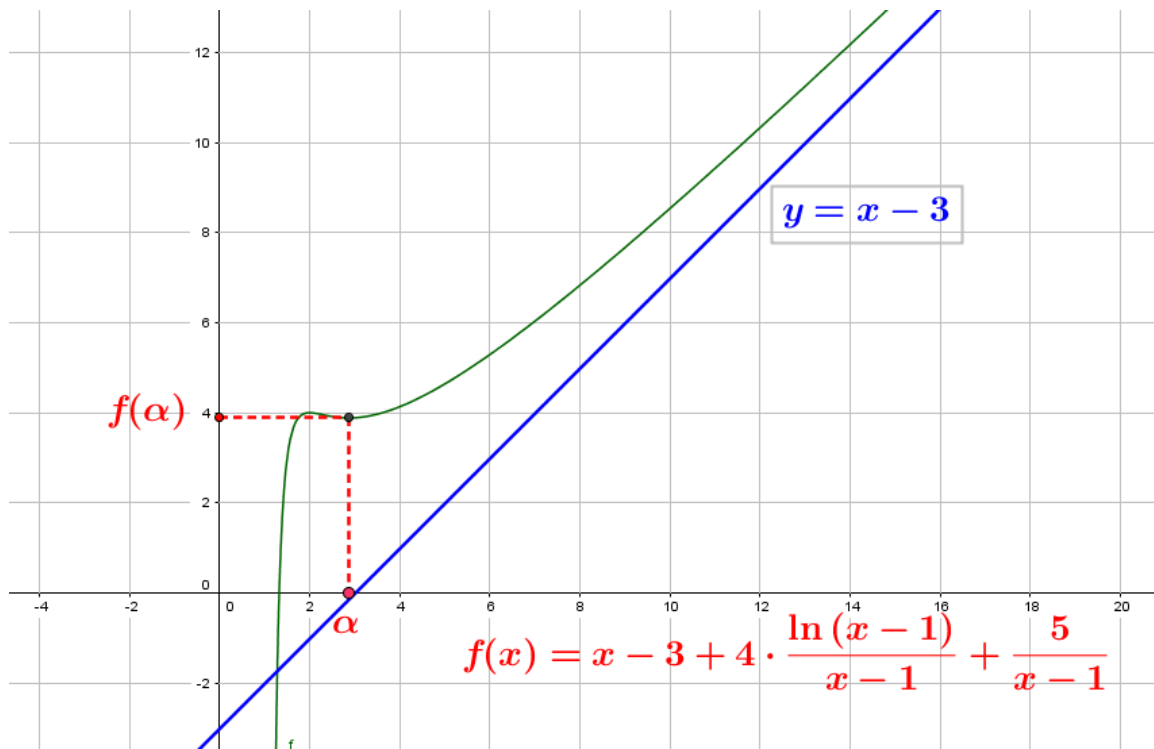
و إشارة الدالة g تمّ تعيين إشارتها في الجزء الأول.

إذن : يمكننا مباشرة إستنتاج جدول تغيرات الدالة f .

x	1	2	a	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	+
$f(x)$	$-\infty$	↗ 4 ↘	$f(a)$	↗ $+\infty$

(4) إنشاء (C_f) و (Δ) :





(5)

أ- تعيين مشتق الدالة: $h: x \mapsto [\ln(x-1)^2]$ و $D_h =]1; +\infty[$

$$\begin{aligned} [\ln(x-1)^2] &= 2 \frac{1}{x-1} \ln(x-1)^{2-1} \\ &= \frac{2 \ln(x-1)}{x-1} \end{aligned}$$

- تعيين F دالة أصلية للدالة f :

$$f(x) = x - 3 + 4 \frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1} \text{ لدينا:}$$

$$f(x) = x - 3 + 2 \times 2 \frac{\ln(x-1)}{x-1} + 5 \times \frac{1}{x-1} \text{ يمكن أن نكتب:}$$

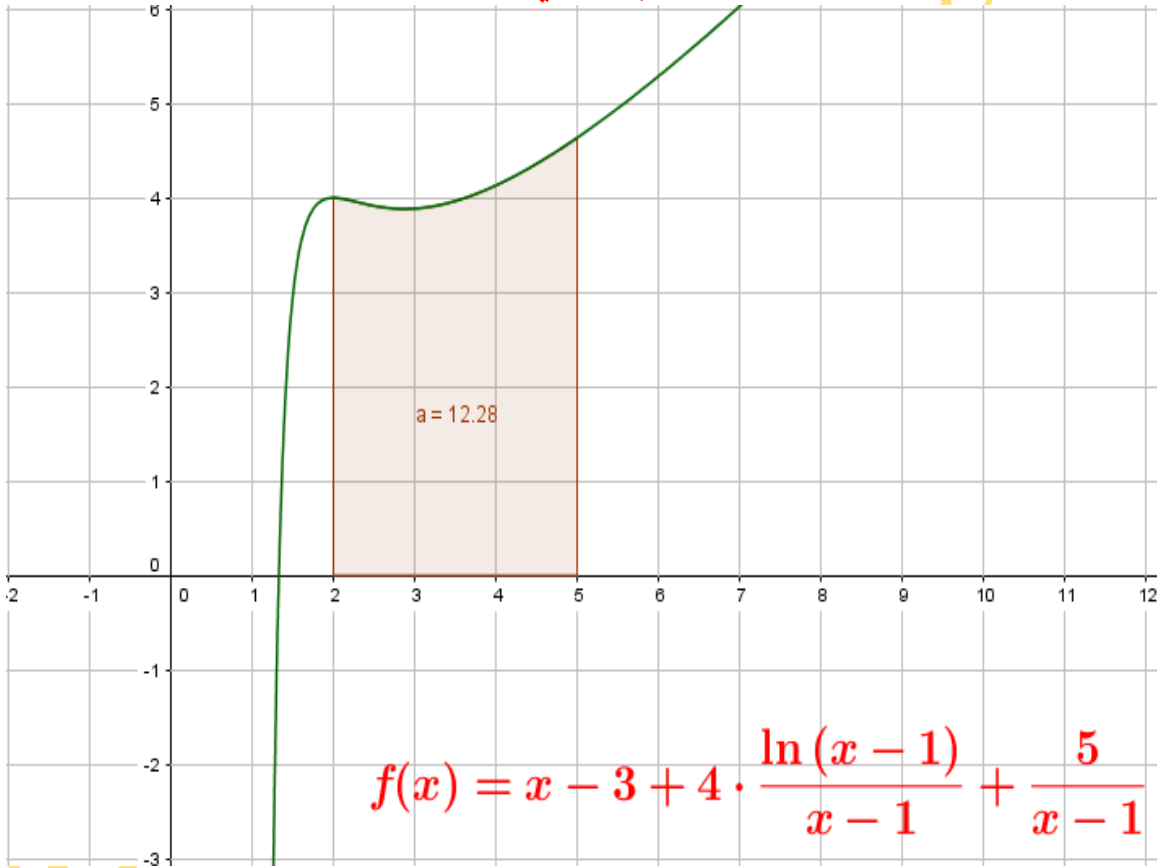
$$\text{و منه: } F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 \times \ln(x-1)^2 + 5 \ln(x-1) + C \text{ مع } (C \in \mathbb{R}).$$

$$\text{ب- حساب } \int_2^5 f(x) dx :$$

$$\begin{aligned}
 \int_2^5 f(x) dx &= \int_2^5 \left(x - 3 + 4 \frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1} \right) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 \times \ln(x-1)^2 + 5 \ln(x-1) \right]_2^5 \\
 &= \left[\frac{1}{2}(5)^2 - 3(5) + 2 \times (\ln(5-1))^2 + 5 \ln(5-1) \right] - \left[\frac{1}{2}(2)^2 - 3(2) + 2 \times (\ln(2-1))^2 + 5 \ln(2-1) \right] \\
 &= 8.27 - (-4) \\
 &= 12.28
 \end{aligned}$$

التكامل $\int_2^5 f(x) dx$ يمثل مساحة الخيز تحت و المحدد بالمستقيمين $x = 5$ و $x = 2$

رسم توضيحي فقط



انتهى بحمد الله وفضله
تصحيح البكالوريا التجريبي "الموضوع الثاني"
في مادة: الرياضيات
لسنوات الثالثة علوم تجريبية
بثانويات ولاية الأغواط
راجين من المولى عز وجل
أن يجعل ثوابه في ميزان حسنات الوالدين
آمين

آمين
أن يجعل ثوابه في ميزان حسنات الوالدين
راجين من المولى عز وجل
تصحيح البكالوريا التجريبي

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

المقاطعة الوسطى لولاية عين الدفلى

دورة: ماي 2016

المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين:

امتحان البكالوريا التجريبي

الشعبة: علوم تجريبية

اختبار في مادة الرياضيات

الموضوع الاول:

التمرين الاول: (05 نقاط)

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة : $(I) Z^2 + \alpha Z + 4 = 0$

عين العدد الحقيقي α حتى يكون العدد : $(\sqrt{3}+i)$ حلا للمعادلة (I) ثم إستنتج الحل الآخر .

(2) في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ نعتبر النقط : D, C, B, A

صور الأعداد المركبة : $Z_A = \sqrt{3}+i, Z_B = \bar{Z}_A, Z_C = i, Z_D = -Z_A$.

أ- أكتب كل من : Z_A, Z_B, Z_C, Z_D على الشكل الأسّي .

ب- لتكن المجموعة (Ω) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z التي تحقق : $Z = 2e^{j\theta}$, θ تمسح R

• أثبت أن النقط : D, B, A تنتمي للمجموعة (Ω) التي يطلب تعيينها ثم أنشئها .

(3) عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه A ويحول B إلى C محددًا نسبته وزاويته .

أ- حدد طبيعة المثلث ABC و احسب مساحته .

ب- بين أن مساحة المثلث $AB'C'$ صورة المثلث ABC بالتشابه S هي $ua \frac{3}{4}\sqrt{3}$.

(4) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z التي تحقق : $Z = Ke^{i\frac{3\pi}{4}} + 1$ مع $K \in \mathbb{R}_+^*$

أ- تحقق أن المجموعة (E) تشمل النقطة C ثم عين معادلتها الديكارتية و أنشئها .

ب- عين إحداثيي نقطة تقاطع (Ω) و (E) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

أ. صندوق به 05 كريات بيضاء و 05 كريات سوداء يسحب لاعب و بطريقة عشوائية 03 كريات في ان واحد .

1. ما احتمال الحصول على 03 كريات بيضاء.

2. ما احتمال الحصول على كرتين بيضاوين و كرية سوداء.

3. ما احتمال الحصول على لونين مختلفين.

II. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب قيمة الربح بحيث اذا سحب 03 كريات بيضاء يربح 200 دج

و اذا سحب كرتين بيضاوين و كرية سوداء يربح 100 دج والا يخسر 100 دج.

أ. اعط قانون احتمال المتغير العشوائي X .

ب. احسب الامل الرياضي $E(X)$. هل اللعبة مربحة؟

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1. لتكن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية متقاربة بحيث: $U_2 = 8$ و $U_2 + U_3 + U_4 = 14$, حدد الاساس q و الحد الاول.
2. لتكن (V_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $V_n = \ln(U_n)$.
أ. حدد طبيعة المتتالية (V_n) ثم حدد اتجاه تغير المتتالية (V_n) .
ب. احسب بدلالة n المجموع: $V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$.
3. لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $w_0 = U_0$ و $w_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n$.
■ احسب بدلالة n ثم حدد نهاية المتتالية (w_n) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- الجزء الاول: g دالة معرفة على $]0, +\infty[$ ب: $g(x) = x^2 - 4 + 8 \ln x$
1. ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
 2. بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث: $1 < \alpha < 2$.
 3. استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]0, +\infty[$.
- الجزء الثاني: f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ ب: $f(x) = \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) \ln x$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ حيث: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3 \text{ cm}$.
1. بين ان $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .
 2. احسب $\lim_{x \rightarrow 0}(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.
 3. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty}(x)$ ثم شكل جدول تغيراتها.
 4. احسب $f(1)$ و $f(2)$ ثم عين اشارة $f(x)$.
 5. بين ان $\lim_{x \rightarrow +\infty}[f(x) - \ln x] = 0$. ماذا تستنتج؟
 6. بين ان: $f(\alpha) = \frac{-1}{8} \left(\frac{4-\alpha^2}{\alpha}\right)^2$ ثم استنتج حصر ال $f(\alpha)$.
 7. ارسم (C_f) . (نضع $\alpha = 1.3$ و $f(\alpha) = -0.36$).
 8. ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $(x^2 - 4) \ln x - mx^2 = 0$.
- الجزء الثالث: F دالة معرفة على $]0, +\infty[$ ب:

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt$$

1. باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب:
- $$\int_1^x \frac{-4}{t^2} \ln t \, dt$$
2. بين ان الدالة المعرفة ب: $x \mapsto 1 - x + x \ln x$ هي الدالة الاصلية المعرفة ب: $x \mapsto \ln x$.
 3. استنتج ان: $F(x) = -3 + \frac{4-x^2}{x} + \frac{x^2+4}{x} \ln x$.
 4. احسب مساحة الحيز A المحصور بين (C_f) و المستقيمتان: $y = 0$ و $x = 2$ و $x = 1$.

الموضوع الثاني:

التمرين الاول: (05 نقاط)

- I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية: $(z-2)(z^2+2z+4)=0$
 II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط A, B, C التي لواحقها على الترتيب:

$$z_C = 2 \quad \text{و} \quad z_B = -1 - i\sqrt{3} \quad , \quad z_A = -1 + i\sqrt{3}$$

$$1. \text{ أ) بين أن: } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ب) عين طبيعة المثلث ABC

ج) عين مركز ونصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC . أنشئ (C)

2. أ) عين الطبيعة والعناصر الهندسية للمجموعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق

$$2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$$

ب) تحقق أن النقطتين A و B تنتميان إلى (Γ)

3. ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$

أ) عين صورة النقطة B بالدوران R

ب) عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$

ج) عين صورة المجموعة (Γ) بالدوران R

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

1. نعتبر النقط: $A(-1, 0, 2)$, $B(1, 1, 1)$, $C(1, 2, 2)$, $D(1, 1, 4)$.

و ليكن (p) و (q) مستويان حيث: $(p): x - y - z - 7 = 0$ و $(q): x - 2z - 11 = 0$

(Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان من الفضاء معرفان بتمثيلهما الوسطيين التاليين:

$$(\Delta_2) \begin{cases} x = 2s + 5 \\ y = s + 1 \\ z = s - 3 \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}) \quad \text{و} \quad (\Delta_1) \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2 \\ z = -t - 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

أ- أثبت أن المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) ليسا من نفس المستوي.

ب- برهن أن: (p) و (q) متقاطعان وفق المستقيم (Δ_2) .

2. عين تمثيلا وسيطيا للمستوي (π) الذي يشمل (AB) ويوازي (Δ_1) .

أ- أثبت أن معادلة (π) هي: $x - y + z - 1 = 0$, ثم تحقق أنه يشمل النقطة C و لا يشمل D

ب- بين أن المثلث ABC قائم في B ثم أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

3. لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 3 = 0$$

أ- بين أن (S) سطح كرة يطلب عناصرها المميزة.

ب. عين معادلتين المستويين الموازيين للمستوي (π) و المماسين لسطح الكرة (S) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1) f دالة عددية معرفة على $[1, +\infty)$ ، بالعلاقة : $f(x) = x - \ln(x-1)$

أ- أدرس تغيرات الدالة f .

ب- أدرس حسب قيم x إشارة $f(x) - x$

ت- بين أنه إذا كان $x \in [2, e+1]$ فإن $f(x) \in [2, e+1]$

2) (u_n) متتالية عددية معرفة على N كمايلي : $u_0 = e+1$ ومن أجل كل n من N :

$$u_{n+1} = u_n - \ln(u_n - 1)$$

أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من N : $u_n \in [2, e+1]$

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ت- برر تقارب المتتالية (u_n) ثم أحسب نهايتها .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f دالة عددية معرفة على $R - \{\ln 2\}$ بالعلاقة : $f(x) = x + \frac{e^x}{2(e^x - 2)}$

(c_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس حيث : $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$

1) بين أن من أجل كل $x \neq \ln 2$: $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 2}$

2) أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .

أ- بين أن من أجل كل $x \neq \ln 2$: $f'(x) = \frac{(e^x - 1)(e^x - 4)}{(e^x - 2)^2}$

ب- أدرس إشارة المشتق ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج- بين أن المنحني (c_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب معادلتيهما .

د- أدرس وضعية المنحني (c_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + \frac{1}{2}$.

3) بين أن النقطة $w\left(\ln 2, \ln 2 + \frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر المنحني (c_f) .

أ- بين أن المنحني (c_f) يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما -2

ب- بين أن المعادلة : $f(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-1, 0]$.

ج- أرسم المنحني (c_f) ومستقيماته المقاربة .

د- عين دالة أصلية للدالة h على المجال $[\ln 2, +\infty[$ حيث : $h(x) = x + \frac{1}{2} - f(x)$

هـ- أحسب بـ cm^2 المساحة للحيز المحدد بالمنحني (c_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما :

$$x = \ln 3 \quad \text{و} \quad x = \ln 5$$

$$A_{ABC'} = K^2 A_{ABC} \text{ حيث } S(B) = B' \text{ و } S(C) = C'$$

$$A_{ABC'} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2} AB \cdot AC\right)$$

$$AC = \sqrt{3}, \quad AB = 2$$

$$A_{ABC'} = \frac{3}{4} \sqrt{3} \text{ و منه}$$

$$\textcircled{4} \quad z = k e^{i \frac{3\pi}{4}} + 1 \quad (E) \text{ هو نصف مستقيم مفتوح مبدؤه النقطة } I$$

$$\textcircled{1} \quad (OI, u) = \frac{3\pi}{4} \text{ ميله: } \tan \frac{3\pi}{4} = -1$$

$$z = k e^{i \frac{3\pi}{4}} + 1 \quad z \in (E) \quad u$$

$$-1 + i = k e^{i \frac{3\pi}{4}} \text{ و منه يوجد } k = \sqrt{2} \text{ (حقيق)}$$

$$\textcircled{1} \quad (E) \quad y = \tan \frac{3\pi}{4} x + c$$

$$(E) : y = -x + 2$$

(C) نحل البكلمة :

$$u \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

$$u \quad \begin{cases} 2x^2 - 2x - 3 = 0 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$(C) \cap (E) = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \right\}$$

التصحيح النموذجي لـ الكالوريا
التجريبية لشعبة العلوم
التجريبية

الموضوع الأول :

حل التمرين 01 :

$$\textcircled{1} \quad (\sqrt{3} + i) \text{ حل لـ } (I) \text{ بالتعريف نجد:}$$

$$\alpha = 2\sqrt{3}$$

$$\textcircled{2} \quad (I) \text{ الشكل الأسوي: } z_A = 2 e^{i \frac{\pi}{6}}$$

$$z_B = 2 e^{-i \frac{\pi}{6}}; \quad z_C = e^{i \frac{\pi}{2}}$$

$$z_O = 2 e^{i(\pi + \frac{\pi}{6})}$$

$$\textcircled{3} \quad (C) : z = 2 e^{i\theta} \text{ دائرة مركزها}$$

$$r = 2 \text{ و } \theta$$

$$B, A : \text{ أي } |z_A| = |z_B| = |z_O| = 2$$

D نقط من (C)

③ العبارة المركبة للتشابه المباشر:

$$z_C - z_A = q(z_B - z_A) \quad \text{أي } \begin{cases} S(A) = A \\ S(B) = C \end{cases}$$

$$q = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{-2i} = \frac{\sqrt{3}}{2} i \text{ و منه:}$$

$$q = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i \frac{\pi}{2}} \text{ و منه}$$

$$z' = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i \frac{\pi}{2}} z + z_A \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i \frac{\pi}{2}} \right)$$

$$\text{أي } \boxed{z' = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i \frac{\pi}{2}} z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2} i}$$

(I) طبيعة المثلث ABC : لدينا : من سطح

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = q = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i \frac{\pi}{2}} \text{ معناه}$$

ABC قائم في A

(C) صورة المثلث ABC : بالتشابه S هو

مثلث ABC' حيث : $S(A) = A$ نقطة هامة

النسبة الباقية :

I- 1. احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء

$$C_{10}^3 = 120 \text{ . عدد الحالات الممكنة}$$

$$C_5^3 = 10 \text{ . عدد الحالات الملائمة}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{10}{120}$$

0,5

2. احتمال الحصول على كرتين بيضاء وكرتين سوداويين

0,5

$$\frac{C_5^2 \cdot C_5^2}{C_{10}^4} = \frac{50}{120} = \frac{5}{12}$$

3. ما احتمال الحصول على لونين مختلفين

0,1

$$1 - \left(\frac{2C_5^3}{C_{10}^3} \right) = \frac{5}{6}$$

II - قانون احتمال المتغير العشوائي :

0,5

$X(x_i)$	-100	100	200
P_i	$\frac{60}{120}$	$\frac{50}{120}$	$\frac{10}{120}$

الاحتمال الشرطي :

$$\begin{aligned} \bar{X} &= -100 \left(\frac{1}{2} \right) + 100 \left(\frac{5}{12} \right) + 200 \left(\frac{1}{12} \right) \\ &= -50 + 41,66 + 16,66 \\ &= 8,32 \end{aligned}$$

0,5

نضع $E(X) > 0$:

النظرية الثالث :

1 - تعيين الأساس والعائد : $8 + 8q + 8q^2 = 14$

0,5

$$\boxed{q = \frac{1}{2}} \text{ (مقبول) ; } \boxed{q = -\frac{3}{2}} \text{ مرفوض}$$

0,5

$$\mu_0 = \frac{8}{\frac{1}{4}} = 32$$

0,5

2 - طريقة المتسلسلة : $U_{n+1} - U_n = \ln q = -\ln 2$

0,5

و منه (U_n) حسابية أساسها $r = -\ln 2$
و بما أن $r < 0$ فإن (U_n) متناقصة

0,5

3 - حساب المجموع :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2} (\ln 32 + (5-n) \ln 2) \\ &= \frac{n}{2} (11-n) \ln 2 \end{aligned}$$

3 - حساب u_n : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$; $u_n = e^{\frac{n}{2}(11-n)\ln 2}$

1+0,5

التمرين الرابع

الجزء الأول : 1. دراسة تقبلية الدالة g وتسهيل جدول تغيراتها :
 $g'(x) = \frac{2x^2+8}{8}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$		$+\infty$

2. تبين أن $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد

لدينا g مستمرة على $[1, 2]$ و

$$g(1) = -3 ; g(2) = 8 \ln 2 ; g(1) \cdot g(2) < 0$$

صباح مبرهنة القيم المتوسطة ونباية الدالة g

فإن : $g(x) = 0$ تقبل ملاً وحيداً α

3. إشارة $g(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		-	+

الجزء الثاني :

1. تبين أن $f(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ استنتاج التغير

على $]0, \alpha]$: f متناقصة

على $[\alpha, +\infty[$: f متزايدة

2. حساب النهاية : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ (مقارن (C_f))

3. جدول التغير :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

4. حساب $f(1)$ و $f(2)$ وإشارة :

x	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$		+	-	+

$$f(2) \neq f(1) = 0$$

5. تبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = 0$ (مقارن (C_f) مع $\ln x$ الدالة المتزايدة المتزايدة $+\infty$ وجود)

6. تبين أن : $f(\alpha) = -\frac{1}{8} \left(\frac{4-\alpha^2}{\alpha} \right)^2$ ولدينا : $-\frac{9}{8} \leq f(\alpha) \leq 0$

2. المنحنى البياني :

الجزء الثالث :

1. حساب المساحة بالتجزئة :

$$\int_1^x \frac{-4}{t^2} \ln t \, dt = \frac{4}{x} \ln x + \frac{4}{x} - 4$$

2. تبين أن : $(1-x+x \ln x)' = \ln x$ ، لدينا :

3. استنتاج الدالة الأولية :

$$F(x) = \frac{4}{x} \ln x + \frac{4}{x} - 4 + 1 - x + x \ln x$$

$$= -3 + 4 \frac{-x^2}{x} + \frac{x^2+4}{x} \ln x$$

4. حساب المساحة : $A = \int_1^2 [F(x)]^2 = 1 \times 9 \text{ cm}^2 = 9 \text{ cm}^2$

تصحیح درستگاه الی لوریا

التجریبی (مائی 2016) -
التمرین 2 حل المعادله:

$$(z-2)(z^2+2z+4)=0$$

$$z^2+2z+4=0 \text{ أو } z=2$$

$$\text{حل } z^2+2z+4=0$$

$$\Delta = -12 = 12i^2$$

المعادله 2 تقبل حلين مركبين مترافقين

$$z_2 = -1 + i\sqrt{3} \quad , \quad z_1 = -1 - i\sqrt{3}$$

$$S = \{2, -1 - i\sqrt{3}, -1 + i\sqrt{3}\}$$

$$\textcircled{2} \textcircled{p} \text{ إثبات ان } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\pi/3}$$

$$\text{لدينا } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$$

$$\left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = 1, \quad \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

طبيعة المثلث ABC

$$\text{لدينا } \left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = 1 \text{ فها } \frac{CB}{CA} = 1 \text{ فها } CB = CA$$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$(\vec{CA}, \vec{CB}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ABC متساوي الاضلاع

تعيين مركز ونصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثلث

$$|z_A| = 2 = OA$$

$$|z_B| = 2 = OB$$

$$|z_C| = 2 = OC$$

$$OA = OB = OC = 2$$

لذلك نصف الدائرة مركزها (0,0) و r=2

$$\textcircled{2} \textcircled{p} \text{ طبيعة (r) : } 2(z+\bar{z})+z\bar{z}=0$$

$$2(n+iy+n-iy)+n^2+y^2=0$$

$$\text{فها } n^2+y^2+4n=0$$

$$(n+2)^2+y^2=4$$

(r) دائرة مركزها (-2,0) و r=2

التحقق ان B, A من (r)

$$2A = |z_A - z_B| = 2$$

$$2B = |z_B - z_A| = 2$$

3) لدينا R دوران مركزه A وزاوية $\frac{\pi}{3}$

صورة B بالدوران R

$$z_{B'} = az_B + b \text{ فها } R(B) = B'$$

$$a = e^{i\pi/3} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$b = (1-a)z_A = 1 + i\sqrt{3}$$

$$z_{B'} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1 + i\sqrt{3}) + 1 + i\sqrt{3}$$

$$z_{B'} = z_C \text{ فها } z_{B'} = z_C$$

$$R(B) = C$$

تعيين D لاحقة النقطة D صورة C بالدوران R

$$z_D = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1 + i\sqrt{3}) = 2 + 2i\sqrt{3}$$

استنتاج طبيعة الرباعي ABCD

الرباعي ABCD معين لان

ABCD متوازي اضلاع لان

$$\begin{aligned} \vec{z}_{AB} &= 2i\sqrt{3} & \vec{z}_{DC} &= 2i\sqrt{3} \\ \vec{z}_{BC} &= 2i\sqrt{3} & \vec{z}_{AD} &= 2i\sqrt{3} \end{aligned}$$

ولدينا BC=CD لان R(B)=C و R(C)=D

5) صورة (D) بالدوران R هي (C)

$$\text{لان } R(B)=C \text{ و } R(C)=D$$

التمرين 2

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \neq \frac{0}{1}$$

حل النظام

$$\begin{cases} t+2=2s+5 & \textcircled{1} \\ -2=s+1 & \textcircled{2} \\ -t-1=s-3 & \textcircled{3} \end{cases}$$

بالعوض عند t في (1) و (2) و (3)

النقطة (-2, -2, 2) و (-1, -2, -6)

مسجل

(A) و (A) لسا صنف نفس المستوى

$$f'(n) = \frac{n-2}{n-1} : \text{المشتق}$$

جدول التغيرات :

n	1	2	+
$f'(n)$		-	+
$f(n)$	$+\infty$	Δ_2	$+\infty$

من أجل $2 \leq n < e+1$ f متزايدة

$$f(2) \leq f(n) \leq f(e+1)$$

$$\begin{cases} u_0 = e+1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (2)$$

(1) البرهان بالتراجع : $p(n) : 2 \leq u_n \leq e+1$

$$p(0) : 2 \leq u_0 \leq e+1 \text{ : صحيحة}$$

نفرض $p(n)$ صحيحة أي :

$$2 \leq u_{n+1} \leq e+1$$

لدينا حسب السؤال (1) فإن :

$$2 \leq f(u_n) \leq e+1$$

$$2 \leq u_{n+1} \leq e+1$$

$$u_{n+1} - u_n = -\ln(1 - u_n)$$

حسب (1)

لدينا الفرق : $-\ln(1-u_n)$ موجب على

$(2, e+1)$ أي موجب على $[2, e+1]$

$$u_{n+1} - u_n \geq 0$$

(ت) بتقدير تقارب (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ $e+1$ فهي متقاربة نقول :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$$

نحل المعادلة : $l = f(l)$

$$l = -\ln(l-1) \Rightarrow l = e+1$$

معناه :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e+1$$

$$(P) \wedge (Q) = (\Delta_2) \text{ بالتعويض}$$

$$\begin{cases} 2\delta - 5 - p - 1 - p + 3 - 7 = 0 \\ 2p + 5 - 2(p-3) - 11 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2t + p - 1 \\ y = t \\ z = -t - p + 2 \end{cases}$$

التبديل الوسيط (Δ_2) الذي يسهل (AB)

ويؤازر (Δ_1)

(1)

$$(K) : x - y + z - 1 = 0$$

احداثيات C كقمة و احداثيات D

لا تحقق $C \in (K)$ و $D \notin (K)$

(ب) ABC قائم في B أي $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0$

$$V = \frac{1}{3} B h \quad / \quad h = d(D, (K))$$

$$V = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \sqrt{6} \sqrt{2} \right) \cdot \sqrt{3} = 1 \text{ u.u}$$

$$(3) : (n-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$$

(5) سطح الكرة التي مركزها $(2, 1, 1)$ ، $r = \sqrt{3}$

ب. المستويين الموازيين للمستوي (π)

$$d(n, p) = \sqrt{3} \text{ أي } d(1, 0) = \sqrt{3}$$

$$\frac{|d+2|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow |d+2| = 3 \Rightarrow \begin{cases} d+2=3 \\ d+2=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d=1 \\ d=-5 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} d+2=3 \\ d+2=-3 \end{cases}$$

$$(P_1) : x - y + z + 1 = 0$$

$$(P_2) : x - y + z - 5 = 0$$

حل التمرين الثالث :

$$f(n) = n - \ln(n-1) \quad (1)$$

إشارة $f(n) - n$:

n	1	e+1	+
$- \ln(n-1)$		+	-

دراسة تغيرات f :

$$\lim_{n \rightarrow 1} f(n) = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

حل المبرين الرابع :

١) نبين أنه من أجل كل $x \neq \ln 2$:

لدينا : $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 2}$

$f(x) = x + \frac{e^x}{2(e^x - 2)} = x + \frac{e^x - 2 + 2}{2(e^x - 2)}$

$= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x - 2}$

(٢) حساب النهايات :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow \ln 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow \ln 2^+} f(x) = -\infty$

(٣) المشتق :

$f'(x) = 1 - \frac{e^x}{(e^x - 2)^2}$

$= \frac{e^{2x} - 5e^x + 4}{(e^x - 2)^2} = \frac{(e^x - 1)(e^x - 4)}{(e^x - 2)^2}$

(٤) إشارة المشتق :

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$2\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	0

(٥) جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$\ln 2$	$2\ln 2$	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	$\frac{1}{2} + \ln 4$	$+\infty$	$+\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2(e^x - 2)} = 0$ (٢)

معناه : $y = x$ م م $y = x$ و (f) عند $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + \frac{1}{2})] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 2} = 0$

معناه : $y = x + \frac{1}{2}$: (٥) مقارب (٣) و (f) عند $+\infty$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$f(x) - y = \frac{1}{e^x - 2}$	-	0	+
الوصف	(٣) تحت	(٣) فوق	(٣) فوق

(٦) إشارة الوصف : (٣) و (٣) :

٣) مركزناظر :

$f(2\ln 2 - x) + f(x) = 2\ln 2 + \frac{1}{2}$

(١) نبين أن (٣) يقبل مماسية :

أي نحل المعادلة : $f(x) = -2$

بعد الحل : نجد : $y_1 = 3$, $y_2 = \frac{4}{3}$

أو $x = \ln 3$ أو $x = \frac{4}{3}$

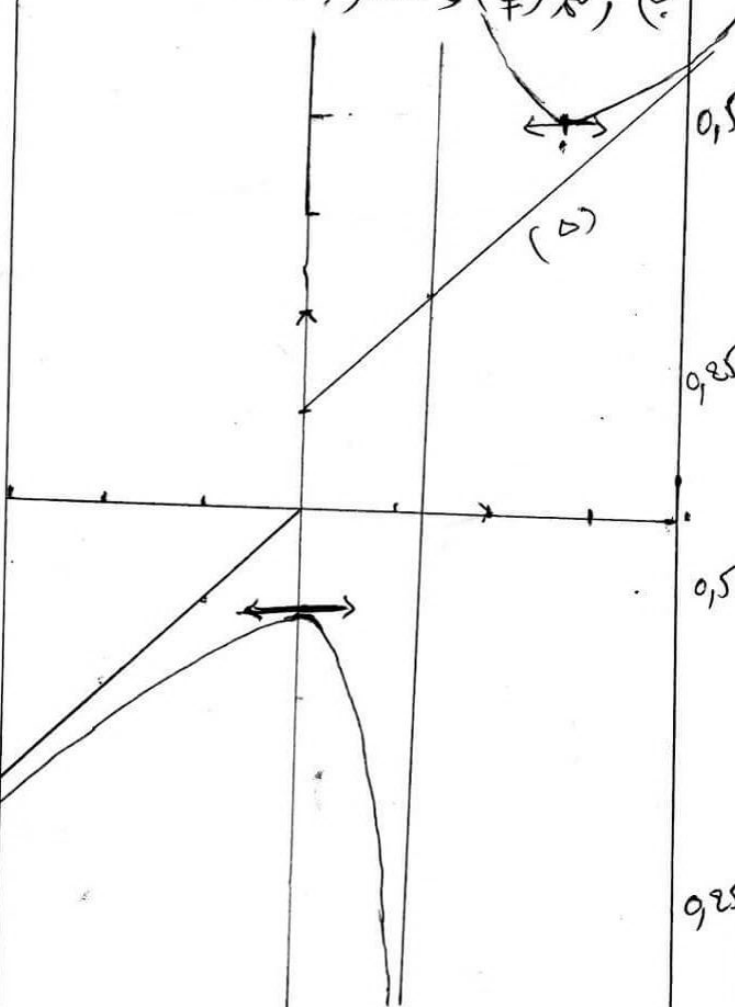
(٢) مستقيمة ومماسية كما على (٥)

$f(0) = -\frac{1}{2}$ و $f(-1) = -2$ و

$f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ و منه حسب مبرهنة

القيمة المتوسطة يوجد حل وحيد x_0

(٣) و مقاربات :



(٤) نعين دالة أصلية (٣) على :

$[-\ln 2; +\infty[$ و $[\ln 2; +\infty[$ جزئياً والتين مسكرتين

على $[-\ln 2; +\infty[$ فهي دالة مسكرة

على $[\ln 2; +\infty[$ و تقبل دالة أصلية

- تابع -

$$H(u) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(e^x - 2)$$

0,25

$$H(u) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln(e^x - 2)$$

$$: A \text{ } \tilde{a} \text{ } \ln 5 \text{ } \ln 2 \text{ } \ln 3 \text{ } \ln 4 \text{ } \ln 5 \text{ } \ln 6 \text{ } \ln 7 \text{ } \ln 8 \text{ } \ln 9 \text{ } \ln 10 \text{ } \ln 11 \text{ } \ln 12 \text{ } \ln 13 \text{ } \ln 14 \text{ } \ln 15 \text{ } \ln 16 \text{ } \ln 17 \text{ } \ln 18 \text{ } \ln 19 \text{ } \ln 20 \text{ } \ln 21 \text{ } \ln 22 \text{ } \ln 23 \text{ } \ln 24 \text{ } \ln 25 \text{ } \ln 26 \text{ } \ln 27 \text{ } \ln 28 \text{ } \ln 29 \text{ } \ln 30 \text{ } \ln 31 \text{ } \ln 32 \text{ } \ln 33 \text{ } \ln 34 \text{ } \ln 35 \text{ } \ln 36 \text{ } \ln 37 \text{ } \ln 38 \text{ } \ln 39 \text{ } \ln 40 \text{ } \ln 41 \text{ } \ln 42 \text{ } \ln 43 \text{ } \ln 44 \text{ } \ln 45 \text{ } \ln 46 \text{ } \ln 47 \text{ } \ln 48 \text{ } \ln 49 \text{ } \ln 50 \text{ } \ln 51 \text{ } \ln 52 \text{ } \ln 53 \text{ } \ln 54 \text{ } \ln 55 \text{ } \ln 56 \text{ } \ln 57 \text{ } \ln 58 \text{ } \ln 59 \text{ } \ln 60 \text{ } \ln 61 \text{ } \ln 62 \text{ } \ln 63 \text{ } \ln 64 \text{ } \ln 65 \text{ } \ln 66 \text{ } \ln 67 \text{ } \ln 68 \text{ } \ln 69 \text{ } \ln 70 \text{ } \ln 71 \text{ } \ln 72 \text{ } \ln 73 \text{ } \ln 74 \text{ } \ln 75 \text{ } \ln 76 \text{ } \ln 77 \text{ } \ln 78 \text{ } \ln 79 \text{ } \ln 80 \text{ } \ln 81 \text{ } \ln 82 \text{ } \ln 83 \text{ } \ln 84 \text{ } \ln 85 \text{ } \ln 86 \text{ } \ln 87 \text{ } \ln 88 \text{ } \ln 89 \text{ } \ln 90 \text{ } \ln 91 \text{ } \ln 92 \text{ } \ln 93 \text{ } \ln 94 \text{ } \ln 95 \text{ } \ln 96 \text{ } \ln 97 \text{ } \ln 98 \text{ } \ln 99 \text{ } \ln 100$$

$$A = \int_{\ln 3}^{\ln 5} (f(u) - y) du$$

$$= \left[-\frac{u^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(e^u - 2) \right]_{\ln 3}^{\ln 5}$$

0,25

$$= -\frac{\ln 5}{2} + \frac{1}{2}\ln 3 - \left(-\frac{\ln 3}{2} + \frac{1}{2}\ln 1 \right)$$

$$A = \left(\ln 3 - \frac{\ln 5}{2} \right) \cdot 4$$

0,25

$$A = \left(\ln 3 - \frac{\ln 5}{2} \right) \cdot 4$$

$$A = 2 \ln \frac{9}{5} \text{ cm}^2$$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

متقن علي جعفر
تاجنانت

امتحان البكالوريا التجريبي
الشعبة : علوم تجريبية

اختبار في مادة : الرياضيات

التمرين الأول :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ كمايلي : $f(x) = \frac{3x-1}{2x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$) .

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم اشرح (C_f) .

(2) (u_n) متتالية معرفة على N كمايلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

ا - مثل الحدود u_0 ; u_1 ; u_2 و u_3 على محور الفواصل مبرزا خطوط الانشاء .

ب - برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $u_n > 1$.

ج - بين ان (u_n) متناقصة تماما ماذا . تستنتج؟

(3) ا - اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي n فان : $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$.

ب - بين انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

(4) (v_n) متتالية معرفة على N كمايلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$.

ا - بين ان المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الاول .

ب - احسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = \frac{v_0 - 1}{u_0} + \frac{v_1 - 1}{u_1} + \frac{v_2 - 1}{u_2} + \dots + \frac{v_n - 1}{u_n}$.

التمرين الثاني :

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$) .

نعتبر النقط $A(3; 0; 0)$; $B(0; 6; 0)$; $C(0; 0; 4)$ و $D(-5; 0; 1)$.

(1) ا - تحقق ان الشعاع $\vec{n}(4; 2; 3)$ هو شعاع ناظم للمستوي (ABC) .

ب - عين معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

(2) ا - اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D و يعامد المستوي (ABC) .

ب - استنتج احداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .

ج - احسب المسافة بين النقطة D والمستوي (ABC) .

(3) نعتبر (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$.

ا - عين طبيعة وعناصر المجموعة (E) ثم اكتب معادلة ديكارتية لها .

ب - تحقق ان النقطة H تنتمي الى المجموعة (E) .

التمرين الثالث :

في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط $A ; B ; C$ و D التي لواحقها على الترتيب $z_A = -\sqrt{3} - i ; z_B = 1 - i\sqrt{3} ; z_C = \sqrt{3} + i$ و $z_D = -1 + i\sqrt{3}$.

(1) ا- انشئ النقط $A ; B ; C$ و D .

ب- اكتب كلا من $z_A ; z_B ; z_C$ و z_D على الشكل الاسي.

ج- عين طبيعة الرباعي $ABCD$.

(2) ليكن r الدوران الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{3}$ ولتكن E و F صورتا النقطتين A و B على الترتيب بالدوران r .

ا- اكتب العبارة المركبة للدوران r .

ب- احسب لاحقي النقطتين E و F .

(3) نعتبر (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي التي تحقق $(z - \sqrt{3} - i)(\bar{z} - \sqrt{3} + i) = 4$.

عين طبيعة وعناصر المجموعة (E) .

التمرين الرابع :

I. نعتبر الدالة g المعرفة على R كمايلي : $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$.

(1) ادرس تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

(2) استنتج اشارة $g(x)$ من اجل كل عدد حقيقي x .

II. لتكن الدالة f المعرفة على R كمايلي : $f(x) = (2x - 1)e^{2x} + x + 1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ الوحدة $2cm$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(3) ا- بين ان المستقيم $y = x + 1$: (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

(4) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة O .

(5) بين ان المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتها.

(6) انشئ المستقيمين (T) ; (Δ) و المنحنى (C_f) .

(7) ناقش بياننا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة $(2x - 1)e^{2x} + x = x + m + 1$.

(8) ا- باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب التكامل $\int_0^1 (2x - 1)e^{2x} dx$.

ب- احسب مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المماس (T) و المستقيمين ذوا المعادلتين

$x = 0$ و $x = 1$.

والله ولي التوفيق

الموضوع الأول

2016/05/09

البكالوريا التجريبية في مادة الرياضيات

المدة: 3 ساعات و نصف

الأقسام: 3 علوم تجريبية

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لتكن (S) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء بحيث: $x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z + 2 = 0$.

- (1) بين أن (S) هي سطح كرة يطلّب تعيين إحداثيات مركزها Ω و نصف قطرها .
- (2) أ- تحقق من أن النقطة $A(-1; 1; 0)$ تنتمي إلى سطح الكرة (S) .
ب- أكتب معادلة المستوي (P) المماس لسطح الكرة (S) في النقطة A .

(3) ليكن (Q) المستوي الذي يشمل النقطة $B(1; 3; -2)$ و شعاع ناظمي له $\vec{N} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- (أ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) .
- (ب) عين تمثيل وسيطي للمستقيم (D) الذي يشمل Ω و يعامد (Q) ثم عين H نقطة تقاطع (D) و (Q) .
- (ت) بين أن المستوي (Q) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة يطلّب تعيين مركزها و نصف قطرها .

التمرين الثاني: (5 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة (E):

$$z^3 - (8-i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0$$

- (1) أ- برهن أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يطلّب تعيينه.
ب- بين أنه يمكن كتابة المعادلة (E) على الشكل: $(z+i)(az^2+bz+c)=0$ حيث a, b, c أعداد حقيقية ثابتة يطلّب تعيينها.
ج- حل في C المعادلة (E) .

(2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

نعتبر النقاط A, B, C لواقعها على الترتيب: $z_A = 4+i$, $z_B = 4-i$, $z_C = -i$

(أ) أكتب على الشكل المثلثي و الأسّي العدد المركب L حيث: $L = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_B}$.

(ب) برهن أنه يوجد تشابه مباشر وحيد S يحول النقطة A إلى النقطة B و يحول النقطة B إلى النقطة C يطلّب تعيين عناصره المميزة .

(ت) حدد طبيعة التحويل النقطي $S \circ S$ و عين عناصره المميزة .

التمرين الثالث: (4 نقاط)

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \end{cases} \quad (u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كما يلي :}$$

(أ-1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \geq 1$

(ب) أدرس إشارة $u_{n+1} - u_n$ واستنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(ج) هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

2- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3 + \frac{1}{-1+u_n}$

(أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

(ب) عبر عن v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

- عبر عن S_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

النمرين الثالث: (7 نقاط)

المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس (C_f) ، $(o, \vec{i}, \vec{j})$ التمثيل البياني للدالة f المعرفة IR^* كما يلي :

$$f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$$

1- أدرس تغيرات الدالة f .

2- أثبت أن المنحني (C_f) يقطع المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = 1$ في نقطتين يطلب تعيين إحداثيتيهما .

3 - أحسب : $f(-x) + f(x)$. ماذا تستنتج ؟

4- بين أن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $\alpha \in \left] -1; -\frac{1}{2} \right[$.

5- أثبت أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0;1)$ ويمسه في نقطتين يطلب تعيين إحداثيتيهما . ثم جد معادلة المماس (T) .

6- أرسم (T) و (C_f) في المعلم السابق .

7- أحسب مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C) و المستقيمت التي معادلاتها $x = e$, $x = 1$, $y = 1$

8- h هي الدالة العددية ذات المتغير x المعرفة بـ : $h(x) = 1 + \frac{\ln x^2}{|x|}$.

* بين h دالة زوجية .

* أرسم المنحني (C_h) دون دراسة الدالة h . علل إجابتك .

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

متقن علي جعفر
تاجنات

امتحان البكالوريا التجريبي
الشعبة : علوم تجريبية

تصحيح الموضوع الاول

التمرين الأول :

لدينا $f(x) = \frac{3x-1}{2x}$.

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم انشاء (C_f) .

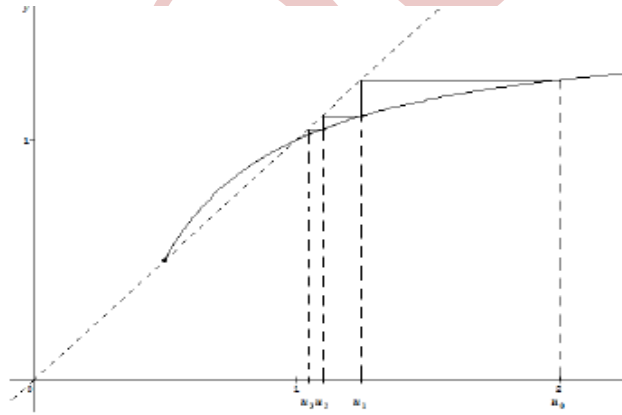
من اجل كل عدد حقيقي x من $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$: $f'(x) = \frac{2}{4x^2} = \frac{1}{2x^2} > 0$

و لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$ و لدينا $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

وبالتالي المنحنى (C_f) يكون كما هو مبين في الشكل .

(2) (u_n) متتالية معرفة على N كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

ا - تمثيل الحدود u_0 ; u_1 ; u_2 و u_3 على محور الفواصل مبرزا خطوط الانشاء .



ب - نبرهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $u_n > 1$.

لتكن الخاصية P المعرفة على N كما يلي : $\square : u_n > 1 \dots \square : P(n)$.

- ثبت ان $P(0)$ محققة : لدينا $u_0 = 2$ ومنه $u_0 > 1$ اي $P(0)$ محققة .

- ثبت ان P وراثية : الفرض - نفرض ان $P(n)$ محققة معناه $u_n > 1$.

النتيجة - ثبت ان $P(n+1)$ محققة معناه $u_{n+1} > 1$.

لدينا $u_n > 1$ ومنه $f(u_n) > f(1)$ لان f متزايدة على $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ اي $u_{n+1} > 1$ ومنه $P(n+1)$ محققة

ومنه P وراثية .

- خلاصة : من اجل كل عدد طبيعي n فان $u_n > 1$.

ج - نبين ان (u_n) متناقصة تماما :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n - 1}{2u_n} - u_n = \frac{-3u_n^2 + 3u_n + 1}{2u_n} = \frac{(u_n - 1)(-2u_n + 1)}{2u_n}$$

من اجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n > 0$ و $-2u_n + 1 < 0$ و $u_n - 1 > 0$ فان $u_{n+1} - u_n < 0$ ومنه (u_n) متناقصة تماما .

الاستنتاج : بما ان المتتالية (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الاسفل فهي متقاربة .

$$(3) \text{ - ثبت انه من اجل كل عدد طبيعي } n \text{ فان : } u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$$

$$\text{من اجل كل عدد طبيعي } n \text{ لدينا : } u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1 = \frac{u_n - 1}{2u_n} = \frac{1}{2u_n}(u_n - 1)$$

$$\text{ولدينا : } u_n > 1 \text{ معناه } 2u_n > 2 \text{ معناه } \frac{1}{2u_n} < \frac{1}{2} \text{ معناه } \frac{1}{2u_n}(u_n - 1) < \frac{1}{2}(u_n - 1)$$

$$\text{و منه نستنتج انه من اجل كل عدد طبيعي } n \text{ فان : } u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$$

$$\text{ب - نبين انه من اجل كل عدد طبيعي } n \text{ فان : } u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n - 1 \leq \frac{1}{2}(u_{n-1} - 1) \\ u_{n-1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_{n-2} - 1) \\ u_{n-2} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_{n-3} - 1) \\ \vdots \\ u_1 - 1 \leq \frac{1}{2}(u_0 - 1) \end{array} \right. \text{ لدينا من العلاقة السابقة}$$

بضرب اطراف المتباينات طرفا لطرف و بعد اختزال العوامل المتساوية نحصل على :

$$u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - 1) \text{ بما ان } u_0 = 2 \text{ فان } u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{استنتج نهاية المتتالية } (u_n) : \text{ لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ و منه } \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n - 1 = 0 \text{ اي } \lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

$$(4) \text{ } (v_n) \text{ متتالية معرفة على } N \text{ كمايلي : } v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$$

$$\text{ا - نبين ان المتتالية } (v_n) \text{ هندسية : من اجل كل عدد طبيعي } n \text{ لدينا : } v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

$$\text{ومنه } (v_n) \text{ متتالية هندسية اساسها } q = \frac{1}{2} \text{ و حدها الاول } v_0 = \frac{1}{3}$$

$$\text{ب - حساب المجموع } S_n \text{ بدلالة } n : \text{ لدينا } v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1} \text{ معناه } u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$$

$$S_n = \frac{v_0 - 1}{u_0} + \frac{v_1 - 1}{u_1} + \frac{v_2 - 1}{u_2} + \dots + \frac{v_n - 1}{u_n} = \frac{v_0 - 1}{2v_0 - 1} + \frac{v_1 - 1}{2v_1 - 1} + \frac{v_2 - 1}{2v_2 - 1} + \dots + \frac{v_n - 1}{2v_n - 1} \text{ ومنه}$$

$$S_n = 2v_0 - 1 + 2v_1 - 1 + 2v_2 - 1 + \dots + 2v_n - 1 \text{ و منه } S_n = 2v_0 - 1 + 2v_1 - 1 + 2v_2 - 1 + \dots + 2v_n - 1 \text{ اي}$$

$$S_n = \frac{4}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right] - (n+1) \text{ ادن } S_n = 2(v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) - (n+1) \text{ ومنه}$$

التمرين الثاني :

(1) - نتحقق ان الشعاع $\vec{n}(4; 2; 3)$ هو شعاع ناظم للمستوي (ABC) :

لدينا النقط $A(3; 0; 0)$; $B(0; 6; 0)$; $C(0; 0; 4)$ و $D(-5; 0; 1)$ ومنه $\vec{AB}(-3; 6; 0)$ و $\vec{AC}(-3; 0; 4)$.

$$\text{لدينا } \begin{cases} \vec{AC} \cdot \vec{n} = 0 \\ \vec{AB} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} \vec{AC} \perp \vec{n} = 0 \\ \vec{AB} \perp \vec{n} = 0 \end{cases} \text{ ومنه } \vec{n} \text{ شعاع ناظم للمستوي } (ABC) .$$

$$\text{ب- تعيين معادلة ديكارتية للمستوي } (ABC) : 4x + 2y + 3z - 12 = 0$$

(2) 1 - اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) :

بما ان (Δ) يشمل النقطة D ويعامد المستوي (ABC) فان الشعاع $\vec{n}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (Δ) و بالتالي

$$\text{تمثيله الوسيط هو : } \begin{cases} x = -5 + 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} .$$

ب- استنتاج احداثيات النقطة H :

H المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) معناه H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و المستوي (ABC) .

$$\begin{cases} x = -5 + 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} x = -5 + 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \\ 4x + 2y + 3z - 12 = 0 \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} H \in (ABC) \\ H \in (\Delta) \end{cases} \text{ معناه}$$

$$\begin{cases} x = -5 + 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda \\ \lambda = 1 \end{cases} \text{ معناه } \begin{cases} x = -5 + 4 = -1 \\ y = 2 \\ z = 1 + 3 = 4 \end{cases} \text{ معناه } H(-1; 2; 4)$$

$$\text{ج- حساب المسافة بين النقطة } D \text{ والمستوي } (ABC) : d(D; (ABC)) = DH = \sqrt{29}$$

(3) (E) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\vec{MD} \cdot \vec{MA} = 0$.

1 - تعيين طبيعة وعناصر المجموعة (E) : المجموعة (E) هي الكرة ذات القطر DA مركزها منتصف $[DA]$

$$\text{ب- تحقق ان النقطة } H \text{ تنتمي الى المجموعة } (E) : \text{ معادلته } r = \frac{DA}{2} = \frac{\sqrt{65}}{2} \text{ ونصف قطرها } \Omega(-1; 0; \frac{1}{2})$$

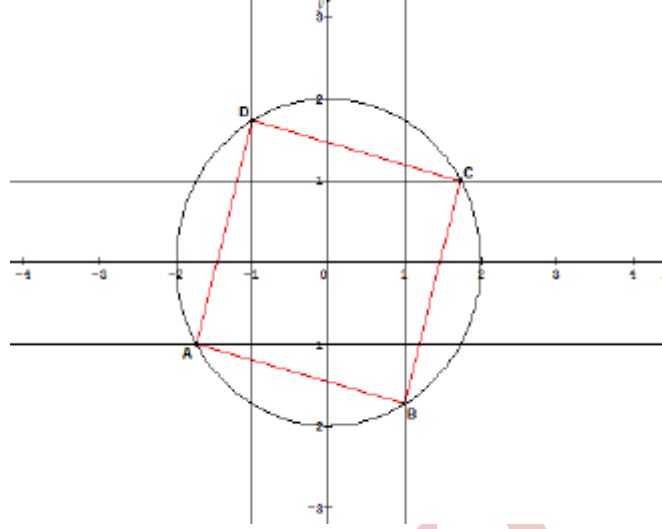
ب- تحقق ان النقطة H تنتمي الى المجموعة (E) :

$$\text{نعوض احداثيات النقطة } H \text{ في معادلة سطح الكرة فنجدها محققة } (-1+1)^2 + 2^2 + (4-\frac{1}{2})^2 = \frac{65}{4} \text{ ومنه } H \in (E)$$

التمرين الثالث :

1) - انشاء النقط A ; B ; C و D :

لانشاء النقطة A مثلا نقوم بانشاء الدائرة التي مركزها A و طول نصف قطرها 2 ثم نقوم برسم المستقيم $y = -1$: (Δ)



فيتقاطع هذا المستقيم مع الدائرة في نقطتين النقطة ذات الفاصلة السالبة هي النقطة A ونرسم النقط المتبقية بنفس الطريقة .

ب- كتابة كلا من z_A ; z_B ; z_C و z_D على الشكل الاسي :

لدينا $|A| = 2$ و $\arg(z_A) = \frac{7\pi}{6}$ ومنه $z_A = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}$; $|B| = 2$ و $\arg(z_B) = -\frac{\pi}{3}$ ومنه $z_B = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

لدينا $|C| = 2$ و $\arg(z_C) = \frac{\pi}{6}$ ومنه $z_C = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$; $|D| = 2$ و $\arg(z_D) = \frac{2\pi}{3}$ ومنه $z_D = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

ج- عين طبيعة الرباعي $ABCD$:

لدينا $\begin{cases} z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = (\sqrt{3}+1) + (1-\sqrt{3})i \\ z_{\overline{DC}} = z_C - z_D = (\sqrt{3}+1) + (1-\sqrt{3})i \end{cases}$ ومنه $\overline{AB} = \overline{DC}$.

ولدينا $AB = DC = 2\sqrt{2}$ و لدينا كذلك $\overline{AB} \perp \overline{DC}$ لان $\overline{AB} \cdot \overline{DC} = 0$.

ومنه الرباعي $ABCD$ مربع .

2) الدوران الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

ا- اكتب العبارة المركبة للدوران r :

$r(M) = M'$ معناه $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}z + (1 - e^{-i\frac{\pi}{3}})z_B$ معناه $z' = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})z + 2$.

ب- حساب لاحقي النقطتين E و F :

$r(A) = E$ معناه $z_E = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})z_A + 2$ معناه $z_E = (2 - \sqrt{3}) + i$.

$r(B) = F$ معناه $F = B$ لان B صامدة .

(3) تعين طبيعة وعناصر المجموعة (E) :

$$(z - (\sqrt{3} + i))(\overline{z - (\sqrt{3} + i)}) = 4 \quad \text{معناه} \quad (z - \sqrt{3} - i)(\overline{z} - \sqrt{3} + i) = 4$$

$$|z - z_C| = 2 \quad \text{معناه} \quad |z - z_C|^2 = 4 \quad \text{معناه} \quad |z - z_C|^2 = 4 \quad \text{معناه} \quad |(z - (\sqrt{3} + i))|^2 = 4 \quad \text{معناه} \\ CM = 2 \quad \text{معناه}$$

ومنه (E) الدائرة ذات المركز C ونصف القطر $r = 2$.

التمرين الرابع :

I. نعتبر الدالة g المعرفة على R كمايلي : $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$.

(1) ادرس تغيرات الدالة g :

أ - حساب النهايات : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$ لان $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

ب - حساب المشتقة : من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $g'(x) = 4e^{2x}(2x + 1)$.

اشارتها من اشارة $(2x + 1)$ لان $4e^{2x} > 0$.

ج - جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$g'(x)$		- 0 +	
$g(x)$	1	$1 + 2e^{-1}$	$+\infty$

(2) استنتاج اشارة g(x) : بما ان $1 + 2e^{-1} > 0$ فان $g(x) > 0$ من اجل كل عدد حقيقي x .

II . لتكن الدالة f المعرفة على R كمايلي : $f(x) = (2x - 1)e^{2x} + x + 1$.

(1) حساب النهايات : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(2) دراسة اتجاه تغيرات الدالة f : من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $f'(x) = 1 + 4xe^{2x} = g(x)$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(3) أ - بيان ان المستقيم $y = x + 1$ (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{2x} - e^{2x} = 0$$

للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب- دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) :

من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $f(x) - y_{(\Delta)} = (2x - 1)e^{2x}$ اشارتها من اشارة $(2x - 1)$.

- اذا كان $x < \frac{1}{2}$ فان (C_f) يقع تحت (Δ) .

- اذا كان $x > \frac{1}{2}$ فان (C_f) يقع فوق (Δ) .

- اذا كان $x = \frac{1}{2}$ فان (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الاحداثيين $(\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$.

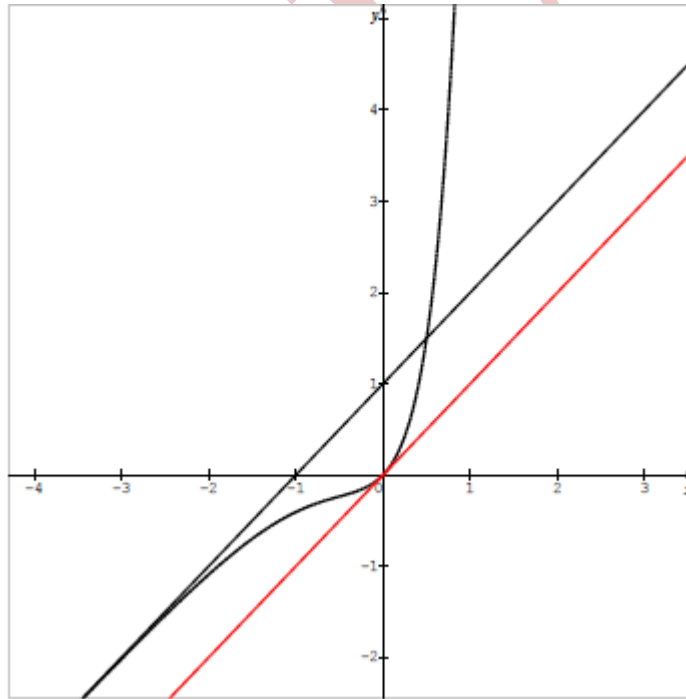
(4) معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة O : $(T) : y = x$.

(5) بين ان المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف :

من اجل كل عدد حقيقي x لدينا $f''(x) = 4e^{2x}(2x + 1) = g'(x)$ تنعدم وتغير اشارتها عند القيمة $x = -\frac{1}{2}$

و المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف احداثياها $(-\frac{1}{2}; -2e^{-1} + \frac{1}{2})$.

(6) انشاء المستقيمين (T) ; (Δ) والمنحني (C_f) :



(7) المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط الحقيقي m لعدد و اشارة حلول المعادلة $(2x - 1)e^{2x} + x = x + m + 1$:

لدينا : $(2x - 1)e^{2x} + x = x + m + 1$ معناه $(2x - 1)e^{2x} + x + 1 = x + m + 2$

معناه $f(x) = x + m + 1$ الحلول هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) والمستقيم $(\Delta_m) : y = x + 2 + m$.

- اذا كان $m + 2 < 0$ اي $m < -2$ فالمعادلة لا تقبل حولا .

- اذا كان $m + 2 = 0$ اي $m = -2$ فالمعادلة تقبل حل $x = 0$.

- اذا كان $0 < m + 2 < 1$ اي $-1 < m < -2$ فالمعادلة تقبل حلين مختلفين في الاشارة .

- اذا كان $m + 2 \geq 1$ اي $m \geq -1$ فالمعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا .

$$(8) \text{ ا - حساب التكامل } : \int_0^1 (2x - 1)e^{2x} dx$$

$$\text{نضع : } u(x) = 2x - 1 \text{ ومنه } u'(x) = 2$$

$$v'(x) = e^{2x} \text{ ومنه } v'(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$$

باستعمال التكامل بالتجزئة نجد :

$$\int_0^1 (2x - 1)e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2}(2x - 1)e^{2x} \right]_0^1 - \int_0^1 e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2}(2x - 1)e^{2x} \right]_0^1 - \left[\frac{1}{2}e^{2x} \right]_0^1 = 1$$

ب - حساب مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمماس (T) والمستقيمين ذوا المعادلتين $x=0$ و $x=1$:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (f(x) - x) dx = \int_0^1 ((2x - 1)e^{2x} + x + 1 - x) dx = \int_0^1 ((2x - 1)e^{2x} + 1) dx \\ &= \int_0^1 (2x - 1)e^{2x} dx + \int_0^1 dx = 1 + [x]_0^1 = 2 \text{ au } = 8 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

تمت بحمد الله

الموضوع الثاني

التمرين الأول:

(S) مصوغة النقطة $M(x, y, z)$ من الفضاء

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z + 2 = 0$$

$$1/ \text{برهان ان (S) هي سطح كروي} \\ a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 0^2 + (-4)^2 + 2^2 - 4(2) = 12 > 0$$

ومنه مصوغة القاط (S) هي سطح كرة نصف قطرها

$$r = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$$

ومركزها $\omega(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2})$ ومنه $\omega(0, 2, -1)$

(2) أ- التحقق ان النقطة $A(-1, 1, 0)$

$$\text{تنتمي الى سطح الكرة (S)} \\ (-1)^2 + 1^2 + 0^2 - 4(1) + 2(0) + 2 = 0 \\ 1 + 1 - 4 + 2 = 0$$

محققة ومنه $A \in (S)$

ب/ كتابة معادلة المستوى (P) المماس لسطح الكرة (S) في (A) وهو المستوى الذي يشتمل A و شعاع ناطقي له

$$\vec{MA} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ومنه معادلة المستوى (P) من الشكل

$$-x - y + z + d = 0$$

$$A(-1, 1, 0) \in (P)$$

ومنه $-(-1) - 1 + 0 + d = 0$

$$d = 0 \text{ ومنه}$$

اذن معادلة (P)

$$-x - y + z = 0$$

(3) (Q) المستوى الذي يشتمل $P(1, 3, -2)$ و شعاع ناطقي له $\vec{N}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

(4) كتابة معادلة (Q)

$$x + y + z + d = 0$$

$$1 + 3 + (-2) + d = 0$$

$$2 + d = 0 \text{ ومنه } d = -2$$

اذن معادلة المستوى (Q) هي:

$$x + y + z - 2 = 0$$

ج/ نفس تمثيل و بسيط للمستقيم (D) الذي يسيل $\vec{d}$ ويقامد (Q) اذن $\vec{N}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ هو شعاع توجيه (D)

$$\text{ومنه } t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = t \\ y = t + 2 \\ z = t - 1 \end{cases}$$

هو تمثيل و بسيط لـ (D). نفس احداثيات H وهي نقطة تقاطع (D) مع (Q).

$$\begin{cases} x = t \\ y = t + 2 \\ z = t - 1 \end{cases} \\ x + y + z - 2 = 0$$

بالتعويض

$$t + (t + 2) + (t - 1) - 2 = 0$$

$$3t - 1 = 0 \text{ ومنه } t = 1/3$$

بالتعويض نجد: $H(1/3, 7/3, -2/3)$

د/ برهان ان المستوى (Q) يقطع سطح الكرة (S)

$$d(Q, Q) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ = \frac{|0 + 2 - 1 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} < \sqrt{3}$$

$$d(Q, Q) < r$$

ومنه المستوى (Q) يقطع سطح الكرة (S) ومركزها H ونصف قطرها R

حيث $R^2 = r^2 - d^2$ ومنه $R^2 + d^2 = r^2$

$$R^2 = (\sqrt{3})^2 - (\frac{\sqrt{3}}{3})^2 = 3 - \frac{3}{9} = \frac{24}{9}$$

$$R = \frac{\sqrt{24}}{3} \text{ ومنه}$$

$$S = \{-i, 4-i, 4+i\}$$

(2) A, B, C نقاط لواحقياع الترتيب

$$z_A = 4+i \quad z_B = 4-i \quad z_C = -i$$

(1) كتابة L على شكل المثلثي حيث

$$L = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_B} = \frac{4-i+i}{4+i-4+i} = \frac{4}{2i} = \frac{2}{i} = -2i$$

$$L = 2 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

وهو الشكل المثلثي لـ L

$$L = 2 e^{-i\pi/2}$$

وهو الشكل الأسي لـ L

ب/ برهان وجود تشابه ضابش

$$A \xrightarrow{S} B \text{ حيث } z_B = az_A + b$$

$$B \xrightarrow{S} C \text{ حيث } z_C = az_B + b$$

$$z_B - z_C = a(z_A - z_B)$$

$$a = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_B} = -2i$$

$$\text{Arg}(a) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, |a| = 2$$

$$b = z_C - az_B = -i + 2i(4-i)$$

$$b = 2 + 7i$$

وهذه العبارة البركة لـ S

$$z' = -2iz + 2 + 7i$$

وهذه S هو تشابه ضابش حيث

وزاوية $-\frac{\pi}{2}$ مركزه النقطة الأصل

$$z_0 = \frac{b}{1-a} = \frac{2+7i}{1+2i}$$

$$z_0 = \frac{16}{5} + \frac{3}{5}i$$

$$z^3 - (8-i)z^2 + (17-8i)z + 17i = 0 \quad (E)$$

(1) برهان ان المعادلة (E) تقبل حل

زحيلي صرف ولكن $z_0 = \alpha i$

$$(\alpha i)^3 - (8-i)(\alpha i)^2 + (17-8i)(\alpha i) + 17i = 0$$

$$-\alpha^3 i + 8\alpha^2 - \alpha^2 i + 17\alpha i + 8\alpha + 17i = 0$$

$$(8\alpha^2 + 8\alpha) + (-\alpha^3 - \alpha^2 + 17\alpha + 17)i = 0$$

$$\begin{cases} 8\alpha^2 + 8\alpha = 0 & (1) \\ -\alpha^3 - \alpha^2 + 17\alpha + 17 = 0 & (2) \end{cases}$$

حل المعادلتين (1) و (2) $\alpha = 0$ أو $\alpha = -1$

من أجل $\alpha = 0$ المعادلة (2) صحيحة

من أجل $\alpha = -1$ المعادلة (2) صحيحة

وهذه حل المعادلة (E) تقبل حل حقيقي

صرف هو $z_0 = -1$

ب/ برهان انه يمكن كتابة (E)

$$(z+i)(az^2+bz+c) = 0$$

$$az^3 + (b+ai)z^2 + (c+bi)z + ci = 0$$

بالمطابقة مع المعادلة (E) نجد

$$\begin{cases} a = 1 \\ b+ai = -8+i \\ c+bi = 17-8i \\ ci = 17i \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 17 \end{cases}$$

وهذه

وتصبح المعادلة (E) على الشكل

$$(z+i)(z^2-8z+17) = 0$$

حل المعادلة (E)

$$z+i=0 \text{ أو } z^2-8z+17=0$$

$$z = -i$$

$$\Delta = 64 - 4(17) = -4 = (2i)^2$$

وهذه المعادلة تقبل حليين

$$z_1 = \frac{8+2i}{2} = 4+i$$

$$z_2 = \frac{8-2i}{2} = 4-i$$

تحديد لعدد التحويل S_0
 نعلم ان مركب نشأته من S_0
 ليس نفس المركز W و W تشابه مباشر
 مركز W ليس جدار التبدل وزاوية
 مجموع الزوايا 2π و 2π
 $S_{W, -\frac{\pi}{2}, 2}$ $S_{W, -\frac{\pi}{2}, 2}$

$$= S_{W, -\pi, 4}.$$

$\alpha' = 4(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)) = -4$.
 ومنه S_0 هو زحاكى $S_{W, -\pi, 4}$
 و مركز W لا يتغير Z_0 .

التمرين الثالث

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية عددية معرفة بـ

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2 - \frac{1}{U_n} \end{cases}$$

1. البرهان بالتراجع انه
 ممكن $n \in \mathbb{N}$ $U_n > 1$
 نتحقق من صدق الخاصية من اجل $n=0$
 مرفقة $U_0 = 2 > 1$
 نرض ان الخاصية صدق من اجل
 n ونرى من صدقها مع $n+1$
 لدينا من الفرض $U_n > 1$
 ومنه $\frac{1}{U_n} < 1$

$$\text{ومنّه } -1 < -\frac{1}{U_n} \text{ بضاعه 2 نجد}$$

$$2 - \frac{1}{U_n} > 2 - 1$$

$U_{n+1} > 1$
 ومنه الخاصية صدق من اجل $n+1$.
 من (4) نستخرج انه ممكن $n \in \mathbb{N}$
 أي ان المتتالية (U_n) متتالية من الاعداد
 ا/ د راسمة اشارة $U_{n+1} - U_n$

$$U_{n+1} - U_n = 2 - \frac{1}{U_n} - U_n$$

$$= -\frac{(U_n+1)^2}{U_n} < 0$$

ومنّه المتتالية (U_n) متناقصه
 ج) (U_n) متتالية متناقصه ومحدودة

من الأسفل 1 فهي متقاربة
 ب) نفس المتتالية (V_n) حيث

$$V_n = 3 + \frac{1}{U_n - 1}$$

أ) برهان ان (V_n) متتالية حسابية

$$V_{n+1} = 3 + \frac{1}{U_{n+1} - 1}$$

$$= 3 + \frac{1}{2 - \frac{1}{U_n} - 1} = 3 + \frac{1}{1 - \frac{1}{U_n}}$$

$$= 3 + \frac{U_n}{U_n - 1}$$

$$V_{n+1} - V_n = 3 + \frac{U_n}{U_n - 1} - 3 - \frac{1}{U_n - 1}$$

$$= \frac{U_n - 1}{U_n - 1} = 1$$

ومنّه (V_n) متتالية حسابية
 أساسها $r=1$ وقدها الأول

$$V_0 = 4$$

عبارة V_n بدلالة n

$$V_n = n + 4$$

$$V_n = 3 + \frac{1}{U_n - 1} \text{ ضلع ومنّه}$$

$$U_n = 1 + \frac{1}{V_n - 3}$$

$$U_n = 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$$

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$$

$$= \frac{n+1}{2} (4 + n + 4)$$

$$= \frac{(n+1)(n+8)}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$$

سنفحص ان $f(x)$ قبل مركز تناظر
في النقطة $(0, 1)$.

(4) برهان ان المعادلة $f(x) = 0$
قبل حل وحيد α حيث $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$.

- f متزايدة على $]-\infty, 0[$ فهي متزايدة
على المجال $[-1, -1/2]$.

- f متناقصه على المجال $]-e, 0[$
فهي متناقصه (رئيه على المجال

$[-1, -1/2]$ $f(-1) \cdot f(-1/2) < 0$

لان $f(-1) = 1$, $f(-1/2) = -1$ f
من (1), (2), (3) وحسب مبرهنة

القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x) = 0$
قبل حل وحيد α حيث $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$.

(5) برهان ان $f(x)$ قبل مجال (π)
يشكل القطعة $A(0, 1)$

نرضي ان a هي نقطة التماس
ومنه معادلة (π)

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

$$A(0, 1) \in (\pi) \text{ ومنه } 1 = f'(a)(-a) + f(a).$$

$$-a f'(a) + f(a) = 1.$$

$$-a \cdot \frac{2(\ln|a| - 1)}{a^2} + 1 - \frac{2\ln|a|}{a} = 1.$$

$$-4\ln|a| + 2 = 0.$$

$$\ln|a| = 1/2 \text{ ومنه } |a| = e^{1/2}$$

$$a = \sqrt{e} \text{ و } a = -\sqrt{e}$$

$$H_1(\sqrt{e}, 1 - \frac{1}{\sqrt{e}})$$

$$H_2(-\sqrt{e}, 1 + \frac{1}{\sqrt{e}})$$

$$y = f(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + f(\sqrt{e}).$$

$$f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}.$$

$$D_f = \mathbb{R}^+ =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{\ln(x^2) - 2}{x^2}.$$

$$f'(x) = \frac{2(\ln|x| - 1)}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \text{ انما } \ln|x| - 1 = 0$$

$$\ln|x| = 1 \text{ انما } |x| = e.$$

$$x = e \text{ و } x = -e.$$

$$f'(x) < 0 \text{ انما } \ln|x| - 1 < 0$$

$$|x| < e$$

$$x \neq 0, -e < x < e$$

$$f(-e) = 1 + \frac{2}{e} \quad f(e) = 1 - \frac{2}{e}.$$

$$y = 1 : \text{ برهان ان } f(x) \text{ يتقاطع } (A)$$

$$f(x) = 1 \text{ انما } -\frac{\ln x^2}{x} = 0$$

$$x^2 = 1 \text{ ومنه } x = 1 \text{ و } x = -1.$$

$$A(-1, 1) \quad B(1, 1)$$

$$f(-x) + f(x) = 1 - \frac{\ln(-x)^2}{-x} + 1 - \frac{\ln x^2}{x}$$

$$= 1 + \frac{\ln x^2}{x} + 1 - \frac{\ln x^2}{x} = 2.$$

و f دالة زوجية.

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x^2)}{x} \quad \text{لك } x > 0$$

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x^2)}{-x} \quad \text{لك } x < 0$$

$$= 1 - \frac{\ln(x^2)}{x} \quad \text{لك } x \in]-\infty, 0[$$

$$= f(x) \quad \text{لك } x \in]-\infty, 0[$$

ومن هنا فإن منحنى h الكاف h يكون
منطبقاً على $(\mathcal{C}_f)$ في المجال $]0, +\infty[$

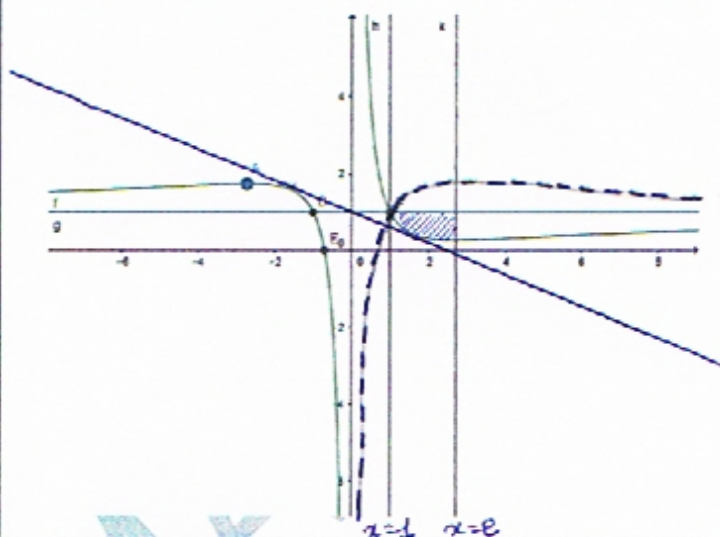
أما في المجال $]0, +\infty[$ فيرسم

بالناظر بالنسبة لمحور التماثل

لأن h دالة زوجية.

$$y = -\frac{1}{e}(x - \sqrt{e}) + 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$y = -\frac{1}{e}x + 1 \quad \text{و } (H) \text{ الدالة المستقيمة}$$



(7) مساحة المنطقة المحيطة بالمنحنى h بين $x=1$ و $x=e$

$(\mathcal{C}_f)$ والخط $y=1$ و $x=1$ و $x=e$

$$S = \int_1^e [1 - f(x)] dx$$

$$= \int_1^e \frac{\ln x^2}{x} dx$$

$$\therefore \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx = \int_1^e 2u \cdot u$$

$$= \left[(\ln x)^2 \right]_1^e$$

$$= 1$$

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x^2)}{|x|} \quad (8)$$

و h دالة زوجية و $x \in \mathbb{R}^*$

$$h(-x) = 1 + \frac{\ln((-x)^2)}{|-x|}$$

$$= 1 + \frac{\ln(x^2)}{|x|} = h(x)$$

اختر أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية :

$$(z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$$

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$

النقط A, B, C لواحقتها على الترتيب $z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ و $z_C = 2$.

$$1- \text{ أ) بين أن : } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

ب) عين طبيعة المثلث ABC .

ج) عين مركز ونصف قطر الدائرة $(\mathcal{C})$ المحيطة بالمثلث ABC . أرسم $(\mathcal{C})$.

2- أ) عين الطبيعة والعناصر الهندسية للمجموعة (Γ) مجموعة النقط M من

$$\text{المستوي ذات اللاحقة } z \text{ والتي تحقق } 2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0.$$

ب) تحقق أن النقطتين A و B تنتميان إلى (Γ) .

3- ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ) عين صورة النقطة B بالدوران R .

ب) عين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R ثم استنتج طبيعة

الرباعي $ABCD$.

ج) عين صورة المجموعة (Γ) بالدوران R .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

في الفضاء المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط

$$C(5; 4; -3), B(3; 2; -4), A(1; 4; -5)$$

$$D(-2; 8; 4) \text{ و الشعاع } \vec{u}(1; 5; -1).$$

1) بين أن $x - 2z - 11 = 0$ معادلة للمستوي (ABC) .

(2) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (T) المار من النقطة D والموازي للشعاع $\vec{u}$.

(3) ليكن (P) المستوي ذي المعادلة $x - y - z = 7$.

أ) بين المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق المستقيم (Δ) المعرف بالتمثيل

$$\begin{cases} x = 11 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases} \quad \text{الوسيطي : } (t \in \mathbb{R})$$

ب) أثبت أن (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.

(4) تعطى النقطتان $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$. تحقق أن النقطة E تنتمي إلى (Δ) و أن F تنتمي إلى (T).

(5) لتكن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} = \alpha$ ، حيث $\alpha \in \mathbb{R}$.

أ) جد بدلالة α معادلة ديكارتية للمجموعة (S) واستنتج أن (S) مستوي طلب تعيين شعاع ناظمي له.

ب) عين قيمة α حتى يكون (S) المستوي المحوري للقطعة $[FE]$.

التمرين الثالث (04 نقاط)

(u_n) المعرفة على المجموعة N ب: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$$

1- أحسب u_3, u_2, u_1 .

2- ا) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq n + 3$ ،

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - n$.

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4- نضع : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ و $T_n = \frac{S_n}{n^2}$

- أحسب بدلالة n المجموع S_n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

التمرين الرابع (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + (1-x)e^{-x+2}$.
(1) أدرس تغيرات الدالة g .

(2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq 0$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - 1 + xe^{-x+2}$.
نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

3- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ ثم فسر النتيجة هندسياً.

4- أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x - 1$.

5- أ) بين أن $I(2;3)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f) .

ب) بين أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها x_0 حيث $0 < x_0 < 0.2$.

ج) بين المنحني (C_f) يقبل مماساً (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له.

د) أحسب $f(-1)$ ثم أرسم (T) ، (Δ) و (C_f) .

6- ناقش بياناً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات

المجهول الحقيقي x التالية: $xe^{-x+2} - 1 - m = 0$: (E).

7- نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - (1+x)e^{-x+2} + 3$$

بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل القيمة 2 للمتغير.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (05 نقاط)

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(3; -2; 2)$, $B(6; 1; 5)$ و $C(6; -2; -1)$ والمستوي $(P): x + y + z - 3 = 0$
- برهن أن المثلث ABC قائم .
 - برهن أن المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A .
 - أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (P') المستوي العمودي على (AC) و المار من النقطة A .
 - أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع كلا من المستويين (P) و (P') .
 - أ) نعتبر النقطة $D(0; 4; -1)$. بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) .
ب) أحسب حجم رباعي الوجوه ABCD .
ج) بين أن قياس الزاوية BDC هو $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$.
د) أحسب مساحة المثلث BDC ثم استنتج المسافة بين النقطة A والمستوي (BDC) .

التمرين الثاني : (04 نقاط)

- نعتبر العددين المركبين z_1 و z_2 حيث ، $z_1 = 3 + i\sqrt{3}$ و $z_2 = -\sqrt{3} + 3i$
- أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسّي .
 - في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B و E التي لواحقها z_1, z_2 و $z_3 = z_1 + z_2$ على الترتيب .
أ) برهن أن المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين .
ب) استنتج أن الرباعي OAEB مربع .
 - أ) بين أن : $OE = 2\sqrt{6}$ وأن $(\vec{u}; \overrightarrow{OE}) = \frac{5\pi}{12}$.
ب) عين القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos \frac{5\pi}{12}$ و $\sin \frac{5\pi}{12}$.

(ج) أحسب Z_3^{2016} .

(د) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد $\left(\frac{Z_3}{2\sqrt{6}}\right)^n$ حقيقيا .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ: $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$$

1- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$.

2- أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < \frac{1}{2}$.

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1 - 2u_n)}{2u_n + 1}$ ثم بين أن

المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة .

(ج) هل $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة؟ عين نهايتها .

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

أ) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية أساسها $q = 6$.

ب) أحسب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج أن $u_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$.

(ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

● الجزء الأول :

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي : $g(x) = x^2 - 2 \ln x$.

1- أدرس تغيرات الدالة g .

2- استنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في المجال $]0; +\infty[$.

● الجزء الثاني :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي :

$$f(x) = 1 - x - \frac{2}{x}(1 + \ln x)$$

نسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x ، $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

2- أ) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 1 - x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

ج) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $0.41 < \alpha < 0.42$.

د) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة ديكارتية له .

د) أرسم (Δ) ، (T) و (C_f) .

3- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة

ذات المجهول الحقيقي x التالية : $f(x) = m - x$: (E) .

تمنياتي لكم جميعا بالتوفيق

والنجاح في البكالوريا



تصحيح الإمتحان التجريبي ماي 2016 شعبة : علوم تجريبية

تصحيح الموضوع الاول

التمرين الأول :

I. حل المعادلة $(E): (z-2)(z^2+2z+4)=0$:

$$(z-2)(z^2+2z+4)=0 \text{ يكافئ } z-2=0 \text{ أو } z^2+2z+4=0$$

$$z-2=0 \text{ معناه } z=2$$

• حل المعادلة $(*) : z^2+2z+4=0$

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 - 16 = -12$$

$$\Delta = 12i^2 = (2i\sqrt{3})^2 \text{ نضع}$$

- المعادلة $(*)$ تقبل حلين مركبين متمايزين هما :

$$z_2 = \frac{-2+2i\sqrt{3}}{2} = -1+i\sqrt{3}, \quad z_1 = \frac{-2-2i\sqrt{3}}{2} = -1-i\sqrt{3}$$

مجموعة حلول المعادلة (E) هي $S = \{2, -1+i\sqrt{3}, -1-i\sqrt{3}\}$

II. لدينا : $z_C = 2$ و $z_B = -1-i\sqrt{3}, z_A = -1+i\sqrt{3}$

$$1- \text{ أ تبيان أن : } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\bullet \text{ لدينا : } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{-1-i\sqrt{3}-2}{-1+i\sqrt{3}-2} = \frac{-3-i\sqrt{3}}{-3+i\sqrt{3}} = \frac{(-3-i\sqrt{3})(-3-i\sqrt{3})}{(-3+i\sqrt{3})(-3-i\sqrt{3})}$$

$$- \text{ ومنه } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{9+6i\sqrt{3}-3}{12} = \frac{6}{12} + i\frac{6\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$- \text{ أي } \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ لأن :}$$

$$\left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = \left| \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

$$\text{Arg}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

ب) تعيين طبيعة المثلث ABC :

$$\bullet \text{ لدينا : } \left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = 1 \text{ ومنه } \frac{CB}{CA} = 1 \text{ أي } CB = CA$$

ولدينا : $\text{Arg}\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ أي $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ومنه ABC مثلث متقايس الأضلاع.

ج) تعيين مركز ونصف قطر الدائرة ($\mathcal{C}$) المحيطة بالمثلث ABC :

• لدينا : $|z_C| = 2 = OC$ و $|z_B| = 2 = OB$ ، $|z_A| = 2 = OA$ وبالتالي : $OA = OB = OC = 2$ أي النقط A, B, C تنتمي إلى دائرة ($\mathcal{C}$) مركزها $O(0;0)$ ونصف قطرها $r = 2$

2- أ) تعيين طبيعة (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق:

$$2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$$

$$2(x + iy + x - iy) + x^2 + y^2 = 0 \text{ معناه } 2(z + \bar{z}) + z\bar{z} = 0$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 4 \text{ وبالتالي : } x^2 + y^2 + 4x = 0 \text{ ومنه } x^2 + y^2 + 4x = 0$$

أي أن (Γ) هي دائرة مركزها النقطة $\Omega(-2;0)$ ونصف قطرها $r = 2$.

ب) التحقق من أن A و B تنتميان إلى (Γ):

$$\Omega A = |z_A - z_\Omega| = |-1 + i\sqrt{3} + 2| = |1 + i\sqrt{3}| = 2 = r$$

$$\Omega B = |z_B - z_\Omega| = |-1 - i\sqrt{3} + 2| = |1 - i\sqrt{3}| = 2 = r$$

وبالتالي A و B تنتميان إلى (Γ).

3- لدينا R دوران مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ) تعيين صورة النقطة B بالدوران R :

$$z_{B'} = az_B + b \text{ معناه } R(B) = B'$$

$$a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ أي } a = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$b = (1-a)z_A = \left(1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1 + i\sqrt{3}) = 1 + i\sqrt{3}$$

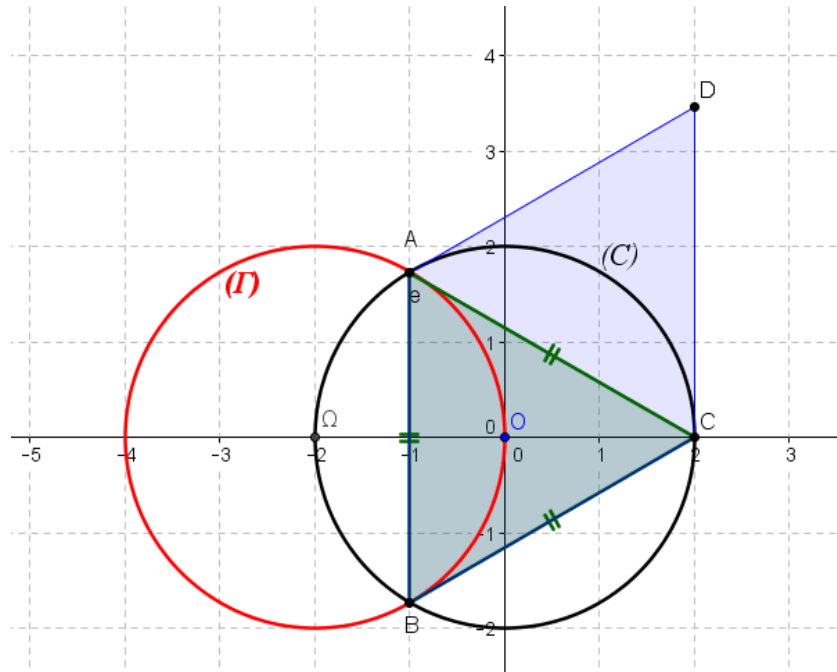
$$z_{B'} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-1 - i\sqrt{3}) + 1 + i\sqrt{3} = 2 = z_C$$

$$\text{ومنه } R(B) = C$$

أ) تعيين z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R :

$$z_D = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z_C + 1 + i\sqrt{3} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 2 + 1 + i\sqrt{3} = 2 + 2i\sqrt{3}$$

$$\text{أي } z_D = 2 + 2i\sqrt{3}$$



• استنتاج طبيعة الرباعي ABCD :

الرباعي ABCD معين لأن :

• $ABCD$ متوازي أضلاع لأن : $z_{\overline{AB}} = -1 + i\sqrt{3} + 1 + i\sqrt{3} = 2i\sqrt{3}$ و

$$z_{\overline{DC}} = 2 + 2i\sqrt{3} - 2 = 2i\sqrt{3}$$

$$z_{\overline{AB}} = z_{\overline{DC}} = 2i\sqrt{3} \text{ أي}$$

ولدينا : $BC = CD$ لأن $R(B) = C$ و $R(C) = D$

ج) صورة (Γ) بالدوران R :

هي $(\mathcal{C})$ لأن $R(\Omega) = O$ و $R(B) = C$

التمرين الثاني :

$\vec{u}(1;5;-1)$ و $D(-2;8;4), C(5;4;-3), B(3;2;-4), A(1;4;-5)$

1) تبين أن $x - 2z - 11 = 0$ معادلة للمستوي (ABC) :

نعوض بإحداثيات النقط C, B, A في المعادلة السابقة نجد :

$$\begin{cases} 1 - 2(-5) - 11 = 11 - 11 = 0 \\ 3 - 2(-4) - 11 = 11 - 11 = 0 \\ 5 - 2(-3) - 11 = 11 - 11 = 0 \end{cases}$$

ومنه $x - 2z - 11 = 0$ معادلة للمستوي (ABC)

2, كتابة تمثيل وسيطي للمستقيم (T) المار من النقطة D والموازي للشعاع $\vec{u}(1;5;-1)$

- أي $\vec{u}(1;5;-1)$ شعاع توجيه للمستقيم (T).

$$(T): \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 5t + 8 \\ y = -t + 4 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

3) لدينا: $(P): x - y - z = 7$

أ) تبيان أن المستويين (ABC) و (P) يتقاطعان وفق المستقيم

$$(\Delta): \begin{cases} x = 11 + 2t \\ y = 4 + t \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

- نعوض جملة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) في معادلة (ABC) نجد : $11 + 2t - 2t - 11 = 0$ ومنه $0t = 0$.

- نعوض جملة التمثيل الوسيطي للمستقيم (Δ) في معادلة (P) نجد : $11 + 2t - 4 - t - t - 7 = 0$ أي $0t = 0$.

وبالتالي (Δ) محتوي في كل المستويين (ABC) و (P) فهما إذن متقاطعان وفق المستقيم (Δ).

ب) اثبات أن (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي :

- لدينا : $\frac{1}{1} \neq \frac{5}{-1} \neq \frac{-1}{-1}$ وبالتالي $\vec{u}$ و $\vec{u}'$ غير مرتبطين خطيا أي أن (T) و (Δ) غير

متوازيين . فهما إما متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي .

$$\text{نحل الجملة } \begin{cases} 11 + 2t = t' - 2 \dots (1) \\ 4 + t = 5t' + 8 \dots (2) \\ t = -t' + 4 \dots (3) \end{cases} \text{ فنجد } \begin{cases} t = 4 \\ t' = 0 \end{cases}$$

بالتعويض في المعادلة (1) نجد : $11 + 2(4) = 0 - 2$ (مستحيلة) ومنه (T) و (Δ) ليسا من نفس المستوي .

4) لدينا : $E(3;0;-4)$ و $F(-3;3;5)$.

• التحقق من أن $E \in (\Delta)$:

نعوض بإحداثيات النقطة E في جملة التمثيل الوسيطي لـ (Δ) نجد :

$$\begin{cases} 3 = 11 + 2t \\ 0 = 4 + t \\ t = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = -4 \\ t = -4 \end{cases}$$

ومنه $E \in (\Delta)$

• التحقق من أن $F \in (T)$:

نعوض بإحداثيات النقطة F في جملة التمثيل الوسيطية لـ (T) نجد :

$$\begin{cases} -3 = t - 2 \\ 3 = 5t + 8 \\ 5 = -t + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 \\ t = -1 \end{cases}$$

ومنه $F \in (T)$

(5) لدينا : $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} = \alpha (\alpha \in \mathbb{R})$ (S)

أ) تعيين معادلة ديكارتية للمجموعة (S) بدلالة α

• لدينا : $\overrightarrow{ME}(3-x; -y; -4-z)$ و $\overrightarrow{FE}(6; -3; -9)$

$$\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{FE} = \alpha \text{ معناه } 6(3-x) - 3(-y) - 9(-4-z) = \alpha$$

$$-6x + 3y + 9z + 54 - \alpha = 0 \text{ أي } 18 - 6x + 3y + 36 + 9z = \alpha \text{ ومنه } -6x + 3y + 9z + 54 - \alpha = 0$$

طبيعة المجموعة (S) : هي مستو شعاع ناظمي له $\vec{n}(-6; 3; 9)$

ب) تعيين قيمة α بحيث يكون (S) المستوي المحوري للقطعة [FE] :

• لدينا (S) المستوي المحوري للقطعة [FE] معناه (S) يمر من منتصف [FE]

وليكن I

$$x_I = \frac{x_E + x_F}{2} = \frac{3-3}{2} = 0$$

$$y_I = \frac{y_E + y_F}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2} \text{ إذن -}$$

$$z_I = \frac{z_E + z_F}{2} = \frac{-4+5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$-6 \times 0 + 3 \times \frac{3}{2} + 9 \times \frac{1}{2} + 54 - \alpha = 0 \text{ بالتعويض في المعادلة السابقة نجد :}$$

$$\text{أي } 9 + 54 - \alpha = 0 \text{ وبالتالي } \alpha = 63$$

التمرين الثالث

• لدينا : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

1- حساب u_3, u_2, u_1 :

$$u_1 = \frac{7}{3} ; u_2 = \frac{26}{9} ; u_3 = \frac{97}{27}$$

2- أ) البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq n + 3$

• نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

(1) من أجل $n = 0$ لدينا :

$u_0 = 2$ وبالتالي $u_0 \leq 3$ ومنه $P(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$.

(2) نفرض صحة $P(n)$ أي نفرض أن $u_n \leq n + 3$ ونبرهن على صحة $P(n+1)$ أي

نبرهن أن: $u_{n+1} \leq n + 4$

• لدينا: $u_n \leq n + 3$ ومنه $\frac{2}{3}u_n \leq \frac{2}{3}(n + 3)$ إذن $\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq \frac{2}{3}(n + 3) + \frac{1}{3}n + 1$

وبالتالي: $u_{n+1} \leq \frac{2}{3}n + 2 + \frac{1}{3}n + 1$ أي $u_{n+1} \leq n + 3$ ومنه $u_{n+1} \leq n + 3 \leq n + 4$

إذن $u_{n+1} \leq n + 4$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة.

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

(ب) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$

من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = \frac{1}{3}(2u_n + n + 3 - 3u_n) = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$$

• استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

- لدينا: $u_n \leq n + 3$ ومنه $n + 3 - u_n \geq 0$ أي $\frac{1}{3}(n + 3 - u_n) \geq 0$

وبالتالي $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ومنه (u_n) متزايدة.

3- لدينا: $v_n = u_n - n$ من أجل كل عدد طبيعي n .

(أ) البرهان على أن المتتالية (v_n) هندسية:

• لدينا: $v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}(u_n - n)$

أي $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$ ومنه (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = u_0 - 0 = 2$

(ب) تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

• لدينا: $u_n = v_n + n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n \right] = +\infty$: لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$

لدينا: $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ و $T_n = \frac{S_n}{n^2}$

(4) حساب S_n بدلالة n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n + (1 + 2 + \dots + n) = v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + \frac{n}{2}(1 + n)$$

$$S_n = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} = 2 \times 3 \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} \text{ وبالتالي}$$

$$S_n = 6 - 4 \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2 \text{ ومنه}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \frac{1}{2} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{n^2} - \frac{4}{n^2} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

التمرين الرابع

1) دراسة تغيرات الدالة g :

• حساب النهايات:

- لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+2} = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + (1-x)e^{-x+2}) = +\infty$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + (1-x)e^{-x+1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^2 \times e^{-x} - e^2 \times x e^{-x}) = 1$

• حساب المشتقة:

$$g'(x) = -e^{-x+2} - (1-x)e^{-x+1} = (x-2)e^{-x+2}$$

• جدول التغيرات

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	0	1

استنتاج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq 0$:

• من أجل $x \in \mathbb{R}$ فإن $g(x) \in [0; +\infty[$ ومنه $g(x) \geq 0$

$$f(x) = x - 1 + x e^{-x+2} \text{ لدينا:}$$

1- حساب النهايات:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x+2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1) = -\infty \end{cases} \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1 + x e^{-x+2}) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1+xe^{-x+2}) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{e^2} = 0 \end{cases}$$

2. تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x) = g(x)$

$$\bullet \text{ لدينا : } f'(x) = 1 + e^{-x+2} - xe^{-x+2} = 1 + (1-x)e^{-x+2} = g(x)$$

$$\text{ومنه } f'(x) = g(x)$$

• استنتاج اتجاه تغير الدالة f : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	

• جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3 حساب

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1+xe^{-x+2} - x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x+2} = 0$$

• التفسير الهندسي :

المستقيم ذي المعادلة $y = x-1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

4 دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى $y = x-1$: (Δ)

• ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$- \text{ لدينا : } f(x) - y = xe^{-x+2}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f)	(C_f) فوق (Δ) يقطع (Δ)

5. تبيان أن النقطة $I(2;3)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f) :

• لدينا : $f''(x) = g'(x) = (x-2)e^{-x+2}$

• جدول إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

المشتقة الثانية f'' تنعدم من

أجل $x=2$ مغيرة إشارتها أي النقطة $I(2;3)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) .

ب) تبين أن المنحنى (C_f) في نقطة فاصلتها $0 < x_0 < 0.2$:

• الدالة f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[0;0.2]$ ولدينا :

$$f(0) = -1 \text{ و } f(0.2) = 0.2 - 1 + 0.2 \times e^{-0.2+2} = -0.8 + 1.21 = 0.41$$

$$\text{ومنه } f(0) \times f(0.2) < 0$$

- حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_0 حيث $0 < x_0 < 0.2$

أي (C_f) يقطع $(x'x)$ في النقطة $(x_0;0)$ حيث $0 < x_0 < 0.2$

ج) تبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) :

(T) يوازي (Δ) معناه معامل توجيه المماس (T) يساوي 1

أي $f'(x) = 1$ ومنه $g(x) = 1$ وبالتالي : $1 + (1-x)e^{-x+2} = 1$

إذن : $(1-x)e^{-x+2} = 0$ ومنه $1-x = 0$ أي $x = 1$

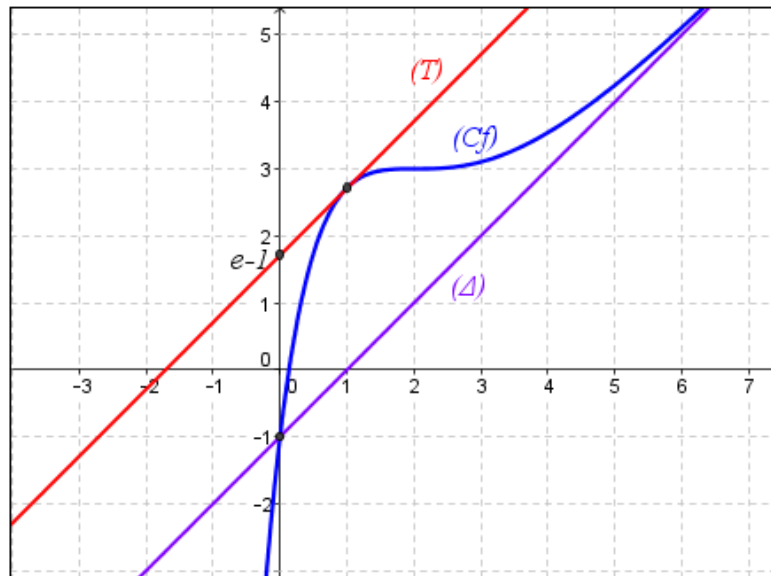
• كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) :

$$(T) : y = x - 1 + e \text{ أي } y = f'(1)(x-1) + f(1) = 1 \times (x-1) + e = x - 1 + e$$

د) حساب $f(-1)$:

$$f(-1) = -1 - 1 - e^3 = -2 - e^3 = -22.09$$

الرسم :



6. المناقشة البيانية لحلول المعادلة $(E): xe^{-x+2} - 1 - m = 0$

$$xe^{-x+2} - 1 = m \text{ معناه } xe^{-x+2} - 1 - m = 0$$

$$\text{ومنه } f(x) = x + m \text{ أي } x - 1 + xe^{-x+2} = x + m$$

• إذن حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة

$$y = x + m \text{ الموازي لكل من } (\Delta) \text{ و } (T)$$

• إذا كان $m \in]-\infty; -1]$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا .

• إذا كان $m = -1$ المعادلة تقبل حلا معدوما .

• إذا كان $m \in]-1; e-1]$ المعادلة تقبل حلين موجبيين .

• إذا كان $m = e-1$ المعادلة تقبل حلا وحيدا هو 1 .

• إذا كان $m \in]e-1; +\infty[$ فإن المعادلة ليس لها حل .

7. تبيان أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل القيمة 2 للمتغير:

$$\bullet \text{ لدينا : } F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - (1+x)e^{-x+2} + 3$$

$$\begin{aligned} F'(x) &= x - 1 - [e^{-x+2} + (1+x)(-e^{-x+2})] = x - 1 - (1 - 1 - x)e^{-x+2} \\ &= x - 1 + xe^{-x+2} \end{aligned}$$

$$\text{أي } F'(x) = f(x)$$

$$\bullet \text{ ولدينا : } F(3) = \frac{1}{2} \times 2^2 - 2 - (1+2)e^{-2+2} + 3 = 2 - 2 - 3e^0 + 3 = -3 + 3 = 0$$

وبالتالي F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل القيمة 2 للمتغير.

تصحيح الموضوع الثاني

التمرين الأول :

لدينا : $A(3;-2;2), B(6;1;5), C(6;-2;-1)$ والمستوي $(P): x + y + z - 3 = 0$

1 البرهان على أن المثلث ABC قائم :

- لدينا : $\overrightarrow{AB}(3;3;3)$ ، $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ و $\overrightarrow{BC}(0;-3;-6)$
ولدينا : $AB = \sqrt{(3)^2 + (3)^2 + (3)^2} = 3\sqrt{3}$ و $AC = \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$
و $BC = \sqrt{(0)^2 + (-3)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}$
إذن : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ومنه المثلث ABC قائم في النقطة A .

2 البرهان على أن المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A :

• لدينا : $\vec{n}(1;1;1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P)
- إذن $\frac{3}{1} = \frac{3}{1} = \frac{3}{1} = 3$ ومنه $\overrightarrow{AB} = 3\vec{n}$ أي $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{n}$ وبالتالي $(AB) \perp (P)$
- نعوض بإحداثيات النقطة A في معادلة (P) نجد : $3 - 2 + 2 - 3 = 0$ أي $A \in (P)$
وبالتالي : المستوي (P) عمودي على المستقيم (AB) ويمر من النقطة A

3 كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P') العمودي على المستقيم (AC) والمار من النقطة A :

لدينا : $\overrightarrow{AC}(3;0;-3)$ شعاع ناظمي للمستوي (P') وبالتالي معادلة للمستوي (P') من الشكل : $3x - 3z + d = 0$
- تعيين قيمة d نعوض بإحداثيات النقطة A نجد :
 $3(3) - 3(2) + d = 0$ ومنه $d = -3$

وبالتالي معادلة للمستوي (P') : $3x - 3z - 3 = 0$ أي $x - z - 1 = 0$

4 كتابة تمثيل وسيطي لـ (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (P') :

• لدينا : $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ x = z + 1 \end{cases}$ وبالتالي
إذن : $\begin{cases} x = z + 1 \\ y = -2z + 2 \end{cases}$
نضع : $z = t$ وبالتالي : $(t \in \mathbb{R})$: $(\Delta) : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t + 2 \\ z = t \end{cases}$

5 أ تبيان أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC) :

• لدينا : $D(0;4;-1)$ وبالتالي $\overrightarrow{AD}(-3;6;-3)$ إذن :

$$\vec{AD} \perp \vec{AB} \text{ ومنه } \vec{AD} \cdot \vec{AB} = -3(3) + 6(3) - 3(3) = -18 + 18 = 0$$

$$\vec{AD} \perp \vec{AC} \text{ ومنه } \vec{AD} \cdot \vec{AC} = -3(3) + 6(0) - 3(-3) = -9 + 9 = 0$$

وبالتالي المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)

ب) حساب حجم رباعي الوجوه ABCD :

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times AD$$

$$\text{لدينا : } S_{ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{6}}{2}$$

$$AD = \sqrt{(-3)^2 + (6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

$$V_{ABCD} = 27uv \quad \text{أي } V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{6}}{2} \times 3\sqrt{6} = 27uv$$

ج) تبين أن قياس الزاوية BDC هو $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$

$$\text{لدينا : } \vec{DB}(6; -3; 6) \text{ و } \vec{DC}(6; -6; 0)$$

$$\text{وبالتالي : } \vec{DB} \cdot \vec{DC} = 6 \times 6 - 3(-6) + 6 \times 0 = 36 + 18 = 54$$

$$\text{ولدينا : } \vec{DB} \cdot \vec{DC} = \|\vec{DB}\| \times \|\vec{DC}\| \times \cos(\vec{DB}, \vec{DC})$$

$$\cos(\vec{DB}, \vec{DC}) = \frac{54}{9 \times 6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ أي } \vec{DB} \cdot \vec{DC} = \sqrt{81} \times \sqrt{72} \times \cos(\vec{DB}, \vec{DC})$$

$$\text{ومنه } BDC = 45^\circ$$

د) حساب مساحة المثلث BDC :

$$S_{BDC} = \frac{1}{2} DB \times DC \times \sin BDC = \frac{1}{2} \times 9 \times 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 27us$$

- استنتاج المسافة بين النقطة A والمستوي (BDC) :

$$\text{لدينا : } V_{ABDC} = \frac{1}{3} \times S_{BDC} \times d(A, (BCD)) = \frac{1}{3} \times 27 \times d(A, (BCD)) = 27$$

$$d(A, (BDC)) = 3 \quad \text{ومنه } d(A, (BDC)) = \frac{27}{\frac{1}{3} \times 27} = 3$$

التمرين الثاني :

$$\bullet \text{ لدينا : } z_2 = -\sqrt{3} + 3i \text{ و } z_1 = 3 + i\sqrt{3}$$

1) كتابة العددين z_2, z_1 على الشكل الأسّي :

$$\text{لدينا : } |z_1| = \sqrt{(3)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\theta_1 = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \text{ ومنه } \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ نضع : } \theta_1 = \text{Arg}(z_1) \text{ إذن}$$

$$\text{وبالتالي : } z_1 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$|z_2| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (3)^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ لدينا :}$$

$$\text{نضع : } \theta_2 = \text{Arg}(z_2) \text{ إذن } \begin{cases} \cos \theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ ومنه}$$

$$\theta_2 = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{وبالتالي : } z_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$(2) \text{ لدينا : } z_3 = z_1 + z_2$$

(أ) البرهان على أن المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين :

$$\bullet \text{ لدينا : } \frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}}{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{ومنه } \frac{OB}{OA} = 1 \text{ أي } OB = OA \text{ و } (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \text{ أي أن المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين.}$$

(ب) استنتاج أن الرباعي OAEB مربع :

• لدينا :

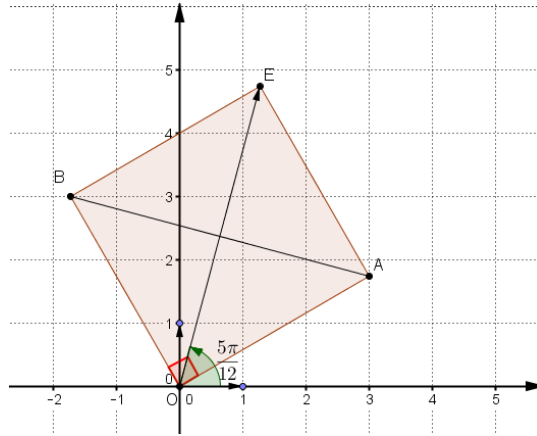
$$z_{\overrightarrow{AE}} = z_1 + z_2 - z_1 = z_2 \text{ و } z_{\overrightarrow{OB}} = z_2$$

$$\text{أي أن } \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OB}$$

ومنه الرباعي OAEB متوازي أضلاع.

• ولدينا : OAB مثلث قائم ومتساوي الساقين

وبالتالي OAEB مربع.



(3) أ تبيان أن $OE = 2\sqrt{6}$

• لدينا : $OE^2 = OA^2 + AE^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 = 12 + 12 = 24$

ومنه $OE = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

• تبيان أن $(\vec{u}, \overrightarrow{OE}) = \frac{5\pi}{12}$

- لدينا : $(\vec{u}, \overrightarrow{OE}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE})$

ومنه $(\vec{u}, \overrightarrow{OE}) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi + 3\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$

(ب) تعيين القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos \frac{5\pi}{12}$ و $\sin \frac{5\pi}{12}$

لدينا : $z_3 = z_1 + z_2 = 3 + i\sqrt{3} - \sqrt{3} + 3i = (3 - \sqrt{3}) + i(3 + \sqrt{3})$

• ولدينا : $z_3 = 2\sqrt{6} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right)$

بالمطابقة نجد :

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

و $\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

(ج) حساب z_3^{2016}

$$z_3^{2016} = (2\sqrt{6})^{2016} \left(\cos \frac{2016 \times 5\pi}{12} + i \sin \frac{2016 \times 5\pi}{12} \right)$$

$$= (2\sqrt{6})^{2016} (\cos 840\pi + i \sin 840\pi)$$

أي $z_3^{2016} = (2\sqrt{6})^{2016}$

(د) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_3}{2\sqrt{6}}\right)^n$ حقيقيا :

$$\left(\frac{z_3}{2\sqrt{6}}\right)^n \text{ حقيقيا معناه } \left(\cos \frac{5n\pi}{12} + i \sin \frac{5n\pi}{12}\right) \text{ حقيقيا}$$

$$\text{ومنه } 0 = \sin \frac{5n\pi}{12} \text{ وبالتالي } \frac{5n\pi}{12} = k\pi \text{ أي } 5n\pi = 12k\pi$$

$$\text{إذن } 5n = 12k \text{ ومنه } n = 12\left(\frac{k}{5}\right) \text{ وبالتالي } n = 12k' (k' \in \mathbb{N})$$

التمرين الثالث:

$$\bullet \text{ لدينا : } u_0 = \frac{1}{5} \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$$

$$1. \text{ التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$$

$$\text{لدينا : } u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1} \text{ ومنه : } u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1} = \frac{2u_n + 1 - 1}{2u_n + 1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$$

$$2. \text{ أ) البرهان على أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, 0 < u_n < \frac{1}{2}$$

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

$$1- \text{ من أجل } n=0 \text{ لدينا : } u_0 = \frac{1}{5} \text{ و } 0 < \frac{1}{5} < \frac{1}{2} \text{ أي } 0 < u_0 < \frac{1}{2}$$

إذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n=0$.

$$2- \text{ نفرض صحة } P(n) \text{ أي نفرض أن : } 0 < u_n < \frac{1}{2} \text{ ونبرهن صحة } P(n+1) \text{ أي}$$

$$\text{نبرهن أن : } 0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}.$$

$$- \text{ لدينا : } 0 < u_n < \frac{1}{2} \text{ ومنه } 0 < 2u_n < 1 \text{ أي } 1 < 2u_n + 1 < 2$$

$$\text{وبالتالي } 1 < \frac{1}{2u_n + 1} < 2 \text{ إذن } -1 < -\frac{1}{2u_n + 1} < -\frac{1}{2}$$

$$\text{وأخيرا : } 0 < 1 - \frac{1}{2u_n + 1} < \frac{1}{2} \text{ أي } 0 < u_{n+1} < \frac{1}{2} \text{ ومنه } P(n+1) \text{ صحيحة.}$$

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

$$b) \text{ التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1 - 2u_n)}{2u_n + 1}$$

• لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{2u_n + 1} - u_n = \frac{2u_n - 2u_n^2 - u_n}{2u_n + 1} = \frac{u_n - 2u_n^2}{2u_n + 1} = \frac{u_n(1 - 2u_n)}{2u_n + 1}$

• تبيان أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة :

ندرس إشارة الفرق : $u_{n+1} - u_n$

- لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1 - 2u_n)}{2u_n + 1}$

ولدينا : $0 < u_n < \frac{1}{2}$ ومنه $-1 < -2u_n < 0$ أي $0 < 1 - 2u_n < 1$

وبالتالي : $0 < u_n(1 - 2u_n) < \frac{1}{2}$

- ولدينا : $\frac{1}{2} < \frac{1}{2u_n + 1} < 1$ ومنه $0 < \frac{u_n(1 - 2u_n)}{2u_n + 1} < \frac{1}{2}$

أي $u_{n+1} - u_n > 0$ وبالتالي المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة.

(ج) دراسة تقارب المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\frac{1}{2}$ فهي متقاربة وتتقارب من العدد $\frac{1}{2}$.

تعيين نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$

3- لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

أ) اثبات أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية :

• لدينا : $v_{n+1} = \frac{3^{n+1} u_{n+1}}{2u_{n+1} - 1}$

$$v_{n+1} = \frac{3^{n+1} u_{n+1}}{2u_{n+1} - 1} = \frac{3 \times 3^n \times \frac{2u_n}{2u_n + 1}}{2 \times \frac{2u_n}{2u_n + 1} - 1} = \frac{6 \times 3^n \times u_n}{4u_n - 2u_n - 1} = \frac{6 \times 3^n \times u_n}{2u_n - 1}$$

أي $v_{n+1} = 6 \times \frac{3^n \times u_n}{2u_n - 1} = 6v_n$ ومنه $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية أساسها

$$v_0 = \frac{3^0 \times u_0}{2u_0 - 1} = \frac{1 \times \frac{1}{5}}{2 \times \frac{1}{5} - 1} = \frac{\frac{1}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{1}{3}$$

$q = 6$ وحدها الأول

(ب) حساب عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

• لدينا : $v_n = v_0 \times q^n = -\frac{1}{3} \times 6^n$

• استنتاج أن : $u_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$

- لدينا : $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$ ومنه $2u_n v_n - v_n = 3^n u_n$ أي $2u_n v_n - 3^n u_n = v_n$

- ومنه $(2v_n - 3^n)u_n = v_n$ وبالتالي : $u_n = \frac{v_n}{2v_n - 3^n}$

إذن : $u_n = \frac{-\frac{1}{3} \times 6^n}{2\left(-\frac{1}{3} \times 6^n\right) - 3^n} = -\frac{6^n}{-2 \times 6^n - 3 \times 3^n}$

ومنه $u_n = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3} = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$ أي $u_n = -\frac{6^n}{-2 \times 6^n - 3 \times 3^n} = \frac{2^n \times 3^n}{2 \times 3^n \times 2^n + 3 \times 3^n}$
حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^n \left(2 + \frac{3}{2^n}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{1}{2}$

التمرين الرابع :

• الجزء الأول :

• لدينا : $g(x) = x^2 - 2 \ln x$

1- دراسة تغيرات الدالة g :

• حساب النهايات :

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2 \ln x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - 2 \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty$

• حساب المشتقة :

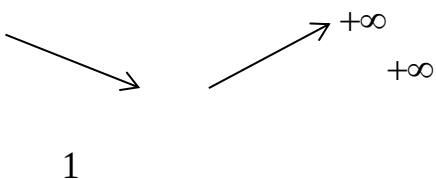
$g'(x) = 2x - 2 \times \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}$

• دراسة إشارة المشتقة :

x	1	$+\infty$
$g'(x)$	- 0 +	0

• جدول التغيرات :

x	1	$+\infty$
-----	---	-----------

	0
$g'(x)$	0 + -
$g(x)$	

2- استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$+\infty$ 0
$g(x)$	+

• الجزء الثاني :

- لدينا : $f(x) = 1 - x - \frac{2}{x}(1 + \ln x)$

1- أ) حساب النهايات :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{x}(1 + \ln x) \right) = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - x - \frac{2}{x}(1 + \ln x) \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - x - \frac{2}{x}(1 + \ln x) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - x - \frac{2}{x} - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x) = -\infty \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

ب) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$

$$\text{• لدينا : } f'(x) = -1 - 2 \left[-\frac{1}{x^2}(1 + \ln x) + \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \right] = -1 - 2 \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2 \ln x}{x^2} = -\frac{g(x)}{x^2} \text{ اي}$$

ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة f : بما أن $g(x) > 0$ فإن $f'(x) < 0$

x	$+\infty$
$f'(x)$	0
	$-$

• جدول تغيرات الدالة f :

x	$+\infty$
$f'(x)$	0
	$-$
$f(x)$	$+\infty$
	$-\infty$

2- أ) تبيان أن المستقيم $y = 1 - x$: (Δ) مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$:

• لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (1 - x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - x - \frac{2}{x}(1 + \ln x) - 1 + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x}(1 + \ln x) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (1 - x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{x} - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = 0 \text{ إذن}$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب) دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$.

$$f(x) - y = 1 - x - \frac{2}{x}(1 + \ln x) - 1 + x = -\frac{2}{x}(1 + \ln x)$$

• جدول إشارة الفرق :

$$-\frac{2}{x}(1 + \ln x) = 0 \text{ معناه } f(x) - y = 0$$

ومنه $1 + \ln x = 0$ أي $\ln x = -1$ وبالتالي $x = e^{-1}$.

S

x	e^{-1}	0	$+\infty$
$1+\ln x$	0	+	-
$f(x)-y$	0	-	+
الوضع النسبي	فوق (C_f)	تحت (Δ)	تحت (Δ)

ج) تبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.41 < \alpha < 0.42$:

• لدينا f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[0.41; 0.42]$

• ولدينا: $f(0.41) = 1 - 0.41 - \frac{2}{0.41}(1 + \ln 0.41) = 0.06$

و $f(0.42) = 1 - 0.42 - \frac{2}{0.42}(1 + \ln 0.42) = -0.05$

أي أن $f(0.41) \times f(0.42) < 0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.41 < \alpha < 0.42$

د) تبين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) :

• (T) يوازي (Δ) معناه معامل توجيه (T) يساوي -1 أي $f'(x) = -1$

ومنه $-\frac{x^2 - 2\ln x}{x^2} = -1$ أي $x^2 - 2\ln x = x^2$

وبالتالي $-2\ln x = 0$ إذن $\ln x = 0$ ومنه $x = 1$

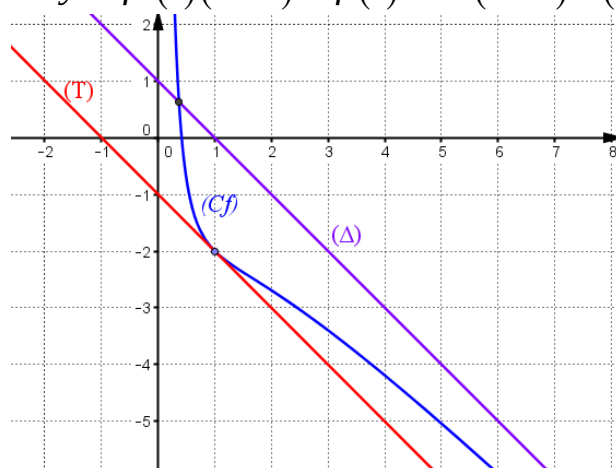
(T) مماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$

• كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = -1(x-1) + (-2) = -x + 1 - 2 = -x - 1$$

أي $(T): y = -x - 1$

• الرسم:



(4) المناقشة البيانية لحلول المعادلة $f(x) = m - x$ ($m \in \mathbb{R}$) :

- حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = m - x$ الموازي لكل من (T) و (Δ)
- إذا كان $m \in]-\infty; -1[$ المعادلة ليس لها حل .
- إذا كان $m = -1$ المعادلة تقبل حلا هو $x = 1$.
- إذا كان $m \in]-1; 1[$ المعادلة تقبل حلين موجبين .
- إذا كان $m \in [1; +\infty[$ المعادلة تقبل حلا موجبا .

قالت امرأة لزوجها وهي ترفع من شأنها: أنت كالشاي وأنا كالبسكوطة فلا طعم للشاي بدون بسكوطة.... فرد بهدوء قائلا: احذري أن تذوبي في الشاي فتختفين ويبقى سلطان الشاي يبحث عن بسكوطة أخرى.

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر القطعة $A(-2, -1, 0)$ والمستويين (P_1) و (P_2) اللذين معادلة كل منهما $3x + y + 3 = 0$ و $2x - z + 3 = 0$ على الترتيب

(1) أ / بين أن المستويين (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) له تمثيلا وسيطيا كما يلي :

$$(\Delta): \begin{cases} x = t \\ y = -3t - 3 \\ z = 2t + 3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ب / تحقق أن النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم (Δ)

(2) أ / عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يشمل النقطة A و يوازي (Δ)

ب / عين إحداثيات النقطة B المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ)

- ثم استنتج المسافة بين المستقيمين (Δ) و (d)

(3) لتكن (Γ) مجموعة القطر M من الفضاء التي تحقق : $MA^2 + MB^2 = 4AI^2$ حيث I منتصف $[AB]$

أ / عين طبيعة المجموعة (Γ) وحدد عناصرها المميزة

ب / لستنتج قاطع المجموعة (Γ) مع المستقيمين (Δ) و (d)

التمرين الثاني: (4.5 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z الآتية : $(Z - 4 - 2i)(Z^2 - 2Z + 2) = 0$

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{U}, \vec{V})$ ، نعتبر القطر A ، B ، C التي لواحقها :

$$Z_A = 1 + i, \quad Z_B = 4 + 2i, \quad Z_C = \frac{9}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{على الترتيب}$$

$$\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{أ / بين أن :}$$

ب / استنتج طبيعة المثلث BAC ثم احسب مساحته

(3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه B ونسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$

أ / عين الكتابة المركبة للتشابه S

ب / عين Z_D لائحة النقطة D صورة النقطة C بالتشابه S

ج / بين أن صورة المثلث BAC بالتشابه S هو المثلث BCD ثم لستنتج مساحة المثلث BCD

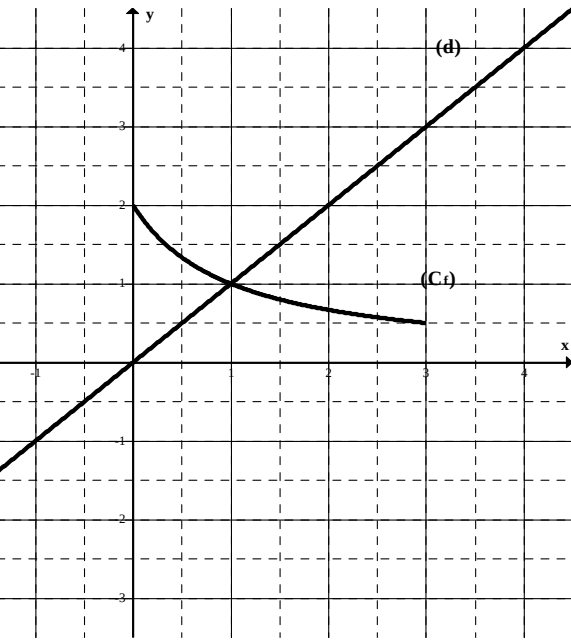
(4) لتكن (E) مجموعة النقط من المستوي حيث : $\vec{MA} \cdot \vec{MD} = 0$

أ / عين طبيعة المجموعة (E) وحدد عناصرها المميزة

ب / تحقق أن النقطة C تنتمي إلى المجموعة (E) ثم استنتج طبيعة المثلث ACD

التمرين الثالث (4,5 مل)

في الشكل المقابل (C_f) هو التمثيل البياني للدالة المعرفة على المجال $[0, 3]$ بـ:



$$y = x \text{ و } f(x) = \frac{2}{x+1}$$

1 (U_n) متتالية عددية معرفة بحدّها الأول : $U_0 = 3$

ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$

أ/ مل الحدود $U_0, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5$ و U_6 على حامل محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل (وذلك في الوثيقة المرفقة).

ب/ ضع تخمينا حول رتبة المتتالية (U_n) وتقاربها

ج/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_{2n}) و المتتالية (U_{2n+1})

2 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n \leq 3$

3 (V_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$

أ- بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $(-\frac{1}{2})$ يطلب تعيين حدّها الأول

ب- أكتب V_n بدلالة n ، ثم لستنتج U_n بدلالة n

ج- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ وماذا تستنتج؟

التمرين الرابع : (07 مل)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = xe^x + e^x - 1$

1 بين أن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$ وفسر النتيجة بيانيا ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2 ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

3 احسب $g(0)$ ثم لستنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

(II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = xe^x - x$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس ($O, \vec{i}, \vec{j}$) (وحدة الطول هي 1cm)

1. احسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$

2. أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

3. أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

ب/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

4. أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف w يطلب تعيين إحداثياتها

ب/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له

ج/ احسب $f(1)$ و $f(2)$ ثم لنشئ (Δ) و المماس (T) والمنحنى (C_f)

د/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $xe^x = m$

5. a بين أن : $x \mapsto (x-1)e^x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$

b احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما :

$$x = 0 \text{ و } x = -1$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 هـ)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر القطر $A(-3, 3, 2)$ ، $B(-2, 1, 0)$ والمستوي (p) الذي $2x + 2y - z + 2 = 0$ ، معادلة ديكارتية له

$$x = \alpha + \beta$$

و (Q) المستوي المعرف بالتمثيل الوسيطى: $\begin{cases} y = 4\alpha - 2\beta + 1 \\ z = \alpha - 2\beta - 2 \end{cases}$ حيث α و β عدنان حقيقيان

1 أ/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

ب/ أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q)

ج/ تحقق أن المستويين (p) و (Q) متعامدان ويتقاطعان وفق المستقيم (AB)

2 أ عين المركز C ونصف القطر r لمساح الكرة (S) الذي يمر كل من المستويين (p) و (Q) في النقطتين E و F على الترتيب

ب لستنتج بعد القطعة BC عن كل من المستويين (p) و (Q)

3 أ/ تحقق أن المثلث ABC قائم في القطعة B ثم احسب مساحته

ب/ بين أن $\vec{EF}$ عمودي على المستوي (ABC)

ج/ احسب حجمي رباعي الوجوه $ABCE$ و $ABCF$

التمرين الثاني: (4,5 هـ)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{U}, \vec{V})$ ، L العدد المركب المعرف بـ: $L = \frac{\alpha + \beta i}{3 + 5i}$ حيث α و β عدنان حقيقيان

1 عين α و β بحيث يكون: $|L| = 1$ و $\arg(L) = \frac{\pi}{4}$

2 نضع: $\alpha = -\sqrt{2}$ و $\beta = 4\sqrt{2}$

أ/ عين قيم العدد الطبيعي حتى يكون L^n عددا حقيقيا موجبا

ب/ بين أن: $L^{2016} = 1$ ، ثم احسب $(-\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^{2016} - (3 + 5i)^{2016}$

3 القطلتان A و B لاحتقاهما على الترتيب:

$$Z_B = 3 + 5i, \quad Z_A = -\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$$

أ/ عين زاوية الدوران الذي مركزه O ويحول B إلى A

ب/ استنتج طبيعة المثلث OBA

ج/ بين أن: $AB = \sqrt{34(2 - \sqrt{2})}$

4 لتكن القطعة G منتصف $[AB]$ و M نقطة كيفية من المستوي المركب

أ/ بين أن: $MA^2 + MB^2 = 2MG^2 + 17(2 - \sqrt{2})$

ب/ عين مجموعة النقط M من المستوي حيث: $MA^2 + MB^2 = 42 - 17\sqrt{2}$

التمرين الثالث : (4.5 قه)

(U_n) متتالية عددية معرفة كمايلي: $U_1 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)} U_n$

1 أ/ احسب U_2 و U_3

ب/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_n > 0$

ج/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج أنها متتالية متقاربة و احسب نهايتها

2 نعتبر المتتالية العددية (V_n) المعرفة كمايلي :

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $V_n = n2^n U_n$

أ/ بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول V_1

ب/ أكتب كلام V_n و U_n بدلالة n ، ثم اثبت صحة تقارب المتتالية (U_n)

3 1/ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$

2/ احسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = U_1 \times (2U_2) \times (3U_3) \times \dots \times (nU_n)$

التمرين الرابع : (07 قه)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$

1 احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة

2 ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها على المجال $]0, +\infty[$

3 احسب $g(1)$ ثم لستنتج إشارة $g(x)$

(II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2 - (\ln x)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. أ/ اثبت أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ ، (مساعدة: نضع $t = \sqrt{x}$)

ب/ لستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. 1 تحقق أن: $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

2 اعط تفسيراً بيانياً للنتائج

3. بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0, +\infty[$: $f'(x) = g(x) \times \frac{1}{x}$

4. استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

5. ارسم المنحنى (C_f)

6. أ/ اثبت أن: $x \mapsto x \ln x - x$ ، هي دالة أصلية للدالة: $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0, +\infty[$

ب/ باستعمل المكاملة بالتجزئة تحقق أن: $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$

ج/ احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما:

$x = e$ و $x = 1$

الاجابة النموذجية لامتحان البكالوريا التجريبية

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 مل)

1 أ بين أن المستويين (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ)

$$(\Delta) \cap (P_1): 3(t) + (-3t - 3) + 3 = 0 \quad \text{أي} \quad 0 = 0$$

$$(\Delta) \cap (P_2): 2(t) - (2t + 3) + 3 = 0 \quad \text{أي} \quad 0 = 0$$

بـ تحقق أن النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم (Δ)
 $-2 = t$

$$A \in (\Delta) \quad \text{لان} \quad \begin{cases} -1 = -3t - 3 \\ 0 = 2t + 3 \end{cases} \quad ; \quad t = -\frac{2}{3} \quad (t \in \mathbb{R})$$

2 أ عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يشمل النقطة A و يوازي (Δ) :

$$x = \lambda - 2$$

$$(d): \begin{cases} y = -3\lambda - 1 \\ z = 2\lambda \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{ومنه} \quad \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{U}_{(\Delta)}$$

بـ عين إحداثيات النقطة B المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (Δ)

$$B \in (\Delta), \quad B(t, -3t - 3, 2t + 3)$$

$$\begin{pmatrix} t+2 \\ -3t-2 \\ 2t+3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{إن:} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \begin{pmatrix} t+2 \\ -3t-2 \\ 2t+3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ولدينا} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{U}_{(\Delta)} = 0 \quad \text{إن:}$$

$$\text{ومنه} \quad t = -1 \quad \text{وبالتالي} \quad B(-1, 0, 1)$$

- ثم استنتج المسافة بين المستقيمين (Δ) و (d)

$$AB = \sqrt{(-1+2)^2 + (0+1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3}$$

3 أ عين طبيعة المجموعة (Γ) وحدد عناصرها المميزة

$$\text{لدينا } I \text{ منتصف } [AB] \text{ أي: } AB = 2AI \quad \text{ومنه:} \quad MA^2 + MB^2 = 4AI^2$$

$$\text{تكلف:} \quad MA^2 + MB^2 = (2AI)^2 \quad \text{ومنه نستلزم:} \quad MA^2 + MB^2 = AB^2 \quad \text{ومنه النقطة } A, B \text{ و } M \text{ تحقق}$$

نظرية فيثاغورس وبالتالي (Γ) هي سطح كرة قطرها AB ومركزها I

بـ استنتج قطع المجموعة (Γ) مع المستقيمين (Δ) و (d) :

$$\text{بما أن: } B \in (\Delta) \text{ و } A \in (d) \text{ و } (\Gamma) \text{ هي دائرة قطرها } AB \text{ فإن: } (\Gamma) \cap (\Delta) = \{B\} \text{ و } (\Gamma) \cap (d) = \{A\}$$

التمرين الثاني: (4.5 مل) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z الآتية : $(Z - 4 - 2i)(Z^2 - 2Z + 2) = 0$

$$\begin{cases} Z = 4 + 2i \\ Z^2 - 2Z + 2 = 0 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} Z - 4 - 2i = 0 \\ Z^2 - 2Z + 2 = 0 \end{cases}$$

$Z^2 - 2Z + 2 = 0$ نحسب المميز Δ نجد : $\Delta = -4 = 4i^2$ ومنه $Z_1 = 1 + i$ و $Z_2 = 1 - i$

ومنه مجموعة حلول المعادلة : $S = \{4 + 2i, 1 + i, 1 - i\}$

$$(2) \text{ أ/ بين أن : } \frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} \quad ; \quad \frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ب/ استنتج طبيعة المثلث BAC ثم احسب مساحته

$$S_{BAC} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{\sqrt{10} \times \sqrt{\frac{10}{4}}}{2} = \frac{10}{4} \text{ م. ومنه المثلث BAC قائم في B ومساحته :}$$

(3) أ/ عين الكتابة المركبة للتشابه S :

$$\text{لدينا: } \frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B} = \frac{1}{2} i \quad \text{أي : } (Z_C - Z_B) = \frac{1}{2} i (Z_A - Z_B) \quad \text{وبعد التبسيط نجد : } Z_C = \frac{1}{2} i Z_A + 5$$

إذن العبارة المركبة للتشابه هي : $Z' = \frac{1}{2} i Z + 5$

ب/ عين Z_D لاحقة القطعة D صورة القطعة C بالتشابه S

$$Z_D = \frac{1}{2} i Z_C + 5 = \frac{19}{4} + i \frac{9}{4}$$

ج/ بين أن صورة المثلث BAC بالتشابه S هو المثلث BCD ثم استنتج مساحة المثلث BCD

S تشابه مركزه B ونسبته $\frac{1}{2}$ ويحول A إلى C ويحول C إلى D ومنه صورة المثلث BAC بالتشابه S هو المثلث BCD

$$\text{وم } S_{BCD} = \frac{CB \times BD}{2} = \frac{\frac{1}{2} AB \times \frac{1}{2} BC}{2} = \frac{\frac{1}{4} AB \times BC}{2} = \frac{S_{BAC}}{4} = \frac{10}{16}$$

(4) أ/ عين طبيعة المجموعة (E) وحدد عناصرها المميزة:

$$(E) \text{ هي دائرة قطرها AD أي : } (x - x_A)(x - x_D) + (y - y_A)(y - y_D) = 0$$

$$\text{ومنه : } (E): x^2 + y^2 - \frac{23}{4}x - \frac{13}{4}y + 7 = 0 \quad \text{وبالتالي هي دائرة مركزها } G\left(\frac{23}{8}; \frac{13}{4}\right) \text{ ونصف قطرها } \sqrt{7}$$

ب/ تحقق أن القطعة C تنتمي إلى المجموعة (E) ثم استنتج طبيعة المثلث ACD

$$0 = 0 \quad \text{أي} \quad \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{23}{4}\left(\frac{9}{2}\right) - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{2}\right) + 7 = 0 \quad \text{ومن المثلث ACD قائم في النقطة C}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) = \frac{2}{U_{n+1}} \end{array} \right. \quad \text{نعتبر المتتالية } (U_n):$$

1 أ/ تمثيل الحدود $U_0, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5$ و U_6 على حامل محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل

ب/ ضع تخميناً حول رتبة المتتالية (U_n) وتقاربها

(U_n) متتالية غير رتيبة وهي مقاربة نحو العدد 1

ج/ ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (U_{2n}) و المتتالية (U_{2n+1})

من التمثيل نستنتج أن المتتالية (U_{2n}) متتالية متناقصة والمتتالية (U_{2n+1}) متتالية متزايدة

2 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq U_n \leq 3$

من أجل $n = 0 : 0 \leq U_0 \leq 3$ أي $0 \leq 3 \leq 3$ القضية صحيحة

فرض أن $0 \leq U_n \leq 3$ ونثبت صحة القضية $0 \leq U_{n+1} \leq 3$

لدينا : $0 \leq U_n \leq 3$ ، وبإضافة العدد 1 إلى الطرفين نجد : $1 \leq U_n + 1 \leq 4$ وبقلب طرفي المتباينة وضرب

الطرفين في (2) نجد : $\frac{2}{4} \leq \frac{2}{U_{n+1}} \leq 1$ أي $\frac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq 1$ ومنه : $0 \leq U_{n+1} \leq 3$

إن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0 \leq U_n \leq 3$

3 أ- بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها $(-\frac{1}{2})$ يطلب تعيين حدّها الأول

لدينا : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$ ومنه $V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 2}$

أي $V_{n+1} = \frac{\frac{U_n + 1}{2} - 1}{\frac{U_n + 1}{2} + 2}$: إذن $V_{n+1} = \frac{-U_n + 1}{2U_n + 4}$

وبأخذ $(-\frac{1}{2})$ عامل مشترك نجد : $V_{n+1} = (-\frac{1}{2}) \left(\frac{U_n - 1}{U_n + 2} \right)$ أي $V_{n+1} = -\frac{1}{2} V_n$

إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها $(q = -\frac{1}{2})$ وحدها الأول : $V_0 = \frac{U_0 - 1}{U_0 + 2} = \frac{2}{5}$

ب- أكتب V_n بدلالة n ، ثم لستنتج U_n بدلالة n

$V_n = \frac{2}{5} \times (-\frac{1}{2})^n$ ومن العبارة $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$ نجد : $U_n = \frac{2V_n - 1}{V_n - 1}$: إذن $U_n = \frac{\frac{4}{5} \times (-\frac{1}{2})^n - 1}{\frac{2}{5} \times (-\frac{1}{2})^n - 1}$

ج- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ وماذا تستنتج ؟ : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{5} \times (-\frac{1}{2})^n - 1}{\frac{2}{5} \times (-\frac{1}{2})^n - 1} = \frac{-1}{-1} = 1$

ومنه نستنتج أن : (U_n) متتالية متقاربة نحو العدد 1

التمرين الرابع (07 مل) : I نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = xe^x + e^x - 1$

1 بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$ وفسر النتيجة بيانيا ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

ومنه $y = -1$ معادلة لمستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x + e^x - 1 = -1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

2 ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها :

نحسب الدالة المشتقة وندرس إشارتها : $g'(x) = e^x(x + 2)$

ومنه من أجل كل عدد حقيقي : $g'(x) = 0$

إذاً كل : $(x + 2) = 0$ أي $x = -2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$+$
$g(x)$	-1	0	$+\infty$

$\swarrow \quad \searrow$
 $g(-2)$

3 أ حسب $g(0)$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$:

ومنه: $g(0) = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجل $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = xe^x - x$
 1 احسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

2 أ بين انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$

$$f'(x) = xe^x + e^x - 1 = g(x)$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(0)$	$+\infty$

$\swarrow \quad \searrow$
 $f(0)$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها:

3 أ/ بين ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ هو مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$

ب/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) + x$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $(0,0)$	(C_f) فوق (Δ)

4 أ بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف w يطلب تعيين إحداثياتها:

$$f''(x) = g'(x) \quad \text{ان :} \quad f'(x) = g(x)$$

ومنه (C_f) يقبل نقطة انعطاف عند : $x = -2$ وهي : $w(-2, -2e^{-2} + 2)$

ب بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له :

(C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يعني أن : $f'(x) = -1$ أي : $x = -1$

معادلة (T) : $y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$ إذن : $y_T = -x - e^{-1}$

ج احسب $f(1)$ و $f(2)$ ثم لثغ (Δ) و المماس (T) و المنحنى (C_f)



د ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية : $xe^x = m$

$xe^x = m$ فمن اجل كل عدد حقيقي $x = m - x$ أي : $f(x) = -x + m$

m	$-\infty$	$-e^{-1}$	0	$+\infty$
$f(x) = -x + m$	المعادلة لا قبل حل	المعادلة قبل حل مضاعف $x = -2$	المعادلة قبل حل معدوم	المعادلة قبل حل موجب

5 a/ بين أن : $x \mapsto (x-1)e^x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^x$ على $\mathbb{R}$:

$$((x-1)e^x)' = xe^x$$

b/ احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = -1$ و $x = 0$

مساحة الحيز هي :

$$\int_{-1}^0 [-x - f(x)] dx = \int_{-1}^0 [-xe^x] dx = - \int_{-1}^0 [xe^x] dx = -[(x-1)e^x]_{-1}^0 = 1 - 2e^{-1}$$

ومنه مساحة الحيز هي 0.624 وحدة مساحة

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 مل)

1 أ/ اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) :

$$(AB): \begin{cases} x = t - 3 \\ y = -2t + 3 \\ z = -2t + 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{ومنه : } (AB): \overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$$

ب/ أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (Q) :

$$x = \alpha + \beta \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{لدينا : } \begin{cases} y = 4\alpha - 2\beta + 1 \dots\dots\dots (2) \\ z = \alpha - 2\beta - 2 \dots\dots\dots (3) \end{cases} \quad \text{نجد } \beta = \frac{x-z-2}{3}$$

$$\text{ومن (1) نجد : } \alpha = x - \beta = \frac{2x+z+2}{3} \quad \text{وبالتعويض في (2) نجد : } 2x - y + 2z + 5 = 0 \quad (Q)$$

ج/ تحقق أن المستويين (p) و (Q) متعامدان ويتقاطعان وفق المستقيم (AB) :

$$\vec{n}_p \cdot \vec{n}_Q = 0 \quad \text{إذن : } \vec{n}_p \perp \vec{n}_Q \quad \text{ومنه المستويين } (p) \text{ و } (Q) \text{ متعامدان}$$

$$(AB) \cap (p) : 2(t-3) + 2(-2t+3) - (-2t+2) + 2 = 0 \quad \text{أي } 0 = 0$$

$$(AB) \cap (Q) : 2(t-3) - (-2t+3) + 2(-2t+2) + 5 = 0 \quad \text{أي } 0 = 0$$

2 أ/ عين المركز C ونصف القطر r لمساح الكرة (S) الذي يمس كل من المستويين (p) و (Q) في النقطتين E و F على الترتيب

$$\left\{ \begin{array}{l} (CE): \overrightarrow{EM} = t\vec{n}_p \\ (CF): \overrightarrow{FM} = \lambda\vec{n}_Q \end{array} \right. \quad \text{المركز } C \text{ هو نقطة تقاطع المستقيمين } (CE) \text{ و } (CF) \text{ ومنه :}$$

$$\text{إذن : } \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad (CE)$$

$$(CF): \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -\lambda + 3 \\ z = 2\lambda - 1 \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad \text{و}$$

$$2t = 2\lambda$$

$$2t = -\lambda + 3$$

$$-t + 2 = 2\lambda - 1$$

$(CE) \cap (CF)$ يعني أن :

ومنه $\lambda = 1$ أي $t = 1$: $C(2, 2, 1)$ ونصف القطر $r = CE = \sqrt{(0-2)^2 + (0-2)^2 + (2-1)^2} = 3$

ب/ نستنتج بعد القطة C عن كل من المستويين (p) و (Q):

المسافة بين C والمستويين (p) و (Q) هي: $CE = CF = r = 3$

3/ a/ تحقق أن المثلث ABC قائم في القطة B ثم احسب مساحته

لدينا: $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$ أي $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ ومنه المثلث ABC قائم في القطة B

$$S_{ABC} = \frac{AB \times BC}{2} = \frac{3 \times 3\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2} \text{ وإن: وم}$$

b/ بين أن $\vec{EF}$ عمودي على المستوي (ABC): $\vec{EF} \cdot \vec{AB} = 0$ و $\vec{EF} \cdot \vec{BC} = 0$ أي: $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$ و $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$

c/ احسب حجمي رباعي الوجوه ABCE و ABCF:

$$V_{ABCE} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times EI$$

$$V_{ABCF} = \frac{1}{3} S_{ABC} \times FI \text{ و حيث المنتصف [EF]}$$

$$V_{ABCE} = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{2}}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{2} (U.V) \text{ إن: وم}$$

$$V_{ABCF} = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{2}}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{9}{2} (U.V) \text{ و}$$

ملاحظة: يمكن حساب حجمي رباعي الوجوه ABCE و ABCF باعتبار أن: الارتفاع هو CE و CF والقاعدة هي

المثلث ABE و ABF على الترتيب

التمرين الثاني: (4,5):

(1) عين α و β بحيث يكون: $|L| = 1$ و $\arg(L) = \frac{\pi}{4}$:

$$L = \frac{\alpha + \beta i}{3 + 5i} = \frac{(\alpha + \beta i) \times (3 - 5i)}{(3 + 5i) \times (3 - 5i)} = \frac{(3\alpha + 5\beta)}{34} + i \frac{(3\beta - 5\alpha)}{34} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ لدينا:}$$

$$\text{إن: } \begin{cases} \frac{3\alpha + 5\beta}{34} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\beta - 5\alpha}{34} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} 3\alpha + 5\beta = 17\sqrt{2} \\ 3\beta - 5\alpha = 17\sqrt{2} \end{cases} \text{ وبحل جملة المعادلتين نجد: } \alpha = -\sqrt{2} \text{ و } \beta = 4\sqrt{2}$$

(2) أ/ عين قيم العدد الطبيعي حتى يكون L^n عددا حقيقيا موجبا:

لدينا: $L = e^{i\frac{\pi}{4}}$ إن: $L^n = e^{i\frac{n\pi}{4}}$ ومنه: يكون L^n عددا حقيقيا موجبا إذا كان: $\arg(L) = 2k\pi$

$$\frac{n\pi}{4} = 2k\pi \text{ أي: } n = 8k \text{ ; } k \in \mathbb{Z} \text{ وبالتالي:}$$

$$L^{2016} = 1 \text{ , ثم احسب } (-\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^{2016} - (3 + 5i)^{2016}$$

$$L^{2016} = e^{i\frac{2016\pi}{4}} = e^{i8(252)\pi} = 1$$

$$\text{لدينا: } L^{2016} = 1 \text{ أي } \frac{(-\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^{2016}}{(3 + 5i)^{2016}} = 1 \text{ إن:}$$

ومنه نستلزم : $(-\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^{2016} = (3 + 5i)^{2016}$ أي $(-\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i)^{2016} - (3 + 5i)^{2016} = 0$

3 أ/ عين زاوية الدوران الذي مركزه O ويحول B إلى A

$$a = \frac{z_A}{z_B} = \frac{-\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i}{3 + 5i} = L = e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ إذن : } (z_A - z_O) = a(z_B - z_O)$$

ومنه الدوران الذي مركزه O ويحول B إلى A زاويته $\frac{\pi}{4}$

ب/ استنتج طبيعة المثلث OBA: المثلث OBA مثلث متقايس الساقين

ج/ بين أن : $AB = \sqrt{34(2 - \sqrt{2})}$

$$AB = \sqrt{(3 + \sqrt{2})^2 + (5 - 4\sqrt{2})^2} = \sqrt{34(2 - \sqrt{2})}$$

4 أ/ بين أن : $MA^2 + MB^2 = 2MG^2 + 17(2 - \sqrt{2})$

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 \\ &= 2\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB}) + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 \\ &= 2\overrightarrow{MG}^2 + 2\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right)^2 = 2\overrightarrow{MG}^2 + \frac{\overrightarrow{AB}^2}{2} = 2MG^2 + \frac{(AB)^2}{2} = 2MG^2 + 17(2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

أ/ عين مجموعة النقط M من المستوي حيث : $MA^2 + MB^2 = 1 + 17\sqrt{2}$

$MA^2 + MB^2 = 42 - 17\sqrt{2}$ أي $2MG^2 + 17(2 - \sqrt{2}) = 42 - 17\sqrt{2}$ ومنه $2MG^2 = 8$ أي $MG = 2$ ومنه مجموعة النقط M هي دائرة مركزها ونصف قطرها 2

التمرين الثالث: (4,5 هـ): نعتبر المتتالية U_n المعرفة بـ:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{1}{4} \\ U_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)} U_n \end{cases}$$

متتالية عددية معرفة كماليلي: $U_1 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)} U_n$

1 أ/ احسب U_2 و U_3 : $U_2 = \frac{1}{4(1+1)} U_1 = \frac{1}{32}$ و $U_3 = \frac{2}{4(2+1)} U_2 = \frac{1}{384}$

ب/ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_n > 0$

- من اجل $n = 1$: $U_1 > 0$ أي $\frac{1}{4} > 0$ القضية صحيحة
- نفرض أن $U_n > 0$ ونثبت صحة القضية $U_{n+1} > 0$
- لدينا : $U_n > 0$ و $n > 0$ فإن $\frac{n}{4(n+1)} > 0$: إذن $\frac{n}{4(n+1)} U_n > 0$ أي $U_{n+1} > 0$

إذن من اجل كل عدد طبيعي n : $U_n > 0$

ج / ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج أنها متتالية متقاربة و احسب نهايتها

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n}{4(n+1)} U_n - U_n = \frac{-3n-4}{4(n+1)} U_n < 0$$

ومنه المتتالية (U_n) متناقصة ولكونها محدودة من الأسفل كذلك فهي متتالية متقاربة و نهايتها هي l حيث:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(l) = l$$

$$\text{ومنه } f(l) = l \quad \text{تكفى} \quad \frac{n}{4(n+1)} l = l \quad \text{أي } l = 0 \quad \frac{-3n-4}{4(n+1)} l = 0$$

$$\text{وبما } \frac{-3n-4}{4(n+1)} \neq 0 \quad \text{فإن } l = 0 \quad \text{وبالتالي } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

2 أ بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول V_1 حيث: $V_n = n2^n U_n$

$$\text{لدينا: } V_n = n2^n U_n \quad \text{أي } V_{n+1} = (n+1)2^{n+1} U_{n+1}$$

$$= (n+1)2^n \times 2 \frac{n}{4(n+1)} U_n$$

$$= \frac{1}{2} n2^n U_n \quad \text{ومنه: } V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$$

$$\text{إن } (V_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } (q = \frac{1}{2}) \text{ وحدها الأول: } V_1 = 1 \times 2 \times U_1 = \frac{1}{2}$$

ب / أكتب كلام V_n و U_n بدلالة n ، ثم اثبت صحة تقارب المتتالية (U_n) :

$$\text{ولدينا: } V_n = n2^n U_n \quad V_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{ونستلزم أن: } U_n = \frac{1}{n2^{2n}} \quad \text{ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n2^{2n}} = 0$$

وبالتالي متتالية متقاربة نحو 0

3 1 / احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$

$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1$$

2 / احسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = U_1 \times (2U_2) \times (3U_3) \times \dots \times (nU_n)$

$$\text{لدينا: } V_n = n2^n U_n \quad \text{أي } U_n = \frac{1}{n2^n} V_n \quad \text{وبالتعويض في } P_n \text{ نجد:}$$

$$P_n = \left(\frac{1}{2} V_1\right) \times \left(2 \times \frac{1}{2 \times 2^2} V_2\right) \times \left(3 \times \frac{1}{3 \times 2^3} V_3\right) \times \dots \times \left(n \times \frac{1}{n \times 2^n} V_n\right)$$

$$\text{أي: } P_n = \left(\frac{V_1}{2}\right) \times \left(\frac{V_2}{2^2}\right) \times \left(\frac{V_3}{2^3}\right) \times \dots \times \left(\frac{V_n}{2^n}\right)$$

$$\text{ومنه: } P_n = \frac{V_1 \times V_2 \times V_3 \times \dots \times V_n}{2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^n}$$

$$\text{ولدينا: } V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$P_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \dots \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)n}}{2^{\left(\frac{n+1}{2}\right)n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)n} \quad \text{إن:}$$

التمرين الرابع: (07 مل):

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$

1 احسب نهايات الدالة g عند طرفي مجموعة:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - \frac{1}{x^2} - 2 \frac{\ln x}{x} \right) \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \frac{x^2 - 1 - 2x \ln x}{x} = -\infty$$

2 ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها على المجال $]0, +\infty[$:

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$$

لدينا من أجل كل $x \in]0, +\infty[$ فإن $g'(x) > 0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $]0, +\infty[$

• جدول تغيرات الدالة g :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	+
$g(x)$	$+\infty$		$-\infty$

3 احسب $g(1)$ ثم لستنتج إشارة $g(x)$
 $g(1) = 0$

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$		0	+

(II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{1}{x} - 2 - (\ln x)^2$

1 أ/ أثبت أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (مساعدة: نضع $t = \sqrt{x}$)

نضع: $t = \sqrt{x}$ أي: $t^2 = x$ ومنه لما $x \rightarrow +\infty$ فإن $t \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln t^2)^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 \ln t}{t} \right)^2 = 0$$

ب/ لستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} - \frac{(\ln x)^2}{x} \right) \right] = +\infty$

2 1 تحقق أن: $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$, ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{1}{x}} - 2 - \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 = f(x)$$

نضع: $t = \frac{1}{x}$ ومنه لما $x \rightarrow 0^+$ فإن $t \rightarrow +\infty$ إذن:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$$

2 اعط تفسيراً بيانياً للنتائج : $x = 0$ معادلة لمستقيم مقارب عمودي

3 بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0, +\infty[$: $f'(x) = g(x) \times \frac{1}{x}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x} = g(x) \times \frac{1}{x}$$

4 استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها:

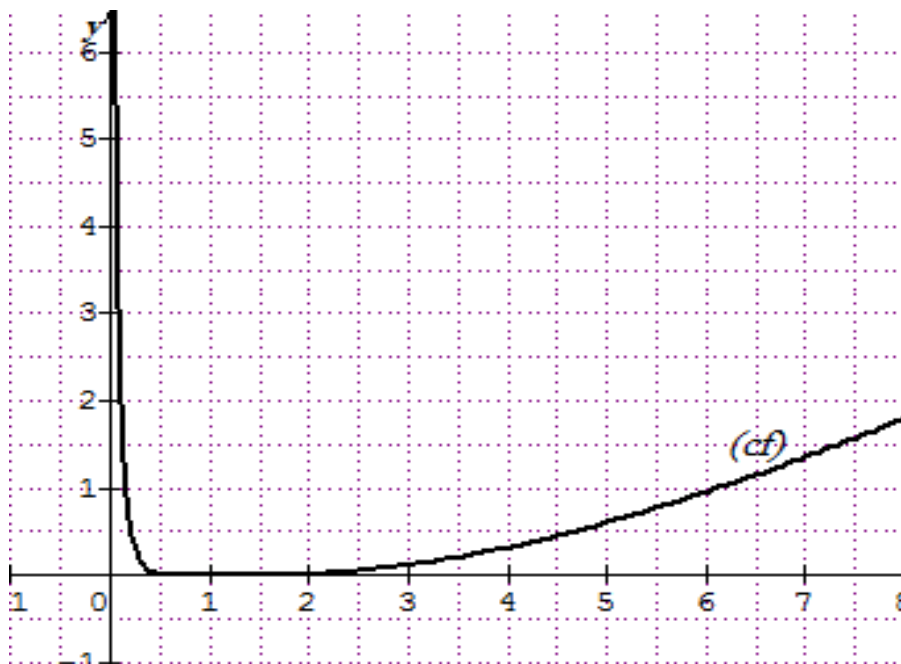
x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

ومنه من اجل كل $x \in]0, +\infty[$ فإن

لشارة $f'(x)$ من لشارة $g(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(1)$	$+\infty$

5 ارسم المنحنى (C_f)



6 أ/ أثبت أن: $x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة: $\ln x$ على المجال $]0, +\infty[$:

$$(x \ln x - x)' = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$$

ب/ باستعمل المكاملة بالتجزئة تحقق أن: $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$

$$\text{نضع: } \begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases} \text{ نجد: } \begin{cases} u'(x) = 2 \frac{\ln x}{x} \\ v(x) = x \end{cases} \text{ ان:}$$

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = [x(\ln x)^2]_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \frac{\ln x}{x} dx = [x(\ln x)^2]_1^e - 2 [x \ln x - x]_1^e = e - 2$$

ج/ احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = e$

$$\text{مساحة الحيز هي: } \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left[x + \frac{1}{x} - 2 - (\ln x)^2 \right] dx = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} - 2 \right) dx - \int_1^e (\ln x)^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2 + \ln|x| - 2x \right]_1^e - (e - 2) = \frac{1}{2} e^2 - 3e + \frac{9}{2}$$

ومنه مساحة الحيز المطلوبة هي: $\frac{(e-3)^2}{2}$ وحدة مساحة

امتحان البكالوريا التجريبي

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :
الموضوع الأول:

التمرين الأول: (05 نقاط)

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد، متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط B, A و C التي لواحتها على الترتيب $z_C = 4$ و $z_B = \sqrt{3} - i$ ، $z_A = 1 + i$.

1) أ) أكتب الأعداد z_B, z_A و $\frac{z_A}{z_B}$ على شكل المثلثي، ثم استنتج الشكل الأسّي.

ب) أكتب العدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ على شكله الجبري، ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

2) أوجد قيمة العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \frac{1}{8}(1 - \sqrt{3}i)$ ، أكتب $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^8$.

3) ليكن التحويل التقطي S الذي يرفق بكل النقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{5\pi}{12}} z$.

- حدد طبيعة التحويل التقطي S وعناصره المميزة.

4) أ) أوجد المجموعة (Γ_1) للنقط $M(z)$ من المستوي والتي تحقق: $z = z_c + 2e^{i\theta}$ لما θ تمشح $\mathbb{R}$.

ب) أوجد المجموعة (Γ_2) للنقط $M(z)$ من المستوي والتي تحقق: $\text{Arg}(z - z_c) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

5) أوجد صورة (Γ_1) بالتحويل التقطي S ، استنتج مساحتها.

التمرين الثاني: (4,5 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

نعتبر النقط $A(3; 4; 0)$ ، $B(0; 5; 0)$ ، $C(0; 0; 5)$ ، $D(-2; -6; 5)$ ، $E(-4; 0; -3)$ و الشعاع $\vec{n}(1; 3; 3)$

1. بين أن النقط A, B, C تعين مستو (ABC) ، تأكد أن $\vec{n}$ شعاع ناظمي له ثم اكتب معادلة ديكرتية له

2. أ / برهن أن المثلث AOB متساوي الساقين.

ب / عين إحداثيي النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ ، ثم بين أن $OI = \frac{3\sqrt{10}}{2}$.

ج / بين أن المستقيم (OC) عمودي على المستوي (AOB)

د / استنتج حجم رباعي الوجوه $OABC$

3. احسب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC) .

4. أ / جد تمثيلًا وسيطيًا للمستقيم (DE) .

ب/ اكتب معادلة ديكارتية للمستوي المحوري (Q) للقطعة المستقيمة [DE] .

ج / تحقق ان النقطة $F\left(-1;1;\frac{7}{2}\right)$ تنتمي للمستوي (Q)

د / استنتج المسافة بين النقطة F والمستقيم (DE) .

التمرين الثالث : (3.5 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \int_n^{n+1} e^{2-x} dx$

(1) أحسب u_0 ثم اثبت مستعملا مبدأ الاستدلال بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 0$

(2) أحسب u_n بدلالة n .

(3) برهن أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(4) أ) أحسب بدلالة n الفرق $u_{n+1} - u_n$ ، ثم استنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ب) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(5) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي $n : S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

أحسب بدلالة n المجموع S_n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

التمرين الرابع : (7 نقاط)

الجزء 1: f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المزود بمعلم

متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث الوحدة 2cm على محور الفواصل و 5cm على محور الترتيب

1. أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

2. أبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x : f(x) = \frac{x}{e^x} + e^{-x} \ln(1+e^x)$

ب/ أحسب نهاية f عند $+\infty$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

3. نعتبر على المجال $]-1; +\infty[$ الدالة g المعرفة ب : $g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$

أ/ أدرس إتجاه تغير الدالة g على المجال $[0; +\infty[$

ب/ أحسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(t)$ من أجل t موجب تماما.

4. أبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x : f'(x) = \frac{g(e^x)}{e^x}$

ب/ استنتج أن f متناقصة تماما على مجموعة تعريفها، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج/ أنشئ (C_f)

الجزء الثاني: نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ ب : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

1. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $t : \frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$

2. باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن : $F(x) = -\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2$

3. استنتج مساحة الحيز المستوي المحدد ب (C_f) والمستقيمات التي معادلتهما $x=0, x=\ln 4, y=0$.

الموضوع الثاني:

التمرين الاول : (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم ، متعامد ، متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(-1; -3; 3)$ ، $B(-3; -2; 1)$ و $C(1; 5; 6)$

$$(d): \begin{cases} x = -k \\ y = -4k + 1 \\ z = -2k + 4 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad \text{و} \quad (\Delta): \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1. بين أن المستقيمين (d) و (Δ) يتقطعان في نقطة D يطلب تعيين إحداثياتها .
2. تحقق أن : $B \in (\Delta)$ و $C \in (d)$ ، ثم بين أن المثلث BCD قائم .
3. أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (P) المعروف بالمستقيمين (d) و (Δ) .
4. تحقق أن المستوي $(Q): -4x + y - 1 = 0$ معرف بالمستقيم (d) و النقطة A
5. ليكن α عدد حقيقي و G نقطة من الفضاء .
أ) عين شرطا على العدد الحقيقي α بحيث تكون النقطة G مرجح للجمله المثقلة $\{(B, \alpha); (C, -2\alpha); (D, 5)\}$.
ب) أوجد إحداثيات النقطة G من أجل $\alpha = -1$.
6. عين (S) مجموعة النقط M من الفضاء بحيث : $GM^2 = 36$.

التمرين الثاني : (5 نقاط)

- I (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ، $z^2 + 2\sqrt{3}z + 4 = 0$ ،
2) نضع : $z_A = 2i$ ، $z_B = -\sqrt{3} + i$ ، $z_C = -\sqrt{3} - i$. أكتب الأعداد z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي .
3) بين ان العدد ، z_B^{2016} حقيقي
- II (2) المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$
نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقتها على الترتيب z_A ، z_B و z_C
1) أحسب قيسا للزاوية $(\vec{OA}; \vec{OB})$ ثم إستنتج طبيعة المثلث OAB .
2) أثبت أن الرباعي OABC معين يطلب حساب مساحته .
3) أ) حدد زاوية الدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه النقطة B و يحول النقطة O الى النقطة A
ب) أكتب الصيغة المركبة للتحاكي $\mathcal{O}$ الذي مركزه B ونسبته 2
4) حدد الطبيعة و العناصر المميزة لتحويل $S = \mathcal{R} \circ \mathcal{O}$ ثم أعط الصيغة المركبة له .
5) عين طبيعة صورة المعين OABC بالتحويل S . ثم أحسب مساحته .

التمرين الثالث : (4 نقاط)

(U_n) و (V_n) متاليتان معرفتان كما يلي : $U_0 = 1$ و $V_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$V_{n+1} = \frac{U_n + 4V_n}{5} , \quad U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3}$$

1) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $W_n = U_n - V_n$.

أ) أثبت أن المتتالية (W_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

- ب) أكتب W_n بدلالة n ، ثم عين نهايتها .
 2) غير عن : $U_{n+1} - U_n$ و $V_{n+1} - V_n$ بدلالة W_n .
 - استنتج اتجاه تغير المتتاليتين (U_n) و (V_n) ، ثم بين أنهما متجاورتان .
 3) من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر المتتالية (t_n) المعرفة بـ : $t_n = 3U_n + 10V_n$
 أ) بين أن المتتالية (t_n) ثابتة ، ثم احسب نهايتها .
 ب) عين نهاية المتتاليتين (U_n) و (V_n) .

التمرين الرابع: (7 نقاط)

الجزء 01:

- نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $F(x) = \alpha x + \frac{\beta}{1+e^x}$ حيث $\alpha ; \beta$ عدنان حقيقيان ثابتان .
 أحسب $F'(x)$ ثم عين العددين الحقيقيين $\alpha ; \beta$ حيث $F(1) = \frac{e}{1+e}$ و $F'(0) = \frac{5}{4}$

الجزء 02: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = x - \frac{1}{1+e^x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول 4cm .

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) > 0$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
3. أ) بين أن المستقيمين المرفين بـ $(\Delta_1): y = x$ و $(\Delta_2): y = x - 1$ مستقيمان مقاربان للمنحني (C_f)
 ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المستقيمان (Δ_1) و (Δ_2) .
4. تحقق أن $f(-x) + f(x) = -1$ ، ماذا تستنتج؟
5. ليكن (T) المماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 . اكتب معادلة (T) .
6. أ) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا حقيقيا وحيدا α حيث $0 < \alpha < 0,5$
 ب) تحقق أن $1 + e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$

7. أنشئ كلاً من (Δ_1) ، (Δ_2) ، (T) و (C_f) . (تقبل ان المنحني (C_f) يقبل $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ كنقطة إنعطاف)

8. ناقش بيانيا وذلك حسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة $m = \frac{1}{1+e^x}$

9. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، كما يلي : $u_n = \int_{\alpha}^n [x - f(x)] dx$.

أ) أعط تفسيراً هندسياً لـ u_n

ب) تحقق أن $x - f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$

ج) احسب u_n بدلالة n

د) بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = -(\alpha + \ln \alpha)$

بكالوريا جوان 2016

بالتوفيق

بكالوريا تجريبي في مادة: الرياضيات

الموضوع الاول

التمرين الأول (4.5) :

الفضاء المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. (P) المستوي ذو المعادلة $2x + y - 2z + 4 = 0$ والنقط $A(3; 2; 6)$ ، $B(1; 2; 4)$ و $C(4; -2; 5)$

1. اثبت ان النقط A ، B ، C تعين مستويا ثم تحقق ان هذا المستوي هو (P) . بين ان المثلث ABC قائم
2. (ا) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة O وعمودي على المستوي (P)
(ب) استنتج احداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (P) . احسب OH
(ج) احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$
3. لتكن النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(O, 3); (A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$ و I مركز ثقل المثلث ABC
بين ان النقطة G تنتمي الى المستقيم (OI) واحسب بعد النقطة G عن المستوي (P)
4. لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $\|3\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 6$
(ا) حد طبيعة المجموعة (S) وعناصرها المميزة
(ب) ماهي طبيعة مجموعة النقط تقاطع (S) و (P) ؟ برر اجابتك

التمرين الثاني (04) :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بمجدها الأول $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_{n+1}}$
1. برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < \frac{1}{2}$
 2. (ا) تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1-2u_n)}{2u_{n+1}}$. استنتج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$
(ب) بين ان المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة ثم احسب نهايتها
 3. نضع من اجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{5^n u_n}{2u_n - 1}$
(ا) اثبت ان (v_n) متتالية هندسية أساسها 10 وبطلب حساب حدها الأول v_0
(ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n . ثم بين ان $u_n = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3}$. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
 4. احسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$

التمرين الثالث (4.5) :

1. نعتبر كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب z المعرف بـ : $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$
(ا) احسب $P(-1)$ ثم بين انه يوجد عددين حقيقيين a و b حيث : $P(z) = (z + 1)(z^2 + az + b)$
(ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$
2. المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. نعتبر النقط A ، B ، C و G لواحقتها : $z_A = -1$ ، $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $z_G = 3$ و $z_C = 2 - i\sqrt{3}$

- (أ) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا
- (ب) احسب الاطوال AB, AC, BC . استنتج طبيعة المثلث ABC
3. (أ) اكتب $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$ على الشكل الاسي. استنتج ان A هي صورة G بتحويل نقطي يطلب تعيينه
- (ب) اوجد مركز ونصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACG
4. (أ) بين ان النقطة G هي مرجح الجملة $\{(A, -1); (B, 2); (C, 2)\}$
- (ب) عين مجموعة النقط M من المستوي والتي تحقق: $\overrightarrow{CG} = -4 \cdot (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC})$
5. أنشئ النقطة H ذات اللاحقة $e^{i\frac{\pi}{6}}$ دون أي حساب
- احسب $|z_H|$. عين بطريقة هندسية عمدة للعدد المركب z_H

التمرين الرابع (07):

- I. لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعلاقة: $g(x) = x - 1 + 2 \ln x$
1. احسب نهاية الدالة g عند $+\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$
 2. عين اتجاه تغير الدالة g
 3. احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$
- II. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - 2 + (\ln x)^2 - \ln x$. نسمي المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
1. (أ) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$
 - (ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم قدم جدول تغيراتها
 2. اثبت ان المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما x_0 و x_1 حيث: $\frac{1}{e} < x_0 < 1$ و $\frac{9}{4} < x_1 < 2$
 3. (أ) حل المعادلة ذات المجهول x , $f(x) = x$
 - (ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمنصف الاول (Δ)
 4. اوجد النقطة من (C_f) التي يكون فيها المماس (T) للمنحنى (C_f) موازيا للمنصف الأول (Δ)
 5. أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f)
 6. ناقش باستعمال المنحنى (C_f) , وحسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود حلول المعادلة: $(\ln x)^2 - \ln x - m - 2 = 0$
- III. نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $F(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x$
1. اثبت ان F هي دالة اصلية للدالة $(\ln x)^2$ $x \mapsto (\ln x)^2$ على المجال $]0; +\infty[$
 2. استنتج الدالة الاصلية G للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ والتي تنعدم من اجل $x = 1$. احسب $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{G(x)}{x-1}$

في الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(3; 1; 0)$ ، $B(1; 2; 0)$ ، $C(3; 2; 1)$ و $D(0; 0; m)$ حيث m عدد حقيقي موجب

1. (ا) احسب الجداء السلمي $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ ثم استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $\sin \widehat{ABC}$ و $\cos \widehat{ABC}$
(ب) احسب مساحة المثلث ABC
2. بين ان الشعاع $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكارتية له
3. بين ان $ABCD$ رباعي وجوه وان حجمه $V_{ABCD} = \frac{2m+5}{6}$
4. لتكن (S_m) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء والتي تحقق $x^2 + y^2 + z^2 - 2mz + m^2 - 9 = 0$
بين انه من اجل كل عدد حقيقي موجب m فان (S_m) سطح كرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها
5. عين قيمة m حتى يكون (ABC) مستوي مماس لسطح الكرة (S_m)
6. اكتب معادلة للمستوي (P) الموازي تماما للمستوي (ABC) ويمس (S_m)

التمرين الثاني (04) :

في الشكل المقابل (C_f) التمثيل البياني للدالة f على المجال $[0; 3]$ حيث : $f(x) = 2 - (x - 2)^2$ و (Δ) المستقيم الذي معادلته $y = x$

1. (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = \frac{5}{4}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$
(ا) مثل على محور الفواصل (على الوثيقة المرفقة) الحدود التالية : u_0, u_1, u_2, u_3 دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل
(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها
2. (ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n : 1 < u_n < 2$
(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج انها متقاربة
3. (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $v_n = \ln(2 - u_n)$
(ا) برهن ان (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 . يطلب حساب حدها الأول
(ب) اكتب بدلالة n كلا من u_n و v_n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- (ج) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$
(د) احسب بدلالة n الجداء : $S_n = (2 - u_0)(2 - u_1)(2 - u_2) \dots (2 - u_n)$

التمرين الثالث (4.5) :

1. حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $(z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21) = 0$
2. في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C, D ولاحقها على الترتيب :
 $z_D = \overline{z_C}, z_C = 3 + 2i\sqrt{3}, z_B = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}, z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$
بين ان النقط A, B, C, D تنتمي الى نفس الدائرة (C) التي مركزها Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = 3$ يطلب تعيين نصف قطرها
3. لتكن النقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة الى المبدأ O
(ا) بين ان $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ثم استنتج طبيعة المثلث BEC
(ب) بين انه يوجد دوران R مركزه النقطة B ويحول النقطة E الى النقطة C يطلب تعيين زاويته
4. نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة ' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z' + i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}(z + i\sqrt{3})$$

(ا) عين طبيعة التحويل S وعناصره المميزة

(ب) عين طبيعة (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق : $z = 3 + 2\sqrt{3}e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي

(ج) عين طبيعة (E') صورة (E) بالتحويل S وعناصرها الهندسية

التمرين الرابع (07) :

I. ا. الدالة المعرفة على المجال $[-1; +\infty[$ بالعلاقة : $g(x) = 1 - xe^{-x}$

1. احسب نهاية الدالة g عند $+\infty$ وعين اتجاه تغير الدالة g على المجال $[-1; +\infty[$

2. (ا) اثبت من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1; +\infty[$ ، $g(x) \geq 1 - e^{-1}$

(ب) استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $[-1; +\infty[$

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :
$$\begin{cases} f(x) = -\frac{4\ln(-x)}{x} & ; x < -1 \\ f(x) = (x+1)(1+e^{-x}) & ; x \geq -1 \end{cases}$$

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. وحدة الطول : $2cm$

1. (ا) تحقق ان الدالة f مستمرة عند $x_0 = -1$

(ب) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند x_0 . اعط تفسيراً بيانياً لهذه النتيجة .

2. احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$. استنتج ان للمنحنى (C_f) مستقيم مقارب يطلب تعيين معادلة له

3. (ا) بين ان المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x + 1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$

(ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) على المجال $[-1; +\infty[$

4. (ا) تحقق من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; -1]$ ، $f'(x) = \frac{4(\ln(-x)-1)}{x^2}$

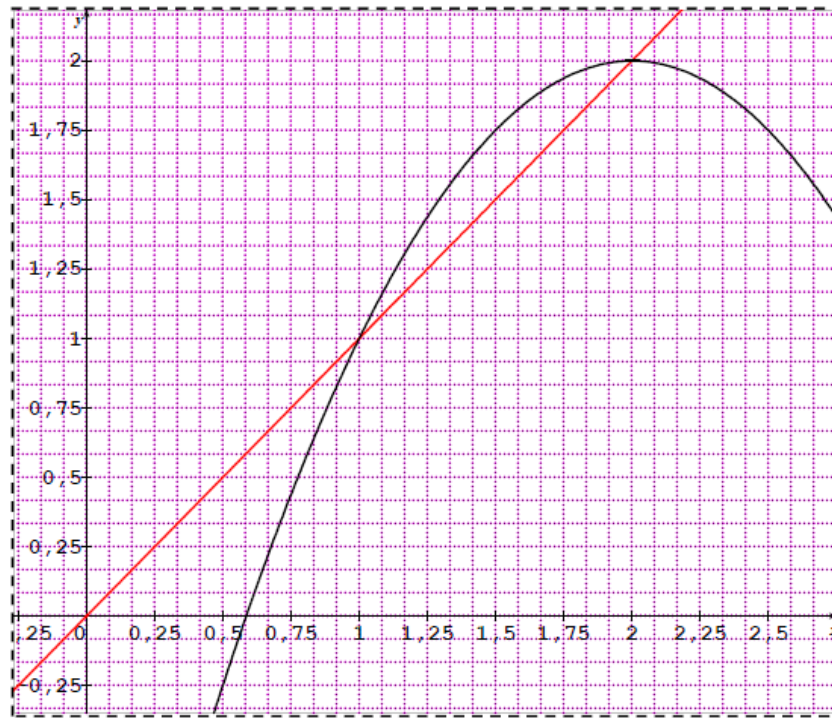
(ب) عين اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty; -1]$ ثم على المجال $[-1; +\infty[$. قدم جدول تغيرات الدالة f

(ج) بين انه توجد نقطة وحيدة فاصلتها اكبر من -1 يكون عندها المماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ)

5. (ا) اثبت ان المنحنى (C_f) يقع اعلى محور الفواصل

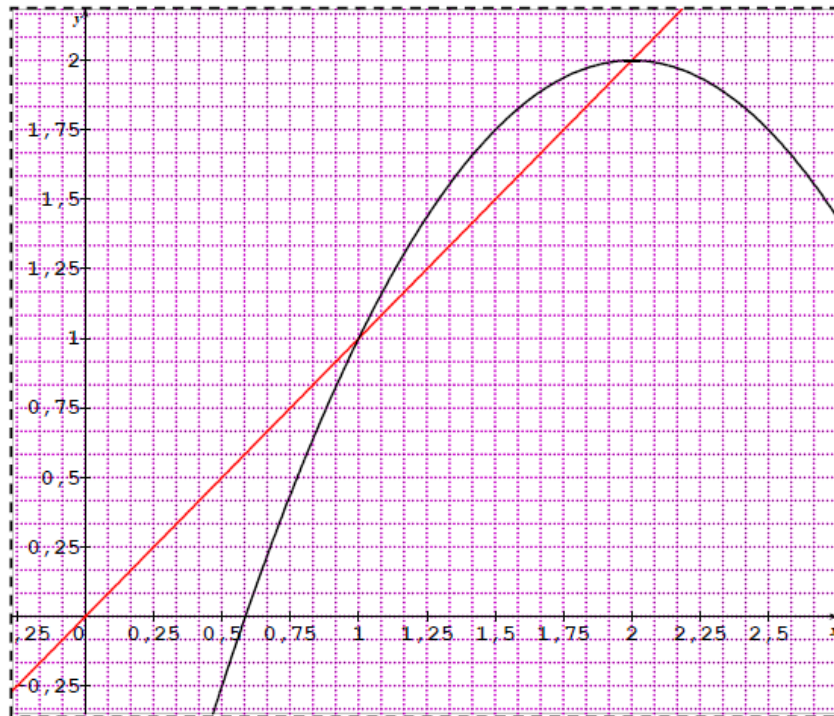
(ب) أنشئ (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f)

(ج) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين التي معادلاتها : $x = 1$ ، $x = e$ و $y = x + 1$



الإسم واللقب :

..... ✂ ✂ ✂



الإسم واللقب :

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (4.5 نقطة)

- الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، (D) المستقيم المار بالنقطتين $A(0; -1; 3)$ و $B(3; 0; 1)$ ، (Δ) المستقيم المعروف بجملة المعادلتين :
$$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$
- 1) أ- أكتب تمثيلا وسيطيا لكل من المستقيمين (D) و (Δ) .
ب- أدرس الوضع النسبي للمستقيمين (Δ) و (D) .
 - 2) (p) المستوي الذي يشمل (D) ويوازي (Δ) .
- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستوي (p) ، ثم استنتج معادلة ديكارتية له .
 - 3) (p') المستوي الذي يشمل (Δ) ويوازي (D) .
- بين أن $\vec{n}(-1; 1; -1)$ شعاع ناظمي للمستوي (p') ، ثم اكتب معادلة ديكارتية له .
 - 4) أ- أحسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ) والمستوي (p) .
ب- أحسب المسافة بين نقطة كيفية من (D) والمستوي (p') .
ج- استنتج المسافة بين المستقيمين (D) و (Δ) .

التمرين الثاني: (5 نقاط)

- Z عدد مركب، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\text{Arg}(Z^n) = n \cdot \text{Arg}(Z)$.
- 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول Z : $(Z - 2i)(Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4) = 0$.
 - 2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C و D ذات اللاحقات
 $Z_A = \sqrt{3} - i$ ؛ $Z_B = \sqrt{3} + i$ ؛ $Z_C = 2i$ و $Z_D = -\sqrt{3} - i$ على الترتيب .
أ - علم النقط A ، B ، C و D .
ب - اكتب العدد $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي . استنتج طبيعة المثلث ABC .
ج - تحقق أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى الدائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .
 - د - عين مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي حيث : $\text{Arg}\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.
 - 3) لنعتبر التحويل النقطي S الذي يحول O إلى A و يحول C إلى D .
أ - أثبت أن التحويل S هو تشابه مباشر ثم عين عناصره المميزة (المركز و النسبة و الزاوية) .
ب - تحقق أن صورة النقطة B بالتشابه S هي النقطة C .
 - 4) لنكن النقطة G مرجح النقط A ، B ، C المرفقة بالمعاملات 1 ، -1 ، 2 على الترتيب .
أ - عين إحداثيي النقطة G .
ب - بين أن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 8$ هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها 1 .

التمرين الثالث: (4 نقاط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = -1$ ؛ $u_1 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

و لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

(1) ا- احسب v_0 .

ب- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

ج- اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

د- احسب ، بدلالة n ، المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، ثم جد $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

ا- احسب w_0 .

ب- بين أن (w_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها.

ج- اكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n ، ثم عين أصغر عدد طبيعي n الذي يحقق : $e^{w_n} \geq 2016$

التمرين الرابع: (6.5 نقطة)

نعتبر الدالة f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x + 1 + \ln(x+1) - \ln(x+2)$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ وحدة الطول $2cm$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.

(2) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 0$. ثم استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$

(3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ،

ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.

(4) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

(5) اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$

(6) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث : $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$.

(7) أرسم المنحنى (C_f) و المستقيمان (T) و (Δ) ؟

(8) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة $f(x) = \frac{3}{2}x + m$

(9) أ - بين أن الدالة $F_a : x \rightarrow (x+a)\ln(x+a) - x$ هي دالة أصلية للدالة $f_a : x \rightarrow \ln(x+a)$

على المجال $]-a; +\infty[$

ب - احسب مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمت $y = x + 1$ ، $x = 0$ ، $x = 1$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

$\frac{3}{4}$ من مترشيحي قسم 3 ع ت يعملون بجد خلال السنة الدراسية

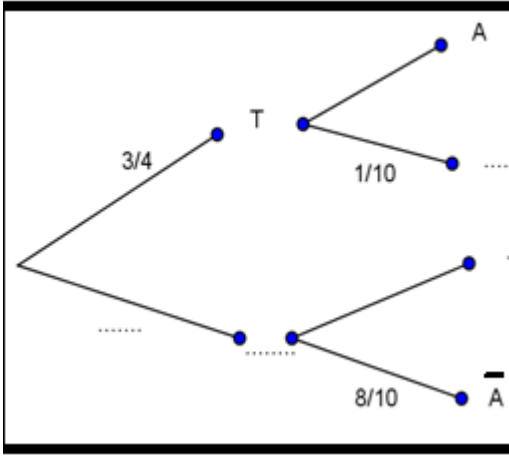
احتمال نجاح مترشح يعمل بجد هو $\frac{9}{10}$ و احتمال نجاح مترشح لم يعمل بجد $\frac{2}{10}$

نقول عن مترشح انه مفاجأة إذا عمل بجد ولم ينجح أو نجح و لم يعمل بجد.

نعتبر الحوادث :

" T " المترشح يعمل بجد ، " A " المترشح ناجح " و " S " المترشح مفاجأة "

نختار عشوائيا مترشحا من هذا القسم :



1- انقل و أكمل شجرة الاحتمالات المقابلة :

2- أحسب احتمالات الحوادث : $T \cap A$ ، $T \cap \bar{A}$ ، $\bar{T} \cap A$ ، $\bar{T} \cap \bar{A}$

3- ما هو احتمال أن يكون المترشح ناجحا .

4- علما أن المترشح ناجح ، ما احتمال أن يكون عمل بجد .

5- بين أن احتمال S هو : 0,125 .

التمرين الثاني: (5 نقاط)

1. بين أن من أجل كل عددين مركبين Z و Z' : $\overline{Z \times Z'} = \bar{Z} \times \bar{Z}'$

2. Z عدد مركب، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\overline{Z^n} = (\bar{Z})^n$

I. نعتبر في C المعادلة: $Z^4 = -4 \dots (E)$

1. بين أنه إذا كان العدد المركب Z حل للمعادلة (E) فإن كل من $-Z$ و $\bar{Z}$ حل كذلك للمعادلة (E) .

2. أ) نضع $Z_0 = 1 + i$ ، أكتب Z_0 على الشكل الأسّي وبين أنه حل للمعادلة (E) .

ب) استنتج الحلول الثلاثة الأخرى للمعادلة (E) .

II. في المستوي المركب نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقتها: $Z_A = 1 + i$ ، $Z_B = -1 + i$ ،

$Z_C = -1 - i$ و $Z_D = 1 - i$ على الترتيب، الدوران الذي مركزه C وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

نضع: $E = R(B)$ و $F = R(D)$

1. عين الكتابة المركبة للدوران R .

2. عين Z_E ، Z_F لاحقتي النقطتين E ، F على الترتيب.

3. بين أن $\frac{Z_A - Z_E}{Z_A - Z_F}$ عدد حقيقي، ماذا تستنتج بالنسبة للنقاط A ، E ، F ؟

التمرين الثالث: (4.5 نقطة)

في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(1; -1; 2)$ ، $B(3; 0; 4)$ و $C(3; 3; -2)$

$$\text{والمستقيم } (D) \text{ هو: } \begin{cases} x = -2\lambda - 1 \\ y = 2\lambda - 2 \\ z = -8\lambda \end{cases} \text{؛ حيث } \lambda \in \mathbb{R} \text{ و الشعاع: } \vec{V}(-6; -6; 0).$$

(1) احسب : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC .

(2) عين احداثيات النقطتين: I, G حيث G مرجح الجملة $\{(A, 3); (B, -2); (C, 1)\}$ و I منتصف $[AC]$.
ما طبيعة الرباعي : $ABIG$.

(3) أ) عين (S) مجموعة النقاط M من الفضاء : $3MA^2 - 2MB^2 + MC^2 = 18$.

ب) عين (P) مجموعة النقاط M من الفضاء : $\overrightarrow{MG} \cdot \vec{V} = -18$.

ج) عين العناصر المميزة للمجموعة : $(S) \cap (P)$.

د) بين أن : (P) و (ABC) يتقاطعان وفق المستقيم (D) .

التمرين الرابع: (6.5 نقطة)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = e^{-x} + x - 1$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) احسب $g(0)$ و استنتج انه من اجل كل $x \in \mathbb{R}$: $g(x) \geq 0$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x}{x + e^{-x}}$ وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المعلم م $(o; \vec{i}; \vec{j})$

(1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^{-x}}}$. ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و فسر النتائج هندسيا .

(2) بين أنه من اجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{(1+x)e^{-x}}{(x + e^{-x})^2}$.

(3) أكتب معادلة المماس للمنحنى عند النقطة O .

(4) تحقق من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: أن : $x - f(x) = \frac{xg(x)}{g(x) + 1}$ ثم استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) المستقيم : $y = x$.

(5) أنشئ (C_f) و (Δ) في المعلم $(o; \vec{i}; \vec{j})$ نأخذ : $\frac{1}{1-e} \approx -0,6$

III) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بما يلي : $U_0 = 1$ و من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = f(U_n)$.

(1) بين بالتراجع أن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n \leq 1$.

(2) بين أن المتتالية (U_n) متناقصة (يمكنك استعمال نتيجة السؤال II(4))

(3) استنتج أن (U_n) متقاربة ثم حدد نهايتها .

انتهى .

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية للولاية المنتدبة عين صالح
دورة ماي 2016

وزارة التربية الوطنية
امتحان البكالوريا التجريبية
شعبة العلوم التجريبية

المدة : 3 ساعات ونصف

اختبار مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الاول (07نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $I =]0 ; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$

1. احسب $g'(x)$ ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g .

2. احسب $g(1)$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $I =]0 ; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد غير متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2\|\vec{j}\| = 2cm$.

1. احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ ثم أعط التفسير الهندسي للنتيجتين .

2. بين أنه من أجل كل x من I : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

3. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

4. بين ان النقطة $A(1; 1)$ هي نقطة تقاطع المستقيم $y = x$ و المنحنى (C_f) .

5. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة الى (D) .

6. اكتب معادلة للمماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

7. أنشئ البيان (C_f) و المستقيم (Δ) .

8. عين عبارة الدوال الاصلية للدالة $h : x \rightarrow \frac{\ln x}{x}$ على المجال $I =]0 ; +\infty[$

9. احسب مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين (D) ، $x = 1$ و $x = 2$: $(d1)$ و $(d2)$

التمرين الثاني (03.5نقاط)

يحتوي كيس على 5 كرات مرقمة من 1 إلى 5. نسحب كرة و نسجل رقمها و نعيدها إلى الكيس ثم نسحب كرة أخرى

و نسجل رقمها. ليكن X المتغير العشوائي المناسب لمجموع الرقمين .

+	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

جدول مساعد

1. ما هو عدد الحالات الممكنة لسحب هاتين الكرتين بهذه الكيفية ←.

2. ما هو احتمال ان يكون رقمي هاتين الكرتين زوجي.

3. عين قيم المتغير العشوائي X .

4. عين حوادث المتغير العشوائي X .

5. عرّف قانون احتمال لهذا المتغير العشوائي X .

6. احسب $E(X)$ الأمل الرياضياتي و الانحراف المعياري لقانون الاحتمال.

التمرين الثالث (05 نقاط)

نعتبر كثير الحدود للمتغير المركب z المعرف بـ $P(z) = (z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21)$

1. حل في C المعادلة ذات المجهول z التالية : $P(z) = 0$.

2. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

أ. مثل النقاط A, B, C و D ذات اللواحق على الترتيب $z_A = i\sqrt{3}$; $z_B = \bar{z}_A$; $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ و $z_D = \bar{z}_C$

ب. أثبت أن النقاط A, B, C و D تنتمي إلى نفس الدائرة.

3. لتكن النقطة E نظيرة D بالنسبة إلى المبدأ O .

i. بين أن $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ثم عيّن طبيعة المثلث BEC .

ii. استنتج طبيعة التحويل النقطي T الذي يحول النقطة E إلى النقطة C و النقطة B صامدة بالنسبة له.

iii. تأكد من أن التحويل S تشابه مباشر حيث $S = Toh$ علما بأن h هو تحويل تحاكي نسبته 2 و مركزه مبدأ المعلم.

iv. احسب مساحة المثلث $B'E'C'$ صورة المثلث BEC بواسطة S .

التمرين الرابع (04,5 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

لتكن $A(-9; -4; -1)$ و $(P_1), (P_2)$ المستويين الذين معادلة ديكارتية لكل منهما هي :

$$(P_1): x - 2y + 4z = 9 \quad , (P_2): -2x + y + z = 6$$

1. عين وضعية المستوي (P_1) بالنسبة إلى المستوي (P_2) .

2. نرمز بـ (D) إلى مستقيم تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) .

بين أن تمثيلان الوسيطيان: $t \in \mathbb{R}$ و $\begin{cases} x = 1 + 6t \\ y = 4 + 9t \\ z = 4 + 3t \end{cases}$ هما تمثيلان للمستقيم (D) .

3. لتكن M نقطة كيفية من المستقيم (D) .

أ) تحقق أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي (P_1) و لا تنتمي إلى المستوي (P_2) .

ب) بين أن : $AM^2 = 7(2t^2 - 2t + 3)$

ج) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(t) = 2t^2 - 2t + 3$

- أدرس تغيرات الدالة f .

- عين احداثيات النقطة M تكون من اجلها المسافة AM أصغرية.

ولتكن I هذه النقطة في حالة وجودها.

4. (Q) المستوي الذي يشمل A و العمودي على المستقيم (D)

أ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) .

ب) برهن أن النقطة I هي المسقط العمودي للنقطة A على (D) .

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية للولاية المنتدبة عين صالح
دورة ماي 2016

وزارة التربية الوطنية
امتحان البكالوريا التجريبية
شعبة العلوم التجريبية

المدة : 3 ساعات ونصف

اختبار مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الثاني

التمرين الاول (04 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_0 = -6$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1$ ،
(أ) 1) أحسب : u_1 ، u_2 و u_3 .

(2) برهن أنه من أجل كل $n \geq 3$ ، $u_n > 0$

- استنتج أنه من أجل كل $n \geq 4$ ، $u_n > 2n - 3$

(3) ما هي نهاية (u_n) ؟

(ب) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 4n + 10$

(1) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2^{2-n} + 4n - 10$

(3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

التمرين الثاني (05 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C ، المعادلة ذات المجهول Z : $(Z - 2i)(Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4) = 0$.

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط A ، B ، C و D ذات اللاحقات

$Z_A = \sqrt{3} - i$ ؛ $Z_B = \sqrt{3} + i$ ؛ $Z_C = 2i$ و $Z_D = -\sqrt{3} - i$ على الترتيب .

أ - علم النقط A ، B ، C و D .

ب - اكتب العدد $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي . استنتج طبيعة المثلث ABC .

ج - تحقق أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها .

(3) لنعتبر التحويل النقطي S الذي يحول O إلى A و يحول C إلى D .

أ - أثبت أن التحويل S هو تشابه مباشر ثم عين عناصره المميزة (المركز و النسبة و الزاوية) .

ب - تحقق أن صورة النقطة B بالتشابه S هي النقطة C .

(4) لتكن النقطة G مرجح النقط A ، B ، C المرفقة بالمعاملات 1 ، -1 ، 2 على الترتيب .

أ - عين احداثيي النقطة G .

ب - بين أن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 8$

هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها 1 .

التمرين الثالث (06.5 نقاط)

عتبر الدالة f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x + 1 + \ln(x + 1) - \ln(x + 2)$.
(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$) وحدة الطول $2cm$.

- (1) احسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.
- (2) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 0$. ثم استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.
- (3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل.
- (4) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.
- (5) اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$.
- (6) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$.
- (7) أرسم المنحنى (C_f) و المستقيمان (T) و (Δ) ؟
- (8) ناقش بيانها و حسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة $f(x) = \frac{3}{2}x + m$.
- (9) أ - بين أن الدالة $F_a: x \rightarrow (x + a)\ln(x + a) - x$ هي دالة أصلية للدالة $f_a: x \rightarrow \ln(x + a)$ على المجال $]-a; +\infty[$.
ب - احسب مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمتين $y = x + 1$ ، $x = 0$ ، $x = 1$.

التمرين الرابع (04.5 نقاط)

- نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) النقط $A(1; 0; 2)$ ؛ $B(0; 1; 2)$ ؛ $C(1; -2; 0)$ و المستوي (P) الذي معادلته $3x - 2y + z + 3 = 0$.
- (1) أ) بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا.
ب) تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1; 1; -1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكارتية له.
 - (2) أ) بين أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان.

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 4t \\ z = 5t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{R}$$

ب) بين أن تقاطع المستويين (P) و (ABC) هو المستقيم (Δ) المعروف بتمثيله الوسيط:

ج) أحسب المسافة بين النقطة $H(-1; 6; -2)$ و المستوي (ABC) ،

ثم بين أن المسافة بين النقطة H و المستقيم (Δ) تساوي $\sqrt{\frac{106}{3}}$.

(3) لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء حيث: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 12y + 4z + 3 = 0$

أ) بين أن (Γ) هي سطح كرة مركزها H يطلب تعيين نصف قطرها.

ب) ما هو الوضع النسبي للمجموعة (Γ) و المستقيم (Δ)

ثانويات : البياضة الجديدة - حميدانو أحمد - حساني عبد الكريم - داسي خليفة - دوار الماء - كركوبية خليفة - لبامة - لقرع محمد الضيف - سيدي عون - شعباني عباس - علي حنكة - العقلة - هواري بومدين.

المدة : 3 ساعات و 30 دقيقة

اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط : $A(0, -2, 2)$ ، $B(3, 1, 5)$ ، $C(3, -2, -1)$ و $E(-3, 4, -1)$.

1- حدد طبيعة المثلث ABC .

2- أكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل النقطة A و الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ناظمي له.

3- نعتبر المستوي (Q) تمثيله الوسيطى :
$$\begin{cases} x = t + \alpha \\ y = 2t - 2 \\ z = t + \alpha + 2 \end{cases} \quad t, \alpha \in \mathbb{R}$$

أ) تحقق أن النقطة A تنتمي للمستوي (Q)

ب) بين أن الشعاع $\vec{n}(1, 0, -1)$ ناظمي للمستوي (Q) .

4- عين تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطع المستويين (P) و (Q) .

5- بين أن المستقيم (AE) عمودي على المستوي (ABC) .

6- أ) احسب حجم رباعي الوجوه $EABC$ ، ثم عين قياسا للزاوية BEC .

ب) احسب مساحة المثلث BEC ، ثم استنتج بعد النقطة A عن المستوي (BEC) .

التمرين الثاني : (03.5 نقطة)

(U_n) متتالية معرفة بـ : $U_0 = -6$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2n - 1$

1- أ) برهن من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$ أن : $U_n > 0$

ب) أكتب U_n بدلالة U_{n-1} ، ثم استنتج من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$ أن : $U_n > 2n - 3$

ج) احسب نهاية المتتالية (U_n) .

2- (V_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $V_n = U_n - 4n + 10$

أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية احسب أساسها و حدها الأول.

ب) أثبت من أجل كل عدد طبيعي n أن : $U_n = 2^{2-n} + 4n - 10$

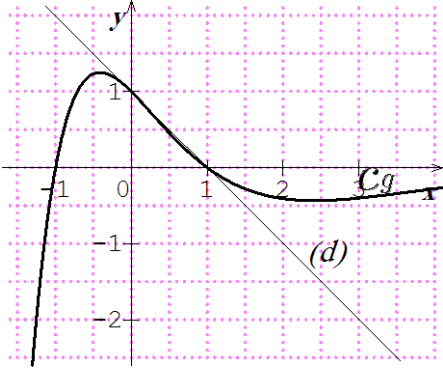
ج) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

التمرين الثالث: (05 نقط)

- 1- $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث :
 أ) احسب $P(-1)$ ، ثم عين العددين الحقيقيين a و b حتى يكون : $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$.
 ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.
- 2- في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر النقط A, B, C و G لواحقها على الترتيب
 $z_G = 3$ و $z_C = 2 - i\sqrt{3}$ ، $z_B = 2 + i\sqrt{3}$ ، $z_A = -1$
 أ) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(z_B - z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا.
 ب) احسب الأطوال AB, AC و BC ، ثم عين طبيعة المثلث ABC .
- 3- أ) اكتب $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$ على الشكل الأسّي ، ثم استنتج أن صورة A بتحويل نقطي يطلب تعيينه.
 ب) جد مركز و نصف قطر الدائرة المحيطة بالمثلث ACG .
- 4- أ) بين أن النقطة G مرجح الجملة $\{(A, -1), (B, 2), (C, 2)\}$.
 ب) عين مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\|-\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM}\| = \|\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{CM}\|$
- 5- أنشئ النقطة H لاحتها $z_H = 1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$ دون حساب ، ثم عين بطريقة هندسية عمدة للعدد المركب z_H .

التمرين الرابع: (06.5 نقطة)

- I- g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (1+ax^2)e^{bx}$ حيث a و b عدنان حقيقيان ، C_g تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ و (d) مماس C_g في النقطة فاصلتها 0 ، (أنظر الشكل المقابل)
- 1- براءة بيانية احسب $g(-1)$ ، $g(0)$ و $g'(0)$.
- 2- اكتب معادلة للمماس (d) .
- 3- باستعمال المعطيات السابقة بين أن : $g(x) = (1-x^2)e^{-x}$
- II- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (1+x)^2e^{-x}$
- 1- احسب نهايتي f عند $-\infty$ و $+\infty$.
- 2- ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.
- 3- أ) عين دون حساب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.
 ب) اكتب معادلة لـ : (Δ) مماس C_f عند النقطة فاصلتها 0.
- 4- أ) أنشئ C_f و (Δ) .
 ب) عين قيم الوسيط m حتى يكون للمعادلة : $f(x) = m$ حل سالب.
- 5- h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = f(x^2) - 1$
 - دون كتابة عبارة الدالة h احسب $h'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة h .



الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقط)

1- في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B و C لواحقتها على الترتيب :

$$z_C = 1 + z_A, \quad z_B = 2 + 4i, \quad z_A = 1 + 3i$$

(أ) اكتب $z_B - z_A$ على الشكل الأسّي .

(ب) عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

2- (أ) اكتب العبارة المركبة للتحاكي T الذي مركزه G و نسبته -2

(ب) عين احداثي النقطة H سابقة النقطة C بالتحويل T ، ثم تحقق أن H منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.

3- (γ) مجموعة النقط M لاحقتها z حيث : $z = z_A + ke^{i\frac{\pi}{4}}$ و k يتغير في $\mathbb{R}_+$.

(أ) عين قياسا للزاوية الموجمة $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$

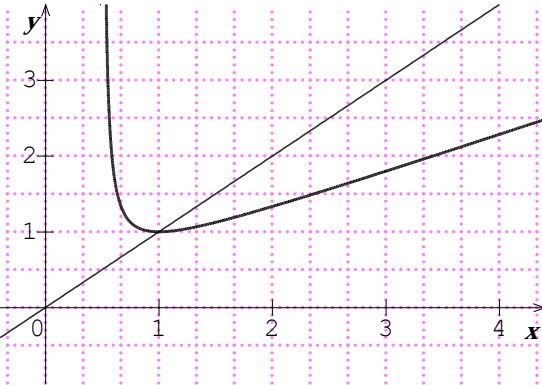
(ب) تحقق أن المجموعة (γ) هي نصف المستقيم $[AB]$.

4- بين أن : $\frac{z_C - z}{z_B - z_A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} - k \right)$ ، ثم تحقق أن النقطة H تنتمي إلى (γ) .

- استنتج أن المستقيمين (AB) و (CH) متعامدان.

التمرين الثاني : (04 نقط)

(U_n) متتالية معرفة بـ : $U_0 = 4$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{U_n^2}{2U_n - 1}$



f دالة معرفة على $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2}{2x - 1}$ ، C_f تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم معادلته : $y = x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس (أنظر الشكل المقابل)

1- (أ) أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور

الفواصل الحدود U_0, U_1, U_2 دون حسابها.

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها.

2- برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n أن : $U_n \geq 1$

3- (V_n) متتالية معرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ : $V_n = \ln\left(1 - \frac{1}{U_n}\right)$

(أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية احسب أساسها و حدها الأول.

(ب) اكتب V_n بدلالة n ، ثم استنتج أن : $U_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}}$

(ج) تحقق من صحة تخمينك السابق ، فيما يخص اتجاه التغير و التقارب.

التمرين الثالث : (05 نقط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر المستقيم (Δ) المار بالنقطة $A(-3, -1, -3)$

$$\begin{cases} x = t + 3 \\ y = 2t + 2 \\ z = -2t + 3 \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R} \quad \text{تمثيله الوسيطى}$$

و $\vec{u}(2, -2, -1)$ شعاع توجيه له ، و المستقيم (d) تمثيله الوسيطى :

(ب) بين أن المستقيمين (Δ) و (d) متعامدين ، و ليسا من نفس المستوي.

(ج) اكتب معادلة ديكرتية للمستوي الذي يحوي (Δ) و يوازي (d) .

2- (S) سطح كرة مركزها $C(-1, 0, -1)$ و نصف قطرها 6. و (P) مستو معادلته : $2x + y + 2z + 13 = 0$

(أ) أثبت أن (S) و (P) يتقاطعان وفق دائرة مركزها A ، يطلب تعيين نصف قطرها.

(ب) بين أن المستقيم (d) مماس لسطح الكرة في النقطة B .

3- (أ) احسب AB ، ثم استنتج أن النقطة C تنتمي للقطعة المستقيمة $[AB]$.

(ب) عين مستقيما عموديا على كل من المستقيمين (Δ) و (d) .

التمرين الرابع: (07 نقط)

$I - g$ و h دالتان معرفتان على $D =]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = x - 1 - \ln x$ و $h(x) = x + (x - 2)\ln x$

1- ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2- استنتج حسب قيم x من D إشارة $g(x)$.

3- (أ) تحقق من أجل كل x من D أن : $h(x) = 1 + g(x) + (x - 1)\ln x$

(ب) أثبت من أجل كل x من D أن : $(x - 1)\ln x \geq 0$ ، ثم استنتج أن : $h(x) > 0$

$II - f$ دالة معرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = 1 + x \ln(x) - (\ln x)^2$

C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إل معلم متعامد متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا.

2- بين من أجل كل x من D أن : $f'(x) = \frac{h(x)}{x}$ ، ادرس اتجاه تغير الدالة f على $]0, +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

3- (أ) اكتب معادلة للمستقيم (Δ) مماس C_f عند النقطة $A(1, 1)$.

(ب) بين من أجل كل x من D أن : $f(x) - x = (-1 + \ln x)g(x)$

(ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى C_f و المماس (Δ) ، هل أن A نقطة انعطاف للمنحنى C_f ؟

4- أنشئ C_f و (Δ) . (تعطى فاصلة نقطة تقاطع C_f مع حامل محور الفواصل $x_0 \approx 0.5$)

5- (أ) بين أن الدالة : $x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + 2x \right) \ln(x) - \frac{x^2}{4} - x - x (\ln(x))^2$ دالة أصلية للدالة f على $]0, +\infty[$

(ب) احسب التكامل : $\int_1^e (x - f(x)) dx$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الاول

التمرين الاول : (04 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم و متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

النقطة $A(1, -1, 3)$ و ليكن (P) المستوى ذو المعادلة : $x - y + 3z = 0$

1. أ- تحقق من أن : $t \in R$ ، $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 3t \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم (OA) .

ب . حدد معادلة ديكارتية للمستوي (Q) العمودي على المستقيم (OA) في النقطة A

جـ. تحقق من أن المستوى (P) يوازي المستوى (Q)

2. نعتبر سطح الكرة (S) المماس للمستوى (Q) في النقطة A و التي يقطعها المستوى (P)

وفق الدائرة (c) التي مركزها O و نصف قطرها $r = \sqrt{33}$

أ. بين ان $\omega(a, b, c)$ مركز سطح الكرة (S) ينتمي الى (OA) ثم استنتج ان $b = -a$ و $c = 3a$

ب. بين ان : $\omega A^2 - \omega O^2 = 33$ ثم استنتج ان $a - b + 3c = -11$

جـ. استنتج احداثيات ω مركز سطح الكرة (S) ثم بين أن نصف قطرها $R = 2\sqrt{11}$

التمرين الثاني : (04.5 نقاط)

ليكن $p(z)$ كثير حدود المعرفة من اجل كل عدد مركب z :

1. أ. احسب $p(1)$

ب. عيّن العددين الحقيقيين a ، b بحيث : $p(z) = (z - 1)(z^2 + az + b)$

ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z) = 0$

2 في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C

صور الاعداد المركبة : $z_A = 1$ ، $z_B = 1 + \sqrt{3} - i$ ، $z_C = \overline{z_B}$ على الترتيب .

أ. أكتب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الاسي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب. نعتبر النقطة ω صورة العدد $1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ بين أن ω مركز الدائرة (c) المحيطة بالمثلث ABC .

ج. حدد (E) مجموعة النقط $M(Z)$ من المستوى حيث : $\left| \frac{z_C - z}{z_B - z} \right| = 1$

د. أحسب $\cos \theta$ حيث $\theta = (\overrightarrow{\omega A}, \overrightarrow{\omega B})$

و. استنتج في المستوى المركب عبارة الدوران R الذي مركزه ω و يحول A الى B

هـ. عين (c') صورة (c) بالتحويل R

التمرين الثالث : (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على N كما يلي: $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$

1 أحسب u_1, u_2, u_3

2. ب. بين انه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$: $u_n \geq 0$

ب. استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$: $u_n \geq n - 3$

ج. استنتج نهاية المتتالية (u_n)

3- لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على N بـ : $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$

أ. احسب v_0, v_1

ب. بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد اساسها.

ج. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$

د. بين أن المتتالية (u_n) متباعدة .

3- احسب المجموع S_n بدلالة n : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

التمرين الرابع : (07.5 نقاط)

المستوى منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

I- نعتبر الدالة g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = 2 - x(1 + \ln 2 - \ln x)$

1. ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = 2 - x - x \ln x$ و $f(0) = 2$

وليكن (c_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ثم استنتج أن f مستمرة عند 0 عن اليمين .

ب- أحسب : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 2}{h}$ ، ماذا تستنتج ؟

2- أ. أحسب نهاية الدالة $f(x)$ عن $+\infty$.

ب. احسب $f'(x)$ مشتق الدالة f على المجال $]0, +\infty[$ ثم أدرس اشارته .

ج. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3. أ. اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (c_f) عند النقطة التي فاصلتها 2 .

ب. استنتج الوضع النسبي للمنحنى (c_f) و المستقيم (Δ) .

4. أنشئ (Δ) والمنحنى (c_f) .

5 نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ : $h(x) = x^2 \ln x$

أ. احسب $h'(x)$ مشتق الدالة h

ب. استنتج دالة اصلية على المجال $]0, +\infty[$ للدالة $x \rightarrow x \ln x + \frac{x}{2}$.

ج. α عدد حقيقي حيث $0 < \alpha < 1$. احسب المساحة للحيز المستوى المحدد بالمنحنى و المستقيمتان التي

معادلتهما : $y = 0$ ، $x = \alpha$ ، $x = 1$

د. أحسب $\lim_{\alpha \rightarrow 0} A(\alpha)$ ، أعط تفسيراً لهذه النتيجة .

الموضوع الثاني

التمرين الاول : (03.5 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى معلم و متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط :

$$C(7,1,-3), A(3,0,0), A(-1,0,3)$$

و ليكن (S) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء حيث : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

1. أ- بين أن النقط A, B, C تعين مستويا .

ب . بين أن $\vec{n}(-1,0,3)$ شعاع ناظمي للمستوى (ABC)

جـ. استنتج معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

2. بين أن المجموعة (S) هي سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω و نصف قطرها .

3. حدد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة Ω و يعامد (ABC) .

4. بين ان المستقيم (Δ) يقطع سطح كرة (S) في نقطتين يطلب تعيين احداثيات كل منهما .

التمرين الثاني : (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C التي لاحقاتها

$$z_A = 2, z_B = 1 + i\sqrt{3}, z_C = \overline{z_B} \text{ على الترتيب .}$$

1- أ. أكتب z_B, z_C على الشكل الاسي

ب. علم النقط A, B, C

2- عين طبيعة الرباعي $OBAC$

3- لتكن (D) مجموعة النقط $M(Z)$ من المستوى حيث : $|z| = |z - 2|$ عين و ارسم المجموعة (D)

II- تحويل نقطي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z حيث $z \neq z_A$ ، النقطة M' ذات اللاحقة z'

$$\text{حيث : } z' = \frac{-4}{z-2}$$

1. أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z' = z$

ب- استنتج صورتين النقطيتين B, C بواسطة التحويل f .

ج- لتكن G مركز ثقل المثلث OAB . عين لاحقة النقطة G' صورة النقطة G بواسطة التحويل f

$$2. \text{ أثبت أن : } |z' - 2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$$

3. بين أنه عندما تمسح النقطة M المجموعة (D) ، فان النقطة M' تمسح دائرة (T) يطلب تعيين مركزها

و نصف قطرها ، ارسم الدائرة (T) .

التمرين الثالث : (03.5 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على N كما يلي: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$

1 أ. أحسب u_1, u_2, u_3 (أكتب النتائج على شكل كسر غير قابل للاختزال)

ب. بين بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{n}{n+1}$

2- لتكن المتتالية (v_n) المعرفة N^* بـ : $v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

أ • أثبت أن : $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$

ب • بين انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_{n+1} - v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)$

ج • استنتج اتجاه تغير المتتالية (v_n) .

3 - احسب المجموع S_n بدلالة n : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ، ثم عين نهاية S_n

التمرين الرابع : (08 نقاط)

المستوى منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

I- نعتبر الدالة g المعرفة على R بـ : $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$

1. بين أنه من اجل كل x من R : $g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$

2. بين ان العدد $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{e}$ هو قيمة حدية صغرى للدالة g

3. استنتج حسب قيم x من R : $g(x) > 0$

II- نعتبر الدالة f المعرفة على R بـ : $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$

وليكن (c_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ و $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

1.أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب- بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

2- أ. بين أنه من اجل كل x من R : $f'(x) = g(x)$

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3-أ. بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (c_f) بجوار $-\infty$

ب. أدرس الوضع النسبي للمنحنى (c_f) والمستقيم (Δ) .

4-أ. اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (c_f) عند النقطة التي فاصلتها 0 .

ب. بين ان المنحنى (c_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها $-\frac{1}{2}$.

ج. انشئ (T) و (Δ) والمنحنى (c_f) .

5- أ. باستعمال المكاملة بالتجزئة ، اثبت أن : $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x} dx = 1 - \frac{e}{2}$

ب. لتكن A المساحة $(\text{بالسنتمتر المربع})$ للحيز المستوى المحدد بالمنحنى (c_f) والمستقيم (T) والمستقيمين

الذين معادلتهما $x = \frac{1}{2}$ ، $x = 0$ ،

- بين أن : $A = (6 - 2e)cm^2$

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول (05 نقاط) :

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لتكن النقط $A(-1; 2; 1)$, $B(1; -6; -1)$,

$C(2; 2; 2)$, $I(2; -1; 1)$ و $\Omega(3; 1; 3)$

1) أ - تحقق أن النقط A, B و C تعين مستويا.

ب - بين أن الشعاع $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) , ثم عين معادلة ديكرتية له.

2) ليكن (P) المستوي ذو المعادلة $x - y + z - 4 = 0$ و (S) سطح الكرة ذات المركز Ω و نصف القطر 3

أ - بين أن المستويين (ABC) و (P) متقاطعان و $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \\ z = t \end{cases}$ تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطعهما (D)

ب - بين أن النقطة I تنتمي إلى المستقيم (D) و إلى سطح الكرة (S)

ج - بين أن المستقيم (D) يقطع سطح الكرة (S) في نقطة ثانية L يطلب تعيينها

التمرين الثاني (05 نقاط) :

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة: $(z - 4)(z^2 + 4z + 16) = 0$

2) المستوي المركب مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ولتكن النقط A, B و C التي لواحقها على الترتيب

$$z_C = \overline{z_B} \text{ و } z_B = -2 + 2i\sqrt{3}, z_A = 4$$

أ - بين النقط A, B و C تنتمي إلى نفس الدائرة (C) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها, ثم علم هذه النقط

ب - أكتب كلا من العددين $z_C - z_A$ و $z_B - z_A$ على الشكل الأسّي, ثم بين أن $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

ج - استنتج طبيعة المثلث ABC وزاوية للدوران r الذي مركزه A ويحول C إلى B

د - عين z_E لاحقة النقطة E صورة B بالدوران r

هـ - ما طبيعة الرباعي $AEBC$ ؟ علل إجابتك

(4) لتكن (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث $|z - 4| = |z + 2 - 2i\sqrt{3}|$

أ - بين أن كل من النقطتين E و C تنتميان إلى (γ)

ب - عين طبيعة المجموعة (γ)

التمرين الثالث (03 نقاط):

يحتوي صندوق 9 كرات متماثلة لا نفرق بينها باللمس منها 4 كرات بيضاء تحمل الأرقام 1, 4, 4, 5 و 5 كرات حمراء تحمل الأرقام 5, 5, 4, 4, 1 نسحب عشوائيا من هذا الكيس كرتين على التوالي مع ارجاع الكرة المسحوبة إلى الكيس قبل السحب الموالي

(1) شكل شجرة الاحتمالات الموافقة لهذه الوضعية في الحالتين الآتيتين:

أ - باعتماد ألوان الكرات.

ب - باعتماد الأرقام المسجلة على الكرات.

(2) احسب احتمال الحوادث الآتية:

أ - A : الكرتان المسحوبتان بيضاوان

ب - B : إحدى الكرتين المسحوبتين فقط حمراء

ج - C : لا يظهر الرقم 1

التمرين الرابع (07 نقاط):

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + 3 \ln\left(\frac{x^2 + 2}{3x}\right)$

نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(I) 1 بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $f'(x) = \frac{(x-1)(x^2 + 4x + 6)}{x(x^2 + 2)}$ ثم استنتج اتجاه تغير

الدالة f

(2) أحسب نهايتي الدالة f عند 0 و $+\infty$ ثم شكل جدول تغيراتها

(3) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

(4) أحسب $f(4)$ ثم أرسم (Δ) و (C_f)

(II) لتكن المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ: $u_0 = \frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n , $1 < u_n < 2$

(2) أدرس رتبة المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و استنتج أنها متقاربة ثم عين نهايتها



الموضوع الثاني

التمرين الأول (04,5 نقاط) :

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

ليكن المستوي (P_1) ذو المعادلة $x - 2y + 4z - 9 = 0$

$$\text{و المستوي } (P_2), \text{ حيث } \begin{cases} x = \alpha - 3 \\ y = \alpha + \beta \\ z = \alpha - \beta \end{cases} \text{ تمثيلا وسيطيا له } (\alpha \text{ و } \beta \text{ عددا حقيقيان})$$

(1) بين أن $-2x + y + z - 6 = 0$ معادلة ديكرتية للمستوي (P_2)

(2) بين أن المستويين (P_1) و (P_2) متعامدان, ثم جد تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطعهما (Δ)

(3) لتكن النقطة $A(-9; -4; -1)$ من الفضاء

أ - أحسب بعدي النقطة A عن المستويين (P_1) و (P_2)

ب - استنتج المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ)

(4) نعتبر من أجل كل عدد حقيقي t النقطة $M(-7+2t; -8+3t; t)$ و الدالة d المعرفة على IR بـ: $d(t) = AM^2$

أ - بين أن $d(t) = 14t^2 - 14t + 21$

ب-أدرس اتجاه تغير الدالة d و استنتج قيمة t التي من أجلها تكون AM^2 أصغر ما يمكن

ج - استنتج مرة أخرى المسافة بين النقطة A والمستقيم (Δ)

التمرين الثاني (04,5 نقاط)

المستوي المركب مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

ولتكن النقط A, B, C صور الأعداد المركبة $z_A = -3e^{-i\frac{\pi}{2}}, z_B = 1 + i$ و $z_C = -3$

(1) أكتب على الشكل الأسّي الأعداد z_A, z_B, z_C

(2) عين z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; 1), (C; -1)\}$

(3) أ- عين (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق $AM^2 + BM^2 - CM^2 = -13$

ب - بين أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (E) ثم انشئ (E)

(4) تحقق أن النقط O, B, G في إستقامة

(5) عين صورة المجموعة (E) بالتحاكي الذي مركزه O و يحول النقطة B إلى G محددا عناصرها المميزة

التمرين الثالث (04 نقاط) :

نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $I =]-3; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = \frac{5x+3}{x+3}$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (انظر الشكل في الأسفل)

(1) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = h(u_n)$

أ - مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 دون حسابها

ب - ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

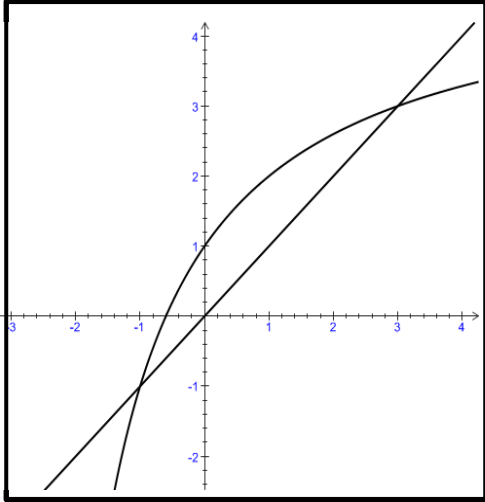
(2) أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 3$

ب - بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً و استنتج أنها متقاربة

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على IN بـ : $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$

أ - أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب - أكتب v_n ثم u_n بدلالة n وأحسب $\lim u_n$



التمرين الرابع (07 نقاط) :

لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x - e^{-\frac{x}{2}}$

(1) أدرس تغيرات الدالة g

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً a حيث $0,70 < a < 0,71$

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

(II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (2x - 4)e^{\frac{x}{2}} + 2 - x$

نسمي (C_f) المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة 1 cm)

(1) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^{\frac{x}{2}} \cdot g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

(3) بين أن $f(a) = 4 - a - \frac{4}{a}$ ثم استنتج حصر a

(4) بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2 - x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$

(5) أكتب معادلة (T) مماس المنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0

(6) حل في IR المعادلة $f(x) = 0$ ثم أرسم (D) , (T) و (C_f)

(III) (1) باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب التكامل $\int_0^x (2t + 4)e^{\frac{t}{2}} dt$

(2) أحسب بالسنتمتر المربع A مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (D) والمستقيمين اللذين

معادلتيهما $x = 2$ و $x = -2 \ln 2$



البريد الإلكتروني الجديد : aboumedalou@yahoo.fr

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
{الموضوع الأول}

التمرين الاول (04 نقاط):

في هذا التمرين الأسئلة مستقلة عن بعضها ، وفي كل سؤال اقترحت ثلاث إجابات ، اجابة واحدة فقط منها صحيحة ، حددها مع التعليل .
الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

(1) لتكن A و B نقطتان مختلفتان من الفضاء ، مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $MA^2 = MB^2$ هي :

(أ) المجموعة الحالية (ب) مستوي (ج) سطح كرة

(2) نعتبر النقطتين $C(0;1;-2)$ و $D(2;1;0)$ ، احداثيات G مرجح الجملة $\{(C;1), (D;3)\}$ هي :

(أ) $G\left(\frac{3}{2}; 1; -\frac{1}{2}\right)$ (ب) $G(6;4;-2)$ (ج) $G\left(\frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}\right)$

(3) المستقيمان ذوي التمثيلين الوسيطيين : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases} t \in \mathbb{R}$ و $\begin{cases} x = 3 - 2t' \\ y = 7 - 4t' \\ z = 2 - t' \end{cases} t' \in \mathbb{R}$ هما

(أ) متوازيان (ب) متقاطعان (ج) ليسا من نفس المستوي

(4) مجموعة النقط M التي تحقق $-2x + 4y - 4z + 1 = 0$ و $x - y + 2z - 1 = 0$ هي :

(أ) مجموعة خالية (ب) مستوي (ج) مستقيم

التمرين الثاني(05 نقاط):

(1) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z حيث : $(z + \sqrt{3} - i)(z^2 - 8\sqrt{3}z + 64) = 0$

(2) المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ (وحدة الطول 1cm) ، تعطى النقط A ، B ، C التي لاحقاتها على

الترتيب : $z_A = 4\sqrt{3} - 4i$ ، $z_B = 4\sqrt{3} + 4i$ ، $z_C = -\sqrt{3} + i$

(أ) أكتب كلا من العددين المركبين z_A و z_B على الشكل الأسّي ثم عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ حقيقيا .

(ب) تحقق أن : $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^{2016} + \left(\frac{z_C}{2}\right)^{1962} = 0$

(ج) عين طبيعة المثلث OAB .

(3) أكتب العبارة المركبة R للدوران الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

(4) عين لاحقة النقطة D صورة C بالدوران R .

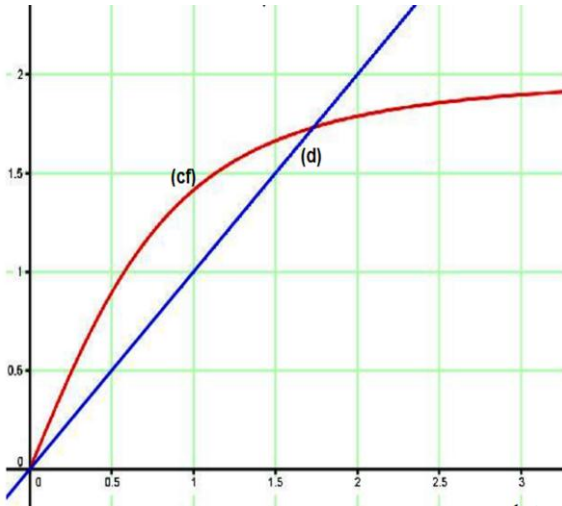
(5) بين أن لاحقة G مرجح الجملة $\{(O;-1), (D;1), (B;1)\}$ هي : $z_G = 4\sqrt{3} + 6i$.

(6) أثبت أن النقط C ، D و G على إستقامة واحدة .

(7) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $-|z|^2 + |z - z_D|^2 + |z - z_B|^2 = 20$.

التمرين الثالث (05 نقاط):

(c_f) المقابل هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس



(d) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ و ($o, \vec{i}, \vec{j}$)

(1) بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة f

(2) بين أنه إذا كان $x \in [1; \sqrt{3}]$ فإن $f(x) \in [1; \sqrt{3}]$

(3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 1$ بجدها الأول

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.

(أ) باستعمال المنحنى (c_f) والمستقيم (d) مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2

على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل.

(ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(ج) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

(د) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - \sqrt{1+u_n^2})}{\sqrt{1+u_n^2}}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).

(4) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$.

(أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

(ب) أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n

(ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ، ماذا تستنتج؟

التمرين الرابع (06 نقاط):

I. الجدول التالي هو جدول تغيرات الدالة g المعرفة على $]-\infty; 0]$ بـ: $g(x) = x^2 - 1 + \frac{x}{1-x} + \ln(1-x)$.

x	$-\infty$	0
$g'(x)$		-
$g(x)$		$\nearrow$

(1) أحسب $g(0)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على $]-\infty; 0]$ ثم تحقق أن $-1 < \alpha < -0.9$

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty; 0]$.

II. لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 0[$ كما يلي : $f(x) = -x - 3 - \frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x}$

وليكن (c_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس ($o, \vec{i}, \vec{j}$).

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

(2) بين أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty; 0[$ فإن : $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$

(3) استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty; 0[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x + 3]$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً.

(ب) أدرس وضعيه (c_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x - 3$

(5) بين أن : $f(\alpha) = -2\alpha - 3 - \frac{1}{1-\alpha}$

(6) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً β حيث $-3.2 < \beta < -3.1$.

(7) أنشئ في نفس المعلم (c_f) و (Δ).

(8) ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m الموجب تماماً عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = 1 + \ln m$

الموضوع الثاني

التمرين الاول (04 نقاط):

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(0;0;2)$ ، $B(0;4;0)$ و $C(2;0;0)$.

(1) أ) تحقق أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي : $2x + y + 2z = 4$

ب) أحسب المسافة بين النقطة O والمستوي (ABC) .

(2) أ) عين معادلة ديكارتية للمستوي (P) المار بالنقطة A والعمودي على المستقيم (BC)

ب) ليكن (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (ABC) .

✓ عين التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) ، ماذا يمثل (Δ) في المثلث ABC .

(3) أ) ليكن (Δ') متوسط المثلث ABC في النقطة B .

$$\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 4t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad : \text{ معرف كإيلي } (\Delta')$$

أ) أثبت أن المثلث ABC متساوي الساقين .

(4) لتكن H نقطة تقاطع المستقيمين (Δ) و (Δ') .

أ) أثبت أن النقطة H إحداثياتها هي $\left(\frac{8}{9}; \frac{4}{9}; \frac{8}{9}\right)$.

ب) أثبت أن النقطة H هي المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC) ، ثم اوجد بطريقة ثانية المسافة بين النقطة O

والمستوي (ABC) .

التمرين الثاني (05 نقاط):

$$u_n \text{ متتالية عددية معرفة بـ : } u_1 = e^2 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n \text{ ، } u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n}{e}} .$$

(1) أ) أحسب u_2 ، u_3

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > \frac{1}{e}$.

ج) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة .

(2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $v_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln u_n$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحده الاول .

ب) عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج أن : $u_n = e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$.

ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

د) أحسب بدلالة n المجموع S_n و الجداء T_n حيث : $S_n = v_1^3 + v_2^3 + \dots + v_n^3$

$$T_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$$

هـ) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$

التمرين الثالث (04 نقاط):

- (1) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z حيث : $(z^2 + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$.
- (2) المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ (وحدة الطول 1cm) ، تعطى النقط A, B, C و D التي لواحقتها على الترتيب : $z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = z_A$ ، $z_C = -2i$ ، $z_D = \overline{z_C}$.
- (أ) أكتب كلا من العددين المركبين z_A و $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)$ على الشكل الأسّي
- (ب) أنشئ بدقة النقط A, B, C و D .
- (ت) بين أن النقط A, B, C و D تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .
- (3) لتكن E نظيرة B بالنسبة إلى O .
- (أ) أحسب الطويلة والعقدة للعدد المركب : $\frac{z_A - z_C}{z_E - z_C}$ ثم استنتج طبيعة المثلث AEC .
- (ب) بين أن A هي صورة E بالدوران الذي مركزه النقطة C وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.
- (ت) حدد مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي التي تحقق العلاقة التالية : $\left| \frac{iz - 1 - \sqrt{3}i}{2z + 4i} \right| = \frac{1}{2}$.

التمرين الرابع (07 نقاط):

- (I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 1 - \frac{x-1}{e^{x-2}}$
- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ، ثم فسر النتيجة الأخيرة بيانيا .
- (2) أدرس اتجاه تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها .
- (3) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x) \geq 0$.
- (II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x - 1 + \frac{x}{e^{x-2}}$
- و (c_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$..
- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (2) بين أنه من أجل كلّ x من المجال $]0; +\infty[$ فإن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$
- (3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها .
- (4) بين أن النقطة $I(2; 3)$ نقطة انعطاف للمنحنى (c_f) .
- (5) (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x + 1]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .
- (ب) أدرس وضعية (c_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$
- (6) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[0; 0.2]$.
- (7) بين أن المنحنى (c_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلته .
- (8) أنشئ في نفس المعلم (c_f) ، (Δ) و (T) .
- (9) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $m + 1 - xe^{-x+2} = 0$.
- (10) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = \frac{x}{e^{x-2}}$
- (أ) أحسب $h'(x)$ و $h''(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.
- (ب) أحسب مساحة الحيز $S(\lambda)$ المحدد بالمنحنى (c_f) والمستقيمتين $y = x - 1$ و $x = 0$ و $x = \lambda$ حيث $\lambda > 0$
- (ج) أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S(\lambda)$

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول:

التمرين الأول (4,5 ن):

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $Z: (z-2)(z^2+2z+4)=0$

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، لتكن النقط $B; A$ و C لواحقتها

على الترتيب على الترتيب Z_A, Z_B, Z_C حيث: $Z_A = -1+i\sqrt{3}$ و $Z_B = -1-i\sqrt{3}$ و $Z_C = 2$

(أ) تحقق أن: $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC

(ب) عين Z_Ω لاحقة Ω مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

(3) (أ) أثبت ان (Γ) مجموعة النقط M التي لواحقتها Z حيث: $Z = x + iy$ والتي تحقق

$Z\bar{Z} + 2(Z + \bar{Z}) = 0$ هي دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها. (حيث x, y عدنان حقيقيان)

(ب) تحقق ان النقطتين $B; A$ من الدائرة (Γ)

(3) عين العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{3}$. ثم عين صورة الدائرة (Γ) بالدوران R

(5) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n = |z_A|^{2n} + 1$

(أ) بين أن المتتالية (u_n) متباعدة

(ب) أحسب بدلالة n المجموع s_n حيث: $s_n = u_0 + u_1 + u_3 + \dots + u_n$

التمرين الثاني (4 ن):

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط: C, B, A حيث

$$C(1; 5; -2), B(7; -1; -2), A(1; -1; 4)$$

(1) (أ) بين أن النقط C, B, A تعين مستويا. (ب) بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

(ج) بين أن الشعاع $\vec{n}(1; 1; 1)$ ناظم للمستوي (ABC) (د) عين معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .

- (2) اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $D(0;-2;-3)$ والعمودي على المستوى (ABC) .
- (3) عين إحداثيات G المسقط العمودي للنقطة D على (ABC) ثم بين أن G هي مركز ثقل المثلث ABC .
- (4) عين مجموعة النقط (E) حيث: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = k(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB})$ ، $k \in \mathbb{R}$ محددا العناصر المميزة لها.

التمرين الثالث(4ن):

المتتالية (u_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالحد العام u_n حيث: $u_n = e^{1-n}$ ونضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln u_n$. هل صحيح أم خاطئ ما يلي مع التبرير:

- (1) (u_n) هندسية أساسها e (2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (3) (u_n) متناقصة.
- (4) $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} = e^2 \left(\frac{1 - e^{-n}}{e - 1} \right)$ (5) (v_n) حسابية (6) $v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} = -\frac{1}{2}n^2 + n$

التمرين الرابع(5,7ن):

أولاً: نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كمايلي: $g(x) = 2x^3 - 1 + 2 \ln x$.

- (1) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0, +\infty[$.
- (2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α وأن: $0,86 < \alpha < 0,87$.
- (3) استنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0, +\infty[$.
- ثانياً:** نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ ب: $f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) احسب نهاية الدالة f عند 0 وعند $+\infty$.
- (2) ا) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.
ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) .
- (3) أثبت ان إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0, +\infty[$.
- (4) استنتج جدول تغيرات الدالة f .
- (5) ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) .

ثالثاً: نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ ب: $F(x) = x^2 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$.

- أ) احسب $F'(x)$ حيث F' مشتقة الدالة F على المجال $]0, +\infty[$. ماذا تستنتج؟
- ب) احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = 1$, $x = e$ و $y = 0$.

الموضوع الثاني:

التمرين الأول (5 نقاط):

نضع: $x = 1 + \sqrt{2}$

(1) تحقق أن: $x = 2 + \frac{1}{x}$

(2) اعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدّها الأول u_0 وبالعلاقة التراجعية:
$$\begin{cases} u_0 = x \\ u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

حيث n عدد طبيعي. برهن بالتراجع أن (u_n) متتالية ثابتة

(3) (v_n) هي المتتالية المعرفة كما يلي: $n \in \mathbb{N}^*$
$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_1 = x \\ v_{n+1} = 2v_n + v_{n-1} \end{cases}$$

(أ) برهن أن (v_n) هندسية

(ب) عبر عن v_n بدلالة n

(ت) برر أن v_n متباعدة

(ث) أحسب بدلالة n المجموع: $s_n = v_0^3 + v_1^3 + v_2^3 + \dots + v_n^3$

(ج) أحسب الجداء: $p = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$ بدلالة n

التمرين الثاني (4 نقاط):

يحتوي صندوق على 5 كريات مرقمة من 1 إلى 5 لا نفرق بينها عند اللمس . نسحب على التوالي 3 كريات بالإرجاع (أي بعد كل سحبة نعيد الكرة إلى الصندوق) نسجل بالترتيب الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة لنحصل عندئذ على ثلاثة أرقام من بين 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5

(1) ما هو عدد الأعداد الممكنة ؟

(2) بيد التجربة هذه المرّة لكن دون إرجاع الكرة المسحوبة .

(أ) ما هو عدد الأعداد الممكنة ؟

(ب) ما احتمال الحادثة A " الكرة الثانية المسحوبة تحمل الرقم 4 "؟

(ج) ما احتمال الحادثة B " الحصول على عدد يقبل القسمة على 5 "؟

التمرين الثالث (5 نقاط):

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول $z: z^2 + 4z + 5 = 0$

(ب) استنتج حلي المعادلة ذات المجهول $z: \left(-\frac{5}{z}\right)^2 + 4\left(-\frac{5}{z}\right) + 5 = 0$ ، حيث $\bar{z}$ هو مرافق العدد z و $z \neq 0$

(2) في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{u}, \vec{v})$. لتكن النقط $A; B$ و C لواقعها

على الترتيب : $Z_A = 2 - i$ و $Z_B = -2 - i$ و $Z_C = -2 + i$

أ/ بين ان العدد $(Z_C - Z_B)^{2015}$ تخيلي صرف

ب/ عين النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ مستطيلا .

(3) عين مساحة صورة المستطيل $ABCD$ بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{u}$

(4) عين ثم أنشئ بدقة (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث : $Z = \sqrt{5}e^{i\theta}; \theta \in \mathbb{R}$

التمرين الرابع (6 نقاط):

لتكن الدالة g المعرفة على IR بـ: $g(x) = (ax^2 + bx + c) e^{-x}$ ، حيث a, b, c أعداد حقيقية.

و (c_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; i; j)$.

(I) عين الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث يقبل (c_g) مماسا عند النقطة $A(0; -3)$ معامل توجيهه 3

والعدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $g(x) = 0$

(II) نضع $a = 1$, $b = 0$ و $c = -3$

(1) احسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

(3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (c_g) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$.

(4) عين إحداثيات نقط تقاطع (c_g) مع محور الفواصل.

(5) بين أنه توجد نقطتا انعطاف للمنحني (c_g)

(6) ارسم (T) و (c_g)

-7 (أ) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x من IR فإن: $g(x) + 2g'(x) + g''(x) = 2e^{-x}$

(ب) استنتج دالة أصلية للدالة g على IR .

ق بالتوفيق

هـ إخت

على المترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين

الموضوع الاول

التمرين الاول : (3.5 ن)

الفضاء مزود بمعلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

لتكن النقط $A(1; -1; 1)$ ، $B(1; -3; 0)$ و $C(0; 1; 3)$ والمستوي (P) ذو المعادلة الديكارتيّة : $2x + 2y - z - 4 = 0$

1- أ. بين ان النقط A ، B و C تعين مستويا (ABC) .

ب. تحقق ان الشعاع $\vec{n}(2; -1; 2)$ ناظمي على المستوي (ABC) ثم لكتب معادلة ديكارتية له.

2- بين ان المستويين (P) و (ABC) متعامدين.

3- أ. احسب المسافة بين النقطّة $D(1; 2; -1)$ وكل من المستويين (P) و (ABC) .

ب. استنتج المسافة بين النقطّة D والمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (ABC) .

4- عين تمثيلا وسيطيا لـ (Δ) . ثم عين احداثيات النقطّة M من (Δ) حتى تكون المسافة DM اصغرها يمكن.

التمرين الثاني : (4.5 ن)

I / نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(\bullet) z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = 0$

1- تحقق ان العدد المركب $z_1 = i$ حل للمعادلة $(\bullet)$.

2- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث :

من اجل كل عدد مركب z : $z^3 - (4+i)z^2 + (13+4i)z - 13i = (z-i)(z^2 + az + b)$

3- استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة $(\bullet)$. نرمز للحلين الآخرين بـ z_2 الحل الذي جزؤه التخيلي موجب و z_3 الحل الآخر

4- اكتب العدد المركب $z_2 - i$ على الشكل الاسي. ثم عين قيم العدد الطبيعي n حتى $(z_2 - i)^n$ تخيليا صرفا.

II / المستوي مزود بمعلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. النقط A ، B و C لاحقاتها على الترتيب i ، $2+3i$ و $2-3i$

1- عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث : $Arg(z - i) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ / $k \in \mathbb{Z}$

2- عين لاحقة النقطّة A' صورة النقطّة A بالدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

3- بين ان النقط A' ، B و C في استقامية وعين العبارة المركبة للتحاكي الذي مركزه B ويحول C الى A'

التمرين الثالث : (4 ن)

(u_n) متتالية موجبة معرفة على $\mathbb{N}$ بالشكل : $u_0 = 2$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{2u_n}$

1- أ. بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2u_n}$

2- أ. بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 1$

ب. بين ان المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$

ج. استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة وأحسب نهايتها.

$$3- \text{ نضع من اجل كل عدد طبيعي } n : v_n = \frac{2(u_n - 1)}{2u_n - 1}$$

- أ. بين ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الاول v_0 واساسها q .
- ب. اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .
- ج. تحقق من نتيجة السؤال (1- ج).
- د- احسب المجموع $S : S = u_0(v_0 - 1) + u_1(v_1 - 1) + \dots + u_n(v_n - 1)$

التمرين الرابع : (8 ن)

$$I / g \text{ دالة عددية معرفة على } \mathbb{R} - \{1\} \text{ بالشكل : } g(x) = x^2 - 2x + \ln|x - 1|$$

- 1- ادرس تغيرات الدالة g واحسب $g(0)$ و $g(2)$
- 2- استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x .
- II / f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بالشكل :
- $$f(x) = x - 2 - \frac{\ln|x - 1|}{x - 1}$$
- $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- بين انه من اجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$ فان : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x - 1)^2}$ ثم ادرس تغيرات الدالة f .
- 2- بين ان المنحني (C) يقبل مستقيمين مقاربين احدهما مائل (Δ) يطلب كتابة معادلة لكل منهما.
- 3- ادرس وضعية المنحني (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
- 4- بين ان المنحني (C) يقبل مماسين (T) و (T') موازيين للمستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلة لكل منهما.
- 5- بين ان النقطة $w(1; -1)$ مركز تناظر للمنحني (C) .
- 6- بين ان المنحني (C) يقبل نقطتي انعطاف يصلب تعيينهما.
- 7- انشئ كل من المماسين (T) و (T') والمنحني (C) .
- 8- ناقش بيانيا حسب فيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة : $f(x) = x + m$.
- 9- λ عدد حقيقي سالب غير معدوم. احسب المساحة $A(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) والمستقيمات التي معادلاتها : $x = \lambda$ ؛ $x = 0$ و $y = x - 2$. ثم عين قيمة λ حتى يكون $A(\lambda) = 2$.
- 10- h دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بالشكل $h(x) = x - \frac{\ln|x|}{x}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.
- بين ان (C_h) هو صورة (C) بانسحاب يطلب تعيينه.

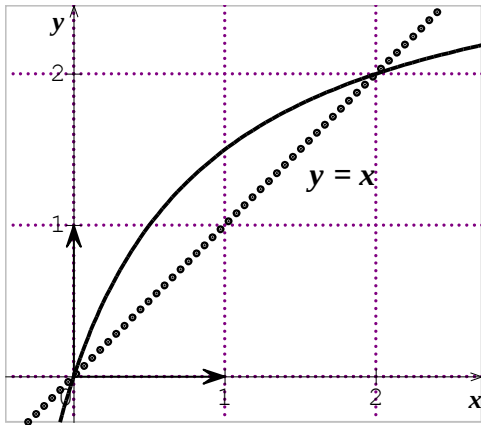
الفضاء منسوب الى معلم متعامد متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. النقط $A(-2, 0, 1)$ ، $B(1, 2, -1)$ و $C(-2, 2, 2)$ والمستوي (P') ذو المعادلة الديكارتية $4y + 2z - 7 = 0$.

1. أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ثم استنتج القيمة المدورة الى الوحدة بالدرجات للزاوية $\hat{BAC}$.
2. استنتج أن النقط A ، B و C ليست في استقامية وان $2x - y + 2z + 2 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
3. أ. أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) المستوي المحوري للقطعة $[AB]$
ب. بين أن المستويين (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيل وسيطي له.
4. أ. بين أن المستقيم (Δ) يقطع المستوي (ABC) في نقطة ω يطلب تعيين احداثياتها.
ب. استنتج أن ω هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .
5. نعتبر النقطة G_α مرجح الجملة المثقلة $\{(A, \alpha^2 - 1); (B, \alpha^2 + 2); (C, -2\alpha^2)\}$ حيث α وسيط حقيقي.
عين بدلالة α احداثيات G_α واستنتج مجموعة النقط G_α عندما تتغير α في $\mathbb{R}$.

التمرين الثاني : (5.5 ن) (الجزءان I و II مستقلان عن بعضهما)

I / نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{3U_n}{U_n + 1}$.

f دالة عددية معرفة على $]-1, +\infty[$ كمايلي : $f(x) = \frac{3x}{x+1}$. (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ كما هو موضح في الشكل المقابل .



- 1- أ. مثل على الشكل المقابل وعلى محور الفواصل U_0 ، U_1 ، U_2 ، U_3 مبرزا خطوط الرسم.
ب. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها.

2- أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < U_n < 2$.

ب. أثبت أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما ؟ وبين أنها متقاربة واحسب نهايتها ؟

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = 1 - \frac{2}{U_n}$

أ. أثبت أن (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب. أكتب عبارة U_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

ج. أحسب بدلالة n المجموع $S = V_0 + V_2 + V_4 + \dots + V_{2n}$.

II / نرمي قطعة نقدية متوازنة ثلاث مرات متعاقبة

نقترح اللعبة التالية يربح اللاعب ثلاثة دنانير اذا ظهر الوجه و يخسر دينارا واحدا اذا ظهر الظهر.

أ - عين مجموعة الامكانيات لهذه التجربة العشوائية.

ب. عين قيم المتغير العشوائي X وعين قانون الاحتمال لهذا المتغير العشوائي.

ج - احسب احتمال ان يربح اللاعب 5 دنانير

التمرين الثالث : (3.5 ن)

المستوي مزود بمعلم متعامد متجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$. النقط A ، B و C لاحقاتها على الترتيب : $Z_A = -1$ ، $Z_B = 1 + 2i$ و $Z_C = 1 - 2i$.

1. علم النقط A ، B و C .

2. عين طوليلة وعمدة العدد المركب $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC .

3. S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث : $Z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}Z - 1 - i$ عين طبيعة التحويل S وعناصره المميزة ثم بين أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتحويل S .
4. لتكن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z حيث M تختلف عن B وتختلف عن C بحيث يكون $\frac{Z_C - Z}{Z_B - Z}$ تخيليا صرفا .
- أ. بين أن النقطة A تنتمي الى المجموعة (Γ) .
- ب. فسر هندسيا عمدة العدد المركب $\frac{Z_C - Z}{Z_B - Z}$ ثم عين طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة .

التمرين الرابع: (7 ن)

- I / g هي الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$.
- أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .
 - استنتج حسب قيم x من $\mathbb{R}$ فإن : $g(x) > 0$.
- II / f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = (2x - 1)e^{2x} + x + 1$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$
- أحسب نهايتي f عند اطراف مجال التعريف .
 - أبين أنه من أجل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$.
 - أبين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.
 - أدرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) والمنحني (C_f) .
 - أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
 - بين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها $-\frac{1}{2}$.
 - أنشئ المنحني (C_f) والمستقيمان (Δ) و (T) .
 - h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = (2|x| - 1)e^{2|x|} + |x| + 1$ و (C_h) تمثيلها البياني .
 - بين أن h زوجية و اشرح كيف يتم انشاء المنحني (C_h) اعتمادا على (C_f) ثم أنشئه في نفس المعلم .
 - باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x - 1)e^{2x} dx = 1 - \frac{e}{2}$.
 - احسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمتين التي معادلاتها $x = 0$ ، $y = 0$ و $x = \frac{1}{2}$.

من اعداد : محلب ---- مخلوفي

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول (05 ن) :

نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A و B لاحقتيهما

$$Z_A = 4 + 2i \text{ و } Z_B = 3 - i$$

1° أ- أكتب على الشكل الجبري ثم الشكل المثلثي العدد المركب $\frac{Z_B - Z_A}{Z_B}$

ب- استنتج طبيعة المثلث ABO

2° نعتبر التحويل النقطي R في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' لاحقتها Z' و الذي يحول النقطة A إلى B و يحول B إلى O

أ- بين أن العبارة المركبة للتحويل النقطي R هي: $Z' = -iZ + 1 + 3i$

ب- عين طبيعة التحويل R و عناصره المميزة

ت- عين Z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة O بالتحويل R

ث- استنتج طبيعة الرباعي $ABOC$

ج- عين مجموعة النقط M من المستوي لاحقتها Z حيث: $|Z - 4 - 2i| = |Z|$

3° من أجل $Z \neq 2 + i$ نضع $L = \frac{Z' - 2 - i}{Z - 2 - i}$ ،

أ- بين أن $L = -i$

ب- بين أن: $(Z' - 2 - i)^2 + (Z - 2 - i)^2 = 0$

ت- عين العدد الطبيعي n حيث L^n عدد حقيقيا.

التمرين الثاني (04 ن) :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر المجموعة (S) للنقط $M(x, y, z)$ حيث:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 5 = 0$$

1° بين أن (S) سطح كرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

2° نعتبر المستوي (Q) المعرف بالمعادلة: $2x - 2y + z - 2 = 0$

أ- حدد الوضع النسبي للمستوي (Q) و سطح الكرة (S)

ب- بين أن نقط تقاطع المستوي (Q) و السطح الكروي (S) هو دائرة يطلب تحديد مركزها و نصف قطرها

3° نعتبر المستوي (P_m) المعرف بالمعادلة $2mx + (1 - 2m)y + mz + 1 - 2m = 0$ حيث m عدد حقيقي.

أ- ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل النقطة $A(0; -1; 0)$ و شعاع توجيهه $\vec{u}(1; 0; -2)$.

° بين أن المستقيم (Δ) محتوي في المستوي (P_m)

ب- حدد العدد الحقيقي m التي من اجلها يكون المستوي (P_m) مماسا لسطح الكرة (S)

ت- حدد العدد الحقيقي m التي من اجلها يكون المستوي (P_m) عمودي على المستوي (Q)

التمرين الثالث (04 ن):

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على IN كمايلي : $u_0 = e$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ حيث e : هو أساس اللوغاريتم النيبيري.

و لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n حيث : $v_n = \ln(u_n)$

1° أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول.

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

2° من اجل كل عدد طبيعي n : نضع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ، $p_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$

أ- أثبت أن من اجل كل عدد طبيعي n : $p_n = e^{S_n}$

ب- أكتب عبارة S_n بدلالة n ثم استنتج p_n عبارة n بدلالة n

ت- عين نهاية S_n ثم استنتج نهاية P_n

التمرين الرابع (07 ن):

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]1; +\infty[$ حيث : $g(x) = x^2 - 2x - 4\ln(x-1)$ (حيث $\ln$ اللوغاريتم النيبيري) (Γ) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل المقابل.

1° بقراءة بيانية للمنحنى (Γ) عين عدد حلول المعادلة : $g(x) = 0$

2° أحسب $g(2)$ ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $2,87 < \alpha < 2,88$

3° استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $]1; +\infty[$.

II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]1; +\infty[$ حيث : $f(x) = x - 3 + \frac{4\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1° أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +1} f(x)$

2° أ- بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x - 3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

3° أ- بين أنه من أجل x من $]1; +\infty[$ لدينا : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$

ب- استنتج اتجاه الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

4° أرسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) (نأخذ : $f(\alpha) = 3,9$)

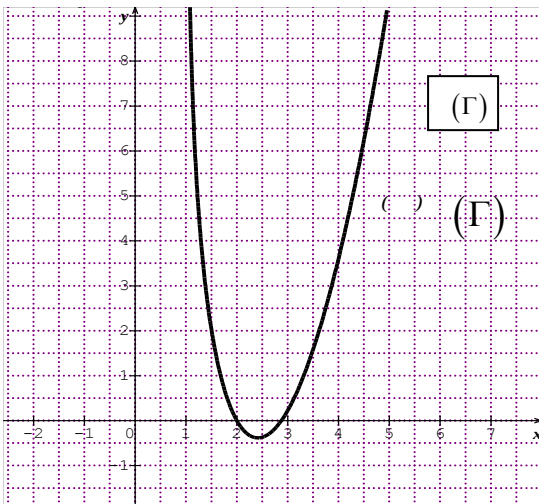
5° لتكن الدالة h المعرفة على $]1; +\infty[$ كمايلي :

$$h(x) = [\ln(x-1)]^2$$

أ- أحسب $h'(x)$ ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال

$$]1; +\infty[$$

ب- أحسب التكامل $\int_2^5 f(x) dx$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.



الموضوع الثاني

التمرين الأول (05 ن):

1°) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (E) ذات المجهول z التالية:

$$z^3 + (i\sqrt{3} - 2)z^2 + (2 - 2i\sqrt{3})z + 2i\sqrt{3} = 0$$

أ- بين أن المعادلة (E) تقبل حلا تخيليا صرفا يطلب تعيينه.

ب- حل في (C) المعادلة (E) .

2°) المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط K, L و M و التي لواحقها على الترتيب: $z_K = 1+i$ ، $z_L = 1-i$ و $z_M = -\sqrt{3}i$ أنشئ النقط K, L و M في المعلم السابق.

3°) أ- تحقق أن z_N لاحقة النقطة N نظيرة النقطة M بالنسبة للنقطة L هي $2+i(\sqrt{3}-2)$.

ب- نعتبر الدوران r الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ حيث: $r(M) = A$ و $r(N) = C$.

عين اللاحقتين z_A و z_C للنقطتين A و C على الترتيب.

ت- نعتبر الانسحاب t الذي لاحقة شعاعه هي $2i$ حيث: $t(M) = D$ و $t(N) = B$.

عين اللاحقتين z_D و z_B للنقطتين D و B على الترتيب.

4°) أ- بين أن النقطة K هي منتصف كلا من القطعتين المستقيمين $[DB]$ و $[AC]$.

ب- بين أن: $\frac{z_C - z_K}{z_B - z_K} = i$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين الثاني (04 ن): الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(1;0;2)$

، $B(0;1;2)$ و $C(1;-2;0)$ و المستوي (P) الذي معادلته $3x - 2y + z + 3 = 0$.

1°) أ- بين أن النقط A, B و C تعين مستويا (ABC) .

ب- تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1;1;-1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكرارية له.

2°) أ- بين أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان.

ب- بين أن تقاطع المستويين (P) و (ABC) هو المستقيم (Δ) معرف بتمثيله الوسيطى:

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 4t \\ z = 5t \end{cases}$$

حيث t وسيط حقيقي.

ت- أحسب المسافة بين النقطة $H(-1;6;-2)$ و المستوي (ABC) ثم بين أن المسافة H و المستقيم

$$(\Delta) \text{ تساوي } \sqrt{\frac{106}{3}}$$

3°) لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث: $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 12y + 4z + 3 = 0$

أ- بين أن (Γ) هي سطح كرة مركزها H يطلب تعيين نصف قطرها.

ب- ما هو الوضع النسبي للمجموعة (Γ) و المستقيم (Δ) ؟

التمرين الثالث (04 ن):

$$\begin{cases} v_1 - v_3 = \frac{7}{16} \\ v_1 \times v_2 \times v_3 = \frac{27}{64} \end{cases} \quad (v_n) \text{ المتتالية الهندسية الموجبة تماما و المعرفة على } IN \text{ بحيث:}$$

أ- أحسب v_2 و الأساس q للمتتالية (v_n)

ب- أكتب v_n بدلالة n

$$(u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة بـ } u_0 = -\frac{2}{3} \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n: u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2}$$

أ- أحسب الحدود u_1, u_2, u_3

ب- برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n فان $u_n > -2$

ت- عين اتجاه تغير (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

(°3) المتتالية العددية (w_n) المعرفة على IN بـ: $w_n = u_n - v_n$

أ- أثبت بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = -2$

ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم احسب نهايتها.

ت- أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = \frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \dots + \frac{u_n}{v_n}$

التمرين الرابع (07 ن):

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR حيث: $f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

أ- احسب نهايات f عند $-\infty$ و $+\infty$.

(°2) أحسب من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) + f(-x)$

ماذا نقول عن النقطة $A(0; 1 + 2\ln 2)$ ؟

(°3) أدرس اتجاه تغير f الدالة ثم شكل جدول تغيراتها.

(°4) أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي m المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلا وحيدا في IR

ب- a عدد حقيقي يحقق: $f(a) = 2$

من أجل أية قيمة لـ m يكون $-a$ حلا للمعادلة $f(x) = m$ ؟

(°5) أ- بين انه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$

ب- بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x + \ln 4$ و المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + 2 + \ln 4$

مقاربان مائلان للمنحنى (C_f) .

(°6) α عدد حقيقي موجب تماما، نضع $I(\alpha) = \int_0^\alpha [f(x) - x - \ln 4] dx$

أ- ماذا يمثل $I(\alpha)$ ؟

ب- بين أن $I(\alpha) = 2 \ln \left(\frac{2e^\alpha}{e^\alpha + 1} \right)$

ت- عين القيمة المضبوطة لـ α التي تحقق $I(\alpha) = 1$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

امتحان بكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات

الشعبة: علوم تجريبية

المدة : 03 ساعات و نصف

ثانوية وادي الجمعة

على المترشح ان يختار احد الموضوعين التاليين:

الموضوع الاول

التمرين الاول:

الفضاء مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O; I; J; K)$. نعتبر النقط $A(-2; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$, $C(0; 0; -2)$ و I منتصف القطعة $[AB]$

1- أ- بين ان النقط A, B, C تعين مستوي نرمز له بالرمز (Q)

ب- اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q)

2- (P) المستوي الذي يشمل I و يعامد الشعاع $\overrightarrow{AB}$

أ- اكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) , ماذا يمثل المستوي (P)

ب- بين ان المستويين (P) و (Q) متقاطعان وفق مستقيم (Δ) يشمل النقطة C و ان الشعاع $\vec{U} = \vec{I} + \vec{J} - 2\vec{K}$ شعاع توجيه له ثم

اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ)

3- أ- بين ان الشعاعين $\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{CI}$ متعامدان

ب- استنتج المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ)

4- أ- تحقق ان الرباعي $OAIC$ هو رباعي وجوه

ب- احسب المسافة $d(O; (Q))$ ثم احسب حجم رباعي الوجوه $OAIC$

التمرين الثاني:

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n ب: $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + \frac{1}{3}n + 1$

1- احسب الحدود $U_1; U_2; U_3$ ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n)

2- أ- برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n لدينا: $U_n \leq n + 3$

ب- ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n)

ج- استنتج ان (U_n) محدودة من الاسفل. هل يمكن القول ان (U_n) متقاربة ؟

3- نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $V_n = U_n - n$

أ- بين ان المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين اساسها و حدها الاول

ب- عبر عن V_n بدلالة n ثم U_n بدلالة n ثم احسب نهاية المتتالية (U_n)

ج- احسب بدلالة n المجموع: $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$

4- ا- لتكن المتتالية (T_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $T_n = \ln(V_n)$

ب- برهن ان المتتالية (T_n) حسابية يطلب تعيين اساسها و حدها الاول

ج- احسب بدلالة n المجموع: $A_n = T_0 + T_1 + T_2 + \dots + T_n$ ثم استنتج الجداء: $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$

التمرين الثالث:

المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس (O; U; V) (وحدة الرسم 4cm) لتكن النقطة A ذات الاحقة $Z_A = i$

و B ذات الاحقة $Z_B = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

1- ليكن R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$. نسمي C صورة النقطة B بالدوران R

أ- اكتب العبارة المركبة للتحويل R

ب- احسب Z_C لاحقة النقطة C

ج- اكتب Z_B و Z_C على الشكل الجبري

د- انشئ النقط A; B و C

2- لتكن D مرجح الجملة $\{(A, 2); (B, -1); (C, 2)\}$

أ- عين Z_D لاحقة النقطة D ثم انشئها

ب- بين ان النقط A, B, C و D تنتمي الى نفس الدائرة

3- ليكن h التحاكي الذي مركزه A و نسبته 2. نسمي E صورة النقطة D بواسطة التحاكي h

أ- بين ان لاحقة النقطة E هي: $Z_E = \sqrt{3}$

ب- اكتب العبارة المركبة للتحويل h

4- احسب النسبة $\frac{Z_D - Z_C}{Z_E - Z_C}$ و اكتب النتيجة على الشكل الاسي

ب- استنتج طبيعة المثلث CDE

التمرين الرابع:

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ ب: $f(x) = x + 2 - 2\ln|2x + 1|$ و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس (O; I; J)

1- ا- احسب كلا من $f(-4), f\left(-\frac{5}{4}\right), f\left(\frac{3}{2}\right), f(3)$

ب- احسب نهاية الدالة f عند حدود مجموعة التعريف

ج- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

د- بين ان (C) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها a حيث: $-\frac{5}{4} < a < -1$

2- g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ ب: $g(x) = \frac{3}{2} + \left|x + \frac{1}{2}\right| - \ln(2x + 1)^2$ و (Γ) تمثيلها البياني

أ- اثبت ان (Γ) يقبل المستقيم ذو المعادلة: $y = -\frac{1}{2}$ كمحور تناظر له

ب- انشئ (Γ) باستعمال (C)

ج- عين معادلة المستقيم (D) المماس ل (Γ) و الذي معامل توجيهه 1

ح- ناقش بياني و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و اشارة حلول المعادلة: $g(x) = x + m$

3- باستعمال المكاملة بالتجزئة جد دالة اصلية للدالة $\ln(2x + 1)$ h: على المجال $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ و التي تنعدم عند 0

ت- β عدد حقيقي حيث: $-\frac{1}{2} < \beta < \frac{3}{2}$ احسب مساحة الحيز المستوي $A(\beta)$ المحدد ب (C) و المستقيمت $x = \beta, x = \frac{3}{2}, y = 0$

ثم احسب $A(\beta)$ عندما يؤول β الى $-\frac{1}{2}$

الموضوع الثاني

التمرين الاول:

الفضاء مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O; I; J; K)$. نعتبر النقط $C(3; 2; 4), B(-3; -1; 7), A(2; 1; 3)$

1- بين ان النقط $A; B; C$ تعين مستوي

2- ليكن (D) المستقيم الذي تمثيله الوسيط $\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$ حيث: $t \in \mathbb{R}$

أ- بين ان المستقيم (D) عمودي على المستوي (ABC)

ب- اكتب معادلة ديكراتية للمستوي (ABC)

3- أ- لتكن H نقطة تقاطع (D) و المستوي (ABC)

ب- بين ان H هي مرجح الجملة $\{(A, -2); (B, -1); (C, 2)\}$

4- أ- عين طبيعة (E) مجموعة النقط M التي تحقق: $(\vec{MB} - \vec{MC}) \cdot (-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}) = 0$

ب- عين طبيعة (F) مجموعة النقط M التي تحقق: $\| -2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} \| = \sqrt{29}$ و حدد عناصرها المميزة

ج- ادرس تقاطع المجموعتان (E) و (F)

التمرين الثاني:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; 2]$ كما يلي: $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$

1- أ- ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; 2]$

ب- انشئ (C) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O; I; J)$ الوحدة على المحورين $4cm$

ج- برهن انه من اجل كل $x \in [0; 2]$ فان $f(x) \in [0; 2]$

2- أ- نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة ب: $U_0 = 0$ و من اجل كل عدد طبيعي n لدينا: $U_{n+1} = f(U_n)$

ب- مثل ثلاثة حدود الاولى من المتتالية (U_n) على محور الفواصل و ذلك بالاستعانة بالمنحني (C) و المستقيم (D) ذو المعادلة

$$y = x$$

ج- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها

3- أ- برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n لدينا: $0 \leq U_n \leq \sqrt{3}$ و $U_n < U_{n+1}$

ب- هل المتتالية (U_n) متقاربة ؟ علل.

4- أ- تحقق انه من اجل كل عدد طبيعي n لدينا: $U_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{2-\sqrt{3}}{U_n+2} (U_n - \sqrt{3})$

ب- عين عددا حقيقيا k من $]0; 1[$ بحيث: $|U_{n+1} - \sqrt{3}| \leq k|U_n - \sqrt{3}|$

5- أ- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $|U_n - \sqrt{3}| \leq k^n |U_0 - \sqrt{3}|$

ب- استنتج نهاية المتتالية (U_n)

التمرين الثالث:

- 1- حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب Z التالية: $(z - 2)(z^2 + 2z + 4) = 0$
- 2- نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; U; V)$ النقط: C و A, B التي لواحقها على الترتيب:

$$z_A = -1 + i\sqrt{3}; z_B = -1 - i\sqrt{3}; z_C = 2$$

- أ- بين ان: $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC
- ب- عين لاحقة المركز و نصف قطر الدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABC ثم ارسمها
- 3- أ- عين الطبيعة و العناصر المميزة للمجموعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات الاحقة Z و التي تحقق:
- $$2(Z + \bar{Z}) + Z\bar{Z} = 0$$
- ب- تحقق ان A و B تنتميان الى (Γ)
- 4- أ- ليكن R الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$
- ب- عين لاحقة B' صورة النقط B بالدوران R
- ج- عين لاحقة النقط D صورة النقط C بالدوران R ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$
- د- عين صورة المجموعة (Γ) بالدوران R

التمرين الرابع:

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ ب: $f(x) = \frac{x}{x-2} + \frac{\ln(x-2)^2}{x-2}$ (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; I; J)$

حيث: $\|\vec{I}\| = \|\vec{J}\| = 1cm$

- 1- احسب نهاية الدالة f عند حدود مجموعة التعريف ثم فسر النتيجة هندسيا
- 2- أ- ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها
- ب- بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا a حيث: $a \in \left] \frac{5}{2}; \frac{9}{4} \right[$
- ج- ادرس الوضع النسبي ل (C) بالنسبة الى المستقيم ذو المعادلة $y = 1$
- د- بين ان النقط $\omega(1; 2)$ مركز تناظر للمنحنى (C)
- 3- أ- احسب $f(-1)$ و $f(-2)$ ثم ارسم المنحنى (C)
- ب- ناقش بياني و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $(m - 1)x - 2m - \ln(x - 2)^2 = 0$
- 4- ليكن θ عدد حقيقي اكبر من 3
- أ- احسب $s(\theta)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمت التي معادلاتها: $x = \theta, y = 1$ و $x = 3$
- ب- حل المعادلة ذات المجهول θ التالية: $s(\theta) = 24$

أساتذة المادة يتمنون لكم النجاح في شهادة البكالوريا

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. نعتبر النقط $A(1; -2; -1)$ ، $B(3; -5; -2)$ ، $C(-2; 0; 1)$ و

$D(-3; 1; 1)$ والمستوي (P) الذي معادلته: $4x + y + 5z + 3 = 0$

• لكل سؤال من الأسئلة التالية **جواب واحد صحيح فقط**. عين **الإجابة الصحيحة** مع التعليل

1. تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) هو :

$\begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = -3\alpha - 2 \\ z = -\alpha - 1 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$ (ج ،	$\begin{cases} x = -2\alpha + 1 \\ y = -3\alpha - 2 \\ z = -\alpha - 1 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$ (ب ،	$\begin{cases} x = -2\alpha + 3 \\ y = -3\alpha - 5 \\ z = \alpha - 2 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$ (أ
---	--	---

2. المستقيمين (AB) و (CD) :

متوازيان (أ	(ب ليسا من نفس المستوي .	(ج متقاطعان
-------------	--------------------------	-------------

3. وضعية المستقيم (AB) و المستوي (P)

(أ) المستقيم (AB) عمودي على المستوي (P)	(ب) المستقيم (AB) محتوي في المستوي (P)	(ج) المستقيم (AB) موازي للمستوي (P)
---	--	---

4. معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ هي :

(أ) $2x - 3y - z - 16 = 0$	(ب) $2x - 3y + z - 13 = 0$	(ج) $2x - 3y - z + 16 = 0$
----------------------------	----------------------------	----------------------------

التمرين الثاني : (04,5 نقاط)

(I) $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث :

$$P(z) = (z - 1 - \sqrt{3} - i)(z^2 - 2z + 5)$$

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

2. في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$

(II) نعتبر النقط : A ، B ، C ذات اللواحق : $z_A = 1 + 2i$ ، $z_B = 1 + \sqrt{3} + i$ ، $z_C = 1 - 2i$ على الترتيب

(أ) أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسّي .

(ب) استنتج طبيعة التحويل النقطي S الذي مركزه B و يحول النقطة A الى النقطة C ، مبينا عناصره المميزة .

(ت) استنتج طبيعة المثلث ABC

3. (أ) عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق : $|\bar{z} - 1 + 2i| = 2$.

(ب) عين (Γ') صورة (Γ) بواسطة التحويل النقطي السابق S .

التمرين الثالث : (04,5 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + 1}{2}}$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

2. أ) بين أن $u_{n+1} - u_n = \frac{1 - u_n^2}{2 \left(\sqrt{\frac{u_n^2 + 1}{2}} + u_n \right)}$

ب) استنتج اتجاه تغير (u_n) .

ث) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ، ثم أحسب نهايتها .

3. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n^2 - 1$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها و حدها الأول .

ب) أكتب بدلالة n كلا من v_n و u_n ، ثم احسب $\lim u_n$

ت) أحسب بدلالة n كلا من $S_n = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$ و $P_n = \frac{1}{v_0} \times \frac{1}{v_1} \times \frac{1}{v_2} \times \dots \times \frac{1}{v_n}$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ : $g(x) = (x-1)^2 - 2\ln(x-1)$

1) أحسب نهايات g عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $]1; +\infty[$

II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x-1}{2} + \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (الوحدة 2cm)

1) أ. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ فسر النتيجة الأخيرة هندسيا . (تذكير : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

ب. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{2(x-1)^2}$

ج. أستنتج اتجاه تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) حدد وضعية بالنسبة (C_f) إلى (Δ)

3) تحقق أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,34 < \alpha < 1,35$

4) أنشئ (Δ) و (C_f)

III) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $]-1; +\infty[$: $h(x) = \frac{1}{2}(\ln(x-1))^2$

أ) بين أن الدالة h دالة أصلية للدالة : $x \mapsto \frac{\ln(x-1)}{x-1}$

ب) عين F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]1; +\infty[$ التي تحقق : $F(2) = 0$

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

نعتبر النقط $A(1;1;3)$ ، $B(-3;1;1)$ و $C(-1;-1;0)$

(1) أ - بين ان النقط A ، B و C تعين مستوي.

ب - عين الاعداد الحقيقية α و β حتى يكون الشعاع $\vec{n}(1;\alpha;\beta)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

ج - أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

(2) لتكن (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 3 = 0$

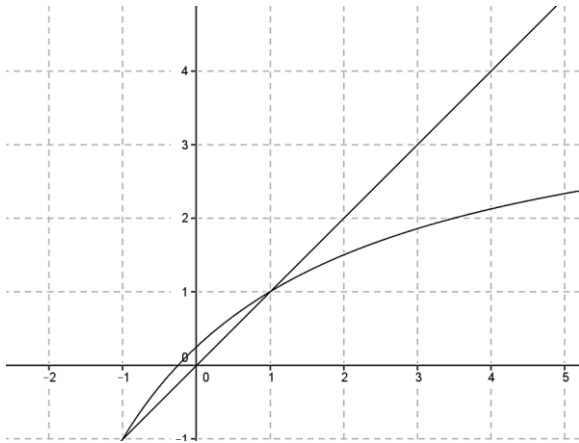
(أ) أثبت أن (S) سطح كرة يطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها R .

(ب) أوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) المار من Ω و العمودي على (ABC) .

(ت) عين H نقطة تقاطع (ABC) و (D) .

(3) بين ان المستوي (ABC) و سطح الكرة (S) متقاطعان وفق دائرة (Γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

التمرين الثاني: (04,5 نقاط)



$f(x) = \frac{4x+1}{x+4}$ دالة عددية معرفة على $[0;5]$ بـ:

(C) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب الى معلم متعامد

و متجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ و (Δ) المنصف الأول كما هو مبين في

الشكل (أعد رسم البيان على ورقة الاجابة)

1. حدد اتجاه تغيرات الدالة f على المجال $[0;5]$

2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي :

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(أ) باستعمال المنحنى (C) و المستقيم (Δ) مثل على محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n)

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها

(ت) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 1$

(ث) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ، استنتج انها متقاربة ، ماهي نهايتها ؟

3. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

(أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين اساسها و حدها الأول

(ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج أن $u_n = \frac{5^{n+1} + 3^{n+1}}{5^{n+1} - 3^{n+1}}$ ثم احسب $\lim u_n$

4. أحسب بدلالة n كل من $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ و $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

التمرين الثالث : (04,5 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(\bar{z} + \sqrt{3} + 3i)(z^2 - 6z + 12) = 0$.
2. في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط : A, B, C التي لواحقتها : $z_A = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 3 - i\sqrt{3}$ ، $z_C = -\sqrt{3} + 3i$ على الترتيب
 أ) أكتب كل من z_A و z_C و $\frac{z_C}{z_A}$ على الشكل الأسّي . ثم إستنتج طبيعة المثلث OAC
 ب) أحسب العدد $\left(\frac{z_C}{2\sqrt{3}}\right)^{1436} - \left(\frac{z_C}{2\sqrt{3}}\right)^{2015}$
 3. لتكن D نظيرة C بالنسبة لمحور الفواصل.
 4. أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_A}$ على الشكل الجبري ، ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABDC$
 5. نعتبر التحويل النقطي P الذي يحول النقطة A الى النقطة C و يحول النقطة D الى النقطة B
 أ) عين طبيعة التحويل النقطي P مع تعيين خصائصه المميزة
 ب) أكتب العبارة المركبة و العبارة التحليلية لـ P
 ت) بين أن النقط A, B, C, D تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

- I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2e^x - x - 2$
 1. ادرس تغيرات الدالة g .
 2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1,6; -1,5[$
 3. أحسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$
 II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$
 وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 5cm$
 1) أ. أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة الأخيرة هندسيا .
 ب. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^x \cdot g(x)$ (حيث f' الدالة المشتقة للدالة f)
 ج. أستنتج اتجاه تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .
 2) بين أن $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}\right)$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$
 3) أنشئ المنحنى (C_f) .
 4) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $me^{-x} = e^x - x - 1$
 III) باستعمال التكامل بالتجزئة، بين أن $\int_{-2}^0 (x+1)e^x dx = 2e^{-2}$
 أحسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و بمحور الفواصل و بالمستقيمين $x=0$ و $x=-2$

إختبار البكالوريا التجريبية في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (04 نقاط)

اختر الإجابة الصحيحة و الوحيدة في كل حالة مما يلي مع التبرير

- (1) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = 3e^{-2x} - 4$ هي حل للمعادلة التفاضلية :
 (أ) $y' + 2y = 8$ (ب) $y' + 2y = -8$ (ج) $y' = y - 8$
- (2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس. مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $z - 2e^{i\theta} = 2 - i$ مع $\theta \in [0; \pi]$ هي:
 (أ) القطعة $[AB]$ حيث $A(2; -1)$ و $B(0; 1)$
 (ب) الدائرة ذات المركز $A(2; -1)$ و نصف القطر 2.
 (ج) نصف الدائرة ذات المركز $A(2; -1)$ و نصف القطر 2.
- (3) الفضاء مزود بمعلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط : $A(1, -1, -1)$, $B(1, 1, 1)$, $C(0, 3, 1)$
 قياس الزاوية $\widehat{BAC}$ مقدرة بالراديان بتقريب 10^{-1} هو:
 (أ) $22, 2^0$ (ب) $0, 4^0$ (ج) $67, 8^0$
- (4) الجدول المقابل يعرف قانون احتمال تجربة عشوائية
 تباين قانون الاحتمال هو:

x_i	1	2	3	4
P_i	0,2	0,4	0,1	0,3

 (أ) 2,5 (ب) 1,25 (ج) 1,12

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط $A(2, 1, 0)$, $B(2, -1, -2)$, $C(0, 1, -2)$ والمستوي (P) الذي: $0 = x + y - z - 3$ معادلة له.
1. بين أن النقط A , B و C تنتمي إلى (P) .
 2. نعتبر (S) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تحقق : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z + 5 = 0$.
 أ. بين أن (S) سطح كرة يطلب تعيين مركزها I و نصف قطرها R .
 ب. بين أن (S) و (P) يتقاطعان وفق دائرة (C) محيطة بالمثلث ABC .
 ت. بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.
 3. ليكن (Δ) المستقيم الذي يشمل I و العمودي على (P) .
 أ. عين تمثيلا وسيطيا ل (Δ) .
 ب. عين إحداثيات G نقطة تقاطع (Δ) و (P) .
 ت. تحقق أن G مركز ثقل المثلث ABC ثم استنتج مركز الدائرة (C) و نصف قطرها.

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة IR المعادلة: $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$.
2. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ، وحدة الطول $1cm$ ، النقاط A, B, C التي لاحقاً على الترتيب: $z_A = 4\sqrt{3} - 4i$ ، $z_B = 4\sqrt{3} + 4i$ ، $z_C = -\sqrt{3} + i$.
 أ. أكتب كل من z_B و z_A على الشكل الأسّي.
 ب. عين العدد الطبيعي n حتى يكون: $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^n$ حقيقي .
 ث. هل $\left(\frac{z_B}{z_A}\right)^{2016}$ حقيقي ؟
 د. عين طبيعة المثلث OAB .
3. اكتب العبارة المركبة للدوران r الذي مركزه O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.
4. أ. أحسب لاحقة D صورة C بالدوران r .
 ب. بين أن لاحقة G مرجح الجملة $\{(O; -1); (D; 1); (B; 1)\}$ هي $z_G = 4\sqrt{3} + 6i$.
 ج. اثبت ان النقط C, D و G على استقامة واحدة.
 د. عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $-|z|^2 + |z - z_D|^2 + |z - z_B|^2 = 20$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- I. لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$
- يرمز (C_f) إلى تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ؛ (وحدة الطول $2cm$)
- 1- أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، فسر النتيجة هندسياً.
 ب) احسب $f'(x)$ و ادرس إشارته ثم شكل جدول تغيرات f .
- 2- أ) x عدد حقيقي كفي من $\mathbb{R}$ ؛ احسب $f(-x) + f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.
 ب) بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيها .
- 3- لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = f(x) - x$
 أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
 ب) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x) = \frac{-(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2}$
 ت) ادرس إشارة $g'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات g
 ث) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]2, 7[; 2, 8[$. ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.
- 4- عين إحداثي نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل ثم أنشئ (C_f) و المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$.
- II. (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $U_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1} = f(U_n)$.
- 1- باستخدام (C_f) و المستقيم (Δ) ، مثل- و دون حساب- الحدود U_0, U_1, U_2 ، على حامل محور الفواصل.
- 2- برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n فان: $1 \leq U_n \leq \alpha$.
- 3- أ) تحقق أن $U_{n+1} - U_n = g(U_n)$ و استنتج من إجابة السؤال 3- ث (الفرع الأول) أن (U_n) متزايدة.
 ب) استنتج أن (U_n) متقاربة.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4,5 نقطة):

- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $u_0 = 6$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$
- (1) أ- أرسم في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ المستقيمين $(D): y = \frac{2}{3}x + 1$ و $(D): y = x$.
- ب - مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 ، ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.
- ج - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$: $u_n > 3$.
- د - ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . استنتج تقارب المتتالية (u_n) .
- (2) نعتبر من أجل كل عدد طبيعي n المتتالية (v_n) حيث: $v_n = 2^n \times 3^{1-n}$.
- أ - بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.
- ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 3$: $v_n = u_n - 3$ ، استنتج $\lim u_n$.
- (3) لتكن (w_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $w_n = \ln v_n$.
- أ - بين أن (w_n) متتالية حسابية يطلب إيجاد أساسها و حدها الأول.
- ب - نعتبر المجموع: $S_n = \frac{u_0}{v_0} + \frac{u_1}{v_1} + \dots + \frac{u_n}{v_n}$.
- بين أن $S_n = 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{n+1} + n - 1$.

التمرين الثاني (4 نقاط):

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر النقط :
- $A(1, 2, 7)$ ، $B(2; 0; 2)$ ، $C(3; 1; 3)$ ، $D(3; - 6; 1)$ و $E(4; - 8; - 4)$.
- (1) بين أن النقط A ، B و C ليست في إستقامة.
- (2) ليكن $\vec{u}$ شعاعا من الفضاء مركباته $(1, b, c)$ حيث b و c عددان حقيقيان.
- أ - عين b و c بحيث يكون $\vec{u}$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) .
- ب - استنتج أن : $x - 2y + z - 4 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
- ج - هل النقطة D تنتمي إلى المستوي (ABC) ؟

$$(3) \quad \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -4t + 5, (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

نعتبر المستقيم (D) الذي تمثله الوسيط:

- أ - هل المستقيم (D) عمودي على المستوي (ABC) .
- ب - عين إحداثيات النقطة H نقطة تقاطع المستقيم (D) والمستوي (ABC) .
- ج - ادرس وضعية المستقيم (DE) بالنسبة إلى المستوي (ABC) .

التمرين الثالث (5 نقاط):

- 1 من أجل كل عدد مركب z نضع : $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$
- أ) احسب $P(-1)$ ثم عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون : $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$.
- ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

2- المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$. وحدة الطول $2cm$.

نعتبر النقط G, C, B, A لواقعها على الترتيب: $z_G = 3, z_C = 2 - i\sqrt{3}, z_B = 2 + i\sqrt{3}, z_A = -1$.
(أ) مثل النقط G, C, B, A .

(ب) عين عمدة للعدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ACG و احسب مساحته .

3- (أ) أثبت أن النقطة G مرجح الجملة المثقلة: $\{(A, -1); (B, 2); (C, 2)\}$

(ب) عين مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $(-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}).\overrightarrow{CG} = 12$

4- نعتبر S التحويل النقطي الذي يرفق بالنقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = (1 + i\sqrt{3})z - i\sqrt{3}$
(أ) تعرف على طبيعة التحويل S و اذكر عناصره المميزة.

(ب) عين G', C', A' صور النقط G, C, A على الترتيب بالتحويل S ثم استنتج مساحة المثلث $A'C'G'$.

التمرين الرابع: (6,5 نقطة)

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ حيث:

$$f(x) = 2x - 2 + \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}\right)$$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

(2) أحسب $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 2)]$ ، وفسر النتيجة بيانيا.

(3) أ. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x) = \frac{2(x-1)(x^2 - x + 2)}{x(x^2 - 2x + 2)}$

ب. استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

(4) أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x - 2$

(5) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right]$ حيث: $f(\alpha) = 0$

(6) استنتج حسب قيم x إشارة $f(x)$.

(7) عين النقطة من (C_f) التي يكون عندها المماس (T) موازيا للمستقيم (Δ) . ثم أكتب معادلة له.

(8) أرسم (Δ) ، (T) و (C_f) .

(9) ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : $f(x) = 2x + m$.

(10) F دالة أصلية لـ f على المجال $]-\infty; 0[$.

أ* عين اتجاه تغير الدالة F

ب* أعط تفسيرا هندسيا للعدد $\int_{\alpha}^{-1} f(x) dx$ دون حسابه.

تمنياتنا لكم بالتوفيق والنجاح في شهادة البكالوريا

الإمتحان التجريبي في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الاول : (04 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1}$.

1- أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1 < u_n < 2$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة ، ثم استنتج أنها مقاربة .

2- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \ln(u_n - 1)$.

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأول .

ب) أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = (u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1)$.

- أكتب P_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

التمرين الثاني (5نقاط):

من أجل كل عدد مركب z نضع : $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$

1- أ) احسب $P(-1)$ ثم عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون : $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$.

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

2- المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. وحدة الطول $2cm$.

نعتبر النقاط A, B, C, G لواقعها على الترتيب : $z_A = -1, z_B = 2 + i\sqrt{3}, z_C = 2 - i\sqrt{3}, z_G = 3$

عين عمدة للعدد المركب : $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ACG و احسب مساحته .

3- أ) أثبت أن النقطة G مرجح الجملة المثقلة : $\{(A, -1); (B, 2); (C, 2)\}$

ب) عين مجموعة النقاط M من المستوي بحيث : $(-\overline{MA} + 2\overline{MB} + 2\overline{MC}).\overline{CG} = 12$

4- نعتبر S التحويل النقطي الذي يرفق بالنقطة M ذات الاحقة z النقطة M' ذات الاحقة z' حيث : $z' = (1 + i\sqrt{3})z - i\sqrt{3}$

أ) تعرف على طبيعة التحويل S و اذكر عناصره المميزة.

ب) عين A', C', G' صور النقاط A, C, G على الترتيب بالتحويل S ثم استنتج مساحة المثلث $A'C'G'$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

نعتبر النقط $A(1;1;1)$ ، $B(1;-1;0)$ و $C(2;0;1)$

1 بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا (P_1) يطلب تعيين معادلة له

2. (P_2) المستوي الذي معادلته $x - 2y - 2z + 6 = 0$

* بين أن (P_1) و (P_2) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) يطلب تعيين تمثيلا وسيطيا له

3. بين أن النقط O هي مرجح الجملة : $\{(A,1);(B,1);(C,-1)\}$

4. أ) عين (S) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء التي تحقق $\|\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}\| = \sqrt{5}$

ب) احسب إحداثيتي D و E نقطتي تقاطع (S) و (Δ)

ج) ما هي طبيعة المثلث ODE ؟ ثم استنتج المسافة بين O و (Δ)

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]1, +\infty[$ حيث : $g(x) = x^2 - 2x - 4 \ln(x-1)$

(Γ) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. كما هو مبين في الشكل المقابل .

بقراءة بيانية للمنحنى

1) أحسب $g(2)$ ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث : $2,87 < \alpha < 2,88$.

2) إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $]1, +\infty[$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $]1, +\infty[$ حيث : $f(x) = x - 3 + \frac{4 \ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ وفسر النتيجة بيانياً ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) أـبين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x - 3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

بـأدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3) أـبين أنه من أجل كل x من $]1, +\infty[$ لدينا : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$.

بـإستنتج إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

4) أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) (نأخذ : $f(\alpha) = 3,9$)

5) لتكن الدالة h المعرفة على $]1, +\infty[$ كما يلي : $h(x) = [\ln(x-1)]^2 + 5 \ln(x-1)$.

أـأحسب $h'(x)$ ثم إستنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1, +\infty[$.

بـأحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل وبالمستقيمين : $x=2$ و $x=5$.

صفحة 2 من 4

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

نعتبر في الفضاء النقط $D(4, 1, 1); C(1, -1, -1); B(3, 2, 0); A(2, 0, -1)$

(1) أ- بين أن النقط C, B, A تعين مستويا.

ب- تحقق ان الشعاع $\vec{n}(1, -1, 1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ، ثم اكتب معادلة ديكارتية له

(2) أ- اكتب تمثيلا للمستقيم (Δ) الذي يشمل D و يعامد المستوي (ABC) ثم تحقق ان $B \in (\Delta)$.

ب- اكتب تمثيلا للمستقيم (Δ') الذي يشمل A و الموجه بالشعاع $\vec{U}(4, 2, 4)$

ج - عين احداثيات نقطة تقاطع (Δ) مع (Δ')

(3) عين طبيعة كل من المثلثين ABD و BCD

احسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$

(4) (S) سطح الكرة التي معادلتها : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 8z + 20 = 0$

أ- عين احداثيات النقطة Ω مركز سطح الكرة (S) ونصف قطرها R

ب- بين ان المستوي (ABC) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة (γ) يطلب حساب نصف قطرها r .

التمرين الثاني: (5 نقاط)

نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود $p(z)$ حيث: $p(z) = z^3 - z^2 + 11z - 51$

(1) أ) احسب $p(3)$ ماذا تستنتج؟.

ب) عين العددين الحقيقيين a و b حيث: $p(z) = (z - 3)(z^2 + az + b)$

ج) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $p(z) = 0$..

(2) المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ علم النقط $C; B; A$

التي لآحقاتها على الترتيب $Z_A = 3$, $Z_B = -1 + 4i$, $Z_C = -1 - 4i$.

- أحسب طولية وعمدة للعدد $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$ ثم إستنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) أ- عين Z_ω لاحقة النقطة W منتصف القطعة $[AC]$...

ب- عين Z_D لاحقة النقطة D صورة W بالتحاكي H الذي مركزه B نسبته 2

ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

ج - عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي مركزه B ويحول النقطة C الى النقطة E

ذات اللاحقة $Z_E = 7 - 4i$

(4) عين العددين الحقيقيين α و λ (حيث $\alpha + \lambda \neq -1$) حتى تكون النقطة W

مرجح الجملة $\{(B, 1); (C, \alpha); (E, \lambda)\}$.

(5) عين (Ψ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z حيث : $\|\vec{MB} + 2\vec{MC} + \vec{ME}\| = 8\sqrt{10}$

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 6$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$.

(1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 3$.

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ماذا تستنتج حول تقاربها ؟

(2) نعتبر من أجل كل عدد طبيعي n المتتالية (v_n) حيث : $v_n = 2^n \cdot 3^{1-n}$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول .

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $v_n = u_n - 3$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) لتكن (w_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n = \ln v_n$.

أ) بين أن (w_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) ليكن المجموع : $S_n = \frac{u_0}{v_0} + \frac{u_1}{v_1} + \dots + \frac{u_n}{v_n}$. بين أن : $S_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + n - 1$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - e^{2x} - 2xe^{2x}$.

1. عيّّن نهاية الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

2. أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

3. أحسب $g(0)$ ، ثم إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II- لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$.

نسُمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1. عيّّن نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

2. بين أن المنحنى (C_f) يقبل مقارب مائل (Δ) يُطلب تعيين معادلة له .

3. أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4. أبرهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x) = g(x)$.

ب- إستنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

5. بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β حيث : $-3,5 < \alpha < -3$ و $0,5 < \beta < 1$.

6. أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

7. أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب $\int_{-1}^0 -xe^{2x} dx$.

ب- استنتج بـ : cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و بالمستقيمات : $y = x + 3$ و $x = -1$ و $x = 0$.

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (4 نقاط)

1. الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(1; 2; 7)$, $B(2; 0; 2)$, $C(4; 2; 4)$, $D(3; 5; -1)$
أ- بين أن النقط A, B, C تعين مستو.

ب- عين طبيعة المثلث ABC ثم أحسب مساحته.

ج- بين أن $\vec{n}(1; b; c)$ شعاعا ناظما للمستوي (ABC) حيث b و c عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما .

د- تحقق أن المعادلة $x - 2y + z - 4 = 0$ هي معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .

2. ليكن المستقيم (Δ) حيث الجملة التالية :
$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -4t + 5 \\ z = 2t - 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
 تمثيلا وسيطيا له.

أ- بين أن المستوي (ABC) عمودي على المستقيم (Δ) .

ب- عين إحداثيي H نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (ABC) ثم أحسب المسافة بين D و النقطة H

ج- بين أن $ABCD$ هو رباعي وجوه ثم أحسب حجمه.

التمرين الثاني : (5 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C التي لواحقها على

الترتيب : $Z_A = 1 - 2i$, $Z_B = -2 + 2i$, $Z_C = 1$. ولتكن (δ) الدائرة التي قطرها القطعة المستقيمة $[AB]$.

1. أ- عين اللاحقة Z_Ω للنقطة Ω مركز الدائرة (δ) ونصف قطرها r .

ب- D نقطة لاحقتها $Z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$ أكتب Z_D على الشكل الجبري ثم بين أن D نقطة من الدائرة (δ) .

2. لتكن E نقطة من الدائرة (δ) ذات اللاحقة Z_E بحيث : $(\overline{\Omega C}; \overline{\Omega E}) = \frac{\pi}{4}$

أ) حدد طول و عمدة للعدد $Z_E + \frac{1}{2}$ واستنتج أن : $Z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$

ب) ليكن التحويل النقطي r الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ بحيث : $z' + \frac{1}{2} = e^{\frac{\pi i}{4}} \left(z + \frac{1}{2} \right)$

حدد طبيعة التحويل r وعناصره المميزة .

3. (Δ) هو مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z والتي تحقق : $\arg(z) = \arg(\bar{z}) + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

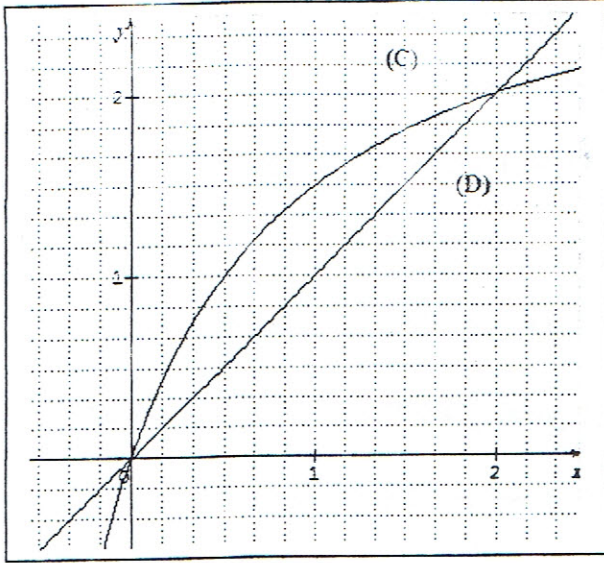
بين أن (Δ) هو محور الفواصل بإستثناء النقطة O .

التمرين الثالث: (4.5 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = h(u_n)$

(1) لتكن h الدالة المعرفة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كمايلي $h(x) = \frac{3x}{x+1}$ و (C) تمثيلها البياني و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس . (أنظر الشكل)

أ/ أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 . مظهرا خطوط الرسم



ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

(2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 2$

ب- أثبت أن (u_n) متزايدة تماما. هل هي متقاربة؟

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

ج - أحسب نهاية (u_n) .

التمرين الرابع: (6.5 نقاط)

لتكن f دالة عددية معرفة على $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ بالعلاقة : $f(x) = \frac{xe^x - x - 2}{e^x - 1}$ وليكن (C_f) منحنىها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

I. (1) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها مفسرا النتائج بيانيا.

(2) أوجد العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون $f(x) = ax + \frac{b}{e^x - 1}$

(3) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم : $f'(x) = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x - 1)^2}$

(4) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

II. 1- بين أن (C_f) منحنى الدالة f يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') حيث $y = x$ و $y = x + 2$ معادلتهما على الترتيب.

2. حدد وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لكل من المستقيمين (Δ) و (Δ') .

3. بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين x_1 و x_2 حيث $x_1 \in]1.10; 1.05[$ و $x_2 \in]-2.20; -2.30[$

4- أحسب من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم : $[f(-x) + f(x)]$ فسر النتيجة هندسيا.

5- أرسم المستقيمين (Δ) و (Δ') وأنشئ المنحني (C_f) .

6- ليكن m عدد حقيقي ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$.

III. من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما نعتبر الدالة F المعرفة بـ : $F(x) = ax^2 + bx + c[\ln(e^x - 1)]$

أوجد الأعداد الحقيقية a, b, c حتى تكون F دالة أصلية للدالة f .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (5 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ النقاط $C(2;0;1)$, $B(1;-1;0)$, $A(1;1;1)$ والمستوي (P) ذو المعادلة: $x - 2y - 2z + 6 = 0$

1. بين أن النقاط B, A و C تشكل مستو.
2. بين أن $x + y - 2z = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .
3. بين أن المستويان (P) و (ABC) يتقاطعان وفق مستقيم (Δ) الذي يشمل $E(-2;2;0)$ و $\vec{u}(2;0;1)$ شعاع توجيه له.
4. أثبت أن النقطة O هي مرجح الجملة $\{(A,1)(B,1)(C,-1)\}$
5. أ) عين (S) مجموعة النقاط $M(x;y;z)$ من الفضاء التي تحقق: $\|\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}\| = 2\sqrt{3}$
 ب) أحسب إحداثي D و E نقطتي تقاطع (S) و (Δ) .
 ج) ماهي طبيعة المثلث ODE ثم استنتج المسافة بين النقطة O والمستقيم (Δ) .

التمرين الثاني: (5 نقاط)

- 1- نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z) = z^3 + (-2\sqrt{3} + i)z^2 + (4 - 2i\sqrt{3})z + 4i$
 أ. بين أن من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z+i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$
 ب. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z) = 0$
 نرسم z_0, z_1 و z_2 إلى حلول المعادلة حيث z_1 الحل الذي جزؤه التخيلي موجب و z_2 الحل الذي جزؤه التخيلي سالب و z_0 الحل الآخر.
 ج. أكتب العدد المركب L على الشكل الأسّي حيث: $L = \frac{z_1}{z_2}$.
 د. عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون L^n عدد حقيقي موجب تماما.
- 2- في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقاط B, A و C التي لواحقها على الترتيب: $z_A = \sqrt{3} + i$, $z_B = \sqrt{3} - i$, $z_C = -i$
 أ. مثل النقاط B, A و C مبينا كيفية الإنشاء هندسيا.
 ب. أحسب $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC
 ج. عين مجموعة النقاط M من المستوي التي تحقق $\|3\vec{MA} - 2\vec{MB} + \frac{3}{2}\vec{MC}\| = 5$ حيث G مرجح الجملة $\{(A;6)(B;-4)(C;3)\}$
 د. عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S حيث $S(A) = C$ و $S(B) = B$.

التمرين الثالث : (4 نقاط)

$$\alpha \in \mathbb{R}_+ \text{ حيث } \begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n^2 \end{cases} : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ متتالية عددية معرفة كمايلي}$$

- (1) عين قيم α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.
- (2) نفرض أن $\alpha \neq \frac{2}{3}$ ونضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln u_n + \ln \frac{3}{2}$.
أ. بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 بدلالة α .
ب. أكتب عبارة v_n بدلالة n و α .
ج. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \alpha \right)^{2^n}$
د. عين قيم العدد الحقيقي α بحيث تكون (u_n) متقاربة.

التمرين الرابع : (6 نقاط)

I. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعلاقة : $g(x) = x - 3 + \ln x$

- (1) أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها .
- (2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 < \alpha < 3$. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II. لتكن f دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ بالعلاقة : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(-2 + \ln x) + 2$

$(\hat{C}_f)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1- أحسب نهايتي الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
- 2- أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها .
- 3- أرسم (C_f) التمثيل البياني للدالة f .

III. 1- بين أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $f(x) - \ln x = \frac{2 - \ln x}{x}$

ثم استنتج الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمنحني $(C_{\ln})$ الممثل للدالة $\ln$.

2- نعتبر الدالة H المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعلاقة : $H(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$

3- بين أن H دالة أصلية للدالة h على المجال $]0; +\infty[$ حيث : $h(x) = \frac{\ln x}{x}$

4- أحسب مايلي : $\int_1^{e^2} \frac{2 - \ln x}{x} dx$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: (1) $z^2 + 2 \sin(2\theta)z + 4\sin^2\theta = 0 \dots$

1. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (1) ثم أكتب الحلين على الشكل المثلثي. مع $\theta \in [0; \pi]$

2. عين في حالة $\theta = \frac{\pi}{4}$ الحلين Z_1 و Z_2 حيث Z_1 جزؤه التخيلي موجب.

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس نعتبر النقط A ، B و C والتي لواحقها على الترتيب:

$$Z_C = -Z_A \text{ و } Z_B = -1 - i , z_A = -1 + i$$

1- عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث: $\arg\left(\frac{Z-Z_C}{Z_A-Z_C}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

2- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون $G(1; 1)$ مرجح الجملة: $\{(A; a), (B; b), (C; 1)\}$.

3- عين (E) مجموعة النقط $M(x; y)$ ذات اللاحقة Z حيث: $Z - Z_G = \sqrt{2}e^{i\theta}$ مع $\theta \in \mathbb{R}$

4- عين طبيعة التحويل (T) الذي مركزه G و يحول A إلى B ، وما هي عناصره المميزة.

5- عين $(\vec{E})$ صورة (E) بالتحويل (T) . يطلب تعيين عناصرها المميزة.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

في الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. نعتبر النقط : $A(-2; 0; 1)$ ، $B(1; 2; -1)$ و $C(-2; 2; 2)$

1. أ) أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ثم عين الطولين AB و AC

ب) عين قياسا للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ بالدرجة، ثم استنتج أن A ، B و C ليست في استقامة.

2. تحقق أن المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي: $2x - y + 2z + 2 = 0$

3. (p) و $(\vec{p})$ مستويين في الفضاء معرفين بمعادلتيهما على الترتيب: $x + y - 3z + 3 = 0$ و $x - 2y + 6z = 0$

- بين أن المستقيم (Δ) المعروف بتمثيله الوسيط $(t \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = -2 \\ y = 3t - 1 \\ z = t \end{cases}$ هو تقاطع (p) و $(\vec{p})$.

- استنتج أن المستويات (p) ، $(\vec{p})$ و (ABC) تشترك في نقطة واحدة يطلب تعيين إحداثياتها.

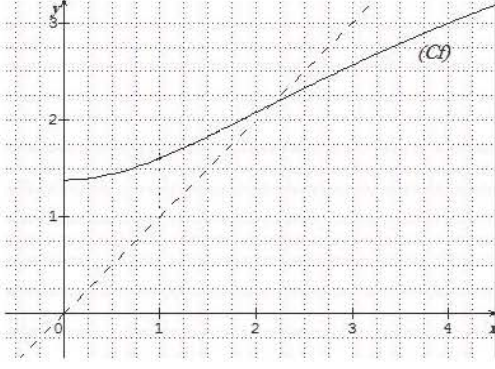
4. - بين أن (S) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ من الفضاء حيث:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2z + 2 - m^2 = 0$$

وطول نصف قطرها. حيث m عدد حقيقي.

عين قيمة m في الحالتين: أ/ المستوي (ABC) يمس سطح الكرة (S) .

ب/ المستقيم (Δ) يقطع سطح الكرة (S) في نقطتين متميزتين .



التمرين الثالث: (04 نقاط)

f دالة معرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln(x^2 + 4)$

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $g(x) = f(x) - x$

- أدرس تغيرات الدالة f ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g
- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in [2; 3]$ واستنتج أن α هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = x$.

II. نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

(φ) هو المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس، (Δ) المستقيم الذي معادلته: $y = x$.

- أعد الرسم، ثم مثل الحدود U_0, U_1, U_2 و U_3 على محور الفواصل.
- برهن بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي n فإن: $1 \leq U_n \leq \alpha$.
- بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.

التمرين الرابع: (07.5 نقاط)

I. f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = e^{2x} - e^x + 1 - x$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$

- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- أ- بين أن (C_f) يقبل خط مقارب مائل (Δ) بجوار $-\infty$ ، يطلب تعيين معادلته له.
ب- أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) .
- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ وأعط تفسيراً هندسياً للنتيجة.
- أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
- أوجد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) الموازي لـ (Δ) .
- بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.
- أرسم (T) ، (Δ) و (C_f) .
- ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة: $e^{2x} - e^x = m - 1$.
- n عدد طبيعي غير معدوم، حيث $A(n)$ هي مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمتان التي معادلاتها: $x = \ln m$ و $x = \ln(n+1)$ و $y = -x + 1$
أ- بين أن: $A(n) = (4n - 2)cm^2$
ب- نضع $U_n = A(1) + A(2) + \dots + A(n)$ ، أكتب U_n بدلالة n .

- II. نسحب في آن واحد كرتين من كيس يحتوي على 4 كريات مرقمة بالعدد $A(1)$ ، و 3 كريات مرقمة بالعدد $A(2)$ و 5 كريات مرقمة بالعدد $A(3)$ ، و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة لكرتين عدد مرات ظهور العدد $A(3)$
- أكتب قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب $E(X)$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) : $(z + \sqrt{3} - 1)(z^2 - 2z + 4) = 0$

ب- في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ نعتبر النقط A ، B و C

والتي لواحقتها على الترتيب: $z_A = 1 - \sqrt{3}$ ، $z_B = 1 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 1 - i\sqrt{3}$

1- أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي ، ثم بين أن: $z_B^{2016} + z_C^{2016} = 2^{2017}$.

2- بين أن من أجل $n \in \mathbb{N}$ فإن : $z_B^n + z_C^n$ عدد حقيقي ، ثم عين قيم n بحيث: $z_B^n + z_C^n = 2^n$.

3- أعط تفسيراً هندسياً لطويلة و عمدة العدد المركب: $\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

4- عين اللاحقة z_G للنقطة G منتصف القطعة $[BC]$ ، ثم احسب الطولين GA و BC .

5- نسمي (S) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z و التي تحقق: (1) $BM^2 + CM^2 = 12$

- تحقق أنه من أجل كل نقطة M من المستوي : (1) تكافئ : (2) $\vec{BM} \cdot \vec{CM} = 0$

- بين أن A تنتمي للمجموعة (S) ، ثم حدد طبيعة المجموعة (S) مع تحديد عناصرها المميزة.

- علم بدقة النقط A ، B ، C و G ثم أنشئ (S) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(A; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر متوازي المستطيلات القائم المعروف بـ :

$$\vec{AB} = 2\vec{i} , \vec{AD} = 6\vec{j} \text{ و } \vec{AE} = 4\vec{k}$$

النقط I ، J ، K هي منتصفات القطع: $[EF]$ ، $[FB]$ ، $[AD]$ على الترتيب.

1. جد إحداثيات النقط B ، D ، F و E ثم تحقق حسابياً أن إحداثيات النقط I ، J ، K هي

$(1; 0; 4)$ ، $(2; 0; 2)$ ، $(0; 3; 0)$ على الترتيب.

2. (P_1) المستوي الذي معادلته: $y = 0$ و (P_2)

المستوي الذي معادلته: $2x + z = 6$

- بين أن تقاطع (P_1) و (P_2) هو المستقيم (IJK)

3. أثبت أن الشعاع $\vec{n}(2; 2; 1)$ هو شعاع ناظمي

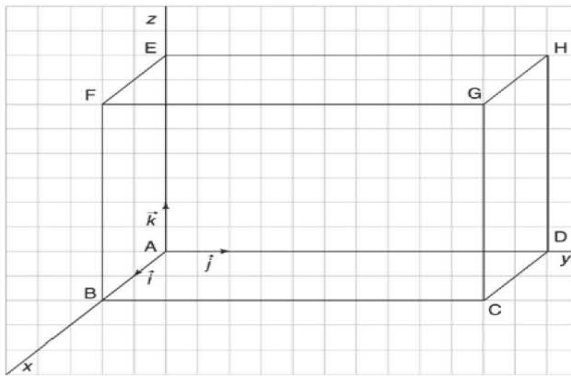
للمستوي (IJK) ، ثم عين معادلة ديكرتية له.

4. نعتبر سطح الكرة (S) ذو المركز F و طول نصف

القطر 1.

أ- أحسب المسافة بين النقطة F و المستوي (IJK)

ب- استنتج أن (S) يقطع (IJK) في دائرة (C) يطلب تعيين مركزها ω و طول نصف قطرها r .



التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_n = e^{2n} - e^{2(n-1)}$

1. أ- بين أن (U_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول U_0

ب- أكتب بدلالة n ، S_n حيث : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

ج- استنتج المجموع S_n حيث : $S_n = S_0 + S_1 + \dots + S_n$

2. لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = \sqrt{S_n + e^{-2}}$

أ- أكتب V_n بدلالة n

ب- أحسب بدلالة n ، المجموع A_n حيث : $A_n = \frac{1}{V_0^3} + \frac{1}{V_1^3} + \dots + \frac{1}{V_n^3}$

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$

3. لتكن المتتالية (W_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $W_n = \ln(V_n)$

أ- بين أن المتتالية (W_n) متتالية حسابية ثم أحسب B_n حيث : $B_n = W_0 + W_1 + \dots + W_n$

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $V_0 \times V_1 \times \dots \times V_n = \sqrt{e^{n^2+n}}$

التمرين الرابع: (07.5 نقاط)

1. لتكن الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = \frac{1}{x} - 1 - 2\ln x$

1. أدرس تغيرات الدالة g

2. أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

II. لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

ليكن (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، $\|\vec{i}\| = 3cm$

1. أ- بين أن الدالة f مستمرة على يمين العدد 0.

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ ، فسر النتيجة جبريا و هندسيا.

ج- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ و فسر النتيجة هندسيا.

2. بين أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ فإن : $\dot{f}(x) = x \cdot g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل α حيث : $0 \leq \alpha \leq 2$

4. أنشئ (C) . (نضع $\alpha = 1.7$)

5. أ- باستعمال المكاملة بالتجزئة ، أحسب : $I(\alpha) = 9 \int_1^\alpha (x - f(x)) dx$. فسر العدد $I(\alpha)$ هندسيا.

ب- تحقق أن : $I(\alpha) = (-\alpha^3 + 3\alpha^2 + 1)cm^2$

6. لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = |x| - x^2 \ln|x|$ ($x \neq 0$) مع $h(0) = 0$

ت- بين أن الدالة h دالة زوجية.

ث- أنشئ (C_h) منحنى الدالة h انطلاقا من المنحنى (C) في نفس المعلم السابق.

III. نسحب في آن واحد كرتين من كيس يحتوي على 4 كريات مرقمة بالعدد $I(0)$ ، و 3 كريات مرقمة

بالعدد $I(1)$ و 5 كريات مرقمة بالعدد $I(2)$ ، و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة

لكرتين عدد مرات ظهور العدد $I(0)$

- أكتب قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب $E(X)$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الشعبة: علوم تجريبية

دورة: ماي 2016

امتحان البكالوريا التجريبي

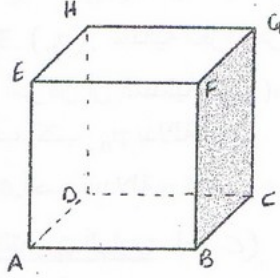
المدة: 03 ساعات و نصف

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 C)



نعتبر المكعب ABCDEFGH الذي طول ضلعه 1 " الشكل المقابل "

نسب الفضاء إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(D; \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DH})$

K مرجح الجملة $\{(F; 2), (D; 1)\}$

1- بين أن إحداثيات النقطة K هي $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$

2- برهن أن المستقيمين (EK) و (DF) متعامدان .

III- نعتبر النقطة M من القطعة [HG] ، نضع: $m = HM$ ، $0 < m < 1$ "

1- برهن أنه ، من أجل كل عدد حقيقي m من المجال $]0; 1[$ حجم رباعي الوجوه EFMD، يساوي $\frac{1}{6}$ بوحدة الحجم.

2- بين أن : $(-1 + m)x + y - mz = 0$ هي معادلة ديكرتية للمستوي (MFD) .

3- نرسم إلى d_m إلى بعد النقطة E عن المستوي (MFD) .

أبرهن أنه ، من أجل كل عدد حقيقي m من المجال $]0; 1[$ ، $d_m = \frac{1}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}$.

ب- عين وضعية النقطة M التي من أجلها تكون d_m أكبر قيمة ممكنة .

ج- استنتج أنه لما تكون d_m أكبر ما يمكن تكون النقطة K هي المسقط العمودي ل E على المستوي (MFD) .

التمرين الثاني: (5 C)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(Z) = Z^3 - 7Z^2 + 25Z - 39$ حيث :

1. أ- عين العددين الحقيقي a و b حيث ؛ من أجل كل عدد مركب Z : $P(Z) = (Z - 3)(Z^2 + aZ + b)$

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z : $P(Z) = 0$

2. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نسمي A ، B ، C و D النقط التي لاحقاتها

على الترتيب : $Z_A = i$ ، $Z_B = 3$ ، $Z_C = 2 - 3i$ و $Z_D = -1 - 2i$

أحسب $\frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

3. S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقها Z؛ النقطة M' لاحقها $Z' = (1 - i)Z - 1$ حيث :

أ- عين طبيعة التحويل S وعناصره المميزة.

ب- تحقق أن: $S(B) = C$ و عين لاحقة النقطة E علما أن : $S(E) = D$.

ج- بين أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى الدائرة التي مركزها E، يطلب تعيين نصف قطرها.

4. أ- عين لاحقة النقطة F صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه C وزاويته $-\frac{\pi}{2}$.

ب-تحقق أن النقط A ، B و F في استقامية.

5. عيّن المجموعة (T) للنقط $M(Z)$ من المستوي حيث: $Z = Z_A + \sqrt{10} e^{i\theta}$ و $\theta \in \mathbb{R}$.

التمرين الثالث: (4 C)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب: $u_1 = e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} = e^{\frac{-1}{2}} \sqrt{u_n}$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > \frac{1}{e}$

2. أبين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

ب- استنتج أن (u_n) متناقصة تماما

ج- هل (u_n) متقاربة؟ إذا كانت متقاربة فما هي نهايتها

3. (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ب: $v_n = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_n}$

أبرهن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

4. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{1}{1+\ln u_1} + \frac{1}{1+\ln u_2} + \dots + \frac{1}{1+\ln u_n}$

التمرين الرابع: (7 C)

1. $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$ دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ ب:

1. أحسب نهايات الدالة g عند حدود مجموعة تعريفها.

2. أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

3. بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تتمد حلا وحيدا α في المجال $]-0.38; -0.37[$.

4. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 2x + 1 - x e^{-x}$ دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ ب:

ولیکن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. f أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

ب- بيّن أن المعادلة $f'(x) = g(x)$ استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

2. $y = 2x + 1$ ذي المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (d)

3. بيّن أن $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$

4. أرسم (d) و (C_f) نأخذ $\alpha = -0.37$.

5. أحسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات

$$y = 2x + 1, \quad x = 0 \quad \text{و} \quad x = 2.$$

1. (Δ_m) مستقيم معادلته $y = 2x + m$ حيث m عدد حقيقي.

1. عيّن m حتى يكون (Δ_m) مماسا للمنحنى (C_f) عند نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

2. أكتب معادلة للمماس (Δ_m) في هذه الحالة.

3. ناقش بيانيا، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد و إشارة حلول المعادلة: $1 - \frac{x}{e^x} - m = 0$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

وضعت أسئلة إمتحان شفوي في علبتين مئمتائتين A و B. العلبة A تحتوي على 4 أسئلة في الثقافة العامة، و 6 أسئلة في مادة الإختصاص، والعلبة B تحتوي على 3 أسئلة في الثقافة العامة و 7 أسئلة في مادة الإختصاص.

ظروف المسابقة) عمليات سحب الأسئلة وإختيار إحدى العلبتين متساوية الإحتمال)

1. شكل شجرة الإحتمالات المتوازنة
2. ما هو إحتمال سحب المترشح لسؤال في مادة الإختصاص من العلبة A؟
3. ما هو إحتمال سحب المترشح لسؤال في مادة الإختصاص من العلبة B؟
4. ما هو إحتمال سحب المترشح سؤال في مادة الإختصاص؟
5. علما أن المترشح سحب سؤالا في الثقافة العامة، ما إحتمال أن يكون من العلبة B؟
6. مترشح آخر يسحب عشوائيا سؤالا واحدا من العلبة A وسؤالا واحدا من العلبة B
بين أن إحتمال سحب سؤالين في مادة الإختصاص هو 0.42

التمرين الثاني: (05 نقاط)

(I) حل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة $(z+2)(z^2+z+1)=0$
(II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C, D, E ذات اللواحق

$$z_E = \overline{z_D}, \quad z_D = 2(-1 + \sqrt{3}i), \quad z_C = -2, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_A = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

1. اكتب $(-z_A)$ على الشكل الاسي ثم علم النقط A, B, C, D, E
2. ليكن R التحويل النقطي الذي يحول $M(z)$ الى $M'(z')$ حيث: $\frac{z'+2}{z+2} = -z_A$
 ا- ما طبيعة التحويل R و حدد عناصره المميزة
 ب- لتكن النقطة F حيث: $R(D) = F$ ، بين أن $z_F = 1 + \sqrt{3}i$
 ج- اكتب العدد $\frac{z_E - z_F}{z_D - z_F}$ على الشكل الجبري ثم استنتج ان المستقيمين (FD) و (EF) متعامدان

3. / لتكن G مرجح الجملة $\{(A, |z_A|), (B, |z_B|), (C, |z_C|)\}$

- ا- عين z_G لاحقة G
- ب- عين مجموعة النقط M حيث: $\overline{MG} = \lambda \overline{AB}$ لما يسمح λ مجموعة الاعداد الحقيقية
- ج- اكتب معادلة ديكارتية لهذه المجموعة

التمرين الثالث: (10 نقاط)

I. نعتبر الدالة g ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln x$$

1. أدرس اتجاه تغيرات الدالة g .

2. احسب $g(1)$ ، استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II. لتكن f الدالة العددية ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = x - \frac{\ln x}{x} \quad (C_f) \text{ تمثلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس.}$$

1. أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، فسر هذه النتيجة بيانياً.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. أ- بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ لدينا: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f و أنشئ جدول تغيراتها.

3. أ- ليكن (D) مستقيم معادلته $y = x$ ، احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ ثم فسر النتيجة بيانياً.

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) .

4. بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

5. أرسم (D) و (C_f) .

6. احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و محور الفواصل والمستقيمان اللذين

معادلتهما $x = e$ و $x = 1$.

7. ناقش بيانياً، وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد و إشارة حلول المعادلة:

$$x^2 - mx - \ln x = 0$$

III. نعتبر الدالة h ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على R كما يلي: $h(x) = f(e^x)$.

1. بين أنه من أجل كل x من R لدينا: $h(x) = \frac{e^{2x} - x}{e^x}$.

2. استنتج جدول تغيرات الدالة h .

IV. لتكن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = e$ و $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. باستعمال رسم (D) و (C_f) مثل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على محور الفواصل دون حسابها.

2. باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq e$.

3. بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً.

4. هل المتتالية (u_n) متقاربة؟ برر.

5. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

امتحان بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات

المدة 03 ساعات ونصف

الشعبة : علوم تجريبية

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (5ن)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر النقطتين : $A(12, 7, -13)$ و $B(3, 1, 2)$

و المستويان (P) و (P') حيث ، $(P) : 3x + 2y - 5z - 1 = 0$ و $(P') : x + y - 2z = 0$.

1- بين أن (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم يشمل النقطة B و $\vec{u}(1; 1; 1)$ شعاع توجيه له.

2- أثبت أن النقطة B هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) .

3- ليكن المستوي (Q) و المعروف بالتمثيل الوسيطى:

$$\begin{cases} x = 2t - 2\lambda + 6 \\ y = 2t + 3\lambda + 5 \\ z = 2t - 6 \end{cases} \quad t, \lambda \in \mathbb{R}$$

أ/ بين أن (P) و (Q) متوازيان .

ب/ تحقق أن المعادلة : $3x + 2y - 5z = 58$ هي معادلة ديكرتية للمستوي (Q) .

ج/ تحقق أن النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ تنتمي للمستوي (Q) و استنتج أن (Q) مستوي محوري للقطعة $[AB]$

4- لتكن (S) مجموعة النقط M من الفضاء و التي تحقق $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$.

أ/ تعرف على المجموعة (S) ثم حدد عناصرها المميزة.

ب/ استنتج أن المستوي (Q) يقطع (S) وفق دائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

التمرين الثاني : (5ن)

1. لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_0 = \frac{1}{3}$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$U_{n+1} = \frac{3}{2} \left[1 - \frac{1}{1+2U_n} \right]$$

1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < U_n < 1$

2- أ/ تحقق أن $U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n(1-U_n)}{1+2U_n}$ من أجل كل عدد طبيعي n ثم استنتج اتجاه تغيرات المتتالية (U_n)

ب/ بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ، ثم أحسب نهايتها .

II. لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = \frac{U_n - 1}{2U_n}$.

1- بين أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2- أكتب V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n ثم احسب من جديد نهاية المتتالية (U_n) .

3- أحسب بدلالة n المجموعين $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ و $T_n = V_0 + 3V_1 + 9V_2 + \dots + 3^n V_n$.

التمرين الثالث : (4ن)

المستوى منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$
- 2- A و B نقطتان من المستوى لاحتقائهما على الترتيب $z_A = \sqrt{3} - i$ و $z_B = \sqrt{3} + i$.
 C منتصف القطعة $[OB]$ لاحتقائها z_C
 أ/ اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.
 ب/ تعرف على طبيعة المثلث OAB .
- 3- D نسمي صورة C بالدوران الذي مركزه O وزاويته $(\frac{-\pi}{2})$ و نسمي E صورة D بالانسحاب الذي شعاعه $2\vec{j}$.
 أ/ بين أن لاحقة النقطة E هي : $z_E = \frac{1}{2}[1 + (4 - \sqrt{3})i]$
 ب/ بين أن $OE = BE = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$
 4- بين أن النقط A ، C و E في استقامية.
- 5- عين ثم أنشئ المجموعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث $\frac{z - \sqrt{3} + i}{z - \sqrt{3} - i}$ تخيلي صرف.

التمرين الرابع : (6ن)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$

- 1- أدرس تغيرات الدالة g على المجال $]0, +\infty[$.
 - 2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1.8 < \alpha < 1.9$
 - 3- استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0, +\infty[$.
- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$ و ليكن (Cf) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$. $(\|\vec{i}\| = 1cm$ و $\|\vec{j}\| = 2cm)$
- 1- عين نهايتي f عند 0 و $+\infty$ ثم فسر النتيجة هندسيا.
 - 2- بين أن من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \times g(x)$
 - 3- استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f
 - 4- بين أن $f(\alpha) = \frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$ ، بتدوير 0.01 .
 - 5- أكتب معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الترتيب 0
 - 6- ارسم (T) ، (Cf) و (C') المنحنى الممثل للدالة $|f|$.
 - 7- لتكن h دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بالشكل : $h(x) = |f(|x|)|$

أ/ أدرس شفعية الدالة h على $\mathbb{R}^*$.
 ب/ وضح كيف يمكن إنشاء (C_h) انطلاقا من (C') ، ثم أنشئه.

التمرين الأول : (4 ن)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر المستقيمين (Δ) و (Δ') المعرفين

$$(\Delta') \quad \begin{cases} x = 6 + \alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = 5 + \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (\Delta) \quad \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -2 - 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- 1- بين أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوى .
- 2- A نقطة كيفية من (Δ) و B نقطة كيفية من (Δ')
أ/ عين احداثيات النقطتين A و B بحيث يكون المستقيم (AB) عموديا على كل من (Δ) و (Δ') .
ب/ أحسب الطول AB .
- 3- عين معادلة للمستوي (P) الذي يحوي المستقيم (Δ) و يوازي المستقيم (Δ') .
- 4- أحسب المسافة بين نقطة من (Δ') و المستوي (P) . ماذا تلاحظ ؟

التمرين الثاني (5ن)

i. نعتبر في $\mathbb{C}$ كثير الحدود للمتغير المركب z المعروف كما يلي:

$$P(z) = z^3 - (4 + 2i)z^2 + 8(1 + i)z - 16i$$

- 1- بين أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يطلب تعيينه.
- 2- بين أنه يوجد عدنان حقيقيان a و b بحيث $P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$ ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

ii. في المستوى المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ لتكن النقط A ، B و C

$$z_A = 2i \quad , \quad z_B = 2 + 2i \quad , \quad z_C = \overline{z_B}$$

$$L = \frac{Z_C - Z_B}{Z_A - Z_B}$$

- 1- أوجد الشكل الجبري للعدد المركب L ثم الشكل الأسّي له.
- 2- استنتج أن النقطة C صورة النقطة A بتحويل نقطي يطلب تعيينه مع ذكر عناصره المميزة.
- 3- أ/ ماهي طبيعة المثلث ABC ؟
ب/ استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة (C) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.
- 4- عين لاحقة النقطة E حتى يكون $ABCE$ مستطيل .
- 5- أ/ عين العدد الحقيقي α حتى تكون النقطة E مرجح الجملة : $\{(A, \alpha), (B, -1), (C, 1)\}$.
ب/ عين (Ω) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $MA^2 - MB^2 + MC^2 = 9$.

التمرين الثالث: (4.5ن)

- نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $3U_{n+1} = U_n + 4n + 4$
- 1- أحسب U_1, U_2, U_3 .
 - 2- / برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > 0$.
 - ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، $U_n > \frac{4}{3}n$ و استنتج نهاية المتتالية (U_n) .
 - 3- نعرف المتتالية (V_n) بـ : من أجل كل عدد طبيعي n ، $V_n = U_n - 2n + 1$ ، / برهن أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
 - ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n - 1$.
 - ج/ أحسب بدلالة n المجموع $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$
 - ثم استنتج بدلالة n المجموع $S'_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$.

التمرين الرابع : (6.5ن)

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{(2x-1)e^x - 2x + 2}{e^x - 1}$
- (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 1- / تحقق أنه من أجل $x \neq 0$: $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{e^x - 1}$.
 - ب/ عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x) = 2x + a + \frac{be^x}{e^x - 1}$.
 - ج/ أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ ، $+\infty$ و 0 .
 - 2- نضع : $h(x) = 2(e^x - 2)\left(e^x - \frac{1}{2}\right)$.
 - / أدرس إشارة $h(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}^*$.
 - ب/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - 1)^2}$.
 - 3- شكل جدول تغيراتها.
 - 4- / أثبت أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يطلب تعيينهما.
 - ب/ ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x - 1$.
 - ج/ أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(-x) + f(x) = -3$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C) ؟
 - 5- انشئ المنحنى (C) ثم احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمتين :
 - $x = \ln 3$ و $x = \ln 2$ $y = 2x - 1$.
 - 6- لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $F(x) = 2x^2 - 2(m+1)x + \ln(e^x - 1)^2$ حيث m وسيط حقيقي .
 - / أحسب F' الدالة المشتقة لدالة F بدلالة x .
 - ب/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد القيم الحدية للدالة F .

على التلميذ أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. نعتبر النقط: $A(3; 2; 6)$ ، $B(1; 2; 4)$ ، $C(4; -2; 5)$

(1) برهن النقط A ، B ، C تعين مستويا . ثم بين أن المستوي (ABC) معادلته من الشكل: $2x + y - 2z + 4 = 0$

(2) أ) ما طبيعة المثلث ABC ؟ . احسب مساحته

ب) احسب المسافة بين النقط O والمستوي (ABC) . ثم استنتج حجم رباعي الوجوه $OABC$

(3) نعتبر G مرجح الجملة المنقلة $\{(O; 3); (A; 1); (B; 1); (C; 1)\}$ و I مركز ثقل المثلث ABC .

* بين أن النقط G تنتمي إلى المستقيم (OI) .

(4) لتكن (Γ) و (Y) مجموعتي النقط M من الفضاء حيث:

$$(\Gamma): \|3\vec{OM} + \vec{AM} + \vec{BM} + \vec{CM}\| = 6 \quad \text{و} \quad (Y): \|3\vec{OM} + \vec{AM} + \vec{BM} + \vec{CM}\| = 2$$

أ) عين الطبيعة و العناصر المميزة لـ (Γ) و ادرس وضعيتها مع المستوي (ABC) .

ب) عين طبيعة المجموعة (Y) ثم استنتج معادلة ديكارتية لها .

التمرين الثاني: (06 نقاط)

(1) أ) عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب α حيث: $\alpha = 2 + 2\sqrt{3}i$.

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z^2 - 2 - 2\sqrt{3}i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقتها على الترتيب :

$$z_C = -z_A, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_A = \sqrt{3} + i$$

أ) اكتب z_A على الشكل الأسّي ثم استنتج الشكل الأسّي للأعداد المركبة z_C و z_B

ب) استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي إلى دائرة يطلب مركزها و نصف قطرها . ثم علم النقط A ، B و C .

ج) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب L حيث:

$$L = \left(\frac{z_A}{2}\right)^{1954} \times \left(\frac{z_B}{2}\right)^{1962} \times \left(\frac{z_C}{2}\right)^{2016}$$

(3) ليكن f تحويل نقطي حيث: $f(B) = A$ و $f(O) = O$

أ) عين الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل f .

(ب) عين طبيعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z من المستوي حيث: $(Z - Z_A)(\overline{Z - Z_A}) = Z_C \cdot \overline{Z_C}$

(ج) عين ثم أنشئ المجموعة (E') صورة (E) بالتحويل f.

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{2u_n}$

(1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$ (لاحظ أن : $u_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2u_n}$)

(ب) بين أن $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(1 - 2u_n)}{2u_n}$ ، استنتج أن (u_n) متناقصة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة. عين نهايتها

(2) أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. ثم عين نهاية (u_n) .

(3) لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$

(أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$. ثم اكتب عبارة v_n و u_n بدلالة n

(ب) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = \frac{v_0 - 1}{u_0} + \frac{v_1 - 1}{u_1} + \dots + \frac{v_n - 1}{u_n}$

التمرين الرابع: (06.5 نقاط)

I (نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$)

(1) ادرس تغيرات الدالة g

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]1; \frac{3}{2}[$. ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

II (نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x}$)

(Cf) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$)

(1) بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ و أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ مقارب لـ (Cf) بجوار $+\infty$ ثم ادرس الوضعية النسبية لـ (Cf) و المستقيم (Δ) .

(4) بين أن : $f(\alpha) = 2\alpha - \frac{1}{\alpha}$. ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$. أنشئ (Δ) و (Cf) .

(5) أ) جد دالة أصلية للدالة : $\frac{1}{x} (1 - \ln x)$. $x \mapsto$

(ب) احسب المساحة $S(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (Cf) و المستقيمت $y = x$ و $x = 1$ و $x = \alpha$

(ج) تحقق أن : $S(\alpha) = \frac{\alpha^2(2 - \alpha^2)}{2}$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط) : في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

نعتبر النقط $A(1; 1; -3)$, $B(2; 0; -2)$, $C(-1; 2; 0)$ و الشعاع $\vec{u}(2; 1; -1)$.

(1) أ) عين تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) المار من النقطة C و $\vec{u}$ شعاع توجيه له .

ب) ليكن المستقيم (D) المعرف بالجملة :
$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - z - 4 = 0 \end{cases}$$

- بين أن الجملة :
$$\begin{cases} x = m + 1 \\ y = -m + 1 \\ z = m - 3 \end{cases}, m \in \mathbb{R}$$
 تمثل وسيطي لـ (D) و أن (D) هو المستقيم (AB) .

ج) بين أن المستقيمين (D) و (Δ) ليس من نفس المستوي .

(2) لتكن النقطتين $M(2t-1; t+2; -t)$ من (Δ) و $N(m+1; -m+1; m-3)$ من (D)

أ) عين إحداثيات M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من (D) و (Δ) .

ب) استنتج المسافة بين (D) و (Δ) .

(3) لتكن M نقطة كيفية من (Δ) و f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(t) = AM^2$

أ) بين أن $f(t) = 6t^2 - 12t + 14$. ب) ادرس تغيرات الدالة f .

ج) عين قيمة العدد الحقيقي t التي من أجلها تكون المسافة AM أصغرية .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، (وحدة القياس : $3Cm$)

نعتبر النقط A, B, C لواحقها على الترتيب $z_A = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_B = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$, $z_C = z_A + z_B$.

(1) أ) أكتب z_A , z_B على الشكل الأسّي ثم z_C على الشكل الجبري ، و بين أن $OACB$ مربع .

ب) أنشئ النقط A, B, C في المعلم السابق .

ج) أكتب العدد z_C على الشكل المثلثي ثم استنتج القيم المضبوطة لـ : $\cos(\frac{7\pi}{12})$, $\sin(\frac{7\pi}{12})$ ،

د) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون z_C^n عدد حقيقي موجب .

(2) ليكن f التحويل النقطي للمستوي في نفسه الذي يرفق بكل نقطة M' ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة

z' حيث : $z' = (1+i)z$.

أ) بين أن $f(A) = C$ و عين طبيعة التحويل f و عناصره المميزة .

ب) أثبت أنه من أجل كل عدد مركب z حيث $z \neq 0$ فإن : $\frac{z'-z}{z} = i$ ، استنتج طريقة لإنشاء النقطة M'

ج) اثبت أنه من أجل كل عدد مركب z فإن : $z' - z_C = (1+i)(z - z_A)$.

(د) استنتج انه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى دائرة (C) مركزها A و نصف قطرها 1 فإن النقطة M' صورتها بالتحويل f تنتمي إلى دائرة (C') يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

(هـ) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون العدد $\frac{z - z_A}{z}$ تخيلي صرف موجب .

التمرين الثالث: (03 نقط)

يحتوي كيس على 5 كرات بيضاء و 3 حمراء و 2 سوداء (لا نفرق بينها عند اللمس) .
نسحب عشوائيا و في آن واحد أربع كرات من الكيس .

(1) أحسب عدد الحالات الممكنة .

(2) أحسب احتمال الحادثتين A و B التاليتين :

A : " سحب كرة واحدة حمراء فقط " ، B : " الحصول على أربع كرات من نفس اللون "

(3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق عند السحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

(أ) أعط قانون الاحتمال لـ X . (ب) أحسب الأمل الرياضي و الانحراف المعياري لـ X .

التمرين الرابع: (07 نقط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 1 - \ln(1 + e^{-x})$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$) حيث : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 3\text{cm}$

الجزء الأول :

(1) ادرس تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = x + 1 - \ln(1 + e^x)$.

(3) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مقاربين أحدهما مائل (Δ) معادلته $y = x + 1$.

(4) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المقارب المائل (Δ) .

(5) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $x_0 = -\ln(e - 1)$.

(6) أنشئ المنحنى (C_f) و (Δ) .

(7) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $m - \ln(1 + e^x) = 0$.

(8) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = f(|x|)$

(أ) أثبت أن g زوجية . (ب) اعتمادا على المنحنى (C_f) ، ارسم في نفس المعلم السابق منحنى الدالة g .

الجزء الثاني : (1) بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) \geq x$ يكافئ أن $x \leq -x_0$.

(2) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = \frac{1}{3}$ و $u_{n+1} = f(u_n)$; $n \in \mathbb{N}$.

(أ) في المعلم السابق متل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 دون حسابها مبينا خطوط الرسم

(ب) أعط تخمينا حول اتجاه تغير و تقارب (u_n) ثم أثبت أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq -x_0$.

(ج) بين أن (u_n) متزايدة ، استنتج أنها مقاربة و عين نهايتها . * بالتوفيق في بكالوريا 2016 *

إمتحان البكالوريا التجريبي
الشعبة : علوم تجريبية

المدة: 3 ساعات ونصف

إختبار في مادة الرياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول (04 نقاط):

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
لنعتبر النقط $A(1,2,2)$ ، $B(1,0,1)$ ، $C(3,2,1)$ من الفضاء والمستوي (P) الذي معادلته $z = 1$ والنقطة D هي
المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) ، و (Δ) هو المستقيم المعروف بتمثيله الوسيطى:
$$(t \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -4 - t \\ z = 1 \end{cases}$$

و (S) هو السطح الكروي المعروف بالمعادلة: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$.
من بين الأجوبة المقترحة ، اختر الجواب الصحيح مع التبرير :

()	()	()	()	
$(k \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2k \\ z = 3 \end{cases}$	$(k \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = 2k \\ z = 1 \end{cases}$	$(k \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = -1 + k \\ y = 2 + k \\ z = -3k \end{cases}$	$(k \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2k \\ z = 1 \end{cases}$	(1) تمثيل وسيطي لـ (BC) هو:
ليسا من نفس المستوي	متقاطعان	منطبقان	متوازيان تمامًا	(2) المستقيمان (Δ) و (BC)
عمودي على المستوي (P)	لا يوازي المستوي (P)	يقطع المستوي (P)	محتوى في المستوي (P)	(3) المستقيم (BC)
$(1, 2, 0)$	$(1, 2, 1)$	$(1, 1, 2)$	$(1, 2, -1)$	(4) إحداثيات النقطة D هي:
مركزه ينتمي إلى المستوي (P)	لا يقطعه المستوي (P)	يقطعه المستوي (P)	يشمل النقطة A	(5) السطح الكروي (S)

التمرين الثاني (05 نقاط):

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود P الذي متغيره z حيث: $P(z) = z^3 - 4z^2 + 6z - 4$.
أ) بَيِّنْ أن المعادلة $P(z) = 0$ لا تقبل حلاً تخيلياً صرفاً.

ب) عَيِّنْ العددين الحقيقيين a ، b ، بحيث: $P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$.

ج) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z) = 0$.

(2) في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، الوحدة $\|\vec{u}\| = 2cm$.

نعتبر النقط $A; B; C$ التي لواحقها على الترتيب: $z_A = 2$ ، $z_B = 1 - i$ ، $z_C = 1 + i$.

(أ) أكتب $\frac{\mathcal{J}_C - \mathcal{J}_A}{\mathcal{J}_B - \mathcal{J}_A}$ على الشكل الجبري ، استنتج طبيعة المثلث . ABC .

(ب) أكتب $\mathcal{J}_B$ و $\mathcal{J}_C$ على الشكل الآسي .

(ج) تحقق أن : $\left(\frac{\mathcal{J}_B}{\sqrt{2}}\right)^{1437} + \sqrt{2}\left(\frac{\mathcal{J}_C}{\sqrt{2}}\right)^{2016} = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathcal{J}_C$

(3) ليكن R الدوران الذي مركزه A ويحول B إلى C .

(أ) عيّن θ زاوية الدوران R .

(ب) أكتب العبارة المركبة للدوران R ، ثم عين لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران R .

(4) لتكن (ϕ) الدائرة التي قطرها $[BC]$ ومركزها النقطة I و (ϕ') صورتها بالدوران R .

أنشئ بعناية كلا من الدائرتين (ϕ) و (ϕ')

التمرين الثالث (04 نقاط) :

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\square$ بـ $u_0 = 6$ ، $3u_{n+1} = u_n + 1$: ($n \in \square$) :

(1) أ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي : n ، $u_n > \frac{1}{2}$.

(ب) بيّن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً ، ثم استنتج أنها متقاربة .

(ج) عيّن نهاية المتتالية (u_n) .

(2) لنعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\square$ بـ : $v_n = \ln(u_n - \frac{1}{2})$.

(أ) بيّن أن (v_n) متتالية حسابية ، يطلب تحديد أساسها r وحدها الأول .

(ب) عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

(ج) عيّن ثانية نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الرابع (07 نقاط) :

الجزء الأول : g دالة عددية معرفة على $\square$ بـ : $g(x) = (2x+1)e^{-x} + 1$.

(1) أدرس تغيرات الدالة g .

(2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α بحيث : $\alpha \in]-0,74, -0,73[$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $\square$.

الجزء الثاني : f دالة عددية معرفة على $\square$ بـ : $f(x) = (-2x-3)e^{-x} + x$ ، وليكن (c_f) تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول 1 cm .

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) بيّن أن المستقيم (d) الذي معادلته : $y = x$ هو مقارب مائل للمنحنى (c_f) عند $(+\infty)$.

(أ) أثبت أنه من أجل كل x من $\square$ ، $f'(x) = g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير f وشكل جدول تغيراتها .

(ب) بيّن أن $f(a) = a + 1 + \frac{2}{2a+1}$ ، ثم استنتج حصراً للعدد $f(a)$ (تدور النتيجة إلى 10^{-2}) .

(ج) بيّن أن المنحنى (c_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثيها ، ثم أكتب معادلة المماس (T) لـ (c_f) عند I .

(4) أرسم المستقيم (d) والمنحنى (c_f) .

(5) أ - عيّن العددين الحقيقيين a و b حتى تكون الدالة $H: x \mapsto (ax+b)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h: x \mapsto (-2x-3)e^{-x}$ على $\square$

(ب) أحسب بـ : cm^2 المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (c_f) والمستقيمات المعرفة بالمعادلات : $y = x$

($x = \alpha$ و $x = 2$) هو العدد الحقيقي المعرف في الجزء الاول

البكالوريا التجريبي
الشعبة : علوم تجريبية

التصحيح النموذجي لامتحان البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات الموضوع الأول

التمرين الأول (04 نقاط) :

السؤال	الجواب	التعليل	النتيجه
(1)	()	الجملة : $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2k \\ z = 1 \end{cases}$ هي تمثيل وسيطي للمستقيم (BC) لأن إحداثيات B تحقق الجملة أي $t = 0$: وإحداثيات C تحقق أيضا الجملة أي $t = 1$.	0.75
(2)	()	المستقيمان (Δ) و (BC) متقاطعان لأن شعاعي التوجيه غير مرتبطين خطيا و $\begin{cases} -3 + t = 1 + 2k \\ -4 - t = 2k \\ 1 = 1 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} t = 0 \\ k = -2 \end{cases}$ و $M(-3; -4; 1) \in (\Delta) \cap (BC)$	1
(3)	()	المستقيم (BC) محتوي في (P) لأن : $B \in (P)$ ، $1 = 1$ و $C \in (P)$ ، $1 = 1$	0.75
(4)	()	إحداثيات النقطة D هي (1, 2, 1) لأنها تحقق معادلة (P) أي $1 = 1$.	0.75
(5)	()	(P) يقطع السطح الكروي (S) لأن $\omega(1, 2, 2)$ هي مركز (S) ونصف قطرها $R = 3$ و $d(\omega; P) = 1$ و $1 < R$	0.75

التمرين الثاني (05 نقاط) :

(1) لنفرض أن $P(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا صرفا هو ai حيث $a \in \mathbb{R}$.

وبالتالي نجد : $-ia^3 + 4a^2 - 6ai - 4 = 0$ يكافئ : $\begin{cases} 4a^2 - 4 = 0 \\ -a^3 - 6a = 0 \end{cases}$ وهذا مستحيل.

إذن : $P(z) = 0$ لا تقبل حلا تخيليا صرفا..... 0.5

..... 0.5 $P(z) = (z-2)(z^2 - 2z + 2)$ (ب)

..... 0.25 $P(z) = 0$ يكافئ $z = 2$ أو (I) $z^2 - 2z + 2 = 0$

..... 0.5 لنحل (I) : $\Delta = (2i)^2$ وبالتالي المعادلة (I) تقبل حلين مركبين مترافقين هما : $1+i, 1-i$

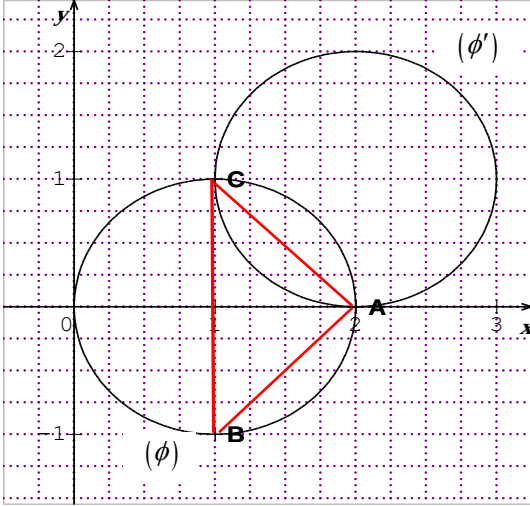
..... 0.25 المعادلة $P(z) = 0$ حلولها هي : $2, 1+i, 1-i$

..... 0.5 (2) $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$ ومنه $(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ والمثلث ABC قائم في A.....

..... 0.5 $z_B = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ و $z_C = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

..... $\left(\frac{z_B}{\sqrt{2}}\right)^{1437} + \sqrt{2}\left(\frac{z_C}{\sqrt{2}}\right)^{2016} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2} z_C$ (ج)

..... 0.5



(3) تعيين θ زاوية الدوران R .

لدينا: $z_C - z_A = a(z_B - z_A)$ ومنه $a = -i$.

0.5..... إذن $\theta = \arg(a) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

0.25..... (ب) العبارة المركبة للدوران R هي: $z' = -iz + 2 + 2i$.

0.25..... $z_D = 3 + i$.

(4) الدائرة (ϕ) مركزها $I(1;0)$ ونصف قطرها 1

والدائرة (ϕ') مركزها $I'(2;1)$ صورة I بالدوران R ونصف

0.5..... قطرها 1 لأن الدوران تقايس.

التمرين الثالث (04 نقاط):

(1) لنعتبر الخاصية $P(n)$ هي $u_n > 0$.

0.25..... $P(0)$ صحيحة لأن $u_0 = 6$ و $6 > \frac{1}{2}$.

0.25..... • نفرض $P(n)$ صحيحة مع $n \geq 0$ أي: نفرض $u_n > \frac{1}{2}$.

• نبرهن أن $P(n+1)$ صحيحة أي: نبرهن أن: $u_{n+1} > \frac{1}{2}$.

أي: نبرهن أن $\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3} > \frac{1}{2}$.

لدينا: $u_n > \frac{1}{2}$ فرضا يكافئ $\frac{1}{3}u_n > \frac{1}{6}$ وبالتالي نجد: $\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3} > \frac{1}{2}$ أي $u_{n+1} > \frac{1}{2}$.

0.25..... ومنه $P(n+1)$ صحيحة.

(ب) نبين أن (u_n) متناقصة تماما مهما كان: $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}(u_n - \frac{1}{2})$.

0.5..... لكن: $\frac{2}{3}(u_n - \frac{1}{2}) < 0$ وبالتالي نستنتج أن (u_n) متناقصة.

• بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد $\frac{1}{2}$ فإنها

0.5..... متقاربة.

0.5..... $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{1}{2}$ (ج)

(2) لدينا: $V_n = \ln(u_n - \frac{1}{2})$.

0.75.... (ا) مهما كان: $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} - v_n = -\ln 3$ ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -\ln 3$ وحدها الأول $v_0 = \ln \frac{11}{2}$.

0.25..... (ب) $v_n = -n \ln 3 + \ln \frac{11}{2}$.

0.25..... • لدينا: $e^{v_n} = u_n - \frac{1}{2}$ ومنه: $u_n = e^{-n \ln 3 + \ln \frac{11}{2}} + \frac{1}{2}$.

0.5..... $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n \ln 3 + \ln \frac{11}{2}} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (وهي النهاية في السؤال 1-ج)

التمرين الرابع (07 نقاط):

لدينا: $g(x) = (2x+1)e^{-x} + 1$.

(1) دراسة تغيرات g .

0.5..... $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$

• اتجاه التغير:

0.25..... $g'(x) = (-2x+1)e^{-x}$.

0.25..... جدول إشارة $g'(x)$

x	$-\infty$	0.5	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	—

0.5..... من جدول إشارة $g'(x)$ نستنتج أن: g متزايدة تماما على $]-\infty; \frac{1}{2}[$ ومتناقصة تماما على $[\frac{1}{2}; +\infty[$

0.25..... • جدول تغيرات g

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	—
$g(x)$	$-\infty$	$\frac{2}{\sqrt{e}} + 1$	1

(2) بما أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $[-0.74; -0.73]$ و $g(-0.74) \times g(-0.73) < 0$ فإنه وحسب

مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]-0.74; -0.73[$ 0.25.....

(3) جدول إشارة $g(x)$ على $\square$ 0.25.....

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	—	0	+

الجزء الثاني:

لدينا: $f(x) = (-2x - 3)e^{-x} + x$

0.5..... $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\left(\frac{-2x-3}{x} \right) e^{-x} + 1 \right] = +\infty$

(2) بما أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$ فإن المستقيم (d) الذي معادلته $y = x$ هو مقارب مائل لـ: (C_f) عند $+\infty$ 0.25.....

(3) لدينا: $f'(x) = (2x + 1)e^{-x} + 1 = g(x)$ 0.25.....

0.25..... إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ كما هو مبين في جدول الإشارة التالي:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+

0.5..... من جدول إشارة $f'(x)$ نستنتج أن: f متناقصة تماما على $]-\infty; \alpha[$ ومتزايدة تماما على $[\alpha; +\infty[$

0.25..... • جدول تغيرات f

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

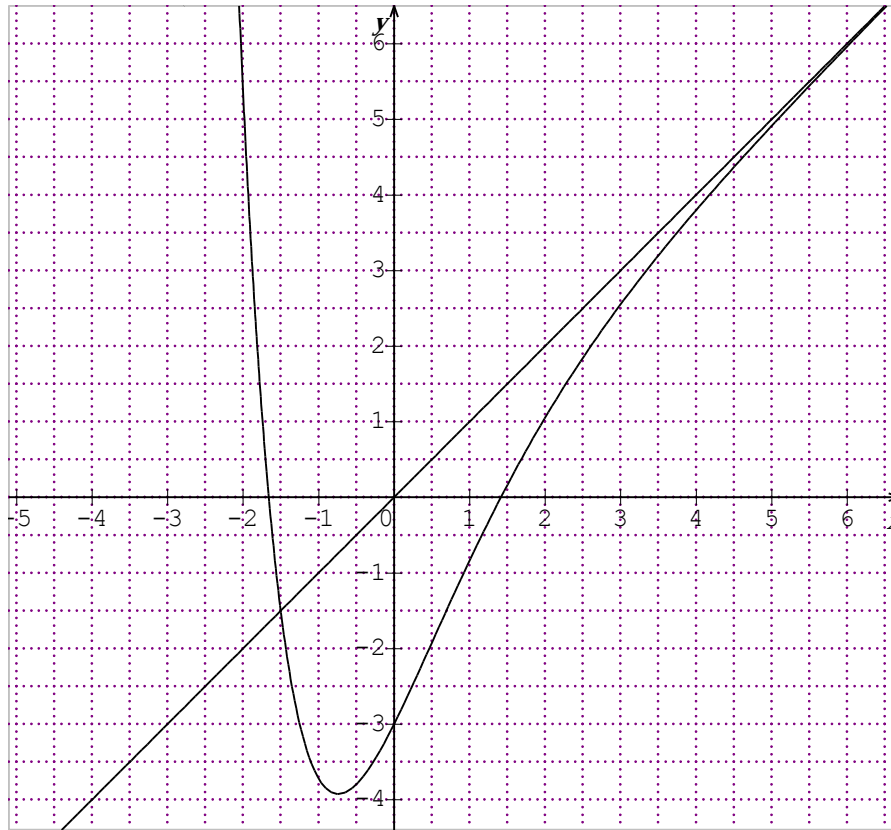
0.25..... (ب) نعلم أن: $g(\alpha) = 0$ يكافئ: $e^\alpha = -(2\alpha + 1)$

0.25..... لدينا كذلك $f(\alpha) = \frac{-(2\alpha+3)}{e^\alpha} + \alpha$ ، وبعد التعويض نجد: $f(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{2}{2\alpha+1}$

- استنتاج حصر للعدد : $f(\alpha)$ بتطبيق قواعد الحصر نجد : $-4,08 < f(\alpha) < -3,89$ 0.25
- ج) لدينا : $f''(x) = g'(x)$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة $g'(x)$ حسب الجدول التالي 0.25

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	—

- بما أن $f''(x) = 0$ من أجل $x = \frac{1}{2}$ ويغير إشارته فإن (C_f) تقبل نقطة انعطاف $I\left(\frac{1}{2}, \frac{-4}{\sqrt{e}} + \frac{1}{2}\right)$ 0.25
- معادلة المماس (T) عند النقطة I هي : $y = \left(\frac{2}{\sqrt{e}} + 1\right)x - \frac{5}{\sqrt{e}}$ 0.25
- 4) رسم (d) و (C_f) 0.75



- 5) لدينا : $h(x) = (-2x-3)e^{-x}$ و $H(x) = (ax+b)e^{-x}$ 0.25
- أ) تعيين a و b بحيث : H دالة أصلية لـ h : لدينا : $H'(x) = h(x)$ يكافئ : $(-ax-b+a)e^{-x} = (-2x-3)e^{-x}$ 0.25
- ومنه : $a = 2$ و $b = 5$ وعليه فإن $H(x) = (2x+5)e^{-x}$ 0.25
- 0.25 $A(\alpha) = \int_{\alpha}^2 (x - f(x))dx = \frac{9e^{\alpha} - e^2(2\alpha+5)}{e^{\alpha+2}} \text{ cm}^2$

إمتحان البكالوريا التجريبي
الشعبة : علوم تجريبية

المدة : 3 ساعات ونصف

إختبار في مادة الرياضيات

على المترشح ان يختار موضوعا واحدا من بين الموضوعين المقترحين

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04.5 نقاط) نعتبر (U_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = 1$ و $u_1 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي

غير معدوم n : $u_{n+1} = 2\alpha u_n + 3\alpha^2 u_{n-1}$ حيث α عدد حقيقي من المجموعة $\{0\}[-1;1]$

نضع ومن أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_{n+1} - 3\alpha u_n$

(1) أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول بدلالة α .

(2) هل المتتالية (V_n) متقاربة؟

(3) أحسب بدلالة α و n المجموع: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

(4) عين قيمة العدد الحقيقي α علما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{4}$

-استنتج عندئذ U_n بدلالة n ثم بين أن (U_n) متقاربة.

(5) في كل مايلي نضع $\alpha = -\frac{1}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $\pi_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

أ/ بين أن: $\pi_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$

ب/ عين أصغر عدد طبيعي n حتى يكون $\pi_n \leq 3^{-44}$

التمرين الثاني (05 نقاط): المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$

(1) أوجد العددي Z_1 و Z_2 الجذران التربيعيان للعدد المركب $L = 2 - 2i\sqrt{3}$ ثم أكتبهما على الشكل الاسي.

(2) نعتبر النقط A, B, C ذات اللواحق: $Z_A = 2i$, $Z_B = \sqrt{3} + i$ و $Z_C = \sqrt{3} - i$

أ - بين ان $\overline{AB} = \overline{OC}$ و عين قياسا للزاوية الموجهة $(\overline{OB}; \overline{AC})$.

ب- استنتج طبيعة الرباعي $OABC$

ج - عين لاحقة Ω مركز الرباعي $OABC$

(3) أ- أكتب العبارة المركبة للتشابه S الذي يحول A إلى O و يحول C إلى B محددا عناصره المميزة.

ب- تحقق أن SoS تشابه مباشر نسبته $\frac{1}{3}$ و أحد أقياس زاويته π .

ج- نضع $f = \underbrace{S \circ S \circ \dots \circ S}_n$: معرف بـ

عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون f تحاكيا نسبته سالبة.

(4) k عدد حقيقي, (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث: $OM^2 + AM^2 + BM^2 + CM^2 = k$

أ - أثبت أن مجموعة النقط M من (E) تحقق العلاقة $\Omega M^2 = \frac{k - 8O\Omega^2}{4}$

ب - ناقش حسب قيم العدد الحقيقي k طبيعة المجموعة (E) .

التمرين الثالث (04.5 نقط): الفضاء منسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

نعتبر النقط: $A(3; 2; 1)$, $B(3; 5; 4)$ و $C(0; 5; 1)$

1- بين أن المثلث ABC متقايس الاضلاع

2- تحقق أن الشعاع $\vec{n}(1; 1; -1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة له.

3- أ- عين احداثيات النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

ب- عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يمر بالنقطة G و يعامد المستوي (ABC)

ج - نعتبر النقطة $E(2+t; 4+t; 2-t)$ حيث t عدد حقيقي . عين العدد t حتى يكون $AE^2 = AB^2$

د - عين طبيعة رباعي الوجوه $FABC$ حيث $F(4; 6; 0)$ ثم أحسب حجمه V

4 - بين أن المستقيمين (AF) و (BC) متعامدين.

5- أ- عين المجموعة (S) للنقط M من الفضاء التي تحقق: $\|\vec{MG} + \vec{MF}\| = 6$

ب - عين الوضع النسبي للمجموعة (S) و المستوي (ABC)

التمرين الرابع (06 نقط):

لتكن f الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(0) = 1$ ومن أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

الجزء الأول

(1) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا , ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أ) أدرس قابلية الاشتقاق لـ f عند 0 , ب) أثبت أن f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ ثم أحسب $f'(x)$

على المجال $]0; +\infty[$, استنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها

(3) أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$, تحقق أن: $4,6 < \alpha < 4,7$

(4) أكتب معادلة للمستقيم (D) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1

(5) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

أ- أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة g' , استنتج إشارة $g'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة g , استنتج وضعية (C_f) بالنسبة الى (D)

ج- أحسب $f(6)$ ثم أنشئ (C_f) و (D)

الجزء الثاني

(1) n عدد طبيعي غير معدوم باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \ln x dx$ بدلالة n

(2) استنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ بـ: cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المماس (D) و

المستقيمين ذا المعادلتين $x = 1$ و $x = \frac{1}{n}$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n)$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

السنة الدراسية: 2015/2016

دورة ماي 2016

الشعبة: علوم تجريبية

وزارة الدفاع الوطني

أركان الجيش الوطني الشعبي

دائرة الإستعمال و التحضير

مديرية مدارس أشبال الأمة

الإجابة النموذجية للموضوع الثاني لإمتحان البكالوريا التجريبي

المدة: 3 ساعات ونصف

مادة الرياضيات

0.25	$(\overline{OB}; \overline{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_O}\right) = \arg\left(\frac{\sqrt{3}-3i}{\sqrt{3}+i}\right) = \arg(-\sqrt{3}i)$ $= -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$	التمرين الأول: (04.5 نقاط) 1- من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = 2\alpha u_{n+1} + 3\alpha^2 u_n - 3\alpha u_{n+1}$ $= -\alpha(u_{n+1} - 3\alpha u_n) = -\alpha v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $-\alpha$ و حدها الأول $v_0 = 2 - 3\alpha$	+0.5 0.25
0.25	ج- بما أن $OB \neq AC$ فإن $OABC$ معين	2- من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = (2 - 3\alpha)(-\alpha)^n$: و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ لأن $-1 < \alpha < 1$ و $\alpha \neq 0$ ومنه (v_n) متقاربة	0.25 0.25 0.25
0.25	ج- $z_\Omega = \frac{z_B + z_O}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$	3- $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{2-3\alpha}{1+\alpha}(1 - (-\alpha)^{n+1})$	0.25
0.5	$\beta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ و $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}i$ نجد $\begin{cases} z_O = \alpha z_A + \beta \\ z_B = \alpha z_C + \beta \end{cases}$ (3)	4- $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{3}{4}$ معناه $\frac{2-3\alpha}{1+\alpha} = \frac{3}{4}$ أي $\alpha = \frac{1}{3}$	0.25
0.25	ومنه S هو التشابه المباشر الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة Z الى النقطة M' ذات اللاحقة Z' بحيث $Z' = \frac{\sqrt{3}}{3}iZ + \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \dots + (u_{n+1} - u_n)$ $= u_{n+1} - u_0 = \frac{3}{4} \left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right]$	0.25 0.25
0.75	نسبته $\frac{\sqrt{3}}{3}$ و أحد أقياس زوايته $\frac{\pi}{2}$ ومركزه النقطة Ω	معناه $u_{n+1} = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n :	+0.25 0.25
0.5	ج- S و S' تشابه مباشر نسبته $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{9}$ و أحد أقياس زوايته $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$	اذن $u_n = \frac{7}{4} - \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ أي (u_n) متقاربة	+0.25 0.25
0.25	ج- يكون f تحاكيا نسبته سالبة إذا كانت زوايته $\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$ أي أن $n = 2\alpha / \alpha \in \mathbb{Z}^*$	5- $\alpha = -\frac{1}{3}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $\pi_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$ $= 3 \times 3 \left(\frac{1}{3}\right) \times \dots \times 3 \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $= 3^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{n(n+1)}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n^2-n-2}{2}}$	0.25 0.25
0.5	$OM^2 + AM^2 + BM^2 + CM^2 = k$ / 4- $OM^2 = \frac{k - 8O\Omega^2}{4}$ ومنه $4OM^2 + 2O\Omega^2 + 2(3O\Omega^2) = k$	ب/ $\pi_n \leq 3^{-44}$ معناه $3^{\frac{n^2-n-2}{2}} \leq 3^{-44}$	0.25
0.75	ج- لدينا $O\Omega^2 = 1$ ومنه إذا كان $k < 8$ فإن $(E) = \emptyset$ إذا كان $k = 8$ فإن $(E) = \{\Omega\}$ إذا كان $k > 8$ فإن (E) هي الدائرة التي مركزها Ω ونصف قطرها $\frac{\sqrt{k-8}}{2}$	$(n-10)(n+9) \geq 0$ و n عدد طبيعي نجد $n \geq 10$ ومنه أصغر عدد طبيعي هو $n = 10$	0.5
0.75	التمرين الثالث: (04.5 نقاط) 1- لدينا $\overline{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ و $\overline{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $\overline{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ أي :	التمرين الثاني: (05 نقاط) 1- نضع $z = x + iy$; z جذر تربيعي لـ L معناه $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \\ xy = -\sqrt{3} \end{cases}$ نجد : $Z_1 = \sqrt{3} - i$ و $Z_2 = -\sqrt{3} + i$ $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$ و $z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$	0.25 0.25
0.25	2- $\vec{n} \cdot \overline{AC} = 0$ و $\vec{n} \cdot \overline{AB} = 0$ ومنه شعاع ناظمي لـ (ABC)	2- $\overline{AB} = \overline{OC}$ اذن $z_B - z_A = \sqrt{3} - i = z_C - z_O$	0.25
0.25	$x + y - z - 4 = 0$ معادلة للمستوي (ABC)		
0.25	اذن $G\left(\frac{3+3+0}{3}, \frac{2+5+5}{3}, \frac{1+4+1}{3}\right) = G(2, 4, 2)$ / 3-		
0.5	ج- تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) : $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 4 \\ z = -t + 2 \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$		
	4. معادلة للمستقيم (D) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 هي :		0.5

0.25

$$(D): y = 2x + \frac{1}{2}$$

$g/5$ معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدنيا:

$$g'(x) = f'(x) - 2$$

g' معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ولدنيا:

$g''(x) = f''(x) = -\ln x$ ومنه g' تقبل قيمة حدية عظمى

هي 0 عند $x = 1$ اذن من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $g'(x) \leq 0$

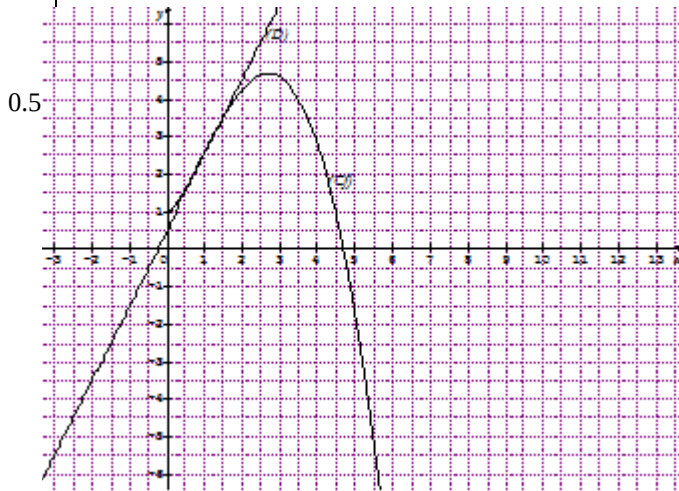
x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	0	

المنحنى يقع فوق المستقيم (D) في المجال $]0; 1[$ وتحت في المجال

$]1; +\infty[$ ويتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 1 اذن (C_f) يقبل نقطة

انعطاف هي $I(1; \frac{5}{2})$. $f(6) \square -9.5$

رسم المنحنى



0.5

1- نضع : $U(x) = \ln x$ ومنه $U'(x) = \frac{1}{x}$

$$V(x) = \frac{x^3}{3} \quad \text{ومنه} \quad V'(x) = x^2$$

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \ln(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln(x) \right]_{\frac{1}{n}}^1 - \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 dx$$

0.5

$$I_n = \frac{1}{3n^3} \ln(n) - \frac{1}{9} + \frac{1}{9n^3}$$

$$(2+t-3)^2 + (4+t-2)^2 + (2-t-1)^2 = 12 \text{ معناه } AE^2 = AB^2 \text{ جـ}$$

0.25

ومنه نجد $t = -2$ أو $t = 2$

دمن أجل $t = 2$ نجد E منطبقة على F أي $AF = AB = AC = BC$

0.25

$AB \cdot AF \neq 0$ اذن $FABC$ رباعي وجوه منتظم.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AA' = \frac{9\sqrt{6}}{4} u \cdot a : ABC \text{ مساحة المثلث}$$

0.5

حيث A' منتصف القطعة $[BC]$ ومنه $V_{FABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot FG$

لأن G هي المسقط العمودي لـ F على المستوى (ABC) اذن

$$V_{FABC} = \frac{9\sqrt{2}}{2} u \cdot v$$

0.25

$$\vec{AF} \cdot \vec{BC} = 0 \quad \text{أي} \quad \vec{BC} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \vec{AF} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(AF) \perp (BC)$$

0.25

5- أ- $\|\vec{MG} + \vec{MF}\| = 6$ معناه $MI = 3$ حيث I منتصف القطعة

$[GF]$ ومنه (S) هي سطح الكرة التي مركزها

0.25

ونصف قطرها 3

0.25

$$\sqrt{3} < 3 \quad \text{و} \quad d(I, (ABC)) = \frac{|3+5-1-4|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

فان (S) و المستوي (ABC) يتقاطعان وفق دائرة.

0.25

التمرين الرابع (06 نقاط) :

0.25

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1^{-1}$ ومنه f مستمرة عند 0 و (C_f) يقبل

0.25

نقطة توقف

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0 \quad \text{اذن} \quad f \text{ قابلة للاشتقاق}$$

0.25

عند 0

وبما أن f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ (كونها جداء و مجموع دوال قابلة

0.25

للاشتقاق على $]0; +\infty[$) فان f تقبل الاشتقاق على $]0; +\infty[$

من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(0) = 0$ و $f'(x) = 2x(1 - \ln x)$

0.5

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	1	$\frac{e^2}{2} + 1$	$-\infty$

0.5

تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $]0; +\infty[$ ثم على المجال

$[4, 6; 4, 7]$ و $(f(4, 6) = 0, 44; f(4, 7) = -0, 05)$

2-

0.25

$$A(n) = 4 \left[\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) - (2x + \frac{1}{2}) dx \right] = 4 \left[\frac{1}{2n^3} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n} - I_n \right] \text{ cm}^2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A(n) = \frac{1}{9}$$

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

$$\begin{cases} x = 9 + 4t \\ y = 6 + t; t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

لتكن النقطة $A(-1; 2; 3)$ والمستقيم (Δ) الذي تمثيله الوسيط :

- 1 - أ) - أوجد معادلة ديكرتية للمستوي (P) العمودي على (Δ) والمار من A .
ب) - تحقق من أن النقطة $B(-3; 3; -4)$ تنتمي إلى (Δ) .
ج) - أحسب المسافة d_B بعد النقطة B عن المستوي (P) .
- 2 - عبر عن المسافة d بين A والمستقيم (Δ) بدلالة d_B والمسافة AB ثم استنتج قيمة d .
- 3 - لتكن M نقطة من المستقيم (Δ) . عبر عن AM^2 بدلالة t ثم أوجد قيمة d بطريقة ثانية.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n} \end{cases}$$

(u_n) متتالية عددية معرفة على N كما يلي :

- 1- احسب u_2, u_1
- 2 - ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فإن $0 < u_n < 4$
ب) بين أن (u_n) متزايدة , ماذا تستنتج ؟
3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على N كما يلي : $v_n = \ln(u_n) - \ln 4$
أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية
ب) أكتب u_n و v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

$$4 - \text{احسب بدلالة } n \text{ كلا من : } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n \text{ و } P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$$

التمرين الثالث : (05 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة C كثير الحدود $P(z)$ ذو المتغير المركب z حيث :

$$P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)z^2 + 4(1 - \sqrt{2})z - 8$$

- 1) أحسب $P(2)$ ثم أوجد تحليلاً لـ $P(z)$.
- 2) حل في C المعادلة $P(z) = 0$ ، نسمي z_1 و z_2 الحلين المختلفين عن 2 حيث z_1 جزؤه التخيلي موجب
- 3) أ/ تحقق أن : $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$ ثم أكتب كل من z_1 و z_2 على الشكل الأسّي .

- (4) في المستوي المركب المباشر المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (الوحدة $2cm$)
 نعتبر النقط A, B, C ذات اللواحق على الترتيب : $2, z_1$ و z_2 ولتكن I منتصف $[AB]$
 أ- علم النقط A, B, C و I .
 ب- ما طبيعة المثلث OAB واستنتج قياسا للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overrightarrow{OI})$.
 ج- احسب z_I لاحقة I ثم اكتب z_I على الشكل الأسّي .
 د- باستعمال النتائج السابقة أوجد القيم المضبوطة لكل من $\cos \frac{3\pi}{8}$ و $\sin \frac{3\pi}{8}$.

التمرين الرابع : (07نقط)

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بـ : $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$ و (c) تمثيلها في معلم متعامد ومتجانس

1. / أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x , $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$
 ب/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)
 ج/ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) والمستقيم (D)
2. / بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x , $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$
 ب/ احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و بين أن المستقيم (D') الذي معادلته $y = -x + \ln 2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)

ج/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) والمستقيم (D')
 3. ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

4. ارسم (D) و (D') و (C)

5. نضع : $I = \int_2^3 [f(x) - x] dx$

1- فسر هندسيا العدد I

2- بين أنه من أجل كل x من $[0, +\infty[$, $\ln(1 + x) \leq x$

3- أستنتج أن $0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-2x} dx$ واعط حصر العدد I سعته 0.02

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

$$f \text{ دالة عددية معرفة على المجال } \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[\text{ بـ: } f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$$

(1) بين أنه إذا كان $x > 1$ فإن $f(x) > 1$.

(2) نعرف المتتالية (u_n) بـ : $u_0 = 2$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ/ برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n > 1$.
ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
ج/ استنتج أن (u_n) متقاربة واستنتج نهايتها l .

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln\left(\frac{u_n-1}{u_n}\right)$ حيث $\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري.

أ/ أثبت أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب/ أكتب v_n بدلالة n واستنتج أن : $u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$.

(4) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

(I) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : (E) $z^3 + 2z^2 - 16 = 0$.

(1) أثبت أن العدد 2 حل للمعادلة (E)، ثم بين أنه يمكن كتابة (E) على الشكل $(z-2)(az^2 + bz + c) = 0$ حيث a, b, c أعداد حقيقية يطلب حسابها .

(2) استنتج حلول المعادلة (E) ثم اكتبها على الشكل الأسّي .

(II) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث الوحدة 1cm .

(1) أنشئ النقط A, B, C التي لواحقها على الترتيب : $z_A = -2 - 2i$ ، $z_B = 2$ و $z_C = -2 + 2i$.

(2) احسب z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع. أنشئ النقطة D .

(3) لتكن E صورة D بالدوران الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ولتكن F صورة D بالدوران الذي

مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ/ أحسب z_E و z_F لاحقتي E و F .

ب/ أنشئ النقطتين E و F .

ج/ تحقق من أن : $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$ ثم استنتج طبيعة المثلث AEF .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

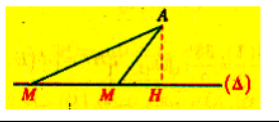
- الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
- نعتبر النقط: $A(0; 4; 1)$ ، $B(1; 3; 0)$ ، $C(2; -1; -2)$ و $D(7; -1; 4)$.
- أثبت أن النقط A ، B و C ليست في استقامية .
 - ليكن المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D وشعاع توجيهه $\vec{u}(2; -1; 3)$.
أ/ بين أن (Δ) عمودي على المستوي (ABC) .
ب/ استنتج معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .
ج/ عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) .
د/ أوجد إحداثيات النقطة H نقطة تقاطع (Δ) و (ABC) .
 - نعتبر (S) مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تحقق : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 10z + 14 = 0$.
أ/ أثبت أن (S) كرة مركزها $\Omega(1; 2; -5)$ ونصف قطرها $R = 4$.
ب/ تحقق أن Ω تنتمي إلى (Δ) .
ج/ برهن أن المستوي (ABC) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة (c) يطلب إيجاد إحداثيات مركزها ω ونصف قطرها r .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

- (I) لتكن الدالة g المعرفة على R بـ : $g(x) = e^x + 2 - x$.
- أحسب نهايات الدالة g عند حدود مجال التعريف .
 - ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها .
 - استنتج إشارة $g(x)$.
- (II) نعتبر الدالة f المعرفة على R بـ : $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$ ، (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- بين أنه من أجل كل x من R فإن : $f'(x) = e^{-x}g(x)$ واستنتج اتجاه تغير f .
 - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - شكل جدول تغيرات الدالة f .
 - بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في R حلا وحيدا α حيث : $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.
 - أ/ أثبت أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$.
ب/ أدرس الوضع النسبي لـ (C) و (D) .
 - احسب $f(-\frac{1}{2})$ و $f(-1)$ ثم أنشئ (C) و (D) .
- (III) لتكن الدالة F المعرفة على R بـ : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - xe^{-x}$.
- أثبت أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على R .
 - نرمز بـ $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) ومحور الفواصل والمستقيمين : $x = 1$ و $x = \alpha$.
احسب $A(\alpha)$.

الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط)

من أجل $t = -2$ أصغر ما يمكن

$$AM^2 = f(-2) = 33$$

$$AM = \sqrt{33} \text{ ومنه : } d = \sqrt{33}$$

التمرين الثاني (4 نقاط)

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{4U_n} \end{cases}$$

$$U_1 = \sqrt{4U_0} = \sqrt{4} = 2 \quad (1) \text{ حساب } u_2, u_1 :$$

$$U_2 = \sqrt{4U_1} = \sqrt{8}$$

$$0 < U_n < 4 \quad : n \in \mathbb{N} \text{ البرهان أنه من أجل كل } (2) \text{ أ}$$

$$* \text{ من أجل } n=0 : 0 < U_0 = 1 < 4 \quad (P(0) \text{ محققة})$$

$$* \text{ نفرض أن } 0 < U_n < 4 \text{ صحيحة ونبين أن : } 0 < U_{n+1} < 4$$

$$\text{لدينا : } 0 < U_n < 4 \text{ ومنه : } 0 < 4U_n < 16$$

$$\sqrt{0} < \sqrt{4U_n} < \sqrt{16} \quad \text{إذن :}$$

$$0 < U_{n+1} < 4 \quad \text{وبالتالي :}$$

$$\text{إذن } p(n+1) \text{ صحيحة}$$

$$* \text{ الاستنتاج : من أجل كل } n \in \mathbb{N} : 0 < U_n < 4$$

(ب) اتجاه تغير المتتالية (U_n)

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{4U_n} - U_n$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(\sqrt{4U_n} - U_n)(\sqrt{4U_n} + U_n)}{\sqrt{4U_n} + U_n}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n - U_n^2}{\sqrt{4U_n} + U_n} = \frac{U_n(4 - U_n)}{\sqrt{4U_n} + U_n}$$

$$\text{لدينا : } U_n < 4 \text{ ومنه : } 4 - U_n > 0$$

$$\text{ولدينا : } U_n > 0 \text{ ومنه : } \sqrt{4U_n} + U_n > 0$$

$$\text{ومنه : } U_{n+1} - U_n > 0 \quad \text{إذن : } (U_n) \text{ متزايدة}$$

الاستنتاج : (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

$$(3) \text{ أ إثبات أن } (V_n) \text{ متتالية هندسية : } V_n = \ln(U_n) - \ln 4$$

$$\text{لدينا : } V_{n+1} = \ln(U_{n+1}) - \ln 4$$

$$V_{n+1} = \ln(\sqrt{4U_n}) - \ln 4$$

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(4U_n) - \ln 4$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} \ln 4 + \frac{1}{2} \ln(U_n) - \ln 4$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} \ln(U_n) - \frac{1}{2} \ln 4$$

$$V_{n+1} = \frac{1}{2} [\ln(U_n) - \ln 4]$$

$$q = \frac{1}{2} \text{ هندسية أساسها } (V_n) \quad V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$$

$$V_0 = -\ln 4$$

$$\text{و حدها الأول } V_0 = \ln(U_0) - \ln 4 \quad \text{نجد}$$

$$\Delta : \begin{cases} x = 9 + 4t \\ y = 6 + t, \dots, t \in \mathbb{R} \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad A(-1, 2, 3)$$

(أ) إيجاد معادلة المستوى (P) : لدينا $(P) \perp (\Delta)$ ومنه

$$(1) \quad \vec{u}_\Delta(4; 1; 2) \text{ شعاع توجيه } (\Delta) \text{ ناظمي للمستوي } (P) \text{ معادلته : } 4x + y + 2z + d = 0$$

$$A(-1, 2, 3) \in (P) \text{ أي : } -4 + 2 + 6 + d = 0 \text{ أي : } d = -4$$

$$(P) : 4x + y + 2z - 4 = 0$$

(ب) التحقق أن $B(-3, 3, -4)$ تنتمي إلى (Δ) :

$$B \in (\Delta), \text{ وحيدة } t \quad \begin{cases} t = -3 \\ t = -3 \\ t = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} -3 = 9 + 4t \\ 3 = 6 + t \\ -4 = 2 + 2t \end{cases}$$

(ج) حساب المسافة d_B بين B و (P) :

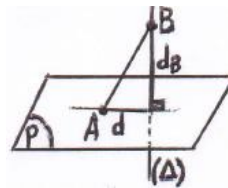
$$\text{لدينا : } d_B = \frac{|-12 + 3 - 8 - 4|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{21}{\sqrt{21}} = \frac{21\sqrt{21}}{21} = \sqrt{21}$$

(2) حساب المسافة d بين A و (Δ) :

$$AB^2 = d^2 + d_B^2$$

$$d^2 = AB^2 - d_B^2$$

$$d = \sqrt{AB^2 - d_B^2}$$



$$AB = \sqrt{(-3+1)^2 + (3-2)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{54}$$

$$d = \sqrt{54 - 21} \quad \text{نجد } d = \sqrt{33}$$

(3) التعبير عن AM^2 بدلالة t :

$$M(9 + 4t; 6 + t; 2 + 2t) \text{ ومنه } M \in (\Delta)$$

$$AM = \sqrt{(9 + 4t + 1)^2 + (6 + t - 2)^2 + (2 + 2t - 3)^2}$$

$$AM = \sqrt{(4t + 10)^2 + (t + 4)^2 + (2t - 1)^2}$$

$$AM = \sqrt{16t^2 + 80t + 100 + t^2 + 8t + 16 + 4t^2 - 4t + 1}$$

$$AM = \sqrt{21t^2 + 84t + 117}$$

$$AM^2 = 21t^2 + 84t + 117$$

$$f(t) = 21t^2 + 84t + 117 \quad \text{نضع :}$$

$$f'(t) = 42t + 84 \quad \text{ندرس اتجاه تغير } f$$

$$42t + 84 = 0 \quad \text{نجد } t = -2$$

t	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$+\infty$	33	$+\infty$

$$P(Z) = 0 \quad (2)$$

$$Z^2 + 2\sqrt{2}Z + 4 = 0 \quad \text{أو} \quad Z = 2$$

$$\Delta = -8 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = i(2\sqrt{2})$$

$$Z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i \quad \text{أو} \quad Z = \frac{-2\sqrt{2} + i(2\sqrt{2})}{2} = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$0.5 \quad Z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i \quad \text{و} \quad Z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

$$0.25 \quad Z_1 + Z_2 = -2\sqrt{2} \quad (3)$$

$$Z_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$$

الشكل الأسى:

$$|Z_1| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{4} = 2$$

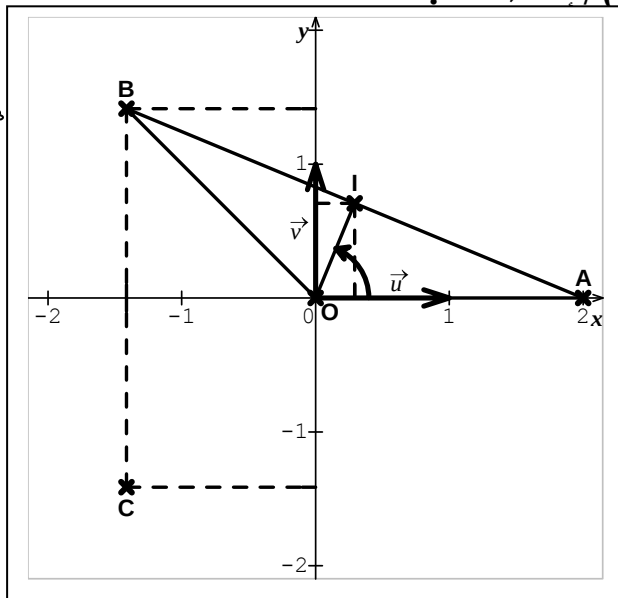
$$0.5 \quad Z_1 = 2e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad \text{و} \quad \theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$Z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

$$|Z_2| = \sqrt{4} = 2$$

$$0.5 \quad Z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{4}} \quad \text{و} \quad \alpha = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \quad \begin{cases} \cos \alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

(4) إنشاء النقط:



(ب) طبيعة المثلث OAB :

$$0.25 \quad OB = OA = 2 \quad \text{نجد} \quad |Z_A| = |Z_B| = 2 \quad \text{لدينا :}$$

OAB متقايس الضلعين

$$\frac{Z_B}{Z_A} = \frac{2e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2} = e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad \text{قيس } (\vec{U}; \vec{OI}) :$$

$$(\vec{OA}; \vec{OB}) = \frac{3\pi}{4} \quad \text{نجد} \quad \arg\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$0.5 \quad (\vec{U}; \vec{OI}) = \frac{(\vec{OA}; \vec{OB})}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

لأن ((OI)) منصف الزاوية ((OA; OB))

$$V_n = V_0 \times q^n \quad \text{(ب) عبارة : } V_n$$

$$0.25 \quad V_n = (-\ln 4) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$V_n = \ln(U_n) - \ln 4 \quad \text{(عبارة : } U_n)$$

$$U_n = e^{(v_n + \ln 4)} \quad \text{نجد} \quad \ln(U_n) = V_n + \ln 4$$

$$U_n = e^{v_n} \times e^{\ln 4}$$

$$0.25 \quad U_n = 4e^{-(\ln 4)\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$0.25 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 4$$

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0\right) \quad \text{و} \quad -1 < \frac{1}{2} < 1 \quad \text{(لأن : } -1 < \frac{1}{2} < 1)$$

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n \quad \text{(4 حساب)}$$

$$S_n = (-\ln 4) \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right] \quad \text{نجد} \quad S_n = V_0 \left[\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right]$$

$$S_n = (-2 \ln 4) \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right]$$

$$0.5 \quad S_n = 4(\ln 2) \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1 \right]$$

$$P_n = U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n \quad \text{(حساب)}$$

$$U_n = e^{(v_n + \ln 4)} \quad \text{لدينا :}$$

$$P_n = e^{v_0 + \ln 4} \times e^{v_1 + \ln 4} \times \dots \times e^{v_n + \ln 4}$$

$$(v_0 + v_1 + \dots + v_n) + \underbrace{(\ln 4 + \ln 4 + \dots + \ln 4)}_{(n+1) \text{ ح}}$$

$$P_n = e$$

$$P_n = e^{(S_n) + (n+1)\ln 4} \quad 0.5$$

$$P_n = e^{4(\ln 2) \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1 \right] + (n+1)\ln 4}$$

التمرين الثالث (5 نقاط)

$$P(Z) = Z^3 + 2(\sqrt{2} - 1)Z^2 + 4(1 - \sqrt{2})Z - 8$$

$$0.25 \quad P(2) = 0 \quad (1)$$

$$P(Z) = (Z - 2)(aZ^2 + bZ + c)$$

$$P(Z) = aZ^3 + bZ^2 + cZ - 2aZ^2 - 2bZ - 2c$$

$$P(Z) = aZ^3 + (b - 2a)Z^2 + (c - 2b)Z - 2c$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2\sqrt{2} \\ c = 4 \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 2\sqrt{2} - 2 \\ c - 2b = 4 - 4\sqrt{2} \\ -2c = -8 \end{cases} \quad \text{بالمطابقة نجد :}$$

$$0.5 \quad P(Z) = (Z - 2)(Z^2 + 2\sqrt{2}Z + 4)$$

ج) حساب Z_I لاحقة I منتصف $[AB]$:

$$Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2} = \frac{2 - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$$

0.5

$$Z_I = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

كتابة Z_I على الشكل الأسى:

$$|Z_I| = \sqrt{\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$|Z_I| = \sqrt{\frac{8 - 4\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$\arg(Z_I) = (\vec{U}; \vec{OI}) = \frac{3\pi}{8}$$

0.5

$$Z_I = \sqrt{2 - \sqrt{2}} e^{i\frac{3\pi}{8}}$$

استنتاج القيمة المضبوطة $\cos \frac{3\pi}{8}$ و $\sin \frac{3\pi}{8}$:

$$Z_I = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$Z_I = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right)$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2 - \sqrt{2}} \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \\ \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{2 - \sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2(2 + \sqrt{2})}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \\ \sin \frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

التمرين الرابع: 7 نقاط

$$D_f = \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$$

0.5

أ) إثبات أن:

$$f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x}) = \ln(e^x(1 + 2e^{-2x}))$$

$$f(x) = \ln(e^x) + \ln(1 + 2e^{-2x})$$

$$f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$$

0.25

ب) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln(1 + 2e^{-2x})) = +\infty$$

إثبات أن $y = x$ (D) مقارب مائل لـ (C_f) :

0.5

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1 + 2e^{-2x})) = 0$$

ومنه (D) مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

ج) دراسة الوضع النسبي (C_f) و (D) :

0.25

ندرس إشارة الفرق

$$\ln(1 + 2e^{-2x}) > 0 \quad \text{ومنه} \quad (2e^{-2x} > 0) \quad \text{لأن} \quad 1 + 2e^{-2x} > 1$$

x	$-\infty$	$+\infty$
إشارة الفرق		+
الوضع النسبي		(D) فوق (C_f)

$$f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x}) \quad \text{أ) إثبات أن:}$$

$$f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x}) = \ln(e^{-x}(e^{2x} + 2)) \quad \text{لدينا:}$$

$$f(x) = \ln(e^{-x}) + \ln(2 + e^{2x})$$

0.5

$$f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$$

ب) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

0.25

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + \ln(2 + e^{2x})) = +\infty$$

إثبات أن $y = -x + \ln 2$ (D') مقارب مائل لـ (C_f) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x + \ln 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + \ln(2 + e^{2x}) + x - \ln 2)$$

0.5

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(2 + e^{2x}) - \ln 2) = \ln 2 - \ln 2 = 0$$

ومنه (D') مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$

ج) دراسة الوضع النسبي (C_f) و (D') :

ندرس إشارة الفرق

$$f(x) - (-x + \ln 2) = \ln(2 + e^{2x}) - \ln 2$$

$$f(x) - (-x + \ln 2) = \ln\left(\frac{2 + e^{2x}}{2}\right)$$

0.25

$$f(x) - (-x + \ln 2) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}e^{2x}\right)$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{2}e^{2x}\right) > 0 \quad \text{ومنه} \quad \left(\frac{1}{2}e^{2x} > 0\right) \quad \text{لأن} \quad 1 + \frac{1}{2}e^{2x} > 1$$

x	$-\infty$	$+\infty$
إشارة الفرق		+
الوضع النسبي		(D') فوق (C_f)

3) حساب المشتق:

0.5

$$f'(x) = \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}}$$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(e^{2x} - 2)}{e^x + 2e^{-x}}$$

ومنه

إشارة المشتق:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $e^{2x} - 2$
 لأن $(e^{-x} > 0 \text{ و } e^x + 2e^{-x} > 0)$
 $e^{2x} - 2 \geq 0$ نجد $e^{2x} \geq 2$
 $2x \geq \ln 2$ نجد $x \geq \frac{\ln 2}{2}$

وبنفس الطريقة: $e^{2x} - 2 \leq 0$ نجد $x \leq \frac{\ln 2}{2}$ 0.5

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

f متناقصة على $]-\infty; \frac{\ln 2}{2}]$ ومتزايدة على $[\frac{\ln 2}{2}; +\infty[$

(2) جدول تغيرات f : 0.5

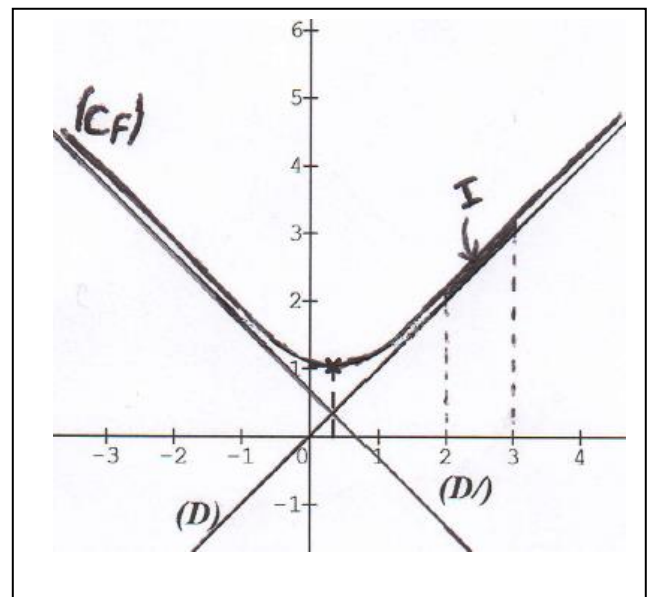
x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{3 \ln 2}{2}$	$+\infty$

$$f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$$

$$f\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = \frac{\ln 2}{2} + \ln(1 + 2e^{-\ln 2}) = \frac{\ln 2}{2} + \ln 2$$

$$f\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = \frac{3 \ln 2}{2}$$

(4) رسم: (D) , (C_f) , (D') 0.75



(5) نضع $I = \int_2^3 (f(x) - x) dx$

(1) المساحة المحددة بالمنحني (C_f) والمستقيمات 0.25

$$(D): y = x \text{ و } x = 2 \text{ و } x = 3$$

(2) إثبات أنه من أجل $x \in [0; +\infty[$: $\ln(1+x) \leq x$

$$g(x) = \ln(1+x) - x \text{ نضع:}$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$$

$$g'(x) \leq 0 : x \geq 0 \text{ لدينا من أجل}$$

g متناقصة على المجال $[0; +\infty[$ (فهو يعكس الترتيب)

من أجل $x \geq 0$: $g(x) \leq g(0)$ ولدينا $g(0) = 0$

$$\ln(1+x) - x \leq 0$$

$$\ln(1+x) \leq x \text{ 0.5}$$

(3) استنتاج أن $0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-2x} dx$

$$I = \int_2^3 (f(x) - x) dx = \int_2^3 (x + \ln(1 + 2e^{-2x}) - x) dx \text{ لدينا:}$$

$$I = \int_2^3 \ln(1 + 2e^{-2x}) dx$$

$$\ln(1 + 2e^{-2x}) > 0 \text{ ومنه } 1 + 2e^{-2x} > 1$$

$$\int_2^3 \ln(1 + 2e^{-2x}) dx \geq 0 \text{ ومنه إذن } (1) \dots I \geq 0$$

لدينا $2e^{-2x} > 0$ حسب السؤال السابق $\ln(1 + 2e^{-2x}) \leq 2e^{-2x}$

$$\int_2^3 \ln(1 + 2e^{-2x}) dx \leq \int_2^3 2e^{-2x} dx \text{ ومنه}$$

$$(2) \dots I \leq \int_2^3 2e^{-2x} dx \text{ إذن}$$

من (1) و (2) نجد $0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-2x} dx$ 0.75

إيجاد حصرًا للعدد I سعته 0.02: $0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-2x} dx$

$$\int_2^3 2e^{-2x} dx = [-e^{-2x}]_2^3 = -e^{-6} + e^{-4} \approx 0.01583 \dots \text{ لدينا:}$$

$$0 \leq I \leq (e^{-4} - e^{-6})$$

$$0 \leq I \leq 0.02 \text{ ومنه: 0.25}$$

4

على كل مترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

تمرين 01 : (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $(z+1)(z^2 - 4z + 7) = 0 \dots (E)$

(2) $A; B; C; D$ و G النقط ذات اللاواحق على الترتيب:

$$z_G = 3 \text{ و } z_D = -3i\sqrt{3}; z_C = \overline{z_B}; z_B = 2 + i\sqrt{3}; z_A = -1$$

أ - أوجد قياسا للزاوية $(\overline{CA}; \overline{CG})$ ثم أستنتج طبيعة المثلث GAC

ب - عين طبيعة التحويل S الذي مركزه النقطة C و يحول النقطة G إلى النقطة A

ج - أحسب عمدة العدد المركب $\frac{z_D - z_C}{z_G - z_C}$ و فسر النتيجة هندسيا

د - إستنتج طبيعة التحويل h الذي مركزه النقطة C و يحول النقطة G إلى النقطة D

(3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $(1) \dots \overline{CG} = 12 \dots (-\overline{MA} + 2\overline{MB} + 2\overline{MC})$

أ - بين النقطة G هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A; -1); (B; 2); (C; 2)\}$

ب - بين ان العلاقة (1) تعني $\overline{GM} \cdot \overline{CG} = -4 \dots (2)$

ج - تحقق من أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (Γ)

د - بين أن العلاقة (2) تعني $\overline{AM} \cdot \overline{GC} = 0$ و إستنتج طبيعة (Γ)

تمرين 02 : (04 نقاط)

(C_g) التمثيل البياني للدالة g في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

g الدالة العددية المعرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[0; 4]$ بتمثيلها البياني

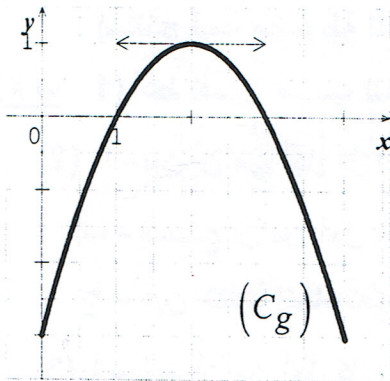
المنحني (C_g) يقبل في النقطة التي فاصلتها 2 مماسا يوازي محور الفواصل

(1) أ - شكل جدول تغيرات الدالة g

ب - شكل جدولا تبين فيه إشارة الدالة g على $[0; 4]$

(2) نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f = \ln \circ g$

مبررا إجابتك ، اذكر إن كانت الخواص التالية صحيحة أو خاطئة



أ - معرفة على المجال $[0; 4]$ ب - f موجبة أو تنعدم على المجال $[1; 3]$

ج - $f'(2) = 0$ د - المستقيم الذي معادلته $x = 1$ مقارب للمنحني الممثل للدالة f

تمرين 03 : (05 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(0; \bar{i}; \bar{j}; \bar{k})$ النقاط :

$$C(-4; 0; -3) \text{ و } B(-2; -6; 5); A(5; -1; 7)$$

(1) أ - بين أن النقاط $A; B; C$ ليست في إستقامة

ب - بين أن الشعاع $\vec{n}(-1; 1; 1)$ ناضي للمستوي (ABC) وأكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

(2) أحسب الأطوال $AB; AC; BC$ ثم أحسب مساحة المثلث ABC

(3) أ - أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل المبدأ O و يعامد المستوي (ABC)

ب - عين إحداثيات النقطة D المسقط العمودي للمبدأ O على المستوي (ABC)

(4) نرمز بـ H إلى المسقط العمودي للمبدأ O على المستقيم (BC) و t عدد حقيقي يحقق $\overline{BH} = t \overline{BC}$

أثبت أن : $\overline{BO} \cdot \overline{BC} = t \|\overline{BC}\|^2$ و إستنتج قيمة العدد الحقيقي t و إحداثيات النقطة H

(5) أحسب حجم رباعي الوجوه $OABC$

تمرين 04 : (06 نقاط)

f_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_n(x) = x^2 e^{-2nx}$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم

(C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$

نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

جزء أ : f_1 الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_1(x) = x^2 e^{-2x}$

(1) أدرس على $\mathbb{R}$ تغيرات الدالة f_1 و شكل جدول تغيراتها

(2) F_1 دالة أصلية للدالة f_1 معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F_1(x) = -e^{-2x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right)$

إستنتج قيمة مضبوطة للعدد I_1

جزء ب : (1) أعط تفسيراً هندسياً للعدد I_n

(2) أ - بين أن من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ و من أجل كل x من المجال $[0; 1]$: $f_{n+1}(x) = e^{-2x} f_n(x)$

ب - إستنتج أن من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ و من أجل كل x من المجال $[0; 1]$: $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

ج - عين عندئذ اتجاه تغير المتتالية (I_n)

(3) أ - أثبت أن من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ و من أجل كل x من المجال $[0; 1]$: $0 \leq f_n(x) \leq e^{-2nx}$

ب - إستنتج حصراً للمتتالية (I_n) ثم نهايتها

$$g(x) = \frac{x}{2x+4} : \text{بـ } [-1,5 ; 0] \text{ المجال } g(1)$$

أدرس إتجاه تغير الدالة g و إستنتج أن : إذا كان $x \in [-1,5 ; 0]$ فإن $g(x) \in [-1,5 ; 0]$

$$(2) \quad (u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة بـ : } u_0 = -1 \text{ و من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 4}$$

أ - برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي $n : -1,5 \leq u_n \leq 0$

ب - أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

ج - برر أن المتتالية (u_n) متقاربة و عين نهايتها

$$(3) \quad (v_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ بـ : } v_n = \frac{u_n}{2u_n + 3}$$

أ - أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطب تحديد أساسها و حدها الأول

ب - اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ثم عبارة الحد العام u_n

ج - اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o ; \vec{u} ; \vec{v})$ حيث $\|\vec{u}\| = 1 \text{ cm}$

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات الجهول z التالية : $\bar{z} - 3iz - 3 + 6i = 0$

(2) النقطة A ذات اللاحقة $4 - 2i$

عين لاحقة النقطة B حتى يكون المثلث OAB متقايس الأضلاع في الإتجاه المباشر

(3) النقطة D ذات اللاحقة $2i$

أ - أنشئ مجموعة النقط M ذات اللاحقة العدد المركب z بحيث : $\text{Arg}(z - 2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad / \quad k \in \mathbb{Z}$

ب - أنشئ مجموعة النقط M ذات اللاحقة العدد المركب z بحيث : $z = 2i + 2e^{i\theta} \quad / \quad \theta \in \mathbb{R}$

(4) أنشئ مجموعة النقط M ذات اللاحقة العدد المركب z تختلف عن -2 بحيث : $\left| \frac{z-1}{z+2} \right| = 1$

من أجل كل مقترح من المقترحات الخمسة التالية أذكر إن كانت صحيحة أو خاطئة مع تبرير الإجابة

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(0 ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ النقط :

$C(2 ; 0 ; 0)$ و $B(0 ; 4 ; 0)$; $A(0 ; 0 ; 2)$

نرمز بـ I : إلى منتصف القطعة $[BC]$ و بـ G إلى مركز المسافات المتساوية للنقط A ; B و C ونرمز بـ H إلى المسقط العمودي للمدأ على المستوي (ABC)

المقترح 1 : مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ هي المستوي (AIO)

المقترح 2 : مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$ هي سطح الكرة ذات القطر $[BC]$

المقترح 3 : حجم رباعي الوجوه $OABC$ يساوي 4

المقترح 4 : المستوي (ABC) معادلته : $2x + y + 2z = 4$ و النقطة H إحداثياتها هي $\left(\frac{8}{9}; \frac{4}{9}; \frac{8}{9}\right)$

المقترح 5 : المستقيم (AG) يقبل كتمثيل وسيطي له الجملة $(t \in \mathbb{R})$:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

تمرين 04 : (06 نقاط)

جزء أ : g : الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = -1 + x + 2 \ln x$

(1) أ - أدرس اتجاه تغير الدالة g

ب - أحسب $g(1)$ ثم عين إشارة الدالة g على المجال $]0; +\infty[$

ج - إستنتج أن : إذا كان $0 < x < 1$ فإن $g\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ و إذا كان $x > 1$ فإن $g\left(\frac{1}{x}\right) < 0$

جزء ب : f : الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ :

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2 \text{ cm}$

(2) أ - أثبت من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = x g\left(\frac{1}{x}\right)$ وإستنتج إتجاه تغير الدالة

ب - أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

ج - بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,75 < \alpha < 2$

(3) أ - تحقق أن نصف المماس $[\Delta]$ من اليمين لـ (C_f) في المبدأ O ذو معادلة $y = x$ مع $x \geq 0$

ب - ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى $[\Delta]$

ج - أنشئ المنحني (C_f) و المماس $[\Delta]$ على المجال $[0; 3]$

(4) أحسب مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات ذات معادلات : $x = 0,5$; $x = 1$ و $y = x$

بالتوفيق للجميع