



على المترشح أن يختار احد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

* التمرين الأول : (04 نقاط)

- I. نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود : $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$
- (1) احسب $P(6)$ ، ثم اكتب $P(z)$ على الشكل $P(z) = (z - 6)(z^2 + az + b)$ حيث a و b عدنان حقيقيان
- (2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$
- II. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A, B و C ذات اللواحق:
- (1) - أ - اكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي
 $z_A = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 3 - i\sqrt{3}$ و $z_C = 6$
- ب - بيّن أن : $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2023} + \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1444} = 0$
- ج - عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقيا موجبا
- (2) نضع : $Z = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$
- أ - اكتب العدد Z على الشكل الأسّي
- ب - استنتج طبيعة المثلث ABC .
- (3) عين طبيعة المجموعة (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $|\bar{z} - 6| = |iz + \sqrt{3} - 3i|$

* التمرين الثاني : (04 نقاط)

- يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس ، منها ثلاث كريات زرقاء مرقمة 0 ، 1 ، 2 ، وأربع كريات حمراء مرقمة 0 ، 1 ، 2 ، 3 و ثلاث كريات خضراء مرقمة 1 ، 2 ، 4
- ✓ نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الكيس :
- (1) أحسب احتمال ل حدث من الأحداث التالية :
- الحدث A : " سحب ثلاث كريات من نفس اللون "
- الحدث B : " سحب ثلاث كريات أرقامها يمكن أن تشكل العدد 2023 "
- الحدث C : " سحب ثلاث كريات تحمل أرقامها تشكل حدودا متتالية لمتتالية هندسية أساسها 2 "
- (2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الكريات المسحوبة التي تحمل الرقم 1
- أ - عرف قانون الاحتمال للمتغير X ، ثم أحسب أمله الرياضي
- ب - عين قيمة العدد الحقيقي b بحيث يكون : $E(10X + b) = 2032$
- ج - أحسب $P\left(X = \frac{6}{5-X}\right)$ ، $P(e^{X^2-X} = 1)$

* التمرين الثالث : (05 نقاط)

I. (u_n) المتتالية العددية المعرفة على IN بعدها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n}$.

(1) برهن بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 3$.

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

II. (v_n) المتتالية العددية المعرفة على IN بـ: $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$.

(1) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(2) أكتب v_n بدلالة n ، ثم u_n بدلالة n ؛ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

III. (w_n) المتتالية العددية المعرفة على IN بـ: $w_n = \frac{3}{u_n}$.

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = 1 - v_n$.

(2) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$.

✓ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = n + 1 + \frac{8}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right)$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

* التمرين الرابع : (07 نقاط)

الجزء الأول: g دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = -x^3 + 1 - 2 \ln x$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) أحسب $g(1)$ ؛ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x ، إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني: f دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = -x + 2 + \frac{\ln x}{x^2}$.

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 2cm$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا. ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

(2) أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ حيث: f' الدالة المشتقة للدالة f .

ب - أدرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + 2$ مستقيما مقاربا مائلا للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب/ أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

ج/ بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) ، يطلب كتابة معادلة له .

(4) بين أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β حيث: $0,6 < \alpha < 0,7$ ؛ $2,1 < \beta < 2,2$.

(5) أنشئ (Δ) ، (T) و (C_f) .

(6) ليكن λ عددا حقيقيا حيث $\lambda > 1$ و $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين ذو المعادلتين $x = \lambda$ و $x = 1$.

أ/ باستعمال التكامل بالتجزئة، أحسب: $\int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2} dx$.

ب/ أحسب بدلالة λ ، المساحة $A(\lambda)$ ثم عين $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

الموضوع الثاني

* التمرين الأول : (04 نقاط)

من بين الإجابات المقترحة عين الإجابة الصحيحة الوحيدة مع التبرير .

(1) الدالة الأصلية F والتي تحقق $F(1)=0$ للدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x+1}{x}$ هي الدالة :

(أ) $F(x) = x - 1 + \ln x$ (ب) $F(x) = 1 - x + \ln x$ (ج) $F(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

(2) المتتالية (W_n) المعرفة على IN بـ : $W_n = \int_n^{n+1} e^{1-x} dx$ هي متتالية هندسية أساسها q يساوي :

(أ) $q = \frac{e-1}{e}$ (ب) $q = \frac{1}{e}$ (ج) $q = e - 1$

(3) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث $|(1+i)z + 4| = 2\sqrt{2}$ هي :

(أ) دائرة (ب) مستقيم (ج) مجموعة خالية

(4) حلول المعادلة التفاضلية $y = \sqrt{2}y' - 1$ هي الدوال f المعرفة على IR بـ :

(أ) $f(x) = ce^{\sqrt{2}x} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ (ب) $f(x) = ce^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} - 1$ (ج) $f(x) = ce^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} + 1$

* التمرين الثاني : (04 نقاط)

نعتبر صندوقين U_1 و U_2 يحتوي الصندوق U_1 على 10 كرات منها خمسة حمراء مرقمة 1 ، 1 ، 2 ، 3 ، 3 ، 3

و ثلاث كرات بيضاء مرقمة 2 ، 2 ، 4 و كرتان لونهما أخضر مرقمتان 3 ، 5 ، اما الصندوق U_2 يحتوي

على سبع كرات منها أربعة حمراء والباقي لونها أخضر ، كل الكرات في الصندوقين لا نفرق بينها باللمس

نرمز للكرة الحمراء بالرمز R و البيضاء B و الخضراء V

(1) نختار عشوائيا أحد الصندوقين ثم نسحب منه كرة واحدة و نسجل لونها

أ - أنشئ شجرة الاحتمالات المنمنجة لهذه التجربة العشوائية

ب - احسب احتمال الحادثة R " سحب كرة حمراء اللون "

ج - احسب احتمال ان تكون الكرة المسحوبة من الصندوق U_2 علما انها حمراء اللون

(2) نقوم الآن بسحب ثلاث كرات في آن واحد من الصندوق U_1 وليكن X المتغير العشوائي الذي يرافق بكل عملية

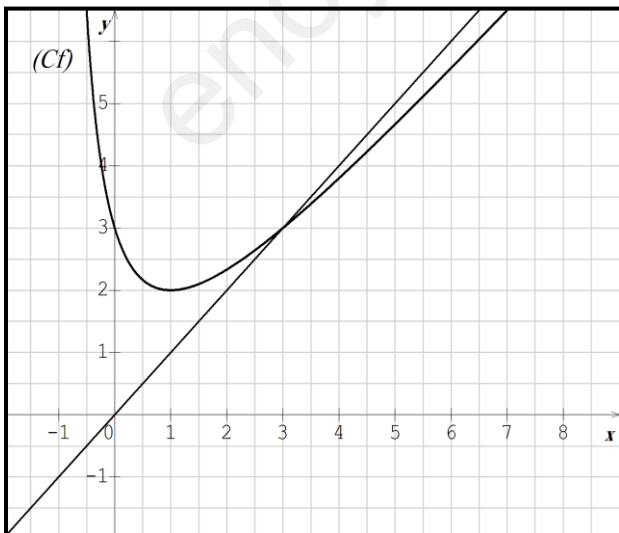
سحب عدد الأرقام الفردية المتبقية في هذا الصندوق

أ - عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله

ب - احسب الامل الرياضي للمتغير العشوائي X

ج - احسب $P(\ln(X - 4) < 0)$

* التمرين الثالث : (05 نقاط)



f دالة عددية معرفة على المجال $] -1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
(أنظر الشكل المقابل)

(1) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ حيث

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

أ / أنقل الشكل، ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود التالية:

u_0 ، u_1 و u_2 دون حسابها مبرزا خطوط الرسم.

ب/ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(2) أ/ باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq 3$.

ب/ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على IN ، ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) أ/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(3 - u_n)$.

ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq 3 - u_n \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ، ثم أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

(4) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3(n+1) \leq S_n \leq 3(n+1) + 8\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right)$. ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

* التمرين الرابع : (07 نقاط)

الجزء الأول: g دالة عددية معرفة على IR بـ: $g(x) = 4e^x - 2xe^x - 4$

(1) احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

(2) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

(3) أ - بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 0 والآخر α حيث $1,5 < \alpha < 1,6$.

ب - استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x ، إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني: f دالة عددية معرفة على IR بـ: $f(x) = \frac{2x-2}{e^x - 2x}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

(2) أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - 2x)^2}$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن: $f(\alpha) = \frac{2-\alpha}{\alpha-1}$ ، ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(4) أ - أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 1$.

ب - ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (D) ذو المعادلة: $y = -1$

(5) أنشئ كلا من: (D) ، (T) و (C_f)

(6) أحسب بـ cm^2 المساحة $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات ذي المعادلات:

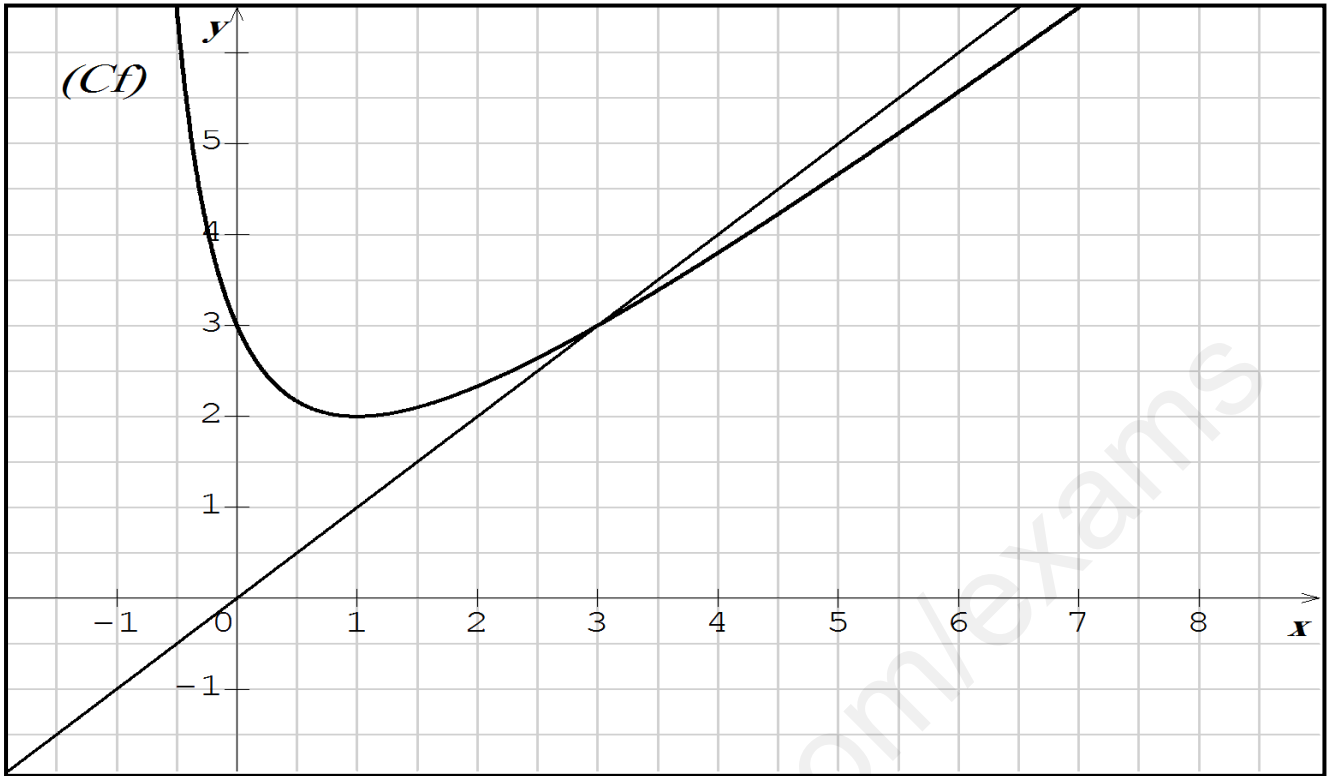
$x = \lambda$ ، $x = 0$ و $y = -1$ حيث $\lambda > 0$. ثم احسب $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} S(\lambda)$

(7) نعتبر الدالة h المعرفة على IR بـ: $h(x) = \frac{|2x-2|}{e^x - 2x}$ ، (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق

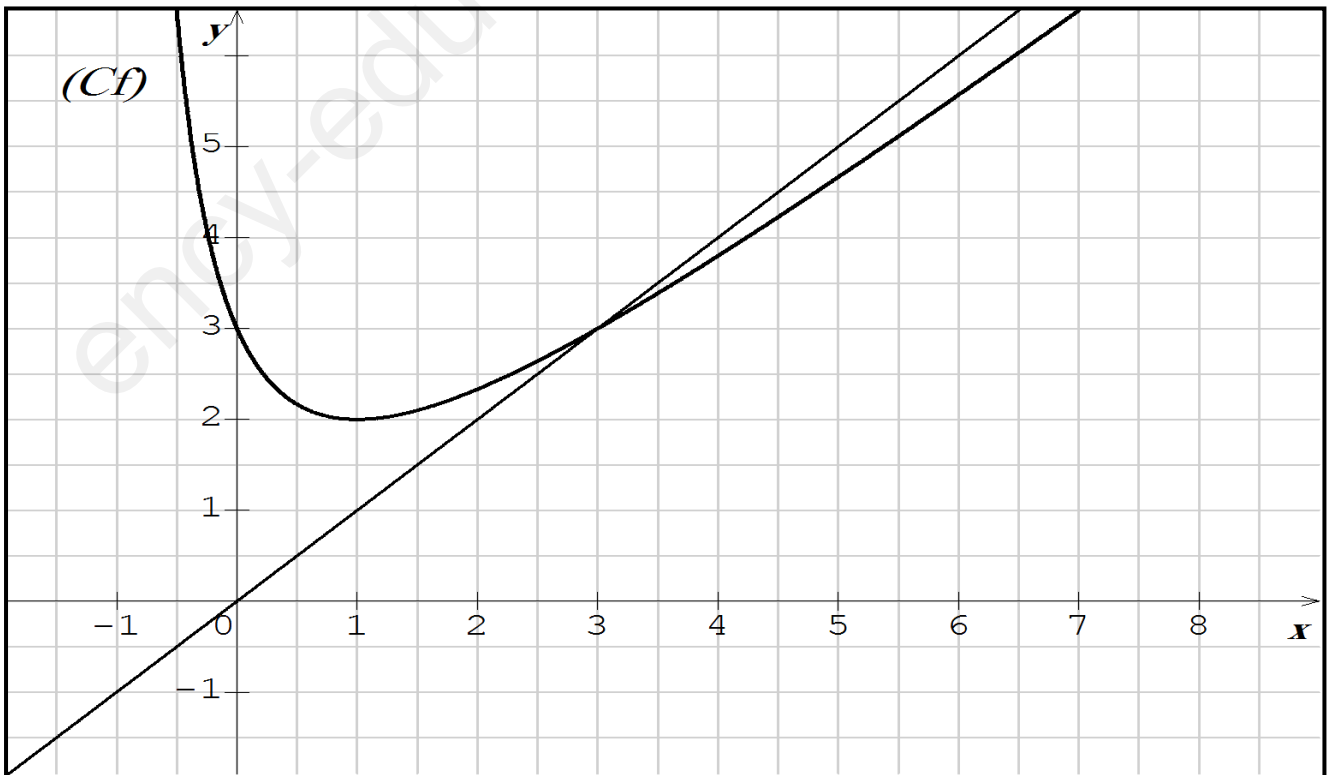
أ - اكتب عبارة الدالة h دون رمز القيمة المطلقة، ثم انشئ (C_h) في المعلم السابق

ب - عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة: $\left| \frac{2x-2}{e^x - 2x} \right| = |m|$ ثلاث حلول متميزة

اللقب و الاسم : القسم :



اللقب و الاسم : القسم :



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (4ن)

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التعليل.

(1) المتتاليتان (u_n) و (v_n) معرفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n$ و $v_n = 1 + \left(\frac{4}{9}\right)^n$ و (w_n) متتالية عددية معرفة

على $\mathbb{N}$ وتحقق $u_n \leq w_n \leq v_n$. نهاية المتتالية (w_n) لما n يؤول إلى $+\infty$ تساوي:

(أ) 1 (ب) $+\infty$ (ج) 0

(2) ليكن الحدثين A و B حيث: $P(A) = 0,4$ ، $P(B) = 0,5$ و $P(A \cup B) = 0,35$

$P(A \cap B)$ يساوي: (أ) 0,1 (ب) 0,25 (ج) 0,3

(3) العدد الحقيقي $I = \int_{-1}^1 \frac{e^x + x - 1}{x^2} dx$ يساوي:

(أ) $\frac{1}{e} + e$ (ب) $\frac{1}{e} - e$ (ج) $\frac{1}{e} - e + 2$

التمرين الثاني: (4.5ن)

(1) صندوق U_1 به كرتان مرقمتان 1 و 2 وصندوق U_2 به أربع كريات مرقمة 1، 2، 3 و 4 .

نختار عشوائيا صندوقا ونسحب منه كرية واحدة . (الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس)

أ- ما احتمال سحب كرية تحمل الرقم 1 ؟ (يمكنك الاستعانة بشجرة الاحتمالات)

ب- اذا علمت أن الكرية المسحوبة تحمل الرقم 1 ، ما احتمال أن تكون واردة من الصندوق U_1 ؟

(2) نجمع محتوى الصندوقين U_1 و U_2 في صندوق واحد U ، ثم نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الصندوق U .

أ- ما احتمال الحصول على كرتين لهما نفس الرقم ؟

ب- ليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين. حدد قانون احتمال Y .

(3) لاعبان، أحمد و فريد، يقرران أنه اذا كان مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين فردي فإن أحمد يمنح 10 DA لفريد

أما في الحالة المعاكسة فإن فريد يمنح α DA لأحمد.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة الربح أو الخسارة المحتملة لأحمد .

- أحسب الأمل الرياضي لـ $E(X)$ بدلالة α ، ثم حدد قيمة α لكي تكون اللعبة متكافئة .

التمرين الثالث: (4.5ن)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = \frac{3}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$

(1) أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$ ،

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 < u_n < 2$ ،

(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 1)$

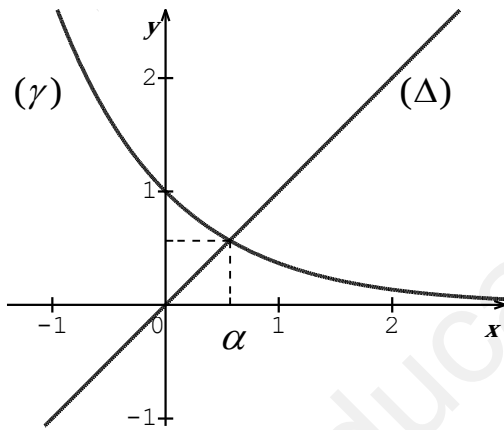
أ- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 يطلب حساب حدها الأول.

ب- اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} + 1$

ج- احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $(u_0 - 1) \times (u_1 - 1) \times \dots \times (u_n - 1) = 2^{(1-2^{n+1})}$

التمرين الرابع: (7ن)



المستوي منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(I) ليكن (γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto e^{-x}$ و (Δ) المستقيم

ذو المعادلة $y = x$ ، α هي فاصلة نقطة تقاطع (Δ) و (γ)

1- بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة لـ (Δ) على $\mathbb{R}$

2- g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^{-x} - x$

استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

3- تحقق أن: $0,56 < \alpha < 0,57$

(II) f الدالة المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 + (3x + 3)e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

1- أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب) ادرس الوضعية النسبية بين المنحنى (C_f) والمنحنى (P) الممثل للدالة مكعب.

ج) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^3]$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً.

2- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -3x \times g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3- أنشئ المنحنى البياني للدالة مكعب ثم المنحنى (C_f) . تعطى $f(\alpha) \approx 2,8$

(III) 1- باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب العدد $S = \int_{-1}^0 (3x + 3)e^{-x} dx$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً.

2- من أجل كل عدد حقيقي موجب تماماً β ، نرمز بـ $S(\beta)$ لمساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين

(C_f) و (P) و المستقيمين ذا المعادلتين $x = \beta$ و $x = 0$

- هل توجد قيمة لـ β تحقق المعادلة: $S(\beta) = S$ ؟ برّر إجابتك.

انتهى الموضوع الأول

التمرين الأول: (4ن)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ: $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{5 + \frac{1}{2}u_n^2}$ ،

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \sqrt{10}$ ،

(2) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \beta - u_n^2$ حيث β عدد حقيقي.

- عين قيمة β التي من أجلها تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

(4) نضع فيما يلي: $\beta = 10$

أ- أكتب عبارة u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

ب- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2$

التمرين الثاني: (4.5ن)

(1) كيس U_1 به 6 كرات بيضاء و 5 سوداء، كلها مرقمة بالرقم 2. (الكرات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس)

نسحب منه عشوائيا وفي آن واحد 3 كرات.

إن سحب كرة بيضاء يعطي ربحا قدره 5 نقاط ، وسحب كرة سوداء يعطي ربحا قدره n نقطة ، حيث n عدد طبيعي أكبر من 5.

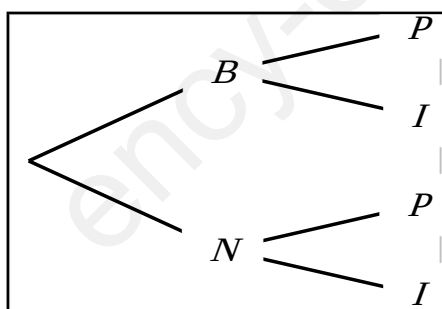
المتغير العشوائي X يرفق بكل عملية سحب مقدار الربح المحصل عليه .

أ- برّر أن قيم المتغير العشوائي X هي: $\{15 ; n+10 ; 3n ; 2n+5\}$ ، ثم عرّف قانون احتماله.

ب- بين أن: $E(X) = \frac{15}{11}(n+6)$ ، ثم عين أصغر قيمة للعدد n بحيث يكون: $E(X) \geq 30$

(2) كيس U_2 به 5 كرات مرقمة من 1 الى 5. (الكرات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس)

نسحب عشوائيا كرة من الكيس U_1 ، اذا كانت سوداء نقوم بسحب كرة واحدة من الكيس U_2 ، وإذا كانت بيضاء ندخلها



في الكيس U_2 ثم نسحب من هذا الأخير كرة . نعتبر الحوادث التالية :

B : سحب كرة بيضاء ، N : سحب كرة سوداء

P : كرة تحمل رقما زوجيا ، I : كرة تحمل رقما فرديا

أ- انقل ثم أكمل شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية.

ب- احسب احتمال سحب كرة تحمل رقما فرديا .

التمرين الثالث: (4.5ن)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 - 2z + 5 = 0$

ثم استنتج حلول المعادلة $(z^2 + 1)^2 - 2z^2 + 3 = 0$

(2) المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ثلاث نقاط من E و D, C, B, A

المستوي لاحقاتها : $z_E = 1+i$ ، $z_D = \overline{z_C}$ ، $z_C = -1-i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_A = 1+2i$

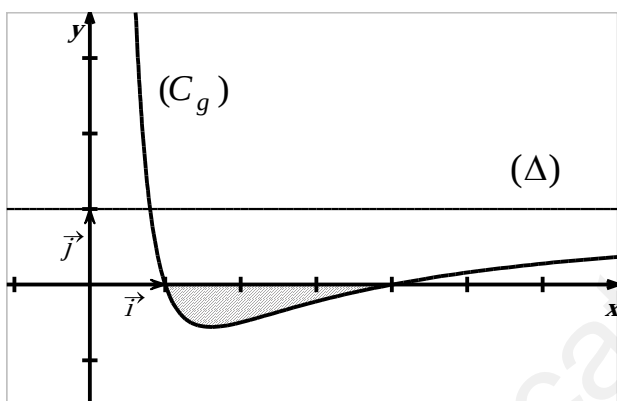
$$\text{أ- بين أن: } \left(\frac{\sqrt{2}z_A}{z_A + z_B + z_E} \right)^{2017} = \frac{z_E}{\sqrt{2}}$$

ب- عين زاوية الدوران r الذي مركزه D ويحول C الى E

ج- بين أن: $\frac{z_A - z_B}{z_D - z_C}$ عدد حقيقي، ثم استنتج أنه يوجد تحاك h يحول D الى A ويحول C الى B ، يطلب تعيين نسبته و مركزه.

(3) بين أن النقاط A, B, C و E تنتمي الى الدائرة التي مركزها F ذات اللاحقة $z_F = \frac{3}{4}$

التمرين الرابع: (7ن)



I- المستوي منسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ التمثيل البياني المقابل (C_g) هو للدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$

بالعبارة: $g(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$ حيث a, b و c عدنان حقيقيان

حامل محور الترتيب و (Δ) هما مستقيمان مقاربان لـ (C_g) .

(1) حدد قيمة كل من $g(1)$ و $g(4)$.

(2) جد $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، ثم استنتج قيمة a .

(3) أثبت انه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما: $g(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$.

II- لتكن f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - 5\ln x - \frac{4}{x}$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

(2) اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما: $f'(x) = g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

III- (1) احسب المساحة S للجزء المظلل في الجزء I.

(2) من أجل كل عدد حقيقي α أكبر من أو يساوي 4، نرمز بـ S_α لمساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى

(C_g) و محور الفواصل و المستقيمين ذو المعادلتين $x = 4$ و $x = \alpha$.

- هل توجد قيمة لـ α بحيث $S_\alpha = S$ ؟ برّر إجابتك.

ثانوية: الاخوة معقب- عماري	المستوى: 3 علوم تجريبية
التاريخ: 2023/05/15	المدة: 03 سا و 30 د
امتحان البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات	

على المترشح ان يختار احد الموضوعين

الموضوع الأول

التمرين الاول: (04ن): اختر الاجابة الصحيحة مع التعليل

- المتتالية (I_n) المعرفة بـ: $I_n = \int_n^{n+1} e^{1-x} dx$ هي متتالية هندسية أساسها q يساوي:

(أ) $\frac{1}{e}$ (ب) e (ج) $\sqrt{e}$ (د) $\frac{-1}{\ln x}$
- الدالة الاصلية للدالة: $x \rightarrow \frac{1}{x(\ln x)^2}$ على المجال $]1, +\infty[$ والتي تتعدم من اجل e عبارتها هي:

(أ) $\frac{1}{\ln x}$ (ب) $1 - \frac{1}{\ln x}$ (ج) $\frac{-1}{\ln x}$ (د) $\frac{1}{\ln x}$
- نعتبر العدد المركب: $z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i$ العدد z^2 يساوي:

(أ) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (ب) $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (ج) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ (د) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
- من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n > 2$ فان: $c_{n-1}^2 + c_n^2$ يساوي:

(أ) $\frac{1}{2}(n-1)^2$ (ب) $(n-1)^2$ (ج) $n^2 - 2n$ (د) n^2

التمرين الثاني: (04.5ن):

- كيس غير شفاف يحوي كريات لا نفرق بينهما باللمس منها 3 بيضاء مرققة (α, α, β) و 3 سوداء مرققة $(\beta, \beta, -\alpha)$ و 2 حمراء مرققة $(\alpha, -\alpha)$ حيث α و β عدنان طبيعيين و $(0 < \beta < \alpha)$. نسحب عشوائيا وفي ان واحد كرتان ونسمي الأحداث التالية:

A "الكرتان مختلفتان في اللون" B "الكرتان تحمل نفس الرقم" C "مجموع أرقام الكرتين موجب تماما"

أ- أحسب مايلي: $P(C)$ و $P(A \cup B)$.

- باعتبار الأعداد $\alpha, -\alpha, \beta$ بهذا الترتيب حدود متتابعة من متتالية حسابية وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع الرقنين الظاهرين على الكرتان .

أ- بين أن قيم المتغير العشوائي X هي $I = \{-2\alpha, 0, 2\alpha, 4\alpha, 6\alpha\}$

ب- عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي بدلالة α

ج- عين قيمة α بحيث يكون: $E(28X + 1883) = 2023$

التمرين الثالث: (04.5ن):

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على: $u_n = e^{2n} - e^{2(n-1)}$

- أ. بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

اقلب الصفحة

- 2- نضع من أجل كل عدد طبيعي : $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
 أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $s_n = e^{2n} - e^{-2}$
 3- نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على N ب: $v_n = \sqrt{s_n + e^{-2}}$
 أ- أحسب بدلالة n المجموع s'_n حيث $s'_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$
 4- نعتبر أن المتتالية (w_n) المعرفة على N كإيلي : $w_n = \ln(v_n)$
 أ- بين أن المتتالية (w_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول
 5- بين أنه من أجل كل عدد كل عدد طبيعي n : $v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = \sqrt{e^{n^2+n}}$
 التمرين الرابع: (07ن):

- 1- نعتبر الدالة g المعرفة على $]0, +\infty[$ ب: $g(x) = -x \ln x + e$
 أ- ادرس تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها
 ب- أحسب $g(e)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0, +\infty[$
 2- نعتبر الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + ex - e$ و (c_f) المنحني البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم المتعامد والمتجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$ بحيث $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 4cm$
 أ- أحسب نهاية الدالة f عند D_f ثم فسر النتيجة بيانياً.
 ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$
 ج- بين أن f متناقصة تماماً على $]0, \frac{1}{e}]$ ومتزايدة تماماً على $[\frac{1}{e}, +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها
 3- أ- أحسب $f(1)$ ثم بين أن $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0.11, 0.12[$
 ت- بين أن $y = e(x-1)$ هي معادلة المماس (T) للمنحني (c_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.
 ج- ادرس وضعية (T) بالنسبة إلى (c_f)
 د- أنشئ (T) و (c_f)
 4- نعتبر الدالة h المعرفة على $]0, +\infty[$ ب: $h(x) = |f(x)|$ (c_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق
 أ- اشرح كيفية إنشاء (c_h) انطلاقاً من منحنى (c_f) ثم أنشئ (c_h)
 5- أ. نضع $I = \int_1^{e^2} \ln x \, dx$ بين عن طريق المكاملة بالتجزئة أن $I = e^2 + 1$
 ب. نضع $J = \int_1^{e^2} (\ln x)^2 \, dx$ بين عن طريق المكاملة بالتجزئة أن $J = 4e^2 - 2I$
 ج. أحسب ب cm^2 ، المساحة S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (c_f) والمستقيمات التي معادلاتها :
 $y = 0$ و $x = e^2$ ، $x = 1$

انتهى الموضوع الأول

نعتبر صندوقين متماثلين u_1 و u_2 بهما كرات متماثلة لا نفرق بينهما باللمس حيث:

u_1 : يحتوي على خمس كرات حمراء تحمل الأرقام 1، 1، 2، 0، 1 وثلاث كرات خضراء تحمل الأرقام 0، 1، 1.

u_2 : يحتوي على ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام 1، 1، 2 وكرتين خضراوين تحملان الرقمين 1، 0، نسحب عشوائيا أحد الصندوقين فإذا

كان u_1 نسحب منه كرتين على التوالي بدون ارجاع وإذا كان u_2 نسحب منه كرتين على التوالي وبالارجاع .

1- أحسب احتمال الحدثين التاليين: A: سحب كرتين من نفس اللون و B: سحب كرتين تحملان نفس الرقم

2- بين أن $P(A \cap B) = \frac{37}{175}$ ، هل الحدثين A و B مستقلان؟ علل

3- إذا علمت أن الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين، فما هو احتمال أن تكون من الصندوق u_1 ؟

4- نأخذ الكرات الموجودة في الصندوقين u_1 و u_2 ونضعها جميعا في صندوق واحد u_3

نسحب عشوائيا من الصندوق u_3 كرتين في ان واحد وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين .

أ- عين قيم المتغير العشوائي X ، عرف قانون احتماله ثم أحسب $v(-3X + 7)$

(u_n) المتتالية المعرفة على N بـ $u_0 = \frac{3}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{\sqrt{3U_n^2 + 4}}{2}$

1- أ. برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < U_n < 2$

ب. بين انه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1}^2 - U_n^2 = \frac{4 - U_n^2}{4}$

ج. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم بين أنها متقاربة

2- (v_n) المتتالية العددية المعرفة على N بـ: $v_n = U_n^2 - 4$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = \sqrt{4 - \frac{7}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n}$

3- نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = U_0^2 + U_1^2 + \dots + U_n^2$

أ- بين انه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = -7 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) + 4(n+1)$

ب- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$

1- حل في مجموعة الاعداد المركبة المعادلة ذات المجهول Z التالية $(Z - 6)(Z^2 - 6Z + 12) = 0$

2- المستوي المركب منسوب الى معلم المتعامد والمتجانس (o, u, v)

لتكن النقط A، B و C التي لواحقتها على الترتيب $Z_A = 3 + i\sqrt{3}$ ، $Z_B = 3 - i\sqrt{3}$ و $Z_C = 6$

أ- أكتب Z_A و Z_B على الشكل الأسّي ثم عين قيمة العدد الطبيعي بحيث يكون $\left(\frac{Z_A}{Z_B}\right)^n$ حقيقي موجباً.

ب- بين أن $\left(\frac{Z_A}{Z_B}\right)^{2023} + \left(\frac{Z_A}{Z_B}\right)^{1444} = 0$

3- أ- بين أن $\frac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_C} = e^{-\frac{\pi}{3}i}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

4- عين المجموعة (E) للنقط M من المستوي التي تحقق $|z - 6| = |iz + \sqrt{3} - 3i|$

التمرين الرابع: (07):

1- (c_1) و (c_2) هما على الترتيب التمثيلان البيانيان للدالتين المعرفتين على R بـ

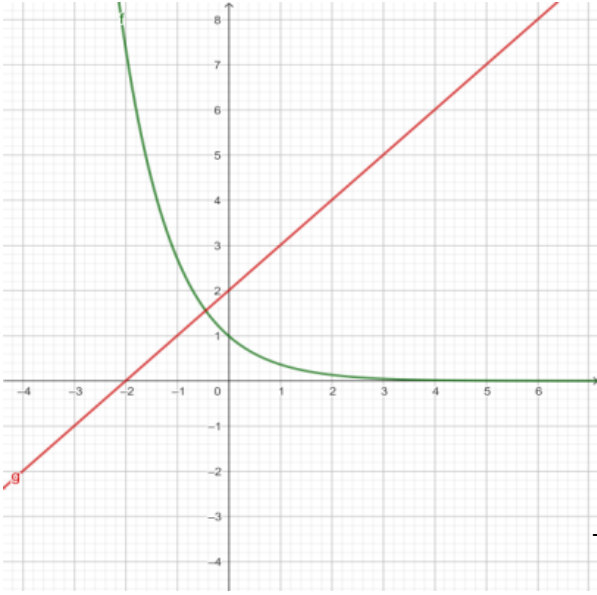
$x \rightarrow e^{-x}$ و $x \rightarrow x + 2$ كما في الشكل المقابل.

(c_1) و (c_2) يتقطعان في نقطة وحيدة فاصلتها α

الدالة g المعرفة على R بـ: $g(x) = e^{-x} - x - 2$

أ- بقراءة بيانية، حدد حسب قيم x من R وضعية (c_1) بالنسبة إلى (c_2)

ب- استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ ثم تحقق أن: $-0.5 < \alpha < -0.4$



2- نعتبر الدالة f المعرفة على R كإيلي: $f(x) = -x + 1 + \frac{x-1}{e^x}$ و (c_f) تمثيلها البياني في معلم م وم $(0, \vec{i}, \vec{j})$. وحدة الطول هي 1cm.

أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3- أ. بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (c_f)

4- ثم أدرس وضعية (c_f) بالنسبة إلى (Δ)

5- أ. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x) = -\frac{g(-x)}{e^x}$

ب. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

ت. بين أن $f(-\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha+2}$ ثم استنتج حصراً لـ $f(-\alpha)$

ج- بين أن (c_f) يقبل مماساً (T) معامل توجيهه 1- ثم أكتب معادلته .

6- أنشئ (c_f) ، (Δ) و (T)

7- ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = -x + 2m$

8- باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (c_f) و (Δ) والمستقيمتان المقاربة $x = 0$ و $x = 1$.

انتهي الموضوع الثاني

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

1. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = \left(\frac{1 + \sqrt{u_n}}{2} \right)^2$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n \leq 1$.

2. بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{u_n})(1 + 3\sqrt{u_n})$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و برر تقاربها.

II. المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = \sqrt{u_n} - 1$.

1. أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الأول.

ب) اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)^2$ واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2. احسب بدلالة n المجموع S_n بحيث $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

يحتوي كيس على 8 كريات متماثلة منها 6 كريات بيضاء مرقمة ب: 0, 2, 2, 2, 2, 4 و كريتين سوداوين مرقمتين ب: 0, 1.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من هذا الكيس ونعتبر الحدثين A و B بحيث: الحدث A : الحصول على ثلاث كريات مختلفة اللون والحدث B : الحصول على ثلاث كريات مجموع أرقامها يساوي 4.

1. احسب كلا من $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحدثين A و B على الترتيب.

2. بين أن $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$ ، ثم استنتج كلا من $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$.

3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب أصغر الأرقام المحصل عليها أو يساويها. ✓ عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

4. نسحب الآن عشوائيا n كرية على التوالي بالإرجاع بحيث $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ ونسمي C الحدث: الحصول على n كرية سوداء.

✓ بين أن $P(C) = \left(\frac{1}{4} \right)^n$ ، ثم أوجد أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $P(\bar{C}) \geq 0,99$.

التمرين الثالث: 05 نقاط

1. جد العددين المركبين α و β بحيث:
$$\begin{cases} 2\bar{\alpha} - \sqrt{3}\bar{\beta} = 3\sqrt{3} + i \\ \frac{\alpha i}{\beta} - \beta = 0 \end{cases}$$

II. في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها

$$z_C = -1 + i\sqrt{3} \text{ و } z_B = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z_A, z_A = \sqrt{3} + i$$

1. اكتب z_B على الشكلين المثلثي والجبري، ثم استنتج القيم المضبوطة لـ $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

2. أ) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون $\left(\frac{z_B}{\sqrt{2}z_A}\right)^n$ تخيليا بحثا سالبا تماما.

ب) تحقق أن صورة B صورة A بتحويل نقطي S يطلب تعيين طبيعته وتحديد عناصره المميزة.

3. أ) بين أن $\frac{z_C}{z_A} = i$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث AOC .

ب) تحقق أن $z_B - z_A = z_C$ ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $AOCB$.

ج) عين طبيعة المجموعة (E) مجموعة النقط $M(Z)$ بحيث $\left|\frac{\bar{z} - \sqrt{3} + i}{\frac{\sqrt{2}}{2}iz}\right| = \left|\frac{z_B}{z_A}\right|$ ، ثم عين صورتها

بالتحويل النقطي S .

التمرين الرابع: 07 نقاط

x	$-\infty$	1		4	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	$+\infty$			$1+5e(-2)$	
		$1-e$			1

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (x^2 - 3x + 1)e^{2-x} + 1$ والجدول المقابل يمثل جدول تغيراتها.

1. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما العدد 2 والآخر α بحيث $0,4 < \alpha < 0,5$.

2. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (-x^2 + x)e^{2-x} + x$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب

إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

2. بين أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين احداثيتهما.

3. أ) بين أن المستقيم (Δ) إذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$ ، ثم ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) .

ب) بين أن (C_f) يقبل مماسين موازيين لـ (Δ) .

4. احسب $f(0)$ ، ثم أنشئ (Δ) ومثل (C_f) على المجال $[0; +\infty[$. يعطى $f(\alpha) \approx 1,65$.

5. أ) بين أن الدالة H المعرفة بـ: $H(x) = (x^2 + x + 1)e^{2-x}$ دالة أصلية للدالة $f(x) = (-x^2 + x)e^{2-x}$ على $\mathbb{R}$.

ب) احسب المساحة A للحيز المحدد بـ: (C_f) و (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = 0$ و $x = 1$.

الموضوع الثاني

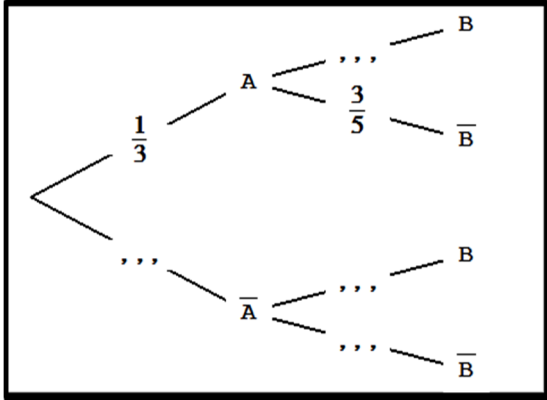
التمرين الأول: 04.5 نقطة

يحتوي وعاء U على ثلاث كريات متماثلة مرقمة بـ: $-1, 0, 1$ ، ويحتوي وعاء V على خمس كريات لا نفرق بينها باللمس منها ثلاث كريات حمراء وكريتين بيضاوين.

نسحب عشوائيا كرتين على التوالي بالإرجاع من الوعاء U فإذا كان مجموع رقميهما معدوماً نسحب عشوائيا كرتين على التوالي بدون إرجاع من الوعاء V وإذا كان مجموع رقميهما غير معدوماً نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الوعاء V .

نسمي A الحدث: الحصول على كرتين مجموع رقميهما معدوم من الوعاء U .

نسمي B الحدث: الحصول على كرتين من نفس اللون من الوعاء V .



1. بين أن $P(A) = \frac{1}{3}$ وأن $P_A(\bar{B}) = \frac{3}{5}$.

2. انقل ثم أكمل شجرة الاحتمالات المقابلة.

3. احسب كلا من $P(\bar{B})$ و $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ ، ثم استنتج $P_B(\bar{A})$.

4. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بعملية سحب كرتين من نفس اللون من الوعاء V العدد α^2 و يرفق بسحب كرتين مختلفتين في اللون العدد α بحيث α عدد صحيح غير معدوم.

أ) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب بدلالة α أمله الرياضي $E(X)$.

ب) عين قيمة العدد الصحيح α حتى يكون $E(X) = -\frac{1}{5}$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{5}{3} \end{cases}$$

1. أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < \frac{5}{2}$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

2. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{5}{2} - u_{n+1} = \frac{1}{3} \left(\frac{5}{2} - u_n \right)$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{5}{2} - u_n = \left(\frac{1}{3} \right)^n \left(\frac{5}{2} - u_0 \right)$ ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n و

احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(u_{n+1} - u_n)$.

أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -\ln 3$ ، ثم اكتب v_n بدلالة n .

ب) احسب بدلالة n الجداء P_n بحيث: $P_n = (u_1 - u_0) \times (u_2 - u_1) \times \dots \times (u_{n+1} - u_n)$.

التمرين الثالث: 04.5 نقطة

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(\vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط $A \left(z_A = e^{i\frac{\pi}{6}} \right)$ ، $B(z_B = \bar{z}_A)$ ، $z_C = -i$.

1. نعتبر الدوران R الذي مركزه النقطة A وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$ والذي يحول النقطة $M(Z)$ إلى النقطة $M'(z')$.
- أ) عين الكتابة المركبة للدوران R ، ثم تحقق أنه يحول النقطة C إلى النقطة B .
- ب) استنتج طبيعة المثلث ABC ، ثم استنتج العناصر المميزة للدائرة المحيطة به.
- ج) عين لاحقة النقطة D التي من أجلها يكون الرباعي $ABCD$ معيناً.
2. يبين أن $i = \left(z_A \times z_B \right)^{2023} + \left(\frac{z_B}{z_A} \right)^{1443} - \left[\frac{1}{2} (z_B - \overline{z_A}) \right]^{2973}$.
3. عين طبيعة المجموعة (E) للنقط $M(z)$ بحيث: $\text{Arg} \left(\frac{z_C - z}{z_A - z} \right) = \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$.
4. ليكن S التحويل النقطي الذي يحول النقطة $M(z)$ إلى النقطة $M'(z')$ بحيث: $z' = \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)z + z_C$.
- أ) عين طبيعة التحويل النقطي S محدداً عناصره المميزة.
- ب) استنتج طبيعة التحويل النقطي $S \circ R$ محدداً عناصره المميزة.
- التمرين الرابع: 07 نقاط**
- I. نعتبر الدالة g المعرفة والمتزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ بحيث: $g(x) = x^3 + 3x - 2$.
1. يبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن $0,5 < \alpha < 0,7$.
2. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.
- II. الدالة f معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \right)$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.
1. تحقق أنه من أجل $x > -1$: $f(x) = \ln(x+1) + \ln \left(1 - \frac{x}{x^2 + 1} \right)$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.
2. أ) يبين أنه من أجل $x > -1$: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^3 + 1)(x^2 + 1)}$ ، ثم تحقق أنه من أجل $x > -1$: $x^3 + 1 > 0$.
- ب) ادرس حسب قيم x إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
3. يبين أن $f(\alpha) = \ln \left(\frac{3}{2} \alpha \right)$ ، ثم استنتج حصر $f(\alpha)$.
4. الدالة h معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $h(x) = \ln(x+1)$ و (C_h) تمثيلها البياني في المستوي السابق.
- أ) استنتج أن (C_h) صورة المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto \ln x$ بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه.
- ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h(x)]$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً وادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_h) .
5. أ) احسب $f(1)$ و $h(1)$ ، ثم مثل (C_f) .
- ب) عين بيانياً قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماماً m التي من أجلها المعادلة $f(x) = \ln(m)$ تقبل ثلاث حلول متميزة.



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$

- بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$.
- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = f(u_n)$.
أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0 \leq u_n < 2$
ب - أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ثم استنتج أنها متقاربة.
- نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$

أ - برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 .

ب - أكتب كل من u_n و v_n بدلالة n . ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{1}{u_0+1} + \frac{1}{u_1+1} + \frac{1}{u_2+1} + \dots + \frac{1}{u_n+1}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس U على ثلاث كرات تحمل الرقم 2 و كرتان تحملان الرقم 3، ويحتوي كيس V على ثلاث كرات حمراء وكرتين سوداويتين. (كل الكرات متماثلة لا نميز بين الكرات عند اللمس)
نسحب الآن كرة واحدة من الكيس U ونسجل رقمها.

• إذا كانت تحمل رقم 2 نسحب كرتين بالتتابع دون ارجاع من الصندوق V

• إذا كانت تحمل رقم 3 نسحب ثلاث كرات في أن واحد من الصندوق V

نعتبر الحادثتين: A "الكرات المسحوبة من نفس اللون"

B "الحصول على كرتين حمراويتين على الأقل"

- بين أن $P(A) = \frac{7}{25}$ ، ثم احسب $P(B)$

2. ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من U تحمل رقم 2 علما أن الكرات المسحوبة من V من نفس اللون

3. نعتبر X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة

أ. عين قيم المتغير X

ب. عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)(z^2 + 2z + 4) = 0$

(2) المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

نعتبر النقط A, B, C و D لواحقتها على الترتيب :

$$z_D = -1 + i\sqrt{3} \text{ و } z_C = -1 - i\sqrt{3}, \quad z_B = \overline{z_A}, \quad z_A = \sqrt{3} + i$$

أ. أكتب كلا من z_C و z_A على شكل أسّي ، ثم استنتج شكل أسّي لكل من العددين z_D و z_B .

ب. تحقق أن $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_A} = -i$ ، ثم استنتج أن المستقيمين (AC) و (BD) متعامدان.

ت. اكتب العدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$ على شكل أسّي ثم استنتج طبيعة المثلث OAB .

(3) عين طبيعة (E) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحتقتها Z بحيث: $|iz - z_B| = |\bar{z} - z_C|$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = (x+1)^2 e^{-x} - 1$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل ثلاث حلول ، أحدها الحلول معدوم والآخرين هما α و β حيث

$$-1,48 < \beta < -1,47 \text{ و } 2,51 < \alpha < 2,52$$

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = x - 2 + (x^2 + 4x + 5)e^{-x}$.

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $f'(x) = -g(x)$

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f . ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4. أنشئ (Δ) و (C_f) ، حيث نأخذ $f(\alpha) \approx 2,2$ و $f(\beta) \approx 2,1$

5. أ- عين الأعداد الحقيقية a, b و c بحيث تكون الدالة $H: x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ هي دالة

أصلية للدالة $e^{-x}(x^2 + 4x + 5)$ على $\mathbb{R}$.

ب- أحسب المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و (Δ) والمستقيمين اللذين

معادلتاهما $x = \alpha$ و $x = 0$.

ج- بين أن: $A(\alpha) = \frac{2\alpha(5\alpha+8)}{(\alpha+1)^2}$ ، ثم جد حصرًا للمساحة $A(\alpha)$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط):

يحتوي صندوق على 12 كرية كل الكريات متماثلة لانفرق بينها عند اللمس منها ستة كريات سوداء مرقمة ب: 0، 0، 0، 0، 1، 1، -1 و أربع كريات بيضاء مرقمة ب: 1، 1، -1، 1 و كرتين حمراوتين مرقمتين ب: 2، -2 - نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق

(1) احسب احتمال الحوادث الآتية

"الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون"

"الحصول على ثلاث كريات مجموع أرقامها معدوم"

"الحصول على ثلاث كريات مختلفة الأرقام مثنى مثنى"

(2) بين أن $P(B \cap C) = \frac{2}{11}$

(3) علما أن الكريات الثلاث المسحوبة تحمل ارقام مختلفة مثنى مثنى علما أن مجموع أرقامها معدوم .

(4) نعتبر المتغير العشوائي X المرتبط بعدد الكرات المتحصل عليها التي تحمل الرقم 0

• عرف قانون احتمال للمتغير العشوائي X

• احسب امله الرياضياتي $E(X)$

التمرين الثاني: (05 نقاط):

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية ، مع التبرير :

1. عمدة العدد المركب : $Z = -4ie^{i\frac{\pi}{6}}$ هي :

(أ) $Arg(Z) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ (ب) $Arg(Z) = \frac{\pi}{6} + \pi + 2k\pi$ (ج) $Arg(Z) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

2. في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط A, B, C و D لواحقها على

الترتيب $z_D = -2 - i$ و $z_C = 1$ ، $z_B = -1 + 2i$ ، $z_A = 2 + 3i$

(أ) $ABDC$ مربع (ب) $ABDC$ معين (ج) $ABDC$ مستطيل

3. القيمة المتوسطة للدالة $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ على المجال $[e; e^e]$ هي

(أ) $m = \frac{1}{e^e - e}$ (ب) $m = 0$ (ج) $m = \frac{e - 1}{e^e - e}$

4. (u_n) و (v_n) متتاليتين معرفتين على $\mathbb{N}$ ب: $u_{n+1} = 7u_n - 18n + 9$ و $v_n = u_n + \alpha n + \beta$

قيمة العددين الحقيقيين α و β حتى تكون (v_n) متتالية هندسية هي :

(أ) $\alpha = 3$ و $\beta = 1$ (ب) $\alpha = 1$ و $\beta = 3$ (ج) $\alpha = -3$ و $\beta = 1$

1. (u_n) متتالية هندسية متزايدة حدودها موجبة حدها الأول u_0 وأساسها q حيث :

$$u_1 + u_3 = 90 \text{ و } u_1 \times u_3 = 729$$

أ. أحسب u_0 و q

ب. اكتب u_n بدلالة n

2. نفرض أن $u_0 = 3$ و $q = 3$ ونعتبر المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3} \quad \text{و} \quad \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n \end{cases}$$

أ) بين أن المتتالية (w_n) هندسية ، عيّن أساسها وحدها الأول w_0 .

ب) أكتب w_n بدلالة n ، ثم استنتج v_n بدلالة n .

ت) احسب بدلالة n المجموع حيث S_n : $S_n = \frac{v_0}{u_0} + \frac{v_1}{u_1} + \frac{v_2}{u_2} + \dots + \frac{v_n}{u_n}$

التمرين الرابع : (07 نقاط):

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^2 - 1 - 2 \ln x$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2. استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = \frac{x^2 + 1 - (\ln x)^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

2. برهن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (يمكن وضع : $t = \sqrt{x}$) ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3. أ . أثبت أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x) + (\ln x)^2}{x^2}$.

ب . استنتج اتجاه تغيرات الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4. أ) أثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

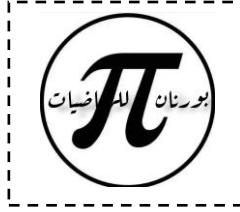
5. أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق : $0,34 < \alpha < 0,35$

6. بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها .

7. أرسم (Δ) و (C_f)

8. أحسب بدلالة α العدد : $A(\alpha) = \int_{\alpha}^1 [f(x) - x] dx$.

• بين أن : $A(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 + 1} \left(\frac{2 - \alpha^2}{3} \right)$ ، ثم عين حصرا للعدد $A(\alpha)$



التمرين الأول :

عَيِّن الاقتراح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية ، مع التبرير :

① حل المعادلة التفاضلية $y' = -2y + 4$ الذي يحقق $y(0) = 2024$ هو الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ ب :

$h(x) = 2024e^{-2x} - 2$ (ج)	$h(x) = 2021e^{-2x} + 2$ (ب)	$h(x) = 2022e^{-2x} + 2$ (أ)
------------------------------	------------------------------	------------------------------

② (v_n) متتالية حسابية حدها الأول $v_0 = 1$ وأساسها $r = 2$ ، نضع : $P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n}$

عبارة P_n هي :

$e^{-n(n+1)}$ (ج)	$e^{(n+1)^2}$ (ب)	$e^{n(n+1)}$ (أ)
-------------------	-------------------	------------------

③ الدالة الأصلية F والتي تُحقّق : $F(1) = 0$ للدالة f المُعرّفة على $]0, +\infty[$ ب : $f(x) = \frac{x+1}{x}$ هي الدالة :

$F(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ (ج)	$F(x) = 1 - x + \ln x$ (ب)	$F(x) = x - 1 + \ln x$ (أ)
--	----------------------------	----------------------------

④ تتكون مجموعة من الأشخاص من 5 رجال و 3 نساء نريد تشكيل لجنة مكونة من 3 أشخاص رئيس نائب و كاتب ، احتمال أن تكون اللجنة تضم رجل و امرأتان هو

$\frac{45}{512}$ (ج)	$\frac{15}{56}$ (ب)	$\frac{5}{56}$ (أ)
----------------------	---------------------	--------------------

التمرين الثاني :

المتتالية العددية (U_n) معرفة بحدّها الأول U_0 حيث : $U_0 = 0$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{3}{8}(U_n + 5)$

① برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_n < 3$

② بيّن أنّ (U_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنّها متقاربة .

③ المتتالية العددية (V_n) معرفة على $\mathbb{N}$ ب : $V_n = 3(3 - U_n)$

أ/ أحسب V_0 ثم بيّن أنّ المتتالية (V_n) هندسية أساسها $\frac{3}{8}$

ب/ أكتب بدلالة n عبارة الحد العام V_n ثم استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $U_n = 3 - 3\left(\frac{3}{8}\right)^n$

ج/ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

④ نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n : $P_n = (3 - U_0) \times (3 - U_1) \times \dots \times (3 - U_n)$

أحسب P_n بدلالة n

يُراد تشكيل بطريقة عشوائية لجنة تتكون من عضوين من بين ثلاثة رجال H_1, H_2, H_3 وامرأتان F_1 و F_2 نعتبر الحوادث A, B, C حيث :

A "عضو اللجنة من نفس الجنس" B "عضو اللجنة من جنسين مختلفين"

C " H_1 عضو في اللجنة "

1/ أحسب $p(A)$ ، $p(B)$ احتمال A و B على الترتيب

ب/ بين أن $p(C)$ احتمال الحدث C يساوي $\frac{2}{5}$

2/ المتغير العشوائي X يرقب بكل إمكانية اختيار لعضوين عدد الرجال في اللجنة

بَرر أن مجموعة قيم X هي $\{0; 1; 2\}$

3/ عين قانون احتمال المتغير العشوائي X و احسب أمله الرياضي $E(X)$

التمرين الرابع :

I (لتكن الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $g(x) = \frac{2x^2-2x-1}{x^2} + \ln x$)

1/ بين أن الدالة g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$

2/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,2 < \alpha < 1,3$

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$

II (لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = \left(\frac{1}{x} - 2 - \ln x\right) e^{-x}$)

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

1/ بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ب/ فسّر النتيجتين السابقتين بيانيا

2/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما : $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

3/ أنشئ المنحنى (C_f) (نأخذ : $f(0,65) \approx 0$ و $f(\alpha) \approx -0,4$)

III (F الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $F(x) = e^{-x}(2 + \ln x)$)

1/ تحقق أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$

ب/ نضع $S(\lambda) = \int_{\lambda}^{1/2} f(x) dx$ حيث λ عدد حقيقي يحقق : $0 < \lambda < \frac{1}{2}$

أحسب $S(\lambda)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا .

بكالوريا تجريبي

المدة: 3 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. لتكن النقط A ، B و C من هذا المستوى التي لاحقاتها: $z_A = 2 - 2i$ ، $z_B = 1 + 3i$ و $z_C = -3 - 3i$.
عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التعليل في كل حالة مما يلي:

الاقتراح أ)	الاقتراح ب)	الاقتراح ج)
$e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$	$e^{i\pi}$	$e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$
الشكل الأسّي للعدد $\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)^{2023}$		
$(x+1)^2 + y^2 = 13$	$x^2 + y^2 = 13$	$(x-1)^2 + y^2 = 13$
معادلة الدائرة المحيطة بالمثلث ABC :		
$z_D = 7 - i$	$z_D = 4 - 4i$	$z_D = 3 + 3i$
لاحقة النقطة D صورة النقطة A بالتحاكي الذي مركزه C ونسبته 2:		
$n = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$)	$n = 4k$ ($k \in \mathbb{Z}$)	$n = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$)
قيم الأعداد الصحيحة n حتى يكون $(z_A - \bar{z}_B - z_C)^{2n}$ عددا حقيقيا موجبا:		
المجموعة (E) للنقط M لاحقتها z حيث $ \bar{z} + 3 - 3i = iz + 3 - i $	القطعة المستقيمة $[BC]$	الدائرة التي قطرها $[BC]$
		المستقيم محور القطعة $[BC]$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 16 كرية متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها 7 بيضاء، 6 سوداء و 3 خضراء. نسحب من هذا الكيس ثلاث كريات في آن واحد بطريقة عشوائية.

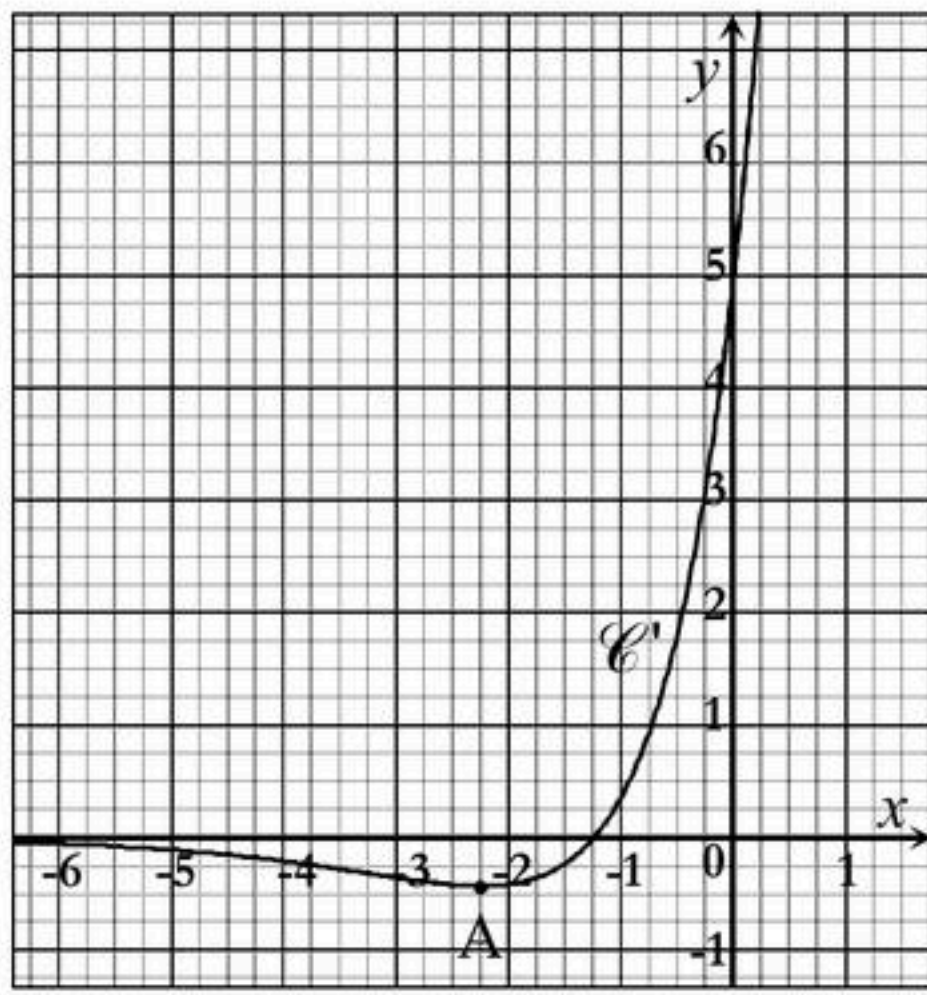
- احسب $P(A)$ احتمال الحادثة A : سحب ثلاث كريات من نفس اللون.
- احسب $P(B)$ احتمال الحادثة B : سحب ثلاث كريات مختلفة الألوان مثلي مثلي.
- احسب بطريقتين مختلفتين $P(C)$ احتمال الحادثة C : سحب ثلاث كريات من لونين مختلفين.
- نعتبر اللعبة التالية: عند سحب ثلاث كريات بيضاء يربح اللاعب 5 نقاط، عند سحب ثلاث كريات سوداء أو ثلاث كريات خضراء يخسر اللاعب 5 نقاط، عند سحب ثلاث كريات مختلفة الألوان مثلي مثلي لا يربح اللاعب شيئا، وفي الحالات المتبقية يربح اللاعب نقطتين. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب ربح أو خسارة اللاعب. عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب الأمل الرياضي $E(X)$ و $P(X^2 = 25)$.
- نسحب الآن من هذا الكيس ثلاث كريات على التوالي بحيث لا نعيد الكرية المسحوبة في كل مرة.
(أ) بين أن احتمال الحادثة D : سحب كرية واحدة فقط بيضاء أو كرية واحدة فقط خضراء هو $\frac{9}{14}$.
(ب) لتكن الحادثة E : الكرية الأولى المسحوبة سوداء. احسب الاحتمال الشرطي $P_D(E)$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بـ: $u_0 = -\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = (u_n + 1)e^{u_n} - 1$.
- 1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1 \leq u_n \leq -\frac{1}{2}$.
 - 2- من أجل كل عدد حقيقي x ، ادرس إشارة $(x+1)(e^x - 1)$. استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة.
 - 3- بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.
 - 4- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 + u_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{e}}(1 + u_n)$ ، وأن $1 + u_n \leq \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{2}$. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 - 5- من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$. بين أن: $S_n = \ln(2u_n + 2)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I- الدالة المعرفة والقابلة للاشتقاق على $]-\infty; 1]$ بـ: $g(x) = (ax+b)e^x - 1$ (a و b عدنان حقيقيان)



- في الشكل المقابل، $(\mathcal{C})$ هو التمثيل البياني للدالة g' مشتقة الدالة g .
- 1- إذا علمت أن $(\mathcal{C})$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $-\frac{5}{4}$ ، ويقطع حامل محور الترتيب في النقطة ذات الترتيبة 5، وأنه يقبل مماسا موازيا لحامل محور الفواصل في النقطة A ذات الفاصلة $-\frac{9}{4}$.
(أ) بقراءة بيانية ادرس اتجاه تغير الدالة g . ماذا تمثل النقطة A؟
(ب) عيّن العددين a و b . (في باقي التمرين نضع: $a=4$ و $b=1$).
 - 2- (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ، ثم شكّل جدول تغيرات g على $]-\infty; 1]$.
(ب) احسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty; 1]$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 1]$ بـ: $f(x) = x - (4x-3)e^x$

وليكن $(\mathcal{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1- (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم بين أن المنحني $(\mathcal{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = x$.
(ب) ادرس وضعية المنحني $(\mathcal{C})$ بالنسبة للمستقيم (Δ) مع تحديد نقطة تقاطعهما.
- 2- (أ) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها. (لاحظ أن $f'(x) = -g(x)$).
(ب) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث: $-\frac{5}{4} < \alpha < -2$ و $\frac{3}{4} < \beta < 1$.
- 3- (أ) اكتب معادلة (Δ') مماس $(\mathcal{C})$ الذي يوازي (Δ) ، ثم ارسم المستقيمين (Δ) و (Δ') ، والمنحني $(\mathcal{C})$.
(ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m وجود وعدد حلول المعادلة $(4x-3)e^x = m$.
- 4- لتكن الدالة h المعرفة على المجال $]-\infty; 1]$ بـ: $h(x) = (4x-3)e^x$.
(أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty; 1]$ فإن: $h(x) = 2h'(x) - h''(x)$.
(ب) استنتج دالة أصلية للدالة h على المجال $]-\infty; 1]$ والتي تتعدم عند الصفر.
- ج) احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحني $(\mathcal{C})$ ، (Δ) ، محور الترتيب، والمستقيم الذي معادلته $x = -1$.
- 5- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ ، $h^{(n)}(x) = (4x + 4n - 3)e^x$. $h^{(n)}$ المشتق النوني لـ h .

انتهى الموضوع الأول

x_i	-5	0	2	5
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{80}$	$\frac{9}{40}$	$\frac{27}{40}$	$\frac{1}{16}$

$$E(X) = -5\left(\frac{3}{80}\right) + 0 + 2\left(\frac{27}{40}\right) + \frac{5}{16} = \frac{59}{40}$$

$$P(X^2=25) = P(X=-5) + P(X=5) = \frac{1}{10}$$

$$P(D) = \frac{3A_7^1 A_9^2 + 3A_3^1 A_{13}^2 - 6A_7^1 A_6^1 A_3^1}{A_{16}^3} = \frac{9}{14} \quad (5)$$

$$\frac{C_7^1 C_9^2 + C_3^1 C_{13}^2 - C_4^1 C_6^1 C_3^1}{C_{16}^3} = \frac{9}{14} \quad \text{أو}$$

$$P(END) = \frac{2(A_6^1 A_5^1 A_7^1) + 2(A_6^1 A_5^1 A_3^1) + 2(A_6^1 A_7^1 A_3^1)}{A_{16}^3}$$

$$NVB \quad NBV \quad NVN \quad NVV \quad NBN \quad NVB$$

$$P(E) = \frac{P(END)}{P(D)} = \frac{71}{280} \times \frac{14}{9} = \frac{71}{180}$$

تمرين 3:

$$(1) -1 \leq u_n \leq -0.5 \quad u_0 = -0.5; n=0 \quad (-1 \leq u_n \leq -0.5)$$

نفرض أن $-1 \leq u_n \leq -0.5$ من أجل n كيف n كبيراً $-1 \leq u_{n+1} \leq -0.5$

$$0 \leq u_n + 1 \leq 0.5 \quad -1 \leq u_n \leq -0.5$$

$$e^{-1} \leq e^{u_n} \leq e^{-0.5} \quad \text{بالضرب طرفاً لطيف}$$

$$-1 \leq e^{u_n}(u_n+1) \leq -0.7 \leq -0.5; \quad 0 \leq e^{u_n}(u_n+1) \leq \frac{e^{-0.5}}{2}$$

$$n \in \mathbb{N} \text{ من أجل } -1 \leq u_n \leq -0.5 \text{ ومنه } -1 \leq u_{n+1} \leq -0.5$$

$$(2) \text{ إشارة } (x+1)(e^x-1) \quad \begin{array}{c} -1 \\ + \end{array} \quad \begin{array}{c} 0 \\ - \end{array} \quad \begin{array}{c} + \\ + \end{array}$$

$$u_{n+1} - u_n = (u_n+1)e^{u_n} - 1 - u_n = (u_n+1)(e^{u_n}-1)$$

$$\text{بما أن } -1 \leq u_n \leq -0.5 \text{ فإن } u_{n+1} - u_n \leq 0 \text{ ومنه } (u_n) \text{ متناقصة}$$

$$(3) (u_n) \text{ متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة}$$

$$l = (l+1)e^l - 1 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$$

$$l = -1 \text{ أو } l = 0 \text{ لما } (l+1)(e^l-1) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1 \quad (l = -1) \text{ بما أنها متناقصة}$$

$$(4) \text{ لدينا: } 1 + u_{n+1} = (u_n+1)e^{u_n}$$

$$\text{ولدينا: } -1 \leq u_n \leq -\frac{1}{2} \quad e^{-1} \leq e^{u_n} \leq e^{-\frac{1}{2}}$$

$$1 + u_n \geq 0 \quad (1 + u_n)e^{u_n} \leq \frac{1}{\sqrt{e}}(1 + u_n)$$

$$\text{ومنه: } 1 + u_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{e}}(1 + u_n) \quad (1 + u_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{e}}(1 + u_n))$$

$$n \in \mathbb{N} \text{ نبرهن بالتراجع من أجل } 1 + u_n \leq \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{2}$$

$$(1 + u_0 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ و } \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2} \text{ (محقق)})$$

نفرض صحتها من أجل n كيف n كبيراً نبرهن صحة:

$$1 + u_n \leq \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{2} \quad 1 + u_{n+1} \leq \frac{e^{-\frac{n+1}{2}}}{2}$$

$$\text{نضرب طرفي المتراجحة في } (e^{-\frac{1}{2}}): \quad e^{-\frac{1}{2}}(1 + u_n) \leq e^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{2} = \frac{e^{-\frac{n+1}{2}}}{2}$$

$$\text{نجد: } \frac{1}{\sqrt{e}}(1 + u_n) \leq \frac{e^{-\frac{n-1}{2}}}{2} \text{ وبما أن } 1 + u_{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{e}}(1 + u_n)$$

$$\text{ومنه: } 1 + u_{n+1} \leq \frac{e^{-\frac{n-1}{2}}}{2} \text{ في الأخير } 1 + u_{n+1} \leq \frac{e^{-\frac{n+1}{2}}}{2}$$

تصحيح البكالوريا التجريبي 2023

الموضوع الأول

$$\text{تمرين 1:} \quad \frac{z_c - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-5-i}{-1+5i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad (1)$$

$$\left(\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A}\right)^{2023} = e^{i\frac{2023\pi}{2}} = e^{i(\frac{2022\pi}{2} + \frac{\pi}{2})} = e^{i(\pi + \frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

الاقتراح الصحيح هو ج

$$\text{مثلاً } ABC \begin{cases} \left|\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A}\right| = \frac{AC}{AB} = 1 \\ \arg\left(\frac{z_c - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\vec{AB}; \vec{AC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{مركز الدائرة هو } I \text{ منتصف } [BC] \quad z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = -1$$

$$\text{ونصف قطرها } r = \frac{|z_B - z_C|}{2} = \frac{|4+6i|}{2} = \sqrt{13}$$

الاقتراح الصحيح هو P

$$(3) \quad z' - z_c = 2(z - z_c); \quad z' - w = a(z - w)$$

$$z_D = 2(z_A - z_c) + z_c = 2z_A - z_c = 7-i$$

الاقتراح الصحيح هو P

$$(4) \quad (z_A - \bar{z}_B - z_c)^{2n} = (4+4i)^{2n}$$

$$= (4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{2n} = (4\sqrt{2})^{2n} e^{i\frac{n\pi}{2}}$$

$$(z_A - \bar{z}_B - z_c)^{2n} = (4\sqrt{2})^{2n} \left(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(k \in \mathbb{Z}) \quad \frac{n\pi}{2} = 2k\pi \text{ يعني}$$

$$\text{ومنه: } n = 4k \quad \text{الاقتراح الصحيح هو ب}$$

$$(5) \quad |z + 3 + 3i| = |i(z - 1 - 3i)|$$

$$|z - (-3-3i)| = |i| |z - (1+3i)|$$

$$|z - z_c| = |z - z_B| \quad \text{أي } BM = CM$$

(E) هي محور (BC) الاقتراح الصحيح هو ج

تمرين 2:

$$(1) \quad P(A) = \frac{C_7^3 + C_6^3 + C_3^3}{C_{16}^3} = \frac{1}{10}$$

$$(2) \quad P(B) = \frac{C_7^1 \times C_6^1 \times C_3^1}{C_{16}^3} = \frac{9}{40}$$

$$(3) \quad P(C) = 1 - P(A) - P(B) = \frac{27}{40}$$

$$(4) \quad X \in \{-5; 0; 2; 5\}$$

$$P(X=5) = \frac{C_7^3}{C_{16}^3} = \frac{1}{16} \quad P(X=-5) = \frac{C_6^3 + C_3^3}{C_{16}^3} = \frac{3}{80}$$

$$P(X=0) = P(B) = \frac{9}{40} \quad P(X=2) = P(C) = \frac{27}{40}$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

- 1- عيّن العددين المركبين z_1 و z_2 بحيث:
$$\begin{cases} z_1 + iz_2 = 0 \\ \overline{z_1} + i\overline{z_2} = 6 - 10i \end{cases}$$
- 2- في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A, B, C و D نقط من هذا المستوي لاحتقاتها على الترتيب: $z_A = 3 + 5i$, $z_B = -5 + 3i$, $z_C = -z_A$ و $z_D = -z_B$.
 أ) تأكد أنّ $z_B + z_D = z_A + z_C$ وأنّ $z_B - z_D = i(z_A - z_C)$. استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$ ثم مثله.
 ب) عيّن مركز ونصف قطر الدائرة $(\mathcal{C})$ المحيطة بالرباعي $ABCD$ ، ثم أنشئها.
- 3- لتكن النقطة M من المستوي لاحتقتها z تختلف عن A و C ، ولتكن النقطة M' لاحتقتها Z :
$$Z = \frac{z^2 - z_A^2}{(z - z_C)^2}$$

 أ) بيّن أنّ $Z = \frac{z - z_A}{z - z_C}$ ، ثم عيّن وأنشئ المجموعة Γ_1 للنقط M من المستوي حيث $\arg Z = \pi$.
 ب) بيّن أنّ المجموعة Γ_2 للنقط M حيث $M' \in \mathcal{C}$ تنتمي إلى حامل محور الترتيب هي $(\mathcal{C})$ باستثناء A و C .
- 4- نقطة E من هذا المستوي لاحتقتها z_E حيث:
$$\frac{z_E}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{12}i}$$

 أ) اكتب على الشكل الأسّي ثم على الشكل الجبري العدد المركب z_E .
 ب) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_E}{1 + i\sqrt{3}}$. استنتج قيمتي $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- يحتوي كيس على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس. كرية واحدة تحمل الرقم 1، كريتان تحملان الرقم 2، ثلاث كريات تحمل الرقم 3 وأربع كريات تحمل الرقم 4. نسحب منه عشوائيا وفي آن واحد كريتين. نسمي الحادثة A : "سحب كريتين تحملان رقمين مجموعهما يساوي 4 أو 6"، الحادثة B : "سحب كريتين تحملان رقمين جداءهما زوجي"، والحادثة C : "سحب كريتين إحداهما فقط تحمل الرقم 1".
- 1- أ) احسب الاحتمالات التالية: $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$ و $P(A \cap C)$.
 ب) ادرس استقلالية الحادثتين A و B ، ثم الحادثتين A و C .
- ج) احسب $P_E(D)$ احتمال سحب كريتين تحملان رقمين مجموعهما زوجي علما أنّ الرقمين مختلفان.
- 2- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب: "الرقم الأكبر عند سحب رقمين زوجيين مختلفين"، "الرقم الأكبر عند سحب رقمين فرديين مختلفين"، "الرقم الأصغر عند سحب رقمين أحدهما زوجي والآخر فردي"، "ونفس الرقم عند سحب رقمين متساويين". عيّن قانون الاحتمال للمتغير X ، ثم احسب أمله الرياضيائي $E(X)$.
- 3- نضيف إلى الكيس السابق ($n-9$) كرية تحمل الرقم 2، حيث n عدد طبيعي أكبر من 9، ثم نسحب منه عشوائيا كريتين على التوالي بدون إرجاع. ما هو عدد الكريات التي تمّ إضافتها إلى الكيس علما أنّ احتمال الحصول على كرية واحدة فقط تحمل رقما زوجيا هو 0,4. استعمل شجرة الاحتمالات أو العدّ.

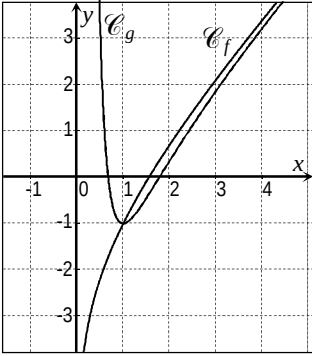
التمرين الثالث: (04 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التعليل في كل حالة مما يلي:

الاقتراح (ج)	الاقتراح (ب)	الاقتراح (أ)	
$b = e^2$	$b = 4$	$b = e^4$	1 a, b و c حدود متتابعة موجبة تماما للمتتالية الهندسية التي تحقق: $\ln a^2 + \ln c^2 = 16$:
متزايدة تماما ومتباعدة	متناقصة تماما ومتقاربة	متزايدة تماما ومتقاربة	2 المتتالية العددية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $w_n = \frac{e^n}{e^n + 1}$ ، هي متتالية:
0	1	$+\infty$	3 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المتقاربة والمعرفة بـ: $u_{n+1} = 2u_n - \ln(2e^{u_n} - 1)$. نهاية (u_n) هي:
$v_n = (n+1)^2$	$v_n = n^2$	$v_n = 2n^2 - n$	4 المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_0 = 0$ و $v_{n+1} = v_n + 2n + 1$. عبارة حدّها العام هي:

التمرين الرابع: (07 نقاط)

في الشكل المقابل $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ هما التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرفتين على المجال $]0; +\infty[$.



I - بقراءة بيانية، خمن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

2- وضعية المنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة للمنحني $(\mathcal{C}_g)$.

II - الدالتان العدديتان f و g المعرفتان على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي:

$$f(x) = x - 2 + \ln x \quad \text{و} \quad g(x) = \left(\frac{x^2 - 2}{x^2} \right) \ln x + x - 2$$

1- أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

ب) ادرس وضعية المنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة للمنحني $(\mathcal{C}_g)$ ثم بين أنهما متقاربان.

2- أ) احسب $f'(x)$ ، ثم بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

ب) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,5 < \alpha < 1,6$.

ج) اكتب معادلة Δ مماس المنحني $(\mathcal{C}_f)$ الذي يشمل النقطة A حيث $A(0; -3)$.

3- من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، نعتبر النقطة M من $(\mathcal{C}_f)$ فاصلتها x والنقطة N من $(\mathcal{C}_g)$ فاصلتها x ، ولتكن h الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = f(x) - g(x)$.

أ) بين أنه من أجل كل $x > 0$ فإن: $h'(x) = \frac{2(1 - 2 \ln x)}{x^3}$. استنتج اتجاه تغير الدالة h ، وجدول تغيراتها.

ب) تأكد أنه على $]1; +\infty[$ ، $MN = h(x)$. استنتج قيمة x حتى تكون المسافة MN أكبر ما يمكن.

ج) بين أن $\ln \alpha = 2 - \alpha$ ، ثم استنتج أنه من أجل $x = \alpha$ ، فإن المسافة $MN = \frac{4 - 2\alpha}{\alpha^2}$.

4- λ عدد حقيقي أكبر من 1. باستعمال التكامل بالتجزئة، بين أن $\int_1^\lambda \left(\frac{\ln x}{x^2} \right) dx = \frac{\lambda - 1 - \ln \lambda}{\lambda}$. استنتج مساحة

الحيز المستوي $A(\lambda)$ المحدّد بـ $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ والمستقيمين اللذين معادلتاهما: $x = 1$ و $x = \lambda$ ، واحسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

5- ارسم في معلم متعامد ومتجانس المنحني الممثل للدالة k المعرفة على $]-\infty; 2[$ بـ: $k(x) = g(-x + 2)$.

انتهى الموضوع الثاني

$$P(ANC) = \frac{C_1^1 \cdot C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{15} \quad P(C) = \frac{C_1^1 \cdot C_9^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{5}$$

$$P(ANB) = \frac{C_2^2 + C_2^1 \cdot C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{1}{5}$$

$$P(A) \times P(C) = \frac{1}{15} \quad \text{و} \quad P(A) \times P(B) = \frac{13}{45} \quad (ب)$$

$$P(ANC) = P(A) \times P(C) \quad P(ANB) \neq P(A) \times P(B)$$

C و A مستقلتين B و A غير مستقلتين

(ج) D : مجموعتهما زوجي E : رقمين مختلفين

$$P(E) = \frac{C_1^1 \cdot C_9^1 + C_2^1 \cdot C_8^1 + C_3^1 \cdot C_7^1}{C_{10}^2} = \frac{7}{9}$$

$$P(END) = \frac{C_2^1 \cdot C_4^1 + C_1^1 \cdot C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{11}{45}$$

$$P_E(D) = \frac{P(END)}{P(E)} = \frac{11}{35}$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 + C_2^1 \cdot C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{7}{45} \quad P(X=1) = \frac{C_1^1 \cdot C_6^1}{C_{10}^2} = \frac{6}{45} \quad (2)$$

$$P(X=4) = \frac{C_2^1 \cdot C_4^1 + C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{14}{45} \quad P(X=3) = \frac{C_3^1 \cdot C_4^1 + C_1^1 \cdot C_3^1 + C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{8}{45}$$

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{6}{45}$	$\frac{7}{45}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{14}{45}$

$$E(Y) = \frac{26}{9}$$

$$\frac{2A_{n-3}^1 \times A_4^1}{A_{n+1}^2} = 0,4 \quad (3)$$

$$0,4n^2 - 7,6n + 24 = 0 \quad \text{أو } n=4 \text{ أو } n=15$$

يجب إضافة 6 كريات

تمرين 3:

$$\ln a^2 + \ln c^2 = 16 \quad (1)$$

$$\ln a + \ln c = 8 \quad \text{أي} \quad 2(\ln a + \ln c) = 16$$

$$a \cdot c = e^8 \quad \text{أي} \quad \ln(a \cdot c) = 8$$

$$b^2 = e^8 \quad \text{و} \quad b = e^4$$

الفقترح الصحيح هو P

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \quad \text{الدالة الحرفية على }]0, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = 1 \quad f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$$

f متزايدة و نهايتها عند + تساوي 1

و منة (w_n) متزايدة ومتقاربة

الفقترح الصحيح هو P

الموضوع 2

عبد المطلب

تمرين 1:

$$\begin{cases} z_1 + i z_2 = 0 \\ z_1 - i z_2 = 6 + 10i \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 + i z_2 = 0 \\ \overline{z_1} + i \overline{z_2} = 6 - 10i \end{cases} \quad (1)$$

بالجمع: $(z_1 = 3 + 5i)$ ثم نعوض $(z_2 = -5 + 3i)$

$$(2) \quad \frac{z_B + z_D}{2} = \frac{z_C + z_A}{2} \quad \text{(القطران متساويان)}$$

$$DB = CA, \quad (\vec{CA}; \vec{DB}) = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ومنه: ABCD مربع

(ب) المثلث ABC قائم ومنه مركز الدائرة (ع) منتصف [AC] وهو المبدأ O نصف قطرها

$$r = \frac{AC}{2} = \frac{|z_C - z_A|}{2} = |z_A| = \sqrt{34}$$

$$z = \frac{(z - z_A)(z + z_A)}{(z - z_C)(z + z_C)} = \frac{(z - z_A)(z + z_A)}{(z - z_C)(z + z_C)} = \frac{z - z_A}{z - z_C} \quad (3)$$

$$\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_C}\right) = (\vec{CM}; \vec{AM}) = \pi$$

(Γ₁) هي القطعة [AC] ما عدا A و C أي [AC]

(ب) M' تنتمي إلى محور الترتيب أي ح تحيل طرف

$$\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(Γ₂) دائرة قطرها [AC] ما عدا A و C. $(\vec{CM}; \vec{AM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$z_E = (1 + i\sqrt{3}) \frac{3}{\sqrt{2}} e^{i(\frac{\pi}{2})} = 2e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot e^{i(\frac{\pi}{2})} \quad (4)$$

$$z_E = 3\sqrt{2} e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2})} = 3\sqrt{2} e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$z_E = 3\sqrt{2} (\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}) = 3 + 3i$$

$$\frac{z_E}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{3 + 3i}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{(3 + 3i)(1 - i\sqrt{3})}{(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})} \quad (ب)$$

$$\frac{z_E}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{4} + i \frac{3 - 3\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} (\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}) = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{4} + i \frac{3 - 3\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{و} \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{3 + 3\sqrt{3}}{4} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{12} = \frac{3 - 3\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

تمرين 2:

$$P(A) = \frac{C_2^2 + C_1^1 \cdot C_3^1 + C_2^1 \cdot C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{4}{3} \quad |P|$$

$$P(B) = \frac{C_2^2 + C_2^1 \cdot C_4^1}{C_{10}^2} = \frac{13}{15}$$

$x > 0$ و $h(x) = 2 \frac{\ln x}{x^2}$ (P/3)
 $h'(x) = 2 \cdot \frac{x^2 \cdot \frac{1}{x} - 2x \ln x}{(x^2)^2} = 2 \left(\frac{1 - 2 \ln x}{x^3} \right)$
 h متزايدة تماماً على $[0; \sqrt{e}]$ و متناقصة تماماً على $[\sqrt{e}; +\infty)$

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	$-\infty$	e^{-1}	0

 من أجل $x = \sqrt{e}$ ، $h(x) = 0$

(ب) $M(x; f(x))$ و $N(x; g(x))$

$$MN = \sqrt{(x-x)^2 + (g(x)-f(x))^2}$$

$$MN = \sqrt{(g(x)-f(x))^2} = |g(x)-f(x)|$$

من أجل $x > 1$: (C_f) أعلى (C_g) ، ومنه :

$$(MN = f(x) - g(x) = h(x))$$

h تقبل قيمة حرجية كبرى عند $x = \sqrt{e}$ ومنه تكون المسافة MN أكبر ما يمكن من أجل $x = \sqrt{e}$ و $MN = e^{-1}$

(ج) لدينا : $f(x) = 0$ ، $\alpha - 2 + \ln \alpha = 0$ ، $f(\alpha) = 0$ ، $h(\alpha) = 2 - \alpha$

$$MN = h(\alpha) : x = \alpha \text{ و } \ln \alpha = 2 - \alpha$$

$$MN = \frac{2 \ln \alpha}{\alpha^2} = \frac{2(2-\alpha)}{\alpha^2} = \frac{4-2\alpha}{\alpha^2} \text{ م.ل}$$

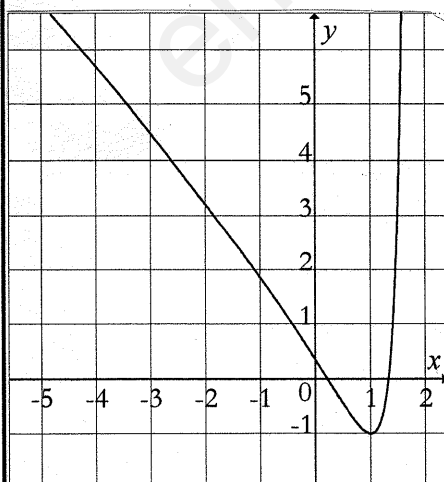
$$\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases} \uparrow \begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} \end{cases} \quad (4)$$

$$\int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[\frac{-\ln x}{x} \right]_1^\lambda - \int_1^\lambda \frac{-1}{x^2} dx = \left[\frac{-\ln x - 1}{x} \right]_1^\lambda$$

$$A(\lambda) = \int_1^\lambda (f(x) - g(x)) dx = \int_1^\lambda h(x) dx = \left(\frac{\lambda - 1 - \ln \lambda}{\lambda} \right)$$

$$A(\lambda) = 2 \int_1^\lambda \frac{\ln x}{x^2} dx = 2 \left(\frac{\lambda - 1 - \ln \lambda}{\lambda} \right) \text{ م.ا}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} 2 \left(1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{\ln \lambda}{\lambda} \right) = 2 \text{ م.ا}$$



$$K(x) = g(-x+2) \quad (5)$$

(C_K) هو صورة

نظير (C_g) بالنسبة

لمحور الترتيب

بالنسبة الذي

شعاعه $(\frac{2}{0})$

أو نسحب (C_g)

ب $(\frac{-2}{0})$ نتم

نأخذ بالنسبة

لمحور الترتيب

عبر المطلب

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = l \quad (3)$$

$$l = 2l - \ln(2e^l - 1)$$

$$2e^l - 1 = e^l \text{ ، كما نجد } \ln(2e^l - 1) = l$$

$$e^l = 1 \text{ و منه : } (l = 0)$$

الافتراض الصحيح هو (ج)

$$V_1 = V_0 + 2(1) + 1 = 4 \quad (4)$$

$$V_2 = V_1 + 2(2) + 1 = 9$$

ومنه : $(V_n = n^2)$ هي التي تحقق

$$V_{n+1} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

الافتراض الصحيح هو (ب)

تمرين 4 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad (I = I)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$$

$$(C_g) \text{ أسفل } (C_f) : 0 < x < 1 \quad (2)$$

$$(C_g) \text{ أعلى } (C_f) : x > 1 \text{ عند } I(1; -1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad (P/1 - II)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left(1 - \frac{2}{x^2} \right) \ln x + x - 2 \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{2}{x^2} \right) \ln x + x - 2 \right] = +\infty$$

$$f(x) - g(x) = (\ln x) \left(1 - \frac{x^2 - 2}{x^2} \right) = \frac{2 \ln x}{x^2} \quad (ب)$$

$$(C_g) \text{ أسفل } (C_f) : 0 < x < 1 \quad (2)$$

$$(C_g) \text{ أعلى } (C_f) : x > 1 \text{ عند } I(1; -1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x^2} = 0$$

ومنه : (C_g) و (C_f) متقاربان بجوار $+\infty$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0 \quad (P/2)$$

ومنه : f متزايدة تماماً على $[0; +\infty)$

(ب) f مستمرة ومتزايدة تماماً على $[1.5; 1.6]$

$f(1.5) = -0.09 < 0$ و $f(1.6) = 0.07 > 0$ ، حسب

مبرهنة القيمة المتوسطة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً

$$(ج) \text{ يشمل } A : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\text{نعوض } x = 0 \text{ في المعادلة } \begin{cases} -3 = f'(x_0)(0 - x_0) + f(x_0) \\ -3 = -x_0 - 1 + x_0 - 2 + \ln x_0 \end{cases}$$

$$\ln x_0 = 0 : (x_0 = 1) : \Delta : (y = 2x - 3)$$

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (05 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$



والمستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = x$.

α عدد حقيقي موجب ، (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0

حيث : $u_0 = \alpha$ ؛ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

(I) عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة .

(2) أثبت أن الدالة f متزايدة تماما على $[0; +\infty[$.

(II) نضع في كل مايلي : $\alpha = 5$.

(1) أ) انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود

u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حساب الحدود).

ب) بالبرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$1 < u_{n+1} < u_n \leq 5$ ، ثم استنتج تقارب المتتالية (u_n) .

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$. يطلب تعيين حدها الأول .

(3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2022}$.

ثم استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث : $S'_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2022} + 1}$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية : $(\bar{z} + 1 - \sqrt{3})(z^2 + 2z + 4) = 0$.

(II) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A, B, C التي لاحتقاتها : $z_A = -1 + \sqrt{3}$ ، $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ ، $z_C = \bar{z}_B$.

(1) بين أن $z_B - z_A = i(z_C - z_A)$ ثم استنتج طبيعة المثلث ABC واحسب مساحته .

(2) أ) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب L حيث : $L = \frac{z_C - z_A}{z_C}$.

(ب) اكتب على الشكل الأسّي العدد $z_C - z_A$ ثم بين أن: $L = \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$ ؛ ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ $\tan \frac{\pi}{12}$.

(3) نعتبر التحويل النقطي S الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' والمعروف بـ: $z' = L(z - z_B) + z_B$.
✓ بين أن S تشابه مباشر يطلب تحديد عناصره المميزة.

(4) لتكن النقط A' ، B' و C' صور النقط A ، B و C على الترتيب بالتحويل $S \circ S$.
✓ احسب مساحة المثلث $A'B'C'$.

(5) عين (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_A - z}{z_B - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

التمرين الثالث : (03 نقاط)

يراد عشوائيا تشكيل لجنة تضم رئيسا ونائبا له من مجموعة أشخاص ثلاث رجال هم : عمر ، سفيان ، فاروق وأربع نساء هن : رغدة ، آمنة ، يقين ، سجي .

(1) بين أن عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو : 42.

(2) نعتبر الحوادث الآتية : A " اللجنة من نفس الجنس "

B " اللجنة من جنسين مختلفين "

C " عمر هو الرئيس "

D " اللجنة لاتضم كلا من فاروق و رغدة "

أ) احسب $P(A)$ احتمال الحدث A ثم استنتج $P(B)$.

ب) احسب $P(C)$ و $P(D)$.

(3) المتغير العشوائي X يرفق بكل لجنة عدد الرجال فيها . عين قانون احتمال X .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 1 + (x-1) \ln x$ ؛ (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = 2cm$.

(1) أ) أدرس حسب قيم العدد الحقيقي x الموجب تماما إشارة كل من $\ln x$ و $\frac{x-1}{x}$.

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x الموجب تماما إشارة $\frac{x-1}{x} + \ln x$.

(2) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) h الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = x - 2 + \ln x$.

أ) بين أن الدالة h متزايدة تماما على $]0; +\infty[$.

ب) برهن أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.5 < \alpha < 1.6$ ثم بين أن $\ln(\alpha) = 2 - \alpha$.

ج) بين أن $y = \left(\frac{-\alpha^2 + 3\alpha - 1}{\alpha} \right) x$ معادلة لـ (T) تماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة α .

(4) أنشئ (T) و (C_f) على $]0; 4]$ (نأخذ $\frac{-\alpha^2 + 3\alpha - 1}{\alpha} \approx 0.8$)

(5) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما : $f(x) - x = (x-1)(-1 + \ln x)$.

ب) أدرس حسب قيم العدد الحقيقي x الموجب تماما إشارة $f(x) - x$.

(6) K الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $K(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 2x + \left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) \ln x$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما : $K'(x) = f(x) - x$.

ب) احسب μ مساحة حيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمت التي معادلاتها : $y = x$ و $x = 1$ و $x = e$.

(7) g الدالة المعرفة على $]-2; +\infty[$ بـ : $g(x) = (x+1) \ln(x+2)$ ، (C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق .

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-2; +\infty[$: $g(x) = f(x+2) - 1$.

ب) استنتج أن (C_g) صورة (C_f) بتحويل نقطي يطلب تحديده . (لايطلب إنشاء (C_g))

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة والموجبة على $]-1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{ax}{x+b} + \ln(x+b)$ حيث a و b عدنان حقيقيان مع b موجب تماما تمثيلها البياني (C_f) في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ يقبل حامل محور الفواصل مماسا له في النقطة O .

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$: $f(x) = -1 + \frac{1}{x+1} + \ln(x+1)$.

(2) الدالة العددية المعرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = (x+1)\ln(x+1)$:
✓ احسب $g'(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $]-1; +\infty[$.

(3) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $u_n = \int_{n-1}^n f(x) dx$

(أ) احسب u_{2023} ثم فسر النتيجة بيانيا.

(ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = -2 + (n+2)\ln(n+1) - (n+1)\ln(n)$

(ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي الصندوق U_1 على ثلاث كريات تحمل الأرقام : 2، 2 و 3 ويحتوي الصندوق U_2 على تسع كريات منها أربعة خضراء وتحمل كل منها الرقم 3 ونحسب كريات حمراء تحمل الأرقام : 1، 2، 2 و 3 و 4.

الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس نسحب عشوائيا كرية من الصندوق U_1 ونسجل رقمها وليكن n .

إذا كان : $n=2$ نسحب عشوائيا من الصندوق U_2 كرتين على التوالي دون إرجاع.

إذا كان : $n=3$ نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الصندوق U_2 ؛

نعتبر الحادثتين التاليتين :

B : "الكرات المسحوبة من الصندوق U_2 تحمل نفس الرقم"

A : "الكرات المسحوبة من الصندوق U_2 لها نفس اللون"

(ب) بين أن $P(A \cap B) = \frac{55}{378}$ ثم استنتج : $P_A(B)$.

(1) (أ) بين أن $P(A) = \frac{19}{54}$ ، ثم احسب $P(B)$.

(ج) هل الحادثان A و B مستقلان ؟ علل إجابتك.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكريات الحمراء المسحوبة من الصندوق U_2 .

✓ عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$.

(3) احسب $P(X^2 = 2^x)$.

التمرين الثالث : (05 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير.

(1) (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $u_1 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$ نعتبر

المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = u_n + \alpha n$ حيث α عدد حقيقي.

✓ قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ هي :

(أ) $\alpha = -1$ (ب) $\alpha = -\frac{1}{3}$ (ج) $\alpha = 0$

(2) H دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $H(x) = (ax+b)e^{-x}$ حيث a و b عدنان حقيقيان.

✓ قيم العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون H حل للمعادلة التفاضلية : $y - y' = (2x-3)e^{-x}$ هي :

(أ) $a=1$ و $b=-1$ (ب) $a=2$ و $b=-3$ (ج) $a=1$ و $b=1$

(3) في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن A نقطة ذات اللاحقة $z_A = \sqrt{3} - i$ و B نقطة ذات اللاحقة $z_B = 2i$ نعتبر (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق $|\bar{z} + 2i| = |z - \sqrt{3} + i|$ $\checkmark$ إذن (Δ) هي :

(أ) محور القطعة $[AB]$ (ب) دائرة قطرها $[AB]$ (ج) مجموعة خالية

(4) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - \ln(1 + e^x)$ ، (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ والدالة g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = \ln(1 + e^{-x})$ ، (C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق . $\checkmark$ إذن (C_f) و (C_g) :

(أ) متناظران بالنسبة لحامل محور الفواصل (ب) متناظران بالنسبة لحامل محور الترتيب (ج) متناظران بالنسبة لمبدأ المعلم (5) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x+1)e^{kx}$ حيث k عدد حقيقي غير معدوم . $\checkmark$ القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[-1; 0]$ هي :

(أ) $\frac{k-1}{k^2} + \frac{e^{-k}}{k^2}$ (ب) 0 (ج) $\frac{1-k}{k^2} - \frac{e^{-k}}{k}$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

(I) الدالة العددية g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (x^2 - 3)e^x + 3$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) (أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق : $1.53 < \alpha < 1.54$.

(ب) احسب $g(0)$ ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

(II) الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = 3x + 1 + (x^2 - 2x - 1)e^x$ ، (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$.

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) (أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 3x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$.

(ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(ج) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β تحقق : $2.03 < \beta < 2.04$.

(د) بين أن (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') موازيين لـ : (Δ) . (لا يطلب كتابة معادلة لـ (T) و (T'))

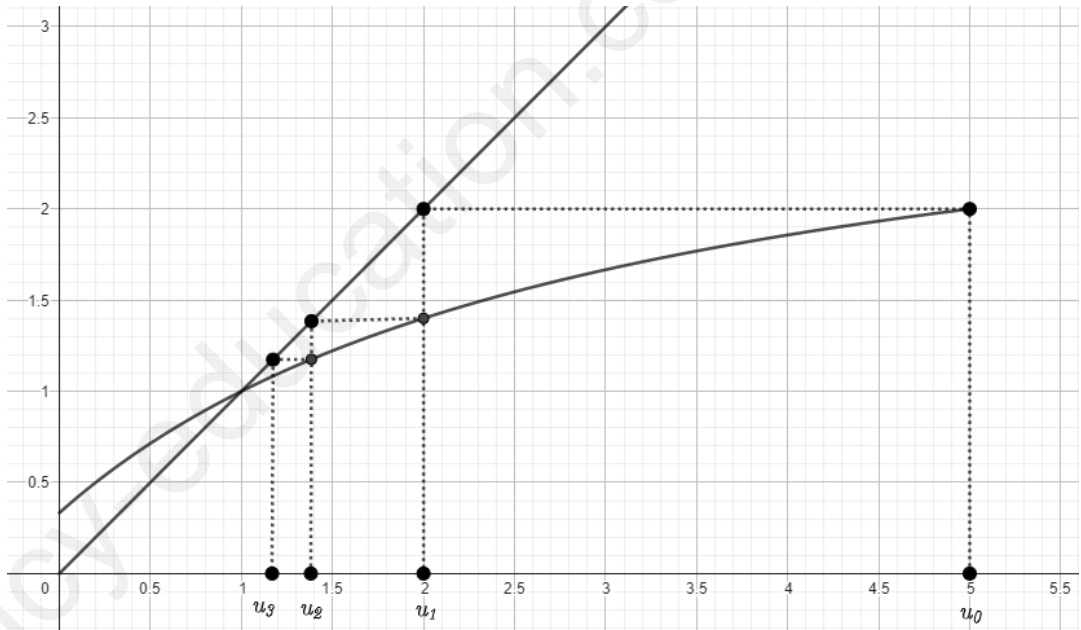
(4) ارسم (Δ) ، (T) ، (T') و (C_f) على $]-\infty; 1 + \sqrt{2}]$.

(نأخذ : $\alpha \approx 1.53$ ، $f(\alpha) \approx -2.3$ ، $f(\sqrt{3}) \approx -2.1$ و $f(-\sqrt{3}) \approx -3.2$)

(5) الدالة العددية h معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = f(\ln(x))$.

(أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$ (ب) ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها .

انتهى الموضوع الثاني

الإجابة النموذجية		مادة : الرياضيات		الشعبة : علوم تجريبية		امتحان بكالوريا تجريبية دورة ماي 2023	
العلامة		عناصر الإجابة					
المجموع		جزأة					
الموضوع الأول							
التمرين الأول 05 نقاط							
(I) لدينا :							
$\begin{cases} u_0 = \alpha & ; \alpha \in \mathbb{R}^+ \\ u_{n+1} = f(u_n) & ; n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{aligned} & f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x) = \frac{3x+1}{x+3} \end{aligned}$							
		(1) المتتالية (u_n) ثابتة معناه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n = u_0$ بما أن $u_0 = \alpha$ إذن $\frac{3\alpha+1}{\alpha+3} = \alpha$ و $\alpha \in \mathbb{R}^+$ معناه $\alpha = 1$					
		(2) من أجل كل $x \in \mathbb{R}^+$ الدالة f قابلة للاشتقاق :					
		$f'(x) = \frac{8}{(x+3)^2}$					
		بما أن من أجل كل $x \in \mathbb{R}^+$ $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}^+$.					
(II) نضع في كل ما يلي : $\alpha = 5$							
		(1) أ) تمثيل الحدود u_0 ؛ u_1 ؛ u_2 ؛ u_3 :					
							
		ب) نسمي $P(n)$ الخاصية من أجل عدد طبيعي n : $1 < u_{n+1} < u_n \leq 5$: التحقق من صحة $P(0)$: لدينا : $u_0 = 5$ و $u_1 = 2$ و $1 < 2 < 5 \leq 5$ إذن $1 < u_1 < u_0 \leq 5$ إذن $P(0)$ صحيحة . نفرض صحة $P(n)$ من أجل $n \in \mathbb{N}$ أي : $1 < u_{n+1} < u_n \leq 5$ ولنثبت صحة $P(n+1)$ أي لنبرهن : $1 < u_{n+2} < u_{n+1} \leq 5$ لدينا : $1 < u_{n+1} < u_n \leq 5$ بما أن الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}^+$ إذن $f(1) < f(u_{n+1}) < f(u_n) \leq f(5)$ إذن $1 < u_{n+2} < u_{n+1} \leq 2 \leq 5$ إذن $1 < u_{n+2} < u_{n+1} \leq 2 \leq 5$ إذن $P(n+1)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ أي : $1 < u_{n+1} < u_n \leq 5$. نستنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً ومحدودة من أسفل إذن هي متقاربة .					

		(2) لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ أ) ليكن $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{1}{2} v_n$ إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{2}{3}$. ب) بما أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{2}{3}$ إذن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $v_n = v_0 q^n = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ إذن $u_n = \frac{-v_n - 1}{v_n - 1}$ إذن $u_n = \frac{-\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = 1$ لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$: لأن $-\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < 1$ ليكن $n \in \mathbb{N}$ (3)	
		لدينا : $\frac{1}{u_n + 1} = \frac{1}{\frac{-v_n - 1}{v_n - 1} + 1} = -\frac{1}{2} v_n + \frac{1}{2}$ إذن $S'_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2022} + 1}$ $S'_n = \left(-\frac{1}{2} v_n + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} v_{n+1} + \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{2} v_{n+2022} + \frac{1}{2}\right)$ $S'_n = \left(-\frac{1}{2}\right)(v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2022}) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}$ $S'_n = -\frac{1}{2} S_n + \frac{1}{2} (2023)$ $S'_n = -\frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2023}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2023}{2}$	

		(I) حل المعادلة ذات المجهول المركب z : $\bar{z} + 1 - \sqrt{3} = 0 \text{ أو } z^2 + 2z + 4 = 0 \text{ تكافئ } (\bar{z} + 1 - \sqrt{3})(z^2 + 2z + 4) = 0$ $z = -1 + \sqrt{3} \text{ تكافئ } \bar{z} = -1 + \sqrt{3} \text{ تكافئ } \bar{z} + 1 - \sqrt{3} = 0$ $z^2 + 2z + 4 = 0$ إذن $\Delta = (2)^2 - 4(1)(4) = -12 = 12i^2$ معناه $z^2 + 2z + 4 = 0$ يقبل حلين متمميزين : $z_2 = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3} \text{ و } z_1 = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3}$ إذن مجموعة حلول المعادلة $(\bar{z} + 1 - \sqrt{3})(z^2 + 2z + 4) = 0$ هي : $\{-1 + \sqrt{3}; -1 - i\sqrt{3}; -1 + i\sqrt{3}\}$.
		(II) لدينا : $A(z_A = -1 + \sqrt{3})$ ، $B(z_B = -1 - i\sqrt{3})$ و $C(z_C = -1 + i\sqrt{3})$
		(1) لدينا : $(z_B - z_A) - i(z_C - z_A) = -1 - i\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} - i(-1 + i\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3})$ $= -\sqrt{3} - i\sqrt{3} - i(-\sqrt{3} + i\sqrt{3})$ $= -\sqrt{3} - i\sqrt{3} + i\sqrt{3} + \sqrt{3}$ $(z_B - z_A) - i(z_C - z_A) = 0$ إذن $(z_B - z_A) = i(z_C - z_A)$ $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \arg(i)$ $\left \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right = i $ بما أن : $(z_B - z_A) = i(z_C - z_A)$ معناه $\frac{(z_B - z_A)}{(z_C - z_A)} = i$ معناه $\begin{cases} \left(\overline{AC}; \overline{AB}\right) = \frac{\pi}{2} \\ \frac{AB}{AC} = 1 \end{cases} \text{ معناه المثلث } ABC \text{ مثلث قائم في } A \text{ ومتساوي الساقين .}$ نرمز بـ $\angle_{ABC}$ إلى مساحته المثلث ABC : بما أن المثلث ABC مثلث قائم في A ومتساوي الساقين إذن $\zeta_{ABC} = \frac{AB^2}{2} = \frac{ z_B - z_A ^2}{2} = \frac{ -i\sqrt{3} - \sqrt{3} ^2}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ u.a}$
		(2) أ) كتابة L على الشكل الجبري : $L = \frac{z_C - z_A}{z_C} = \frac{(-1 + i\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3})}{(-1 + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3})} = \frac{-i\sqrt{3} + \sqrt{3} + 3 + 3i}{1 + 3} = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} + i\frac{3 - \sqrt{3}}{4}$

		(ب) كتابة $z_C - z_A$ على الشكل الأسّي : $z_C - z_A = -\sqrt{3} + i\sqrt{3}$ $ z_C - z_A = \sqrt{6}$ لتكن θ_1 عمدة لـ $z_C - z_A$: $\arg(z_C - z_A) = \frac{3\pi}{4} \quad \text{إذن} \quad \begin{cases} \cos(\theta_1) = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta_1) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ إذن $z_C - z_A = \sqrt{6}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ لدينا : $L = \frac{z_C - z_A}{z_C} = \frac{\sqrt{6}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{z_C}$ كتابة z_C على الشكل الأسّي : $ z_C = -1 + i\sqrt{3} = \sqrt{4} = 2$ لتكن θ_C عمدة لـ z_C : $\arg(z_C) = \frac{2\pi}{3} \quad \text{إذن} \quad \begin{cases} \cos(\theta_C) = \frac{-1}{2} \\ \sin(\theta_C) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ إذن $z_C = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ إذن $L = \frac{\sqrt{6}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{i(\frac{3\pi}{4} - \frac{2\pi}{3})} = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} \right)$ لدينا : $L = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} + i\frac{3 - \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} \right)$ إذن $\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases}$ إذن $\tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = 2 - \sqrt{3}$	
	(3)	لدينا : S تحويل نقطي عبارته المركبة $z' - z_B = L(z - z_B)$ معناه $z' = L(z - z_B) + z_B$ بما أن : $L = \frac{\sqrt{6}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ إذن $L \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ و $L = \frac{\sqrt{6}}{2} \neq 1$ معناه S تشابه مباشر نسبته $k = L = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ، زاويته $\omega = \arg L = \frac{\pi}{12}$ ومركزه النقطة $B(z_B = -1 - i\sqrt{3})$	
	(4)	تعين العناصر المميزة للتحويل النقطي $S \circ S$: لتكن النقطة $M''(z'')$ صورة النقطة $M(z)$ بالتحويل $S \circ S$ معناه $M'' = (S \circ S)(M) = S(S(M)) = S(M')$	

		إذن $z'' = L(z' - z_B) + z_B = L((L(z - z_B) + z_B) - z_B) + z_B$ $z'' = L^2(z - z_B) + Lz_B - Lz_B + z_B = L^2(z - z_B) + z_B$ $z'' - z_B = L^2(z - z_B)$ بما أن : $L^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^2 = \frac{3}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$ إذن $L^2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ و $L^2 = \frac{3}{2} \neq 1$ معناه $S \circ S$ تشابه مباشر نسبته $k' = L^2 = \frac{3}{2}$ ، زاويته $\omega' = \arg L^2 = \frac{\pi}{6}$ ومركزه النقطة $B(z_B = -1 - i\sqrt{3})$. ملاحظة : $(S \circ S)(B) = S(S(B)) = S(B) = B$ بما أن المثلث $A'B'C'$ صورة المثلث ABC بالتشابه المباشر $S \circ S$ فإن مساحته المثلث $A'B'C'$ تعطى بالشكل التالي : $u.a$ $3 = 6.75$ $\zeta_{A'B'C'} = (k')^2 \zeta_{ABC} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 3 = 6.75$.	
(5)		تعين (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_A - z}{z_B - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما : ليكن z من $\mathbb{C}$ بحيث $\frac{z_A - z}{z_B - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما معناه $q \in \mathbb{Z}$; $\arg\left(\frac{z_A - z}{z_B - z}\right) = 2q\pi$ و $z \neq z_B$ و $z \neq z_A$ معناه $q \in \mathbb{Z}$; $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_B}\right) = 2q\pi$ و $z \neq z_B$ و $z \neq z_A$ معناه $q \in \mathbb{Z}$; $(\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) = 2q\pi$ و $M \neq A$ و $M \neq B$ معناه (Δ) هي المستقيم (AB) باستثناء القطعة $[AB]$.	
التمرين الثالث 03 نقاط			
(1)		عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو : $A_7^2 = 7 \times 6 = 42$ لأنه تم عشوائيا اختيار رئيس ونائب له من بين سبعة أشخاص .	
(2)		أ) A " اللجنة من نفس الجنس " $P(A) = \frac{A_3^2 + A_4^2}{A_7^2} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$ B " اللجنة من جنسين مختلفين " إذن الحادثة B هي الحادثة العكسية للحادثة A $P(B) = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ ب) C " عمر هو الرئيس " $P(C) = \frac{A_1^1 \times A_6^1}{A_7^2} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$ D " اللجنة لا تضم كلا من فاروق ورغد " $P(D) = \frac{A_5^2}{A_7^2} = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}$	

(3) المتغير العشوائي الذي يرفق بكل لجنة عدد الرجال فيها :

مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي : $\{0;1;2\}$

$$P(X=0) = \frac{A_4^2}{A_7^2} = \frac{12}{42} = \frac{2}{7}$$

$$P(X=1) = P(B) = \frac{4}{7}$$

$$P(X=2) = 1 - \frac{2}{7} - \frac{4}{7} = \frac{1}{7}$$

قانون احتمال X :

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

التمرين الرابع 07 نقاط

$$f :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 1 + (x-1)\ln x$$

(1) أ

إشارة $\frac{x-1}{x}$ على $]0; \infty[$:

x	0	1	$+\infty$
$x-1$	-	○	+
x	+	+	+
$\frac{x-1}{x}$	-	○	+

إشارة $\ln(x)$ على $]0; \infty[$:

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$	-	○	+

(ب)

من أجل $0 < x < 1$: $\frac{x-1}{x} < 0$ و $\ln(x) < 0$ إذن $\frac{x-1}{x} + \ln(x) < 0$

من أجل $x = 1$: $\frac{x-1}{x} = 0$ و $\ln(x) = 0$ إذن $\frac{x-1}{x} + \ln(x) = 0$

من أجل $1 < x$: $\frac{x-1}{x} > 0$ و $\ln(x) > 0$ إذن $\frac{x-1}{x} + \ln(x) > 0$

إشارة $\frac{x-1}{x} + \ln(x)$ على $]0; \infty[$:

x	0	1	$+\infty$
$\frac{x-1}{x} + \ln(x)$	-	○	+

(2) أ حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + (x-1)\ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + (x-1)\ln(x) = +\infty$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب عمودي للمنحنى (C_f) .

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

من أجل $x \in]0; +\infty[$ الدالة f قابلة للاشتقاق :

$$f'(x) = \frac{x-1}{x} + \ln(x)$$

إذن الدالة f متناقصة تماما على $]0;1]$ ومتزايدة تماما على $[1; +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

(3) لدينا :

$$h:]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto h(x) = x - 2 + \ln(x)$$

أ) من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ الدالة h قابلة للاشتقاق :

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{x}$$

من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $1 + \frac{1}{x} > 0$ إذن الدالة h متزايدة تماما على $]0; +\infty[$.

ب) الدالة h مستمرة ومتزايدة تماما على $]1.5; 1.6[$

و $h(1.5) \approx -0.0945$ ، $h(1.6) \approx 0.07$ أي $h(1.5) \times h(1.6) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1.5 < \alpha < 1.6$.

بما أن : $h(\alpha) = 0$ معناه $\alpha - 2 + \ln(\alpha) = 0$ معناه $\ln(\alpha) = 2 - \alpha$.

ج) معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة α تعطى بالشكل :

$$(T): y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha)$$

$$f'(\alpha) = \frac{\alpha-1}{\alpha} + \ln(\alpha) = \frac{\alpha-1}{\alpha} + 2 - \alpha = \frac{-\alpha^2 + 3\alpha - 1}{\alpha}$$

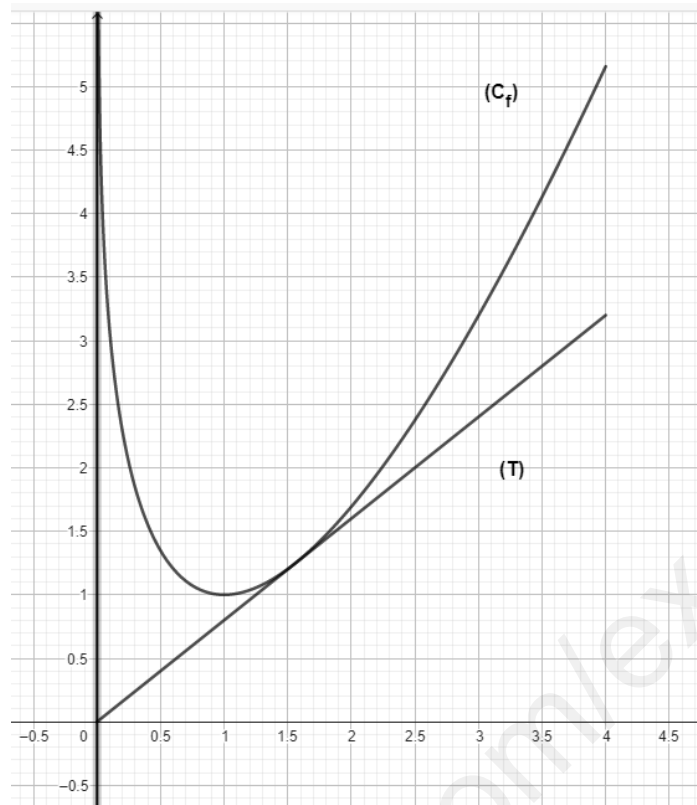
$$f(\alpha) = 1 + (\alpha-1)\ln(\alpha) = 1 + (\alpha-1)(2-\alpha) = -\alpha^2 + 3\alpha - 1$$

$$(T): y = \frac{-\alpha^2 + 3\alpha - 1}{\alpha}(x - \alpha) + -\alpha^2 + 3\alpha - 1$$

$$(T): y = \frac{-\alpha^2 + 3\alpha - 1}{\alpha}x + \alpha^2 - 3\alpha + 1 - \alpha^2 + 3\alpha - 1$$

$$(T): y = \frac{-\alpha^2 + 3\alpha - 1}{\alpha}x$$

(4) إنشاء (T) و (C_f) على $]0;4]$:



(5) أ) ليكن $x \in]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) - x &= 1 + (x-1)\ln(x) - x \\ &= 1 - x + (x-1)\ln(x) \\ &= -(x-1) + (x-1)\ln(x) \\ &= (x-1)(-1 + \ln(x)) \end{aligned}$$

ب) دراسة إشارة $f(x) - x$ على $]0; +\infty[$:
 $-1 + \ln(x) \geq 0$ تكافئ $\ln(x) \geq 1$ تكافئ $x \geq e$

x	0	1	e	$+\infty$
$x-1$	-	○	+	+
$-1 + \ln(x)$	-	-	○	+
$f(x) - x$	+	○	○	+

(6) لدينا :

$$K :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto K(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 2x + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\ln(x)$$

أ) من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ الدالة K قابلة للاشتقاق :

$$\begin{aligned} K'(x) &= -\frac{3}{2}x + 2 + (x-1)\ln(x) + \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{3}{2}x + 2 + (x-1)\ln(x) + \frac{1}{2}x - 1 \\ &= 1 + (x-1)\ln(x) - x \\ &= f(x) - x \end{aligned}$$

		ب) μ مساحة حيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات $y=x$ ، $x=1$ و $x=e$ تعطى بالشكل : $\mu = \int_1^e x - f(x) dx = \int_1^e -K'(x) dx = [-K(x)]_1^e$ $\mu = \frac{3}{4}e^2 - 2e - \frac{1}{2}e^2 + e - \frac{3}{4} + 2 \quad u.a$ $\mu = \frac{1}{4}e^2 - e + \frac{5}{4} \quad u.a$ $\mu = \left(\frac{1}{4}e^2 - e + \frac{5}{4} \right) (4cm^2)$ $\mu = e^2 - 4e + 5 \quad cm^2$	
	(7)	لدينا : $g :]-2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto g(x) = (x+1)\ln(x+2)$ أ) ليكن $x \in]-2; +\infty[$ إذن $-2 < x+2$ إذن $0 < x+2$ إذن $f(x+2) - 1 = 1 + ((x+2) - 1)\ln(x+2) - 1$ $= (x+1)\ln(x+2)$ $= g(x)$ ب) بما أن : من أجل كل $x \in]-2; +\infty[$ فإن $x+2 \in]0; +\infty[$ و $g(x) = f(x+2) - 1$ معناه النحني (C_g) صورة المنحني (C_f) بالانسحاب شعاعه $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.	

		لدينا : $f :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto f(x) = \frac{ax}{x+b} + \ln(x+b)$	
(1)		بما أن : (C_f) يقبل حامل محور الفواصل مماسا له في النقطة O إذن $f(0) = 0$ و $f'(0) = 0$ معناه $f(0) = 0$ معناه $\ln(b) = 0$ معناه $b = 1$ بما أن من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ الدالة f قابلة للاشتقاق : $f'(x) = \frac{ab}{(x+b)^2} + \frac{1}{x+b}$ $f'(0) = 0$ معناه $\frac{ab}{b^2} + \frac{1}{b} = 0$ بما أن : $b = 1$ إذن $a = -1$ إذن من أجل $x \in]-1; +\infty[$: $f(x) = \frac{-x}{x+1} + \ln(x+1)$ من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$: $-1 + \frac{1}{x+1} + \ln(x+1) = \frac{-x-1+1}{x+1} + \ln(x+1) = \frac{-x}{x+1} + \ln(x+1) = f(x)$	
(2)		لدينا : $g :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto g(x) = (x+1)\ln(x+1)$ بما أن من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$ الدالة g قابلة للاشتقاق : $g'(x) = \ln(x+1) + (x+1)\left(\frac{1}{x+1}\right) = \ln(x+1) + 1$ الدالة f مستمرة على المجال $]-1; +\infty[$ إذن تقبل دوال أصلية لتكن F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ $f(x) = -1 + \frac{1}{x+1} + \ln(x+1)$ إذن $F(x) = -x + \ln(x+1) + g(x) - x$ $F(x) = -2x + \ln(x+1) + (x+1)\ln(x+1)$	
(3)		أ) حساب u_{2023} : $u_{2023} = \int_{2022}^{2023} f(x) dx = [F(x)]_{2022}^{2023}$ $u_{2023} = -2(2023) + \ln(2024) + (2024)\ln(2024) + 2(2022) - \ln(2023) - (2023)\ln(2023)$ $u_{2023} = -2 + \ln\left(\frac{2024}{2023}\right) + \ln\left(\frac{2024^{2024}}{2023^{2023}}\right)$ $u_{2023} = -2 + \ln\left(\frac{2024^{2025}}{2023^{2024}}\right)$	

بما أن الدالة f موجبة على $]-1; +\infty[$ إذن u_{2023} يمثل مساحة الخيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x = 2022$ و $x = 2023$ ، $y = 0$
 (ب) ليكن $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \int_{n-1}^n f(x) dx = [F(x)]_{n-1}^n$$

$$u_n = -2n + \ln(n+1) + (n+1)\ln(n+1) + 2(n-1) - \ln((n-1)+1) - ((n-1)+1)\ln((n-1)+1)$$

$$u_n = -2 + (n+2)\ln(n+1) - (n+1)\ln(n)$$

(ج) حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -2 + (n+2)\ln(n+1) - (n+1)\ln(n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} -2 + n\ln(n+1) + 2\ln(n+1) - n\ln(n) - \ln(n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} -2 + n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} -2 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} + \ln\left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} -2 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} + \ln\left(n + 2 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

التمرين الثاني 04 نقاط

(1) أ) A " الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 لها نفس اللون "

$$P(A) = P(n=2) \times P_{n=2}(A) + P(n=3) \times P_{n=3}(A)$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{A_4^2 + A_5^2}{A_9^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_4^3 + C_5^3}{C_9^3}$$

$$= \frac{19}{54}$$

" B الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 لها نفس الرقم "

$$\begin{aligned} P(B) &= P(n=2) \times P_{n=2}(B) + P(n=3) \times P_{n=3}(B) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{A_5^2 + A_2^2}{A_9^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_5^3}{C_9^3} \\ &= \frac{46}{189} \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(n=2) \times P_{n=2}(A \cap B) + P(n=3) \times P_{n=3}(A \cap B) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{A_4^2 + A_2^2}{A_9^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_4^3}{C_9^3} \\ &= \frac{55}{378} \end{aligned}$$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{55}{378}}{\frac{19}{54}} = \frac{55}{133}$$

(ج) بما أن : $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ معناه الحادثين A و B غير مستقلتين .

(2) المتغير العشوائي الذي يرقى بكل سحبة عدد الكريات الحمراء المسحوبة من الصندوق U_2 مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي : $\{0; 1; 2; 3\}$

$$P(X=0) = \frac{2}{3} \times \frac{A_4^2}{A_9^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{8}{63}$$

$$P(X=1) = \frac{2}{3} \times \frac{(A_4^1 \times A_5^1) \frac{2!}{1! \times 1!}}{A_9^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_4^2 \times C_5^1}{C_9^3} = \frac{185}{378}$$

$$P(X=2) = \frac{2}{3} \times \frac{A_5^2}{A_9^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_4^1 \times C_5^2}{C_9^3} = \frac{65}{189}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{3} \times \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{5}{126}$$

قانون احتمال X :

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{8}{63}$	$\frac{185}{378}$	$\frac{65}{189}$	$\frac{5}{126}$

الأمل الرياضي $E(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{i=4} x_i P(X = x_i) \\ &= 0 \times \frac{8}{63} + 1 \times \frac{185}{378} + 2 \times \frac{65}{189} + 3 \times \frac{5}{126} \\ &= \frac{35}{27} \end{aligned}$$

(3)

$$P(X^2 = 2^x) = P(X = 2) = \frac{65}{189}$$

التمرين الثالث 05 نقاط

		(1) الاقتراح الصحيح (أ) التبرير : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ إذن $v_2 = \frac{2}{3}v_1$ $\frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3} \times 1 + 1 + 2\alpha = \frac{2}{3}(u_1 + \alpha)$ معناه $u_2 + 2\alpha = \frac{2}{3}(u_1 + \alpha)$ معناه $v_2 = \frac{2}{3}v_1$ معناه $\frac{4}{3} + \frac{1}{3} + 1 + 2\alpha = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\alpha$ معناه $4 + 1 + 3 + 6\alpha = 4 + 2\alpha$ معناه $\alpha = -1$
		(2) الاقتراح الصحيح (أ) التبرير : $H(x) - H'(x) = (2x-3)e^{-x}$ معناه $y - y' = (2x-3)e^{-x}$ حل للمعادلة التفاضلية معناه $(2ax+2b-a)e^{-x} = (2x-3)e^{-x}$ معناه $(ax+b)e^{-x} - ae^{-x} + (ax+b)e^{-x} = (2x-3)e^{-x}$ معناه $2ax+2b-a = 2x-3$ معناه $2a=2$ معناه $2b-a=-3$ معناه $a=1$ و $b=-1$
		(3) الاقتراح الصحيح (أ) التبرير : (Δ) مجموعة النقط $M(z)$ التي تحقق : $\bar{z} + 2i = z - \sqrt{3} + i$ معناه $\bar{z} - 2i = z - (\sqrt{3} - i)$ معناه $\bar{z} + 2i = z - \sqrt{3} + i$ معناه $z - z_B = z - z_A$ معناه $BM = AM$ معناه (Δ) محور القطعة $[AB]$
		(4) الاقتراح الصحيح (أ) التبرير : ليكن $x \in \mathbb{R}$ $g(x) = \ln(1 + e^{-x}) = \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x}\right) = \ln(e^x + 1) - \ln(e^x)$ $g(x) = \ln(1 + e^x) - x = -(x - \ln(1 + e^x))$ $g(x) = -f(x)$ معناه (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة لحامل محور الفواصل .
		(5) الاقتراح الصحيح (أ) التبرير : $m = \frac{1}{0 - (-1)} \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x+1)e^{kx} dx = \left[\frac{(x+1)e^{kx}}{k} \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{1}{k} e^{kx} dx$ $m = \frac{1}{k} - \left[\frac{1}{k^2} e^{kx} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} + \frac{e^{-k}}{k^2} = \frac{k-1}{k^2} + \frac{e^{-k}}{k^2}$

التمرين الرابع 07 نقاط

		(I) لدينا : $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto g(x) = (x^2 - 3)e^x + 3$
		(1) دراسة تغيرات الدالة g : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3)e^x + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x - 3e^x + 3 = 3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3)e^x + 3 = +\infty$$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ الدالة g قابلة للاشتقاق :

$$g'(x) = 2xe^x + (x^2 - 3)e^x = (x^2 + 2x - 3)e^x$$

إشارة $g'(x)$:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$x^2 + 2x - 3$	+	○	-	+
e^x	+	+	+	+
$g'(x)$	+	○	-	+

اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; -3]$ و المجال $[1; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على المجال $]-3; 1]$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$g(x)$		$g(-3) = \frac{6}{e^3} + 3$	$g(1) = -2e + 3$	$+\infty$

(2) أ) الدالة g مستمرة ورتيبة على $[1.53; 1.54]$

بما أن : $g(1.53) \approx -0.04$ ، $g(1.54) \approx 0.06$ أي $g(1.53) \times g(1.54) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $1.53 < \alpha < 1.54$.
(ب)

$$g(0) = (0^2 - 3)e^0 + 3 = 0$$

إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	○	-	+

(II) لدينا :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 3x + 1 + (x^2 - 2x - 1)e^x$$

(1) حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x + 1 + (x^2 - 2x - 1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x + 1 + x^2 e^x - 2x e^x - e^x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x + 1 + (x^2 - 2x - 1)e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x + 1 + x^2 e^x - 2x e^x - e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^x \left(\frac{3}{e^x} + \frac{1}{x e^x} + x - 2 - \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

(2) أ) من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ الدالة f قابلة للاشتقاق :

$$f'(x) = 3 + (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x - 1)e^x = (x^2 - 3)e^x + 3 = g(x)$$

ب) إشارة $f(x)$:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x) = g(x)$	+	○	-	+

اتجاه تغير الدالة f :

الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; 0]$ و المجال $[\alpha; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على المجال $[0; \alpha]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$f(0) = 0$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(3)

أ) لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (3x+1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x - 1)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x - 2x e^x - e^x = 0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 3x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) :

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - (3x+1) = (x^2 - 2x - 1)e^x$$

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$x^2 - 2x - 1$	+	○	-	+
e^x	+	+	+	+
$f(x) - (3x+1)$	+	○	-	+
الوضعية النسبية بين (Δ) و (C_f)	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) فوق (Δ)
		(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	

$$(C_f) \cap (\Delta) = \{(1 - \sqrt{2}; 4 - 3\sqrt{2}); (1 + \sqrt{2}; 4 + 3\sqrt{2})\}$$

ج) الدالة f مستمرة ورتيبة على $[2.03; 2.04]$

بما أن : $f(2.03) \approx -0.06$ ، $f(2.04) \approx 0.05$ أي $f(2.04) \times f(2.03) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد β ؛ حيث : $2.03 < \beta < 2.04$.

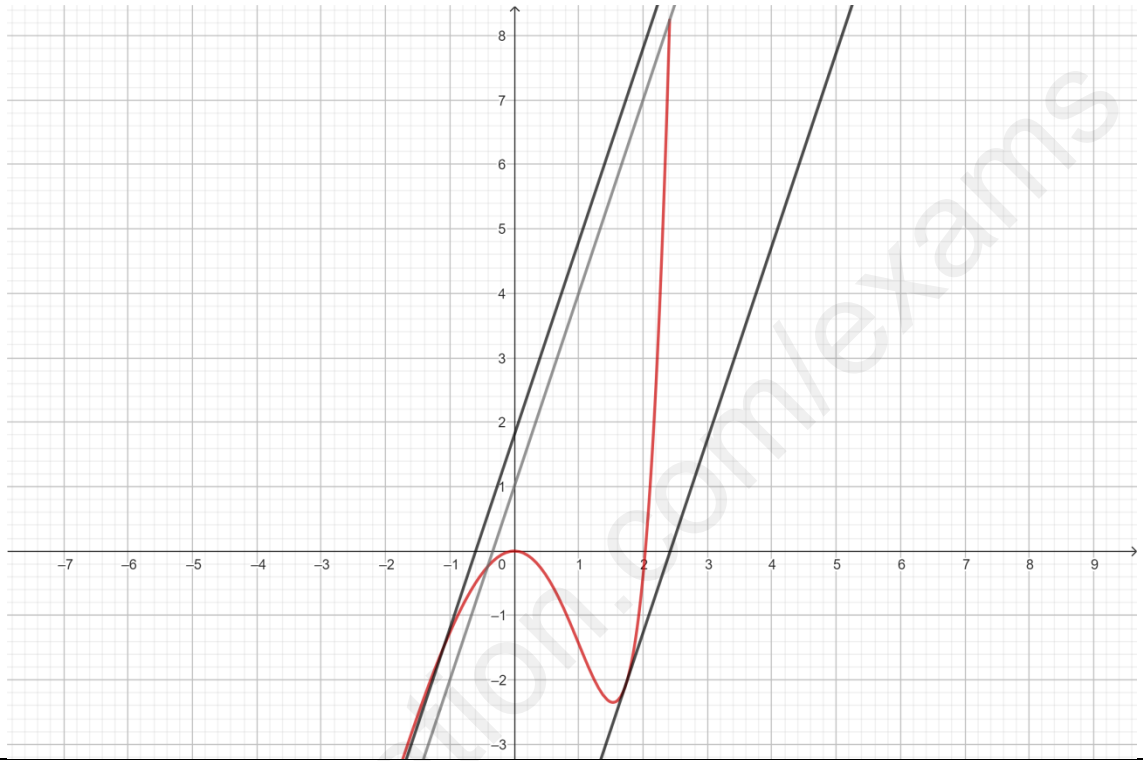
إذن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة $(\beta; 0)$ ؛ حيث : $2.03 < \beta < 2.04$.

د) المنحنى (C_f) يقبل مماسين موازيين لـ (Δ) معناه $f'(x) = 3$ معناه $g(x) = 3$ معناه $(x^2 - 3)e^x + 3 = 3$

معناه $(x^2 - 3)e^x = 0$ معناه $x^2 - 3 = 0$ معناه $x = \sqrt{3}$ أو $x = -\sqrt{3}$ معناه يوجد مماسين (T_1) و (T_2) للمنحنى

(C_f) موازيين لـ (Δ) حيث (T_1) مماس عند $x_1 = \sqrt{3}$ و (T_2) مماس عند $x_2 = -\sqrt{3}$.

(4) رسم (Δ) ؛ (T_1) ؛ (T_2) و (C_f) على $]-\infty; 1+\sqrt{2}]$:



(5) لدينا :

$$h :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto h(x) = f(\ln(x))$$

أ) حساب النهايات :

بما أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(\ln(x)) = -\infty$

بما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(\ln(x)) = +\infty$

ب) دراسة اتجاه تغير الدالة h :

من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ الدالة h قابلة للاشتقاق :

$$h'(x) = \frac{1}{x} f'(\ln(x))$$

لدينا :

x	0	1	e^α	$+\infty$
$\ln(x)$				$+\infty$
			α	
		0		
				$-\infty$

لدينا :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x) = g(x)$	+	$\circ$	-	+

إذن :

x	0	1	e^α	$+\infty$
$f'(\ln(x))$	+	$\circ$	-	+
$\frac{1}{x}$	+	+	+	+
$h'(x)$	+	$\circ$	-	+

اتجاه تغير الدالة h :

الدالة h متزايدة تماماً على المجال $[0;1]$ و المجال $[e^\alpha; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على المجال $[1; e^\alpha]$.

جدول تغيرات الدالة h :

x	0	0	α	$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	$h(0) = 0$	$h(e^\alpha) = f(\alpha)$	$+\infty$



المدة : 3 سا و 30 د

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (05 نقاط)

① لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الاول $u_0 = 8$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 4}$

(أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$.

(ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . ثم استنتج تقاربها.

② لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = 1 + \frac{a}{u_n}$

(أ) عين قيمة العدد الحقيقي a حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{4}{3}$ ، يطلب تعيين حدها الاول.

(ب) نضع $a = 1$ أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم بين أنه أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{1}{\frac{9}{8}\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1}$

(ج) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$ و المجموع $S'_n : S'_n = v_0 + 3v_1 + \dots + 3^n v_n$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي كيس على ثلاث كرات حمراء مرقمة بـ -1 ، 1 و 2 وخمسة كرات سوداء مرقمة بـ -1 ، 0 ، 1 ، 2 و 2 و كرتان خضراء مرقمتان بـ -1 ، 0 . نسحب عشوائيا ثلاث كرات في ان واحد من الكيس .

① أحسب احتمال الحوادث التالية :

A "الكرات المسحوبة مختلفة الالوان"

B "الكرات المسحوبة لها نفس الرقم"

C "مجموع ارقام الكرات المسحوبة معدوم"

② علما أن الكرات المسحوبة مختلفة الالوان ما احتمال أن تكون لها نفس الرقم ؟

③ هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟ برر جوابك

④ ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بأكبر رقم تحمله الكريات المسحوبة .

(أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

(ب) أحسب الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X .

(ج) أحسب احتمال الحادثة : $X^2 + 2X \leq 0$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

- (I) حل في مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول Z : $(\bar{z} - 2 - 2i)(z^2 - 2z + 2) = 0$.
- (II) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
- نعتبر النقط A, B, C و I والتي لواحقتها على الترتيب $Z_A = 1+i$ ، $Z_B = \bar{Z}_A$ ، $Z_C = 2Z_B$ ، $Z_I = 3$.
- أكتب على الشكل المثلثي العدد Z_A ثم استنتج الشكل المثلثي لكل من العددين Z_B ، Z_C .
 - أحسب $|Z_C - Z_I|$ ، $|Z_B - Z_I|$ ، $|Z_A - Z_I|$ ماذا تستنتج ؟
 - عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{Z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ عددا حقيقيا .
 - أكتب العدد $\frac{Z_C - 3}{Z_A - 3}$ على الشكل الأسّي ، ثم استنتج طبيعة المثلث IAC .
 - عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z في كل حالة :
- (أ) $|iz - 2 - 2i| = |z - 1 - i|$ (ب) $Z = 3 + ke^{\frac{\pi i}{3}}$ مع k يسمح $\mathbb{R}_+^*$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- (I) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^2(1 - 2\ln x)$
- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.
 - أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .
 - بين أن المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.89 \leq \alpha \leq 1.90$. ثم استنتج إشارة $g(x) + 1$.
- (II) f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$.
- وليكن $\mathcal{C}_f$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.
- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسر النتائج هندسيا .
 - بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)+1}{x(1+x^2)^2}$.
 - أستنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .
 - بين أن : $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$.
 - بين أن المنحنى $\mathcal{C}_f$ يقبل مماسا T عند نقطة ذات الترتيبة 0 ، ثم أكتب معادلة المماس T .
 - أحسب f أنشئ كلا من T والمنحنى $\mathcal{C}_f$.
 - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = \frac{1}{2}x + m$.
 - لتكن h دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ ب : $h(x) = \frac{\ln(x+1)}{1+(x+1)^2} + 2$ ، $\mathcal{C}_h$ تمثيلها البياني .
- بين أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول المنحنى $\mathcal{C}_f$ إلى المنحنى $\mathcal{C}_h$ ثم ارسمه في نفس المعلم السابق .

انتهى الموضوع الأول



الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{-5}{2u_n - 7}$

① أ) أثبت من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 2$

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

② أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 \leq \frac{4}{5}(u_n - 1)$

ب) تحقق من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n - 1 \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

③ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $v_n = \frac{2u_n - 2}{2u_n - 5}$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تعيين أساسها وحددها الأول v_0 .

ب) أكتب عبارة v_n و u_n بدلالة n .

④ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{2u_0 - 5} + \frac{1}{2u_1 - 5} + \dots + \frac{1}{2u_n - 5}$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

يحتوي صندوق على ثلاث كريات بيضاء مرقمة من 1 إلى 3، وأربع كريات سوداء مرقمة من 4 إلى 7 و ثلاث كريات مرقمة من 8 إلى 10 لانفرق بينها عند اللمس. نسحب ثلاث كرات على التوالي دون إعادة الكرة المسحوبة إلى الصندوق.

نعتبر الحوادث التالية: A "الكرات المسحوبة من الوان مختلفة"

B "الحصول على كرتين بيضاء على الأقل"

C "الكرات المسحوبة تحمل أرقاما فردية"

D "الكرات المسحوبة تحمل أرقاما تشكل حدودا متتالية هندسية متزايدة تماما"

① بين أن $p(A) = \frac{19}{20}$ ثم أحسب $p(B)$ ، $p(C)$ و $p(D)$.

② بين أن : $p(C \cap D) = \frac{1}{720}$ ، ثم استنتج $p(C \cup D)$

③ علما أن الكرات المسحوبة تحمل أرقاما تشكل حدودا متتالية هندسية متزايدة تماما ما احتمال أن تكون أرقامها فردية ؟

④ نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الأرقام الزوجية المسحوبة.

أ) - عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ب) - أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ ، ثم استنتج $E(1444X - 2023)$.



التمرين الثالث: (04 نقاط)

لكل سؤال من الأسئلة التالية جواب واحد فقط صحيح. عين الجواب الصحيح معلاً اختيارك :

① حل المعادلة (E) ذات المجهول Z حيث $z = \frac{6-z}{3-z}$ (E) هو :

1-i ☐

2+√2i ☐

-2-√2i ☐

② العدد المركب L حيث $L = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2022}$ هو عدد :

تخيلي صرف موجب ☐

حقيقي سالب ☐

حقيقي موجب ☐

③ لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x, y)$ من المستوى حيث : $|iz-1-i|=3$ المجموعة (Γ) هي :

دائرة نصف قطرها 3 ☐

دائرة نصف قطرها √3 ☐

دائرة نصف قطرها 3 ☐

ولاحقة مركزها $-1+i$

ولاحقة مركزها $1+i$

ولاحقة مركزها $1-i$

④ الجذران التربيعيان للعدد المركب w حيث $w = -2-2i\sqrt{3}$ هما :

$-1+\sqrt{3}i$ و $1-\sqrt{3}i$ ☐

$-1-\sqrt{3}i$ و $1+\sqrt{3}i$ ☐

$1-\sqrt{3}i$ و $1+\sqrt{3}i$ ☐

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x - (x^2 + 1)e^{-x+1}$ وليكن $\mathcal{C}_f$ تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $O; \vec{i}; \vec{j}$. $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$

① أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

② بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$.

③ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب لـ $\mathcal{C}_f$ عند $+\infty$ ، ثم أدرس الوضعية النسبية للمنحنى $\mathcal{C}_f$ والمستقيم (Δ) .

④ عين معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

⑤ بين أن المنحنى $\mathcal{C}_f$ يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما .

⑥ أحسب $f(0)$ و $f(3)$ ، ثم أنشئ كل من (Δ) ، (T) ، $\mathcal{C}_f$.

⑦ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$.

⑧ أ) بين أن الدالة G المعرفة بـ : $G(x) = -(x^2 + 2x + 3)e^{-x+1}$ دالة أصلية للدالة $g(x) = (x^2 + 1)e^{-x+1}$ على $\mathbb{R}$

ب) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى $\mathcal{C}_f$ والمستقيم (Δ) والمستقيمين $x=0$ و $x=1$.

انتهى الموضوع الثاني

﴿ مع تمنياتنا لكم بالتوفيق و النجاح في شهادة البكالوريا دورة جوان 2023 ﴾

امتحان بكالوريا تجريبى

الأستاذ: قويسم الخليل

يوم: 15 مارس 2023



الشعبة: علوم تجريبية

المدة: 03 س و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (03.00)

- في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية، أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير بدقتة
- 1 [01.00] $(S): \begin{cases} 2z_1 - z_2 = -3 \\ 2\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$ نعتبر الجملة z_2 و z_1 مرافق $\bar{z}_2$ و $\bar{z}_1$ مرافق z_1 نعتبر الجملة $(z_1; z_2) \in \{(-3 + \sqrt{3}i; \sqrt{3}i)\}$ هما،
- 2 [01.00] نعتبر العدد المركب A ، حيث: $A = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1444} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2023}$
- العدد A حقيقي
- 3 [01.00] نعتبر في المستوى المركب $(0; \vec{u}, \vec{v})$ النقطة A ذات اللاحقة $z_A = 1 - 2i$ المجموعة (Γ) للنقط M من المستوى ذات اللاحقة z التي تحقق: $|2\bar{z} - 2 - 4i| = |\sqrt{3} + i|$ هي؛
- الدائرة ذات المركز A ونصف القطر 1

التمرين الثاني: (05.00)

- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = \frac{3}{2}$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ: $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 5}$
- 1 [00.75] برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $u_n > 0$
- 2 [00.75] ادرس اتجاه تغير (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة
- 3 [00.50] / ا بـ ين أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $0 < u_{n+1} < \frac{2}{5}u_n$
- ب/ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0 < u_n < \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ ، ثم أوجد $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$
- 4 [00.75] (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$
- ب/ بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$
- ج/ اكتب بدلالة n عبارة v_n و u_n
- د/ احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$ بطريقة أخرى
- 5 [00.50] عيّن بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{6}{2u_0 + 3} + \frac{6}{2u_1 + 3} + \dots + \frac{6}{2u_n + 3}$

الموضوع الثاني

◀ التمرين الأول: (04.00)

نعتبر الصناديق غير الشفافة U ، V و W . حيث يحتوي الصندوق U على 3 كرات سوداء و 4 كرات حمراء. والصندوق V يحتوي على كرتين سوداوين و 6 كرات حمراء. والصندوق W يحتوي على خمس كرات مرقمة من 1 إلى 5. كل الكرات لا تميز بينها باللمس نضع:

$$\begin{array}{|l} P(N) \text{ احتمال الحصول على كرة سوداء} \\ P(U) \text{ السحب من الصندوق } U \\ P(R) \text{ احتمال الحصول على كرة حمراء} \\ P(V) \text{ السحب من الصندوق } V \end{array}$$

(I) [01.50] نسحب عشوائيا من الصندوق U ثلاث كرات في آن واحد، احسب احتمال كل من الحوادث التالية:

A : "الحصول على ثلاث كرات مختلفة اللون"

B : "الحصول على كرة حمراء واحدة بالضبط"

C : "الحصول على كرة سوداء على الأكثر"

(II) نختار كرة عشوائيا من الصندوق W ، إذا ظهرت الكرة المسحوبة تحمل رقم مضاعف لـ 3 نسحب

عشوائيا كرة من الصندوق U والا فإننا نسحب كرة عشوائيا من الصندوق V

1 [01.00] أنجز شجرة الاحتمالات الموافقة لهذه التجربة

2 [00.75] بين أن احتمال الحصول على كرة حمراء هو: $P(R) = \frac{5}{7}$

3 [00.75] إذا كانت الكرة المسحوبة سوداء، فما احتمال أن تكون من الصندوق V ؟

◀ التمرين الثاني: (04.50)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A و B اللذان

لاحقتهما على الترتيب: z_A و z_B حيث: $z_A = \sqrt{3} + i$ و $z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

a و β العددان المركبان حيث: $\alpha = \sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1)$ و β يحقق: $\alpha = 2(1 + i)\beta$

1 [01.00] احسب α^2 ، ثم عين الطويلة وعمدة للعدد المركب α^2

2 [01.00] استنتج الطويلة وعمدة للعدد المركب α ، ثم اكتبه على الشكل المثلي

3 [00.75] عين القيم المضبوطة لـ $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

4 [01.00] بين أن $\beta = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، ثم اكتب β على الشكل الجبري

5 (γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z - \sqrt{3} - i| = 1$

أ/ بين أن النقطة B تنتمي إلى (γ) [00.25]

ب/ عين الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة (γ) [00.50]

◀ التمرين الثالث: (04.00)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 2}$

1 [00.75] برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $2 < u_n \leq 4$

- ② أثبت أن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ [00.50]
- ③ (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \ln\left(\frac{u_n}{u_n - 2}\right)$
- أ/ بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول [00.75]
- ب/ اكتب بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$ [01.00]
- ج/ احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$ [00.50]
- ④ اكتب بدلالة n المجموع S_n ، حيث: $S_n = e^{v_0} + e^{v_1} + \dots + e^{v_n}$ [00.50]

التمرين الرابع: 07.50

- (I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = xe^x + 1$
- ① ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها [01.00]
- ② استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ [00.50]
- (II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - 1}$ ، و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 1cm)
- ① احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها ، ثم استنتج المستقيمات المقاربة لـ (C_f) [01.00]
- ② أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$ [00.50]
- ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}^*$ ، ثم شكل جدول تغيراتها [00.50]
- ③ بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $-0.6 < \alpha < -0.5$ [00.25]
- ④ أ/ بين أن (D) المستقيم ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$ [00.50]
- ب/ ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (D) [00.50]
- ⑤ مثل بيانيا كل من (D) و (C_f) [01.00]
- ⑥ عين قيم الوسيط الحقيقي حتى تقبل المعادلة $m + f(x) = 0$ حلين مختلفين في الإشارة [00.50]
- (III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = \frac{x-1}{1-e^{-x}}$ ، و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق
- ① بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $h(x) = f(-x) - 1$ [00.50]
- ② اشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) ، ثم أنشئه [00.75]

انتهى الموضوع الثاني



إمسح أو انقر رمز الاستجابة السريعة لمشاهدة الحل المفصل

تصحيح مقترح لامتحان البكالوريا التجريبية

الأستاذ: قويسم الخليل

الشعبة: علوم تجريبية

3 (Γ) هي الدائرة ذات المركز A ونصف القطر 1

صحيح | التبرير:

$$\begin{aligned} |2\bar{z} - 2 - 4i| &= |\sqrt{3} + i| \Rightarrow |2(\bar{z} - 1 - 2i)| = 2 \\ &\Rightarrow |2||\bar{z} - 1 - 2i| = 2 \\ &\Rightarrow |\bar{z} - 1 - 2i| = 1 \\ &\Rightarrow |z - 1 + 2i| = 1 \\ &\Rightarrow |z - (1 - 2i)| = 1 \\ &\Rightarrow |z - z_A| = 1 \\ &\Rightarrow AM = 1 \end{aligned}$$

إذن، (Γ) هي الدائرة ذات المركز A ونصف القطر 1

◀ [م] التمرين الثاني: (05.00)

1 برهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n

لدينا، $u_n > 0$

نضع، $P(n): u_n > 0$

• لدينا، $u_0 = \frac{3}{2}$ معناه، $u_0 > 0$ إذن $P(0)$ محققة

• ليكن $n \in \mathbb{N}$ نفرض صحة $P(n)$ ونثبت صحة

$P(n+1)$

• لدينا،

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2u_n}{2u_n + 5} \\ &= \frac{2u_n + 5 - 5}{2u_n + 5} \\ &= \frac{2u_n + 5}{2u_n + 5} - \frac{5}{2u_n + 5} \\ &= 1 - \frac{5}{2u_n + 5} \end{aligned}$$

ولدينا،

$$\begin{aligned} u_n > 0 &\Rightarrow 2u_n + 5 > 5 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2u_n + 5} < \frac{1}{5} \\ &\Rightarrow -\frac{5}{2u_n + 5} > -1 \\ &\Rightarrow 1 - \frac{5}{2u_n + 5} > 0 \\ &\Rightarrow u_{n+1} > 0 \end{aligned}$$

الموضوع الأول

◀ [م] التمرين الأول: (03.00)

1 العددان المركبان حلي الجملة (S)، هما،

$$(z_1; z_2) \in \{(-3 + \sqrt{3}i; \sqrt{3}i)\}$$

خطأ | التبرير:

$$\begin{cases} 2z_1 - z_2 = -3 \\ 2\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases} \quad \text{لدينا،}$$

$$\begin{cases} 2z_1 - z_2 = -3 \dots (*) \\ 2z_1 + z_2 = -3 + 2i\sqrt{3} \dots (**) \end{cases} \quad \text{تكافئ،}$$

بجمع (*) و (**) طرفا لطرف

$$4z_1 = -6 + 2\sqrt{3}i$$

ومنه،

$$z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

بتعويض قيمة z_1 في (*) نجد،

$$2\left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - z_2 = -3$$

$$z_2 = \sqrt{3}i \quad \text{ومنه،}$$

2 العدد A حقيقي

صحيح | التبرير:

$$\text{لدينا، } -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ و } \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1444} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2023} \\ &= \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{1444} + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{2023} = e^{1444 \times \frac{\pi}{3}i} + e^{2023 \times \frac{2\pi}{3}i} \\ &= e^{(481\pi + \frac{\pi}{3})i} + e^{(1349\pi - \frac{\pi}{3})i} = e^{(\pi + \frac{\pi}{3})i} + e^{(\pi - \frac{\pi}{3})i} \\ &= \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &\quad + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -1 \end{aligned}$$

إذن $P(n+1)$ محققة

حسب البرهان بالتراجع $P(n)$ محققة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

② دراسة اتجاه تغير (u_n)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n}{2u_n + 5} - u_n \\ &= \frac{2u_n - 2(u_n)^2 - 5u_n}{2u_n + 5} \\ &= -\frac{u_n(2u_n + 3)}{2u_n + 5} \end{aligned}$$

لدينا: $u_n > 0$

$$\begin{cases} 2u_n + 3 > 0 \\ 2u_n + 5 > 0 \end{cases} \text{ ومنه:}$$

$$u_{n+1} - u_n < 0 \text{ ومنه:}$$

إذن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

- استنتاج أنها متقاربة.

بما أن (u_n) متتالية متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ

0، فهي متقاربة

③

أ/ تبين أن: $0 < u_{n+1} < \frac{2}{5}u_n$

$$u_n > 0 \Rightarrow 2u_n + 5 > 5$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2u_n + 5} < \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{2u_n}{2u_n + 5} < \frac{2}{5}u_n$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < \frac{2}{5}u_n$$

ب/ استنتاج أن: $0 < u_n < \left(\frac{2}{5}\right)^n$

لدينا: $0 < u_{n+1} < \frac{2}{5}u_n$ ومنه:

$$\begin{cases} 0 < u_1 < \frac{2}{5}u_0 \\ 0 < u_2 < \frac{2}{5}u_1 \\ \vdots \\ 0 < u_{n-1} < \frac{2}{5}u_{n-2} \\ 0 < u_n < \frac{2}{5}u_{n-1} \end{cases}$$

بضرب أطراف المتراجحات طرفًا لطرف نجد:

$$0 < u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n-1} \times u_n < \frac{2}{5}u_0 \times \frac{2}{5}u_1 \times \dots \times \frac{2}{5}u_{n-2} \times \frac{2}{5}u_{n-1}$$

$$0 < u_n < \frac{2}{5}u_0 \times \frac{2}{5} \times \dots \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}$$

$$0 < u_n < u_0 \left(\frac{2}{5}\right)^n \text{ ومنه:}$$

$$0 < u_n < \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n \text{ ومنه:}$$

• إيجاد $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$

$$0 < u_n < \frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$\Rightarrow 0 < \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$$

$$\Rightarrow 0 < \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

④

أ/ تبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{4u_{n+1}}{2u_{n+1} + 3} \\ &= \frac{4 \cdot \frac{2u_n}{2u_n + 5}}{2 \cdot \frac{2u_n}{2u_n + 5} + 3} \\ &= \frac{8u_n}{10u_n + 15} \\ &= \frac{2(4u_n)}{5(2u_n + 3)} = \frac{2}{5}v_n \end{aligned}$$

ب/ كتابة بدالة n عبارة v_n و u_n

$$\text{لدينا: } v_0 = 1 \text{ ومنه: } v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$\text{ولدينا: } v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$$

$$\text{ومنه: } v_n = \frac{4u_n + 6 - 6}{2u_n + 3}$$

$$\text{ومنه: } v_n = \frac{4u_n + 6}{2u_n + 3} - \frac{6}{2u_n + 3}$$

$$\text{ومنه: } v_n = 2 - \frac{6}{2u_n + 3}$$

$$\text{ومنه: } 2 - v_n = \frac{6}{2u_n + 3}$$

$$\text{ومنه: } \frac{2 - v_n}{6} = \frac{1}{2u_n + 3}$$

$$\text{ومنه: } \frac{6}{2 - v_n} = 2u_n + 3$$

$$\text{ومنه: } \frac{3}{2 - v_n} - \frac{3}{2} = u_n$$

$$\text{ومنه: } \frac{3v_n}{2(2 - v_n)} = u_n$$

$$\text{ومنه: } u_n = \frac{3 \left(\frac{2}{5}\right)^n}{2 \left(2 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}$$

ج/ حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$ بطريقة أخرى:

$$P(|X| < X^2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{22}{35}$$

ج/ حساب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X :

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i P(x_i) = \frac{12}{7}$$

◀ [1م] التمرين الرابع: (07.75)

(I)

① دراسة تغيرات الدالة g على المجال $]0; +\infty[$:

• نهايات الدالة g

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2 \ln x \right) \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

• إشارة $g'(x)$

لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق ودالتها المشتقة هي:

$$g'(x) = 2x - 4x \ln x - \frac{2x^2}{x} = -4x \ln x$$

لدينا، $-4x < 0$ على المجال $]0; +\infty[$

ولدينا، $\ln x = 0$ معناه، $x = 1$

• جدول تغيرات الدالة g

x	0	1	$+\infty$
$-4x$	-	-	-
$\ln x$	-	0	+
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	1	2	$-\infty$

② تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا، الدالة g مستمرة ورتيبة على $]1; +\infty[$

ولدينا، $\begin{cases} g(1.9) \approx -0.02 \\ g(1.8) \approx 0.43 \end{cases}$ ومنه، $g(1.9) \times g(1.8) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$

③ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

(II)

① حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، وتفسير النتائج

هندسيا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3 \left(\frac{2}{5} \right)^n}{2 \left(2 - \left(\frac{2}{5} \right)^n \right)} \right) = \frac{3 \times 0}{2(2-0)} = 0$$

⑤ تعيين بدالات n المجموع S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{6}{2u_0 + 3} + \frac{6}{2u_1 + 3} + \dots + \frac{6}{2u_n + 3} \\ &= 2 - v_0 + 2 - v_1 + \dots + 2 - v_n \\ &= 2(n+1) - (v_0 + v_1 + \dots + v_n) \\ &= 2(n+1) - \frac{1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{5}} \\ &= 2(n+1) - \frac{5}{3} \left(1 - \left(\frac{2}{5} \right)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

◀ [1م] التمرين الثالث: (04.25)

نختار 3 أعضاء من بين 4 رجال و 3 نساء، أي من بين 7 أشخاص، وعليه، عدد الفرق التي يمكن تشكيلها هو

$$A_7^3 = 210$$

① حساب احتمالات الأحداث:

$$\bullet P(A) = \frac{A_4^3}{A_7^3} = \frac{24}{210} = \frac{4}{35}$$

$$\bullet P(B) = \frac{A_4^3 + 3A_3^1 A_4^2}{A_7^3} = \frac{96}{210} = \frac{22}{35}$$

$$\bullet P(C) = \frac{A_1^1 A_6^2}{A_7^3} = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$$

② تبين أن $P(B \cap C) = \frac{1}{7}$:

$$\bullet P(B \cap C) = \frac{A_1^1 A_4^2 + 2A_1^1 A_3^1 A_4^1}{A_7^3} = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$$

③

أ/ تعيين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

لدينا، $X(0; 1; 2; 3)$

حيث:

$$\bullet P(X = 0) = \frac{A_3^3}{A_7^3} = \frac{6}{210} = \frac{1}{35}$$

$$\bullet P(X = 1) = \frac{3A_4^1 A_3^2}{A_7^3} = \frac{72}{210} = \frac{12}{35}$$

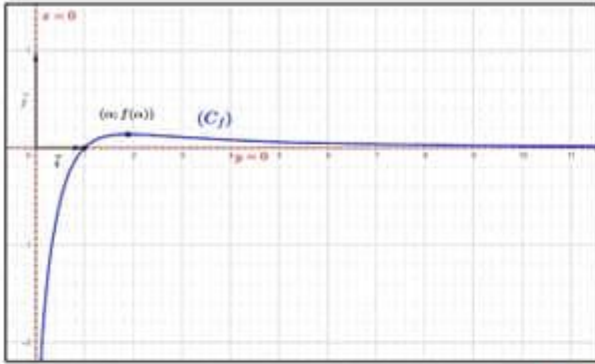
$$\bullet P(X = 2) = \frac{3A_4^2 A_3^1}{A_7^3} = \frac{108}{210} = \frac{18}{35}$$

$$\bullet P(X = 3) = P(A) = \frac{24}{210} = \frac{4}{35}$$

ومنه:

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

ب/ حساب احتمال الحدث $"|X| < X^2"$:



(III)

1 تبين أن الدالة H دالة أصلية للدالة h ،

$$H(x) = \int h(x) dx = \int x^2 \ln x dx$$

$$\left| \begin{array}{l} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{3}x^3 \end{array} \right| \text{ ومنه } \left| \begin{array}{l} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^2 \end{array} \right| \text{ نضع،}$$

وعليه،

$$\begin{aligned} H(x) &= \int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \int \frac{1}{3}x^3 dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c = \frac{1}{3}x^3 \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + c \end{aligned}$$

2 تعيين عبارة $G(x)$ ،

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_1^x g(t) dt \\ &= \int_1^x (1 + t^2 - 2t^2 \ln t) dt \\ &= \int_1^x (1 + t^2) dt - 2 \int_1^x h(t) dt \\ &= \left[t + \frac{1}{3}t^3 - 2H(t) \right]_1^x \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 - 2H(x) - 1 - \frac{1}{3} + 2H(1) \\ &= \left[x + \frac{1}{3}x^3 \left(\frac{1}{3} - 2 \ln x \right) - \frac{14}{9} \right] \end{aligned}$$

3 حساب بدلات α العدد A_α ،

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \int_1^\alpha g(x) dx = [G(x)]_1^\alpha \\ &= \left(\alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 \left(\frac{1}{3} - 2 \ln \alpha \right) - \frac{10}{9} \right) u. a \\ &= \left(\alpha + \frac{1}{3}\alpha^3 \left(\frac{1}{3} - 2 \ln \alpha \right) - \frac{10}{9} \right) \times (3 \times 1) cm^2 \\ &= \left(3\alpha + \alpha^3 \left(\frac{1}{3} - 2 \ln \alpha \right) - \frac{10}{3} \right) cm^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x^2} \right) &= 0 \text{ لأن } \\ \text{ومنه، } (C_f) &\text{ يقبل،} \end{aligned}$$

- مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 0$
- مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = 0$

2

1/ تبين أن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x^2+1)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}(x^2+1) - 2x \ln x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2+1 - 2x^2 \ln x}{x(x^2+1)^2} \\ &= \frac{g(x)}{x(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f على $]0; +\infty[$ ،

وتشكل جدول تغيراتها،

لدينا، $x(x^2+1)^2 > 0$ على المجال $]0; +\infty[$ ، ومنه،

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

3 تبين أن $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$

لدينا، $g(\alpha) = 0$

ومنه، $1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \ln(\alpha) = 0$

ومنه، $\ln \alpha = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2}$ ، وعليه،

$$f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{\alpha^2 + 1} = \frac{\frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2}}{\alpha^2 + 1} = \frac{1}{2\alpha^2}$$

• استنتاج حصر $f(\alpha)$ سعته 10^{-2} ،

لدينا: $1.8 < \alpha < 1.9$

ومنه، $2(1.8)^2 < 2\alpha^2 < 2(1.9)^2$

ومنه، $\frac{1}{2(1.9)^2} < \frac{1}{2\alpha^2} < \frac{1}{2(1.8)^2}$

ومنه، $0.13 < f(\alpha) < 0.15$

4 تعيين إحداثي تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل،

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{\ln x}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

ومنه، $(C_f) \cap (xx') = \{(1; 0)\}$

• تمثيل المنحنى (C_f)

الموضوع الثاني

◀ [2م] التمرين الأول: (04.00)

1 حساب احتمال كل من الأحداث A ، B و C

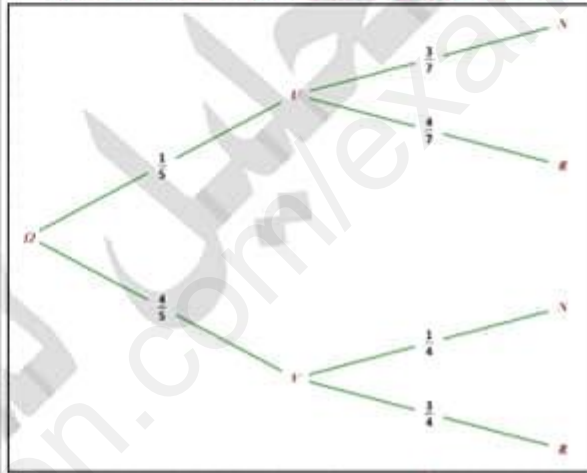
$$P(A) = \frac{C_3^2 C_4^1 + C_4^2 C_3^1}{C_7^3} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}$$

$$P(B) = \frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35}$$

$$P(C) = \frac{C_4^3 + C_3^1 C_4^2}{C_7^3} = \frac{22}{35}$$

2

أ/ انجاز شجرة الاحتمالات الموافقة لهذه التجربة:



ب/ تبين أن $P(R) = \frac{5}{7}$

$$P(R) = P(U \cap R) + P(V \cap R) = \frac{5}{7}$$

ج/ حساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من

الصندوق V علما أنها سوداء:

$$P_N(V) = \frac{P(V \cap N)}{P(N)} = \frac{P(V \cap N)}{1 - P(R)} = \frac{\frac{4}{5} \times \frac{1}{4}}{1 - \frac{5}{7}} = \frac{7}{10}$$

◀ [2م] التمرين الثاني: (04.50)

1 حساب α^2

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= (\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1))^2 \\ &= (\sqrt{3} - 1)^2 - (\sqrt{3} + 1)^2 + 2(\sqrt{3} - 1)i(\sqrt{3} + 1) \\ &= (\sqrt{3} - 1)^2 - (\sqrt{3} + 1)^2 + (2\sqrt{3} - 2)(i\sqrt{3} + i) \\ &= -4\sqrt{3} + 4i \end{aligned}$$

• تعيين الطولية وعمدة للعدد المركب α^2

$$|\alpha^2| = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + (4)^2} = \sqrt{64} = 8$$

لدينا،

$$\begin{cases} \cos(\arg(\alpha^2)) = \frac{-4\sqrt{3}}{8} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin(\arg(\alpha^2)) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ ومنه:}$$

$$\arg(\alpha^2) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ أي } \arg(\alpha) = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

حيث، $k \in \mathbb{Z}$

2 استنتاج الطولية وعمدة للعدد المركب α ،

لدينا،

$$\begin{aligned} |\alpha^2| &= 8 \Rightarrow |\alpha|^2 = 8 \\ &\Rightarrow |\alpha| = \sqrt{8} \\ &\Rightarrow |\alpha| = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

ولدينا،

$$\begin{aligned} \arg(\alpha^2) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi &\Rightarrow 2 \arg(\alpha) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ &\Rightarrow \arg(\alpha) = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{aligned}$$

• كتابة α على الشكل المثلثي:

$$\alpha = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right)$$

3 تعيين القيم المضبوطة لـ $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

لدينا،

$$\begin{cases} \alpha = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i2\sqrt{2} \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \\ \alpha = \sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1) \end{cases}$$

ومنه،

$$\begin{cases} 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{3} - 1 \\ 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{3} + 1 \end{cases}$$

ومنه،

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

إذن،

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 2 + \sqrt{3}$$

4 تبين أن $\beta = e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$\alpha = 2(1 + i)\beta \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{2(1 + i)}$$

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 2} = \frac{4u_n + 8 - 8}{u_n + 2} = \frac{4u_n + 8}{u_n + 2} - \frac{8}{u_n + 2}$$

$$= 4 - \frac{8}{u_n + 2}$$

نضع: $P(n): 2 < u_n \leq 4$

• لدينا: $2 < u_0 \leq 4$ ومنه: $2 < 4 \leq 4$

إذن: $P(0)$ محققة

• ليكن $n \in \mathbb{N}$

نفرض صحة $P(n)$ ونثبت صحة $P(n+1)$

• لدينا: $2 < u_n \leq 4$

ومنه: $4 < u_n + 2 \leq 6$

ومنه: $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{u_n + 2} < \frac{1}{4}$

ومنه: $-2 < -\frac{8}{u_n + 2} \leq -\frac{8}{6}$

ومنه: $2 < 4 - \frac{8}{u_n + 2} \leq \frac{8}{3}$

ومنه: $2 < 4 - \frac{8}{u_n + 2} \leq 4$

ومنه: $2 < u_{n+1} \leq 4$

② دراسة اتجاه تغير (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{u_n + 2} - u_n$$

$$= \frac{4u_n - (u_n)^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{2u_n - (u_n)^2}{u_n + 2}$$

$$= \frac{u_n(2 - u_n)}{u_n + 2}$$

$$\begin{cases} u_n > 0 \\ 2 - u_n < 0 \\ u_n + 2 > 0 \end{cases}$$

إذن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

③ / اتيبين أن (v_n) متتالية حسابية:

$$v_{n+1} = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 2}\right) = \ln\left(\frac{\frac{4u_n}{u_n + 2}}{\frac{4u_n}{u_n + 2} - 2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{4u_n}{2u_n - 4}\right) = \ln\left(\frac{4}{2} \times \frac{u_n}{u_n - 2}\right)$$

$$= \ln(2) + \ln\left(\frac{u_n}{u_n - 2}\right)$$

$$= \ln(2) + v_n$$

إذن (v_n) حسابية أساسها $\ln(2)$ وحدها الأول v_0 حيث:

$$v_0 = \ln\left(\frac{u_0}{u_0 - 2}\right) = \ln(2)$$

ب/ كتابة v_n بدلالة n

$$\begin{cases} |1+i| = \sqrt{2} \\ \arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$$

لدينا:

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\alpha = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

$$\alpha = 2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

إذن:

$$\beta = \frac{\alpha}{2(1+i)} = \frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{12}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

• كتابة β على الشكل الجبري:

لدينا:

$$\beta = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} x = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

نضع: $\beta = x + iy$ ومنه:

$$\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

⑤

أ/ تبين أن النقطة B تنتمي إلى (γ)

لدينا:

$$|z_B - \sqrt{3} - i| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \sqrt{3} - i\right| = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right|$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1$$

إذن: $B \in (\gamma)$

ب/ تعيين الطليعة والعناصر المميزة للمجموعة (γ)

لدينا:

$$|z - \sqrt{3} - i| = 1 \Rightarrow |z - (\sqrt{3} + i)| = 1$$

$$\Rightarrow |z - z_A| = 1$$

$$\Rightarrow AM = 1$$

إذن: (γ) هي دائرة مركزها النقطة A ونصف قطرها 1

◀ [م] التمرين الثالث: (04.00)

① برهان بالتراجع أن: $2 < u_n \leq 4$

لدينا:

ولدينا، $x = -1$ معناه، $1 + x = 0$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	1	$g(-1)$	$+\infty$

② استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ ،

لدينا، $g(-1) = 1 - e^{-1} \approx 0.63 > 0$
الدالة g تبلغ قيمة حدية صغرى موجبة تماما
إذن، $g(x) > 0$

(II)

① حساب نهايات الدالة f ،

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^x \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \frac{x}{e^x}}{1 - \frac{1}{e^x}} \right) = 1$
 - لأن، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$
 - $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ • $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$
- التفسير الهندسي، (C_f) يقبل،

- مستقيم مقارب عمودي معادلته $x = 0$
- مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 1$

② أ/ تبين أن $f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$

لدينا الدالة f قابلة للاشتقاق ودالتها المشتقة هي،

$$f'(x) = \frac{(e^x + 1)(e^x - 1) - e^x(e^x + x)}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{-1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = -\frac{g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير f وتشكيل جدول تغيراتها،

لدينا، $(e^x - 1)^2 > 0$ ومنه،

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	1

③ تبين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة

فاصلتها α حيث، $-0.6 < \alpha < -0.5$ ،

الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $]-\infty; 0]$

$$\{ f(-0.6) \approx 0.11$$

$$\{ f(-0.5) \approx -0.27$$

$$\text{ولدينا } f(-0.6) \times f(-0.5) < 0، \text{ أي،}$$

$$v_n = \ln(2) + n \ln(2) = (n+1) \ln 2 = \ln 2^{n+1}$$

• استنتاج أن، $u_n = \frac{2}{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}$

لدينا، $v_n = \ln \left(\frac{u_n}{u_n - 2} \right)$

$$\text{ومنه } e^{v_n} = \frac{u_n}{u_n - 2}$$

$$\text{ومنه } u_n e^{v_n} - 2e^{v_n} - u_n = 0$$

$$\text{ومنه } u_n(e^{v_n} - 1) = 2e^{v_n}$$

$$\text{ومنه } u_n = \frac{2e^{v_n}}{e^{v_n} - 1}$$

$$\text{ومنه } u_n = \frac{2 \times 2^{n+1}}{2^{n+1} - 1}$$

$$\text{ومنه } u_n = \frac{2 \times 2^{n+1}}{2^{n+1} - 1} \times \frac{2^{-n-1}}{2^{-n-1}}$$

$$\text{ومنه } u_n = \frac{2}{1 - 2^{-n-1}} = \frac{2}{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}$$

ج/ حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$ ،

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}} \right) = \frac{2}{1 - 0} = 2$$

$$\text{لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right) = 0$$

④ اكتب بدلالة n كل من S_n و P_n ،

لدينا، $e^{v_n} = e^{\ln 2^{n+1}} = 2^{n+1}$ ومنه،

$$S_n = e^{v_0} + e^{v_1} + \dots + e^{v_n}$$

$$= 2^{0+1} + 2^{1+1} + \dots + 2^{n+1}$$

$$= 2(2^0 + 2^1 + \dots + 2^n)$$

$$= 2 \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \right)$$

$$= 2(2^{n+1} - 1)$$

$$\text{و } P_n = (u_0 + 2)(u_1 + 2) \times \dots \times (u_n + 2)$$

◀ [م 2] التمرين الرابع: (07.50)

(I)

① دراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$ ،

- النهايات،

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

- إشارة $g'(x)$

لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق ودالتها المشتقة هي،

$$g'(x) = e^x + x e^x = e^x(1 + x)$$

لدينا، $e^x > 0$

ومن هنا حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\alpha \in]-0.6; -0.5[$

4 / تبين أن (D) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$ ؛ لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x)] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^x + x}{e^x - 1} + x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^x + x + xe^x - x}{e^x - 1} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^x + xe^x}{e^x - 1} \right] = \frac{0}{-1} = 0 \end{aligned}$$

إذن: (D) مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (D):

$$f(x) - (-x) = \frac{e^x + xe^x}{e^x - 1} = \frac{e^x(x+1)}{e^x - 1}$$

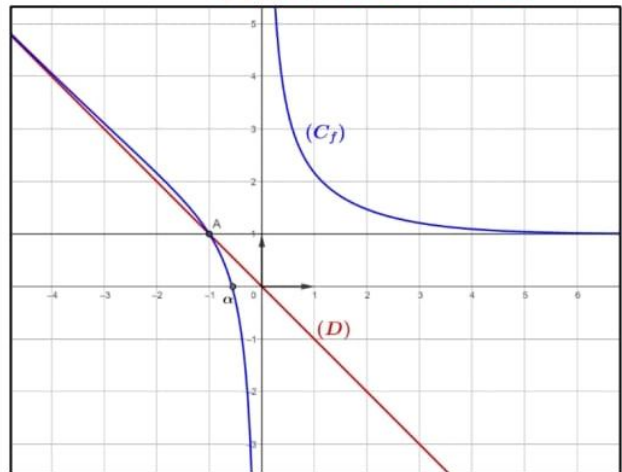
لدينا: $e^x > 0$

ولدينا: $x + 1 = 0$ معناه $x = -1$

ولدينا: $e^x - 1 \neq 0$ معناه: $x \neq 0$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x + 1$	-	0	+	+
$e^x - 1$	-	-	-	+
$f(x) - (-x)$	+	0	-	+
الوضع النسبي	(C_f) فوق (D)	(C_f) يقطع في (D) $A(-1; 1)$	(C_f) تحت (D)	(C_f) فوق (D)

5 تمثيل بياني كل من (C_f) و (D):



6 تعيين قيم الوسيط الحقيقي حتى تقبل المعادلة

$$m + f(x) = 0 \text{ حلين مختلفين في الإشارة؛}$$

لدينا: $m + f(x) = 0$ معناه: $f(x) = -m$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع

المستقيمات ذات المعادلات $y = -m$

أي لما $m \in]-\infty; -1[$ هي: $(-m) \in]1; +\infty[$

(III)

1 تبين أن $h(x) = f(-x) - 1$

$$\begin{aligned} h(x) &= f(-x) - 1 = \frac{e^{-x} - x}{e^{-x} - 1} - 1 \\ &= \frac{e^{-x} - x - e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1} = \frac{1 - x}{e^{-x} - 1} \\ &= \frac{x - 1}{1 - e^{-x}} = h(x) \end{aligned}$$

2 شرح كيف يمكن إنشاء (C_h) انطلاقا من (C_f) :

$$f(-x) = k(x) \text{ نضع؛}$$

$$h(x) = f(-x) - 1 \text{ ومنه؛}$$

$$h(x) = k(x) - 1 \text{ معناه؛}$$

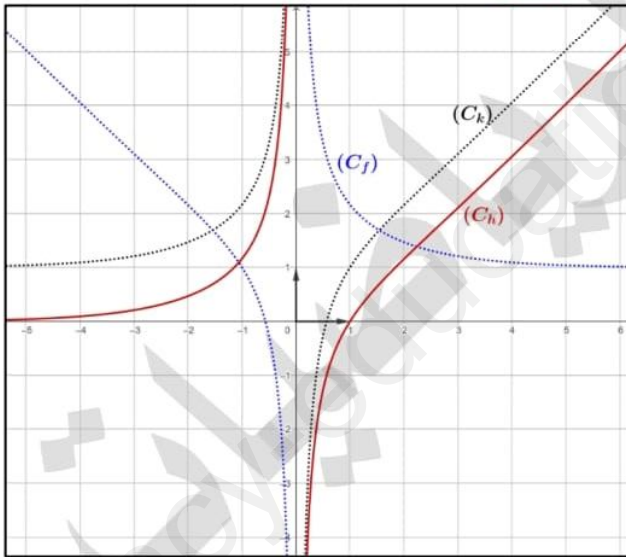
• نرسم (C_k) منحنى الدالة k ، حيث (C_k) هو نظير

(C_f) بالنسبة لمحور الترتيب

• نرسم (C_h) صورة (C_k) بالانعكاس الذي شعاعه

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

• الإنشاء:



بالتوفيق في شهادة البكالوريا



♥ لا تنسونا من صالح دعائكم ♥

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية

ثانويات المقاطعة التفيتشية غرداية 02
دورة: ماي 2023

مديرية التربية لولاية غرداية
امتحان البكالوريا التجريبي
الشعبة: علوم تجريبية

المدة: 03 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z-3)(z^2+4\sqrt{3}z+21)=0$.
- (2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. لتكن النقط A, B, C ذات اللواحق:

$$z_C = \overline{z_B}; z_B = -2\sqrt{3} - 3i; z_A = \sqrt{3}$$
نضع: $L = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
(أ) أكتب العدد L على الشكل المثلثي.
(ب) أكتب العدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الأسّي. ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
- (3) عين z_D لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع.
- (4) نعتبر مجموعة النقط (Γ) ذات اللاحقة Z حيث: $|Z + 3i + 2\sqrt{3}| = 2\sqrt{2}$
(أ) هل النقطة A تنتمي إلى المجموعة (Γ) ؟
(ب) عين مجموعة النقط (Γ) محددا عناصرها المميزة.

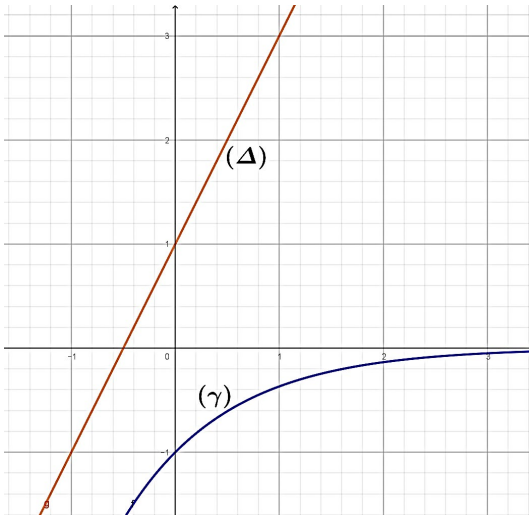
التمرين الثاني: (05 نقاط)

- I. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0 = 2$ و u_n ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{3u_n + 2}$.
- نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{2x}{3x + 2}$
- (1) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$
- (2) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n \leq 2$.
- (3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.
- II. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{\beta}{u_n}$. حيث β عدد حقيقي غير معدوم.
- (1) عين قيمة β حتى تكون المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{3}{2}$.
- (2) نضع $\beta = 1$. (أ) أكتب v_n بدلالة n . ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .
(ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$.
- (ج) أحسب بدلالة n الجداء: $S_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_2} \times \dots \times e^{v_n}$.

اختبار في مادة: الرياضيات/الشعبة: علوم تجريبية /البكالوريا التجريبي 2023

التمرين الثالث: (04 نقاط)

- وحدة إنتاجية يسيرها 08 نساء و 12 رجلا من بينهم العامل " مراد " .
 (1) يريد العمال تشكيل لجنة مؤلفة من ثلاثة عمال . أحسب احتمال الحدثين التاليين:
 A : أعضاء اللجنة نساء.
 B : اللجنة تضم على الأكثر امرأة.
 (2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل لجنة مشكّلة عدد الرجال فيها .
 أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي .
 ب) أحسب $P(x^2 - 2x \leq 0)$.
 (3) يريد العمال تشكيل لجنة مؤلفة من رئيس ونائب وكاتب . أحسب احتمال الحوادث التالية:
 D : رئيس اللجنة رجل .
 E : الرئيس ونائبه من نفس الجنس.
 F : العامل مراد موجود في اللجنة.



التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. (γ) التمثيل البياني للدالة: $x \rightarrow -e^{-x}$ و (Δ)

المستقيم ذو المعادلة: $y = 2x + 1$

g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2x + 1 + e^{-x}$

بقراءة بيانية:

أ) حدّد الوضعية النسبية لـ (γ) و (Δ).

ب) استنتج إشارة الدالة g على $\mathbb{R}$

II. نعتبر f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = -x + \frac{1}{2} + (1 - 2x)e^x$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 2\text{ cm}$.

(1) أ) أحسب نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$.

ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) - \left(-x + \frac{1}{2} \right) \right]$, ثم فسر النتيجة بيانيا.

ج) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (D) ذو المعادلة: $y = -x + \frac{1}{2}$: (D).

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = -g(x) \times e^x$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيها.

(4) بين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (D), يطلب تعيين معادلة له.

(5) أحسب $f(1)$ ثم أنشئ كلا من (D), (T) والمنحنى (C_f) .

(6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) = -x + m$

(7) لتكن S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى والمستقيمتين التي معادلاتها: $y = -x + \frac{1}{2}$, $x = 0$ و $x = \frac{1}{2}$.

بين أن: $S = 8\sqrt{e} - 12$

انتهى الموضوع الأول

اختبار في مادة: الرياضيات/الشعبة: علوم تجريبية /البكالوريا التجريبي 2023

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط).

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير

1- قيمة التكامل $\int_1^{\sqrt{2}} 2x(x^2 - 1)^{2022} dx$ هي:

أ/ $\frac{1}{2021}$ ، ب/ $\frac{1}{2022}$ ، ج/ $\frac{1}{2023}$

2- نعتبر العدد المركب $L = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ ، الشكل الجبري للعدد L^2 هو:

أ/ $(2 + \sqrt{2}) + i(2 - \sqrt{2})$ ، ب/ $2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$ ، ج/ $2\sqrt{2}$

3- f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \ln(e^{2x} - 1)$ ، (C) تمثيلها البياني، (Δ_a) مستقيم من المستوي معرف بالمعادلة $y = ax$ " a عدد حقيقي".

قيمة a حتى يكون (Δ_a) مستقيم مقارب مائل لـ (C) عند $+\infty$ هي:

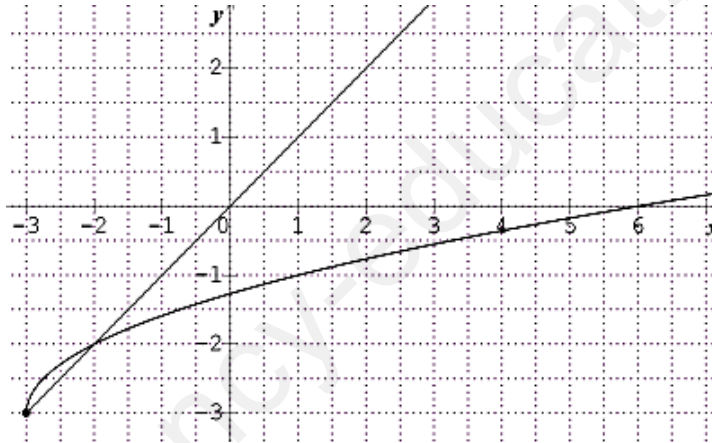
أ/ 1 ، ب/ 2 ، ج/ 0

4- مجموعة حلول المعادلة: $2C_n^2 = 3A_n^1$ ذات المجهول n ، في N^* هي:

أ/ $\{4\}$ ، ب/ $\{5\}$ ، ج/ $\{6\}$

التمرين الثاني: (04 نقاط).

I) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[-3; +\infty[$ بـ: $f(x) = -3 + \sqrt{x + 3}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. " أنظر الشكل المقابل"



1- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول

$u_0 = 6$ و من أجل كل

عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ/ أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة،

ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود

"موضحا خطوط الانشاء". $u_3; u_2; u_1; u_0$.

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها.

2- أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي

n : $u_n > -2$.

ب/ بين أن (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة.

II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = \alpha \ln(u_n + 3)$ ، حيث α عدد حقيقي.

1- عين قيم α حتى تكون (v_n) هندسية غير ثابتة.

2- نعتبر: $\alpha = \frac{2}{3}$ ،

أ/ أثبت أن (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب تعيين حدها الأول.

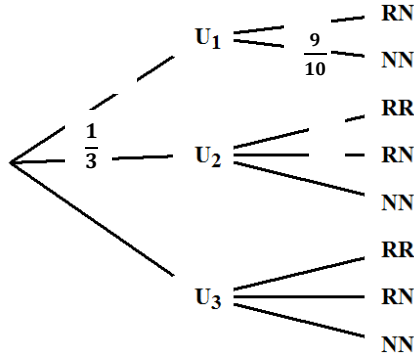
ب/ أكتب v_n ثم u_n بدلالة n ثم احسب نهاية u_n .

ج/ احسب بدلالة n الجداء: $P_n = (u_0 + 3) \times (u_1 + 3) \times \dots \times (u_n + 3)$.

اختبار في مادة: الرياضيات/الشعبة: علوم تجريبية /البكالوريا التجريبي 2023

التمرين الثالث: (04 نقاط).

نعتبر الصناديق الثلاثة u_1 ; u_2 و u_3 حيث الصندوق u_1 يحتوي على كرتة حمراء واحدة و 19 كرتة سوداء والصندوق u_2 على كرتتين حمراوين و 18 كرتة سوداء والصندوق u_3 يحتوي على 3 كرتات حمراء و 17 كرتة سوداء. نختار بالإعتماد على الصدفة الكاملة صندوقا من الصناديق الثلاثة ثم نسحب منه كرتتين في آن واحد. نسمي RR "حادثة الحصول على كرتتين حمراوين" و NN "حادثة الحصول على كرتتين سوداوين" و RN "حادثة الحصول على كرتتين مختلفتين في اللون".



1- أحسب احتمال كل من الحوادث التالية:

A " يكون السحب من الصندوق u_1 "

B " الحصول على كرتتين سوداوين علما أننا سحبنا من الصندوق u_2 "

C " الحصول على كرتتين مختلفتين في اللون "

2- أ/ أنقل ثم أكمل شجرة الاحتمالات " الشكل المقابل".

ب/ علما أننا حصلنا على كرتتين حمراوين ، ما احتمال أن يكون السحب من

الصندوق u_3 .

3- نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرتات

الحمراء المسحوبة.

أ/ حدّد قيم المتغير العشوائي X.

ب/ أوجد قانون احتمال للمتغير العشوائي X، ثم احسب أمله الرياضي.

4- أحسب احتمال الحادثة: " $\frac{X^2+1}{\ln(X-1)} > 0$ ".

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty; 0]$; كما يلي: $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1- أ/ احسب: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب/ تحقّق أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x: $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)\ln x$

ج/ احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2- أ/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; 1]$: $(x-1) + \ln x \leq 0$ ومن أجل كل عدد حقيقي x

من المجال $[1; +\infty[$: $(x-1) + \ln x \geq 0$.

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x: $f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$ ثم شكل جول تغيرات الدالة f.

3- بين أن (C_f) يقطع المستقيم (Δ) المعرف بالمعادلة: $y = x + \frac{1}{2}$ في نقطتين يطلب تعيين إحداثيهما ثم أدرس

الوضع النسبي للمنحني (C_f) و المستقيم (Δ).

4- عيّّن احداثيي النقطة A من (C_f) التي يكون المماس (T) عندها يوازي المستقيم (Δ) ثم أكتب معادلة للمماس (T).

5- أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x: $f''(x) = \frac{2-\ln x}{x^2}$

ب/ استنتج أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيهما.

6- أنشئ كلا من (Δ) ، (T) و (C_f).

7- ناقش بيانيا ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = x - 2m$.

8- أ/ تحقق أن الدالة: $x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $\ln x$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب/ باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن: $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$.

ج/ أحسب مساحة الحيز للمستوي المحدد بـ (C_f) و المستقيمت المعرفة بالمعادلات: $x = 1$; $x = e$; $y = x$

انتهى الموضوع الثاني



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :
الموضوع الأول :

التمرين الأول: (04 نقاط)

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الأتية : $z^2 - 2z + 4 = 0$

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحتقاتها $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ و $z_C = z_A e^{i\frac{5\pi}{6}}$

(1) أكتب z_C على الشكل الجبري ثم أكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي

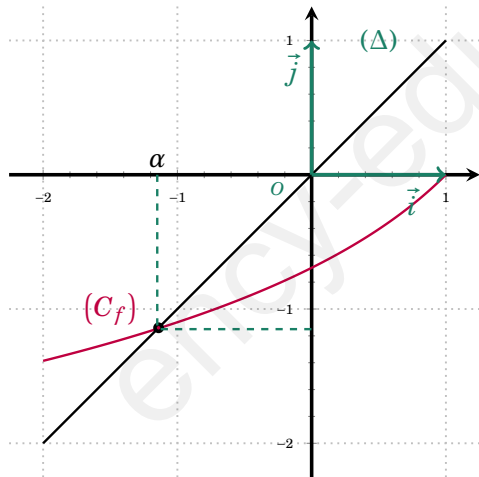
(2) إستنتج الشكل الأسّي للعدد $\frac{z_A}{z_B}$. ثم عين طبيعة المثلث OAB

(3) عين لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $OADB$ متوازي أضلاع

(4) عين قيم عدد طبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{3n}$ حقيقي موجب تماما. ثم أكتب على الشكل الجبري العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2023}$

(5) عين (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي من أجلها يكون: $z = z_A + 2e^{i\theta}$ حيث $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

التمرين الثاني: (05 نقاط)



(I) الدالة المعرفة على $[-2, 0]$ بـ: $f(x) = -\ln(2-x)$ و (C_f)

تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) مستقيم ذا المعادلة $y = x$ حيث $f(\alpha) = \alpha$

كما هو موضح في الشكل المقابل:

(1) تحقق أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-2; 0]$

(2) بين أنه من أجل كل $x \in [-2; 0]$ فإن: $f(x) \in [-2; 0]$

(II) نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كمايلي:

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(1) أ) برر وجود متتاليتين (u_n) و (v_n)

ب) مثل على محور الفواصل الحدود: u_0 ، u_1 و u_2 ، v_0 ، v_1 و v_2 دون حسابها مبرزا خطوط الإنشاء

ج) خمن إتجاه و تقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)

(2) أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $-2 \leq u_{n-1} \leq u_n \leq v_n \leq v_{n-1} \leq 0$

ب) إستنتج إتجاه تغير و تقارب كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n)

(3) أ) نقبل أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}$. بين أن $0 \leq v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq v_n - u_n \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^n$

د) أثبت أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \alpha$. ماذا يمكن القول عن المتتاليتين (u_n) و (v_n) ؟

التمرين الثالث: (04 نقاط)

في إطار تعيين فريق لكرة القدم يمثل الثانوية ، تم إختيار أربعة لاعبين من القسم S_1 يحملون الأرقام من 1 إلى 4 وستة لاعبين من القسم S_2 يحملون الأرقام من 5 إلى 10 وثلاث لاعبين من القسم S_3 يحملون الأرقام من 11 إلى 13 نختار الآن لاعبين إثنين من الفريق ليبقى في الإحتياط علما أن كل الإختيارات متساوية الإحتمال

(1) أ) أحسب إحتمال الحوادث التالية :

A " اللاعبين الإثنين المختارين يحملان رقمين زوجيين " B " اللاعبين الإثنين المختارين من نفس القسم

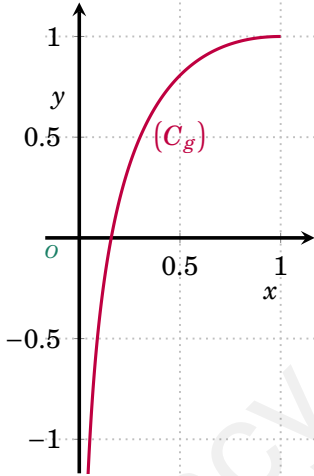
ب) هل الحادثتان A و B مستقلتان؟ برر

(2) ما إحتمال أن يكون اللاعبين الإثنين المختارين في الإحتياط من قسمين مختلفين و يحملان رقمين زوجيين

(3) إذا كان اللاعبين الإثنين المختارين في الإحتياط من قسمين مختلفين . ما إحتمال أن يكون حاملين رقمين زوجيين؟

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) g الدالة المعرفة على $]0;1[$ بـ: $g(x) = 2 - x + \ln x$ و (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ كما هو مبين في الشكل المقابل :



(1) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.15 < \alpha < 0.16$

(2) إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;1[$

II) f دالة معرفة على $]1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1 - 2x + \ln x}{x - 1}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. ثم فسر النتيجة بيانيا

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]1; +\infty[$ فإن: $f'(x) = \frac{g(\frac{1}{x})}{(x-1)^2}$

ب) بين أن f متزايدة تماما على $\left[1; \frac{1}{\alpha}\right]$ و متناقصة تماما على $\left[\frac{1}{\alpha}; +\infty\right]$. ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) أدرس الوضع النسبي لـ: (C_f) و المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = -2$

(4) أرسم (Δ) ، (C_f) (يعطى $f(\frac{1}{\alpha}) \approx -1.8$)

(5) عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $|f(x)| = m$ حلين متميزين

(6) h الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = f(e^x)$. إعتادا على السؤال 2 . إستنتج إتجاه تغير الدالة h

الموضوع الثاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر في كل مايلي المستوي المركب المنسوب إلى المعلم $(O; \vec{u}, \vec{v})$

عين الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير

(1) k عدد صحيح و $arg(z)$ عمدة للعدد المركب z حيث $z = -3 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]$ هي:

(أ) $arg(z) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ (ب) $arg(z) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ (ج) $arg(z) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

(2) (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $|2z - 2 + 4i| = 8$ هي دائرة مركزها A ونصف قطرها r حيث:

(أ) $r = 8$ و $A(-2, 4)$ (ب) $r = 4$ و $A(1, -2)$ (ج) $r = 3$ و $A(-2, 4)$

(3) (ب) A ، B و C نقط لاحقاتها $z_A = 1 + 2i$ ، $z_B = 1 - 2i$ و $z_C = i$

Z_D . لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع هي :

(أ) $z_D = 5i$ (ب) $z_D = 1 - i\sqrt{3}$ (ج) $z_D = -3i$

(4) الجذرين التربيعيين للعدد المركب i هما :

(أ) $-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ و $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ (ب) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ و $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ (ج) $1-i$ و $1+i$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1 + \sqrt{e}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + e}{2u_n}$

(1) (أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - \sqrt{e} = \frac{1}{2u_n} (u_n - \sqrt{e})^2$

(ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \sqrt{e}$

(ج) أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) و إستنتج أنها متقاربة

(2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln\left(\frac{u_n - \sqrt{e}}{u_n + \sqrt{e}}\right)$

(أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} + \sqrt{e} = \frac{1}{2u_n} (u_n + \sqrt{e})^2$

(ب) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول v_0

(ج) أكتب v_n بدلالة n ثم إستنتج u_n بدلالة n ، أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على كرتين حمراوين تحمل العدد المركب i و ثلاث كرات خضراء تحمل العدد 1 ويحتوي الصندوق

U_2 على ثلاث كرات حمراء تحمل العدد المركب $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و كرتين خضراوين تحمل العدد 0 ويحتوي الصندوق U_3

على كرتين حمراوين تحمل العدد المركب $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ و كرتين خضراوين تحمل العدد 2

نسحب كرتين على التوالي و بالإرجاع من أحد الصناديق الثلاثة . علما أن إختيار أحد الصناديق هي النسبة

بين عدد الكريات الموجودة في كل صندوق و العدد الإجمالي للكريات الموجودة في الصناديق الثلاثة معا

نعتبر الحوادث التالية : A "الحصول على كرتين من نفس اللون" B "الحصول على كرتين حمراوين"

C "الحصول على كرة خضراء على الأقل"

(1) شكل شجرة الاحتمالات الموافقة لهذه التجربة

(2) بين أن $p(A) = \frac{18}{35}$ ثم أحسب $p(B)$ و $p(C)$

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع طويلة الأعداد مسجلة على الكريات المسحوبة

(أ) برر أن قيم المتغير العشوائي X هي : 0 ، 1 ، 2 ، 3 و 4 ثم عرف قانون إحصائه

(ب) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ ثم أحسب $P(C_5^X = 5)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - x + e^x$

(1) ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

(2) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

(II) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $f(x) = x + 1 + xe^{-x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(2) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لـ: (C_f) بجوار $+\infty$

ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)

(3) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^{-x}g(x)$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

(4) بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة. فاصلتها α حيث $-0.5 < \alpha < -0.4$

(5) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 ثم أدرس الوضع النسبي لـ: (C_f) و (T)

(6) أرسم (Δ) ، (T) و (C_f) في نفس المعلم

(7) عين قيم m الوسيط الحقيقي حتى تقبل المعادلة $f(x) = mx + 1$ حلين متمايزين

(III) H دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كمالى : $H(x) = (ax + b)e^{-x}$ حيث a و b عددين حقيقيين

(1) عين a و b حتى تكون H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ حيث: $h(x) = xe^{-x}$

(2) أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و (T) والمستقيمين اللذين معادلتهما: $x = 1$ و $x = 3$

تم تحميل من مجموعة محفظة

الرياضيات للتعليم بالجزائر





0812022132023

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الديوان الوطني للامتحانات و المسابقات
ولاية المنية

وزارة التربية الوطنية
امتحان البكالوريا التجريبي

دورة : ماي 2023

الشعبة : علوم تجريبية

المدة : 03 سا و 30 د

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :
الموضوع الأول :

التمرين الأول: (04 نقاط)

إختر الإجابة الصحيحة مع التعليل.

(1) مجموعة حلول المتراجحة $\ln(-2023x + 1) < \ln(2023)$ ذات المجهول الحقيقي x هي :

$$\left[-\frac{2022}{2023}; +\infty \right[\quad \text{(ج)} \quad \left[-\infty; \frac{2022}{2023} \right[\quad \text{(ب)} \quad \left[-\frac{2022}{2023}; \frac{1}{2023} \right[\quad \text{(أ)}$$

(2) عدد الأرقام في الكتابة العشرية للعدد $\lambda = \left(\frac{1361}{250}\right)^{1962}$ هي :

$$1443 \quad \text{(ب)} \quad 1444 \quad \text{(ج)} \quad 2023$$

(3) حل المعادلة التفاضلية $y'' = \frac{1}{x^2}$ على $\mathbb{R}$ هي الدوال من الشكل: $(c_1, c_2 \text{ من } \mathbb{R})$

$$y = -\ln|x| + c_1x + c_2 \quad \text{(ج)} \quad y = \ln|x| + c_1x + c_2 \quad \text{(ب)} \quad y = -\frac{1}{x} + c \quad \text{(أ)}$$

(4) يفتح قفل بتشكيل حرفين من المجموعة $\{A, B, C\}$ ثم يتبع ب 5 أرقام من المجموعة $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

عدد الطرق الممكنة لفتح هذا القفل هي :

$$3^2 \times 10^5 \quad \text{(ج)} \quad A_3^2 \times 10^5 \quad \text{(ب)} \quad A_3^2 \times A_{10}^5 \quad \text{(أ)}$$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[\frac{1}{2}; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = \frac{3x-1}{2x}$.

(1) أدرس إتجاه تغير الدالة f .

(2) لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $U_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$.

(أ) برهن بالتراجع ،أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $U_n > 1$.(ب) بين أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما ، ماذا تستنتج ؟

(3) (أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$

(ب) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية (U_n) .

(4) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $V_n = \left(\frac{U_n - 1}{2U_n - 1}\right)$.

(أ) أثبت ان (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، و تعيين حدها الأول ثم أكتب V_n بدلالة n

(ب) اكتب U_n بدلالة V_n .

(ج) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{V_0 - 1}{U_0} + \frac{V_1 - 1}{U_1} + \dots + \frac{V_n - 1}{U_n}$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 9 كريات منها ثلاث حمراء تحمل الأرقام 1 , 0 , -1 وأربعة بيضاء تحمل الأرقام

1, 1, 0, -1 وكرتين خضراء تحمل الأرقام 0, -1 .

نسحب عشوائيا وفي أن واحد ثلاث كرات من الكيس .

- نعتبر الحوادث :

"A سحب ثلاث كرات من نفس اللون ."

"B سحب ثلاث كرات مجموعهم منعدم ."

"C سحب ثلاث كرات جداولهما سالب تماما ."

(1) أحسب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية : $A, B, C, A \cap B$, هل الحادثتان A و B مستقلتان ?

(2) علما أن الكرات المسحوبة جداولهما عدد سالب ما احتمال أن تكون من نفس اللون ?

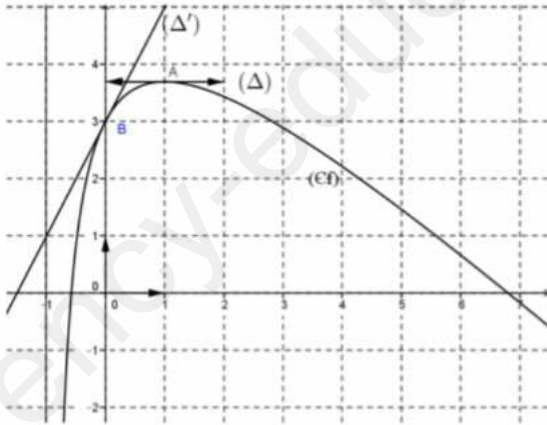
- ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب العدد الأصغر من بين الأعداد المسحوبة (في حالة تساوي الرقمين نأخذ الرقم نفسه) .

(3) أعط قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

(4) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

(5) أحسب $P(e^x - 1 \leq 0)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)



الدالة f المعرفة على $]-1, +\infty[$ بـ :

$f(x) = ax + 5 + \frac{b}{x+1} + \ln(x+1)$ ، حيث a و b

عدنان حقيقيان و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوى

المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

$A(1; 3 + \ln 2)$ ، $B(0; 3)$ نقطتان من (C_f) .

(Δ) هو المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة A و (Δ') هو

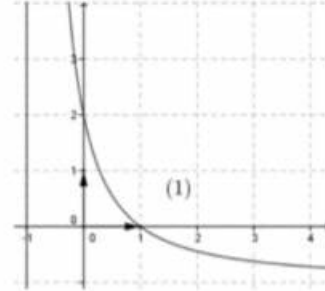
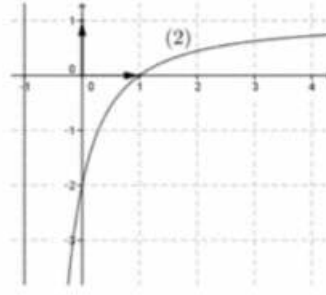
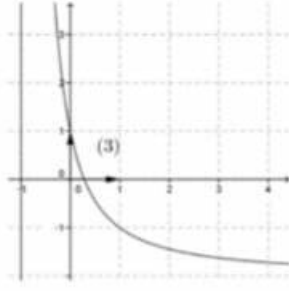
المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة B

(1) بقراءة بيانية

(أ) أحسب كلا من $f(0)$ ، $f'(0)$ و $f'(1)$.

(ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(ج) من بين المنحنيات (1) ، (2) و (3) عين مع التبرير المنحنى الممثل للدالة f' مشتقة الدالة f .



(2) بين أنه من أجل كل x من المجال $] -1, +\infty[$: $f(x) = -x + 5 - \frac{2}{x+1} + \ln(x+1)$.

(3) بين أن المستقيم الذي معادلته $x = -1$ مقارب للمنحنى (C_f) .

(4) بين أنه من أجل كل x من المجال $] -1, +\infty[$: $f'(x) = \frac{-x^2 - x + 2}{(x+1)^2}$.

(5) استنتج حسب قيم x إشارة $f'(x)$.

(6) ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة : $5 - \frac{2}{x+1} + \ln(x+1) = 3x + m$.

(7) g الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كمايلي : $g(x) = -x + 6 - \frac{2}{x} + \ln(x)$ و (C_g) تمثيلها البياني في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(أ) بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $g(x) = f(x-1)$.

(ب) بين كيفية إنشاء (C_g) اعتمادا على (C_f) ثم أنشئه.

الموضوع الثاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

(I) كثير حدود للمتغير غير المعلوم Z حيث: $P(Z) = Z^3 + (1 + 2\sqrt{3})Z^2 + 2(2 + \sqrt{3})Z + 4$.
جد العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون: $P(Z) = (Z + 1)(Z^2 + aZ + b)$ ، ثم حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(Z) = 0$.

(II) المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A, B و C نقط من المستوي المركب لواقعها على الترتيب: $Z_A = -\sqrt{3} + i$, $Z_B = \bar{Z}_A$ و $Z_C = -i$. (يرمز بـ $\bar{Z}_A$ إلى مرافق Z_A).
(1) أكتب العدد المركب Z_A على الشكل الأسّي، ثم استنتج الشكل الأسّي للعدد Z_B .

(ب) بين أن العدد: $\left[2022 - \left(\frac{Z_A}{2}\right)^{1962}\right]$ حقيقي موجب.

(2) أكتب العدد المركب $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$ على الشكل الجبري.

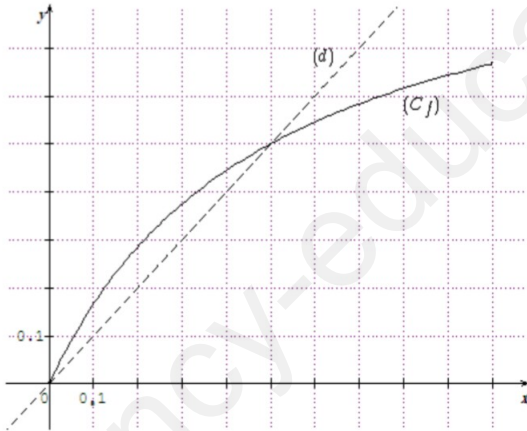
(ب) أعط تفسيرا هندسيا لطويلة وعمدة العدد المركب $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$ ، ثم حدّد طبيعة المثلث ABC .

(3) أ) عيّن Z_D لاحقة النقطة D منتصف القطعة $[AC]$.

(ب) بين أن النقط A, B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

(4) بين أن مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z التي تحقق: $(Z - Z_D)(\bar{Z} - \bar{Z}_D) = \frac{7}{4}$ هي نفسها (γ) .

التمرين الثاني: (05 نقاط)



نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; 1]$ كمايلي: $f(x) = \frac{2x}{2x+1}$.
و (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و
(Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (أنظر الشكل المقابل).

(I) نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $U_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$.
(1) أعد رسم الشكل على ورقة الإجابة، ثم مثل الحدود U_0, U_1, U_2 و U_3 . على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط الرسم.

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها.

(2) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < U_n < \frac{1}{2}$.

(3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج أنّها متقاربة.

- (II) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة بحدّها العام من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = 3^n \times \frac{U_n}{2U_n - 1}$.
- (1) بين أنّ $V_{n+1} - 6V_n = 0$ ، ثمّ استنتج أنّ المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.
- (2) أكتب عبارة الحد العام V_n بدلالة n .
- (ب) بين أنّ: $U_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$ ، ثمّ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.
- (3) أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n = \frac{(2U_0 - 1)V_0}{U_0} + \frac{(2U_1 - 1)V_1}{U_1} + \dots + \frac{(2U_{n-1} - 1)V_{n-1}}{U_{n-1}}$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

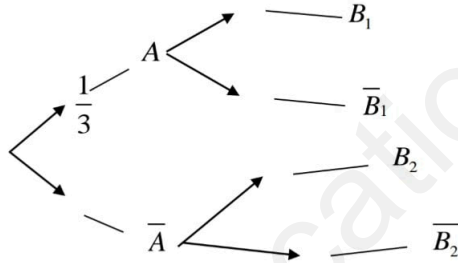
(أ) نعتبر وعاء U_1 يضم 6 كريات مرقمة كما يلي: 1, 1, 1, 3 و 4، وعاء U_2 يضم 4 كريات مرقمة كما يلي: 1, 2, 3 و 4.

نسحب من علبة تضم 6 بطاقات مرقمة من 1 إلى 6 بطاقة واحدة، إذا ظهر الرقم 3 أو 5 نسحب كرية واحدة من الوعاء U_1 ، أما إذا ظهر رقم آخر فإننا نسحب كرية من الوعاء U_2 . (الكريات متماثلة لا نميز بينها عند اللمس)

A الحدث: "اختيار الوعاء U_1 "

B_1 الحدث: "سحب كرية تحمل الرقم 1 من الوعاء U_1 "

B_2 الحدث: "سحب كرية تحمل الرقم 1 من الوعاء U_2 "



(1) أنقل وأكمل شجرة الاحتمالات المقابلة.

(2) أحسب احتمال الحدث B :

"سحب كرية تحمل الرقم 1".

(II) نجمع الآن الكريات في وعاء واحد U_3

نسحب عشوائياً من الوعاء U_3 ثلاث كريات في آن واحد.

(1) أحسب احتمال الحصول على:

(أ) ثلاثة كريات تحمل أرقاماً فردية.

(ب) كرية على الأقل من الكريات الثلاث تحمل رقماً فردياً.

(ج) كرية على الأكثر من الكريات الثلاث تحمل رقماً فردياً.

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب بالكيفية السابقة عدد الكريات التي تحمل الرقم 1.

عَيّن قانون المتغير العشوائي X ، ثمّ أحسب أمله الرياضي

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(أ) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x) = 2 + (x - 2)e^{-x+2}$.

(1) أدرس تغيرات الدالة g .

(2) بين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1,14 < \alpha < 1,15$.

(3) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $f(x) = 2x - 1 - (x - 1)e^{-x+2}$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتحانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) (ا) بين أن: $f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2}{\alpha - 2}$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

(ب) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ ، ثم أدرس وضعيته بالنسبة لـ (C_f) .

(ج) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلة ديكارتية له.

(د) أحسب $f(0)$ و $f(2)$ ثم أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f) .

(4) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة: $2m - 1 - (x - 1)e^{-x+2} = 0$.

(5) لتكن H الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $H(x) = (ax + b)e^{-x+2}$ ، حيث a و b عدنان حقيقيان.

(ا) عيّن a و b بحيث تكون الدالة H أصلية للدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = (x - 1)e^{-x+2}$.

(ب) ليكن λ عددا حقيقيا حيث $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 1$ و $x = \lambda$ ، $\lambda > 1$.

أحسب المساحة $A(\lambda)$ بدلالة λ ثم أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ،
$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n ،
$$v_n = u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

(1) أحسب u_1 و v_1 .

(2) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ، ثم عبر عن الحد العام v_n بدلالة n .

(3) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

• بين أن: $S_n = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية $z^2 + 2i = 0$ ثم اكتب الحلول على الشكل الأسّي.

(أ) عين العددين المركبين z_1 و z_2 إذا علمت أن:
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 4i \\ 2\overline{z_1} - \overline{z_2} = 9 - 5i \end{cases}$$

(2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B و C صور الأعداد المركبة $z_A = 1 - i$ ،

$$z_B = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{و} \quad z_C = -3 + i$$

(أ) احسب z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة المثقلة $\{(A; -1), (B; 1), (C; 1)\}$

(ب) حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.

(3) (أ) نعتبر (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\|-\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 2\sqrt{10}$.

• تحقق أن النقطة A تنتمي إلى (Γ_1) ثم انشئها.

(ب) عين (Γ_2) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\frac{z - z_C}{z - z_B}$ حقيقي سالب مع $z \neq z_B$

• n عدد طبيعي، عين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_A}{\sqrt{2}}\right)^n$ حقيقيا

التمرين الثالث: (05 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على 4 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء، و يحتوي صندوق U_2 على كرتين حمراوين و 5 كرات بيضاء، و يحتوي صندوق U_3 على 3 كرات تحمل الرقم 1 و كرتين تحملان معا الرقم 2.

(1) ن سحب عشوائيا و في آن واحد 3 كرات من U_1 ، (و لا نهتم بالصندوقين U_2 و U_3)

- (أ) ما هو عدد الحالات الممكنة.
 - (ب) ما هو احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون.
 - (ج) ما هو احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل.
 - (د) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المسحوبة.
- حدد قانون احتمال X

(2) ن سحب الآن كرة من U_3 . إذا كان رقمها 1 ن سحب كرة من U_1 ، أما إذا كان رقمها 2 ن سحب كرة من U_2 .

- (أ) ما هو احتمال الحصول على كرة حمراء.
- (ب) علما أن الكرة المسحوبة حمراء، ما هو احتمال كونها مسحوبة من U_1 .

(نسمي الأحداث التالية الحدث R : الكرة المسحوبة حمراء، الحدث A_1 : الكرة المسحوبة من الصندوق U_3 و تحمل الرقم 1، الحدث A_2 : الكرة المسحوبة من الصندوق U_3 و تحمل الرقم 2، الحدث B : الكرة المسحوبة من الصندوق U_1)

التمرين الرابع: (07 نقاط)

لتكن f دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln(x+1)$

(تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 2 cm)

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1-x}{(x+1)^2}$ (حيث f' مشتقة الدالة f)

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

(4) (أ) بين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

(ب) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $3.9 < \alpha < 4$

(ج) ارسم (T) و المنحني (C_f) .

(5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = x - 3m$

(6) F دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ بـ: $F(x) = (-3-x)\ln(x+1) + 3x$

(أ) بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$.

(ب) لتكن $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين اللذين

معادلتيهما $x = \alpha$ و $x = 0$.

• بين أن $A(\alpha) = 4 \left(\frac{\alpha^2 - 3\alpha}{\alpha + 1} \right) cm^2$ ثم أوجد حصره لـ: $A(\alpha)$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

f الدالة المعرفة على $[1; +\infty[$ بالشكل: $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$ ، وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها .

(Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (كما هو موضح في الشكل 1)

و لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول: $u_0 = \frac{3}{2}$ و من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) أ) مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_2, u_1, u_0 دون حسابها مبينا خطوط الإنشاء. (الشكل 1)

ب) خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

ج) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1 < u_n < 2$.

(2) اثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ، ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالشكل: $v_n = \ln(u_n - 1)$

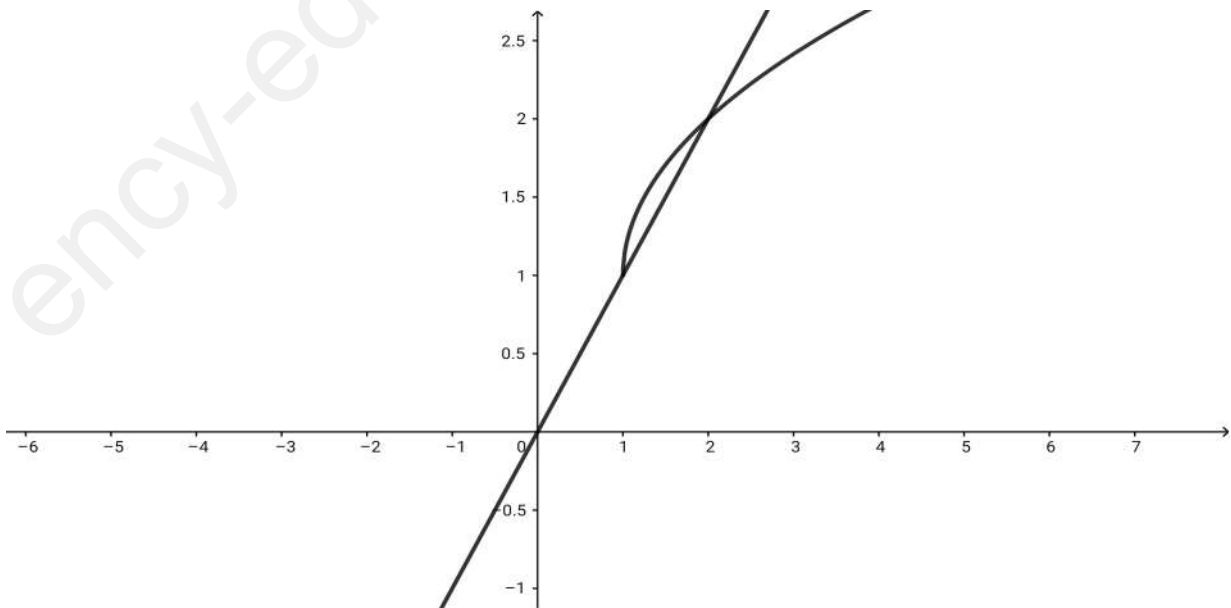
أ) يبين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

ب) اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) احسب كلا من Π_n و S_n بدلالة n حيث:

$$\Pi_n = (u_0 - 1)(u_1 - 1)(u_2 - 1) \dots (u_n - 1)$$

$$S_n = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2$$



التمرين الثاني: (04 نقاط)

$$(I) \quad P(z) = z^3 + 8 \text{ حيث } z \text{ مركب}$$

(1) احسب $P(-2)$ ثم حدد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z

$$P(z) = (z + 2)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

(2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$

(II) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

A, B, C و C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -2$

(1) اكتب كلا من z_A, z_B و z_C على الشكل الأسّي

(2) أ) اكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسّي .

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC

ج) تحقق أن النقطة O هي مركز ثقل المثلث ABC

(3) عين قيمة العدد الطبيعي n التي تحقق: $(z_A)^n = (z_B)^n$

(4) لتكن (Γ) مجموعة النقط ذات اللاحقة z حيث $z + 2 = Ke^{\frac{i\pi}{6}}$ حيث k يمسخ $\mathbb{R}_+^*$.

أ) تحقق أن A تنتمي إلى (Γ)

ب) عين المجموعة (Γ) .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

تتكون مجموعة أشخاص من 8 رجال و 4 نساء من بينهم رجل واحد اسمه إبراهيم و امرأة واحدة اسمها فاطمة ، نريد تكوين لجنة مكونة من ثلاثة أعضاء لهم نفس المهام.

(1) احسب احتمال كل من الأحداث التالية:

A "تكوين لجنة تضم 3 رجال" .

B "تكوين لجنة تضم رجلا و امرأتان"

C "تكوين لجنة تضم إبراهيم" .

D "تكوين لجنة تضم إما إبراهيم أو فاطمة"

(2) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل اختيار عدد الرجال في اللجنة المكونة.

أ) عين القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X و عرف قانون احتماله.

ب) احسب الأمل الرياضي و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2 + (x - 2)e^{-x+2}$

(1) ادرس تغيرات الدالة g

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.14 < \alpha < 1.15$

(3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

(II) لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x - 1 - (x-1)e^{-x+2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 2cm$ $\|\vec{j}\| = 2cm$

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

ج) بين أن $f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2}{\alpha - 2}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

(2) أ) اثبت أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y = 2x - 1$

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

ج) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) بطلب تعيين معادلة ديكارتية له.

د) احسب $f(0), f(2)$ ثم ارسم $(\Delta), (T), (C_f)$

(3) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x التالية حلين متمازين

$$(E): 2m - 1 - (x-1)e^{-x+2} = 0$$

(III)

(1) عين باستعمال التكامل بالتجزئة الدالة الأصلية H للدالة $h: x \mapsto (x-1)e^{-x+2}$ على $\square$ و التي تنعدم عند 0

(2) ليكن λ عددا حقيقيا حيث $\lambda > 1$. $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمت التي

معادلاتها $x = \lambda$ و $x = 1$.

• احسب مساحة الحيز $A(\lambda)$ بدلالة λ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.



ستظهر الإجابة النموذجية للموضوع الثاني بعد انتهاء الوقت الرسمي للامتحان

انتهى الموضوع الثاني

الإختبار التجريبي رقم 04 : Bac 2023

الرياضيات ليست إبرة تحقن في جسمك في بداية السنة لتصبح ممتازا فيها

الرياضيات = حبها + التركيز + المرافقة اليومية

30 دقيقة

01

التمرين

ثلاث صناديق غير شفافة U_1 ، U_2 و U_3 . يحتوي الصندوق U_1 على ثلاث كرات حمراء وثلاث كرات بيضاء و يحتوي الصندوق U_2 على كرتين حمراوين وأربع كرات بيضاء ، ويحتوي الصندوق U_3 على كرتين بيضاوين وأربع كرات حمراء (كل الكرات متشابهة ولا نفرق بينها عند اللمس)

نرمي زهر نرد غير مزيف ذا أربعة أوجه مرقمة من 1 إلى 4

إذا ظهر الرقم 1 نسحب كرتين في آن واحد من الصندوق U_1 ، وإذا ظهر الرقم 2 أو 3 نسحب كرتين على التوالي ودون إرجاع من الصندوق U_2 وإذا ظهر الرقم 4 نسحب كرتين على التوالي وإرجاع من الصندوق U_3 نعتبر الأحداث A ، B و C المعرفة بـ :

A : " سحب كرتين حمراوين " ، B : " سحب كرتين بيضاوين " ، C : " سحب كرتين من لونين مختلفين "

① أنجز شجرة الاحتمالات الموافقة لهذه التجربة

② أ/ أحسب احتمالات الأحداث A ، B و C

ب/ علما أن الكرتين المسحوبتين حمراوان ، ما احتمال أن تكونا من الصندوق U_2

③ نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، وأحسب الأمل الرياضي

40 دقيقة

02

التمرين

I- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(z - 4)(z^2 - 4z + 8) = 0$

II- نعتبر في المستوي المركب $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B ، C ، D ذات اللواحق

$$z_D = -z_A , z_C = -\bar{z}_A , z_B = 4 , z_A = 2 - 2i$$

① أكتب العدد المركب $L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي ، ثم إستنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه

المباشر S يطلب تعيين عناصره المميزة

② أكتب على الشكل الجبري العدد $\left(\frac{z_C}{z_D}\right)^{2023}$ ، ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_C}{z_D}\right)^n$ حقيقي

③ أكتب العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسّي ، ثم عين طبيعة المثلث ACD

④ جد لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1), (B; -2), (C; 2)\}$

5 (τ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|(1+i)z + 4| = 8$

تحقق أن النقطة A تنتمي إلى (τ) ، ثم عين طبيعة المجموعة (τ) وعناصرها المميزة

35 دقيقة

03

التمرين

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على N بـ :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_1 = \frac{1}{2} \\ 4u_{n+2} = 7u_{n+1} - 3u_n \end{cases}$$

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_{n+1} - u_n$

1 أحسب u_2 و v_0

2 بين أن (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ ، أكتب v_n بدلالة n

3 عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

4 عبر عن u_n بدلالة n ، ثم إستنتج نهاية (u_n)

75 دقيقة

04

التمرين

I- لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = a(\ln x)^2 + b \ln(x)$

حيث a و b عدنان حقيقيان

(C_g) تمثيلها البياني في معلم $(0; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذا

المعادلة : $y = -3x$ كما هو مبين في الشكل التالي ، المنحني (C_g)

يقبل قيمة حدية عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = e$

1 أ/ عين $g'(x)$ بدلالة a و b .

ب/ تأكد من المعطيات السابقة أن : $a = -1$ و $b = 2$

2 عين بيانيا وضعية (C_g) و (Δ) . β هي فاصلة (C_g) و (Δ)

3 إستنتج إشارة $h(x)$ حيث : $h(x) = g(x) + 3x$ على المجال $]0; +\infty[$.

II- f هي الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 3 \ln x + \frac{(\ln x)^2}{x}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(0; \vec{i}, \vec{j})$

1 بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ وفسر النتيجة هندسيا ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

2 أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$

ب/ إستنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3 بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما α حيث : $0,3 < \alpha < 0,4$

4 تأكد أن : $\ln(\alpha) = -3\alpha$ ، ثم أنشئ (C_f) و (Δ) ، يعطي : $\beta = 0,5$ و $f(\beta) = -1,2$

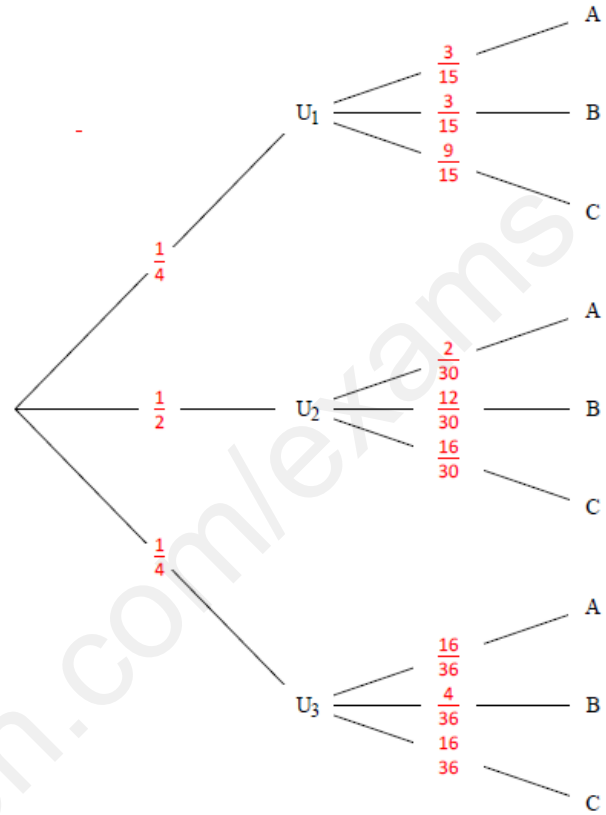
5 أحسب مشتقة الدالة : $x \mapsto x \ln(x) - x$ ، ثم بين أن مساحة الحيز المستوي S_α المحدد بالمنحني (C_f)

والمستقيمات ذات المعادلات : $y = 0$ و $x = \alpha$ و $x = 1$ هي $S_\alpha = (-9\alpha^3 - 9\alpha^2 - 3\alpha + 3)u_\alpha$

الحل المفصل لإختبار رقم 04

التمرين 01

1 شجرة الاحتمالات



2 أ/ أحسب احتمالات الأحداث A ، B و C

$$P(A) = P(A \cap U_1) + P(A \cap U_2) + P(A \cap U_3)$$

$$P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{15} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{30} + \frac{1}{4} \times \frac{16}{36} = \frac{7}{36}$$

$$P(B) = P(B \cap U_1) + P(B \cap U_2) + P(B \cap U_3)$$

$$P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{15} + \frac{1}{2} \times \frac{12}{30} + \frac{1}{4} \times \frac{4}{36} = \frac{10}{36}$$

$$P(C) = P(C \cap U_1) + P(C \cap U_2) + P(C \cap U_3)$$

$$P(C) = \frac{1}{4} \times \frac{9}{15} + \frac{1}{2} \times \frac{16}{30} + \frac{1}{4} \times \frac{16}{36} = \frac{19}{36}$$

ب/ علما أن الكرتين المسحوبتين حمراوان ، ما

إحتمال أن تكونا من الصندوق U_2

$$P_A(U_2) = \frac{P(A \cap U_2)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{30}}{\frac{7}{36}} = \frac{6}{35}$$

3 قيم المتغير العشوائي X هي : {0; 1; 2}

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

$$P(X = 0) = P(A) = \frac{7}{36}$$

$$P(X = 1) = P(C) = \frac{19}{36}$$

$$P(X = 2) = P(B) = \frac{10}{36}$$

X_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{36}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{10}{36}$

حساب الأمل الرياضي

$$E(X) = 0 \times \frac{7}{36} + 1 \times \frac{19}{36} + 2 \times \frac{10}{36} = \frac{39}{36}$$

التمرين 02

I- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة

$$(z - 4)(z^2 - 4z + 8) = 0$$

ومنه إما $z - 4 = 0$ أو $z^2 - 4z + 8 = 0$

ومنه إما $z = 4$ أو $\Delta = -16 = 16i^2$

ومنه $z_1 = 2 + 2i$ أو $z_2 = 2 - 2i$

ومنه $S = \{2 - 2i; 2 + 2i; 4\}$

1 أكتب العدد المركب $L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي

$$L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-2 - 2i - 2 + 2i}{4 - 2 + 2i} = \frac{-4}{2 + 2i} \times \frac{2 - 2i}{2 - 2i} = \frac{-8 + 8i}{2^2 + 2^2}$$

$$L = -1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

إستنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه

المباشر S يطلب تعيين عناصره المميزة

$$\text{لدينا } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \text{ ومنه}$$

$$z_C - z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}(z_B - z_A)$$

ومنه C هي صورة النقطة B بالتشابه المباشر S الذي

نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$ ومركزه النقطة A

2 أكتب على الشكل الجبري العدد $\left(\frac{z_C}{z_D}\right)^{2023}$

$$\text{لدينا } z_C = -\bar{z}_A = -2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{4}}$$

$$\text{لدينا } z_D = -z_A = -2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\left(\frac{z_C}{z_D}\right)^{2023} = \left(\frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{4}}}{2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}\right)^{2023} = \left(e^{-i\frac{\pi}{2}}\right)^{2023} =$$

$$e^{i\frac{2023\pi}{2}} = e^{i\frac{2024\pi - \pi}{2}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$$

عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_C}{z_D}\right)^n$ حقيقي

1 أحسب u_2 و v_0

لدينا $4u_{n+2} = 7u_{n+1} - 3u_n$
 ومنه $u_{n+2} = \frac{7u_{n+1} - 3u_n}{4}$ ومنه $u_{0+2} = \frac{7u_{0+1} - 3u_0}{4}$
 ومنه $u_2 = \frac{7 \times \frac{1}{2} - 3 \times \frac{1}{4}}{4} = \frac{\frac{7}{2} - \frac{3}{4}}{4} = \frac{\frac{11}{4}}{4} = \frac{11}{16}$
 ومنه $v_0 = u_{0+1} - u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ لدينا

2 بين أن (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$

تكون (v_n) هندسية إذا وفقط إذا كانت

$v_{n+1} = v_n \times q$ حيث $q \in \mathbb{R}^*$

لدينا $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1}$ ومنه
 $v_{n+1} = \frac{7u_{n+1} - 3u_n}{4} - u_{n+1} = \frac{7u_{n+1} - 3u_n - 4u_{n+1}}{4} = \frac{3u_{n+1} - 3u_n}{4} = \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n) = \frac{3}{4}v_n$
 ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$
 أكتب v_n بدلالة n

لدينا $v_n = v_0 \times q^n$ ، ومنه $v_n = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^n$

3 عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث :

$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$
 $S_n = \frac{1}{4} \left[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{\frac{3}{4} - 1} \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{-\frac{1}{4}} \right] = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

4 عبر عن u_n بدلالة n ، ثم إستنتج نهاية (u_n)

$$\begin{cases} v_0 = u_1 - u_0 \\ v_1 = u_2 - u_1 \\ v_2 = u_3 - u_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} = u_n - u_{n-1} \end{cases}$$

بالجمع طرفاً لطرف نجد $S_n = -u_0 + u_n$

ومنه $u_n = S_n + u_0$ ومنه $u_n = \frac{5}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{5}{4}$

$\arg\left(\left(\frac{z_C}{z_D}\right)^n\right) = k\pi$ ومنه $\left(\frac{z_C}{z_D}\right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{2}}$
 ومنه $\frac{n\pi}{2} = k\pi$ ومنه $n = 2k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

3 أكتب العدد $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$ على الشكل الأسّي

$\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C} = \frac{2 - 2i + 2 + 2i}{-2 + 2i + 2i} = \frac{4}{4i} \times \frac{i}{i} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

عين طبيعة المثلث ACD

لدينا $\left|\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}\right| = |-i| = 1$ ، ومنه

$CA = CD$ ومنه $|z_A - z_C| = |z_D - z_C|$

لدينا $\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$ ومنه

$(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{CA}) = -\frac{\pi}{2}$

ومنه المثلث ACD قائم في C ومتساوي الساقين

4 جد لاحقة النقطة G

$z_G = \frac{z_A - 2z_B + 2z_C}{1 - 2 + 2} = -10 - 6i$

5 (τ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات

$|z + 4 + i| = 8$: $(1 + i)z + 4$

تحقق أن النقطة A تنتمي إلى (τ)

لدينا $|(1 + i)z_A + 4| = 8$ أي

$|(1 + i)(2 - 2i) + 4| = 8$ ومنه

$|8| = 8$ أي $|2 - 2i + 2i + 2 + 4| = 8$

ومنه النقطة A تنتمي إلى (τ)

عين طبيعة المجموعة (τ) وعناصرها المميزة

لدينا $|z + 4 + i| = 8$ يكافئ

$\left|(1 + i)\left(z + \frac{4}{1+i}\right)\right| = 8$ يكافئ

$\sqrt{2} \left|z + \frac{4}{1+i}\right| = 8$ يكافئ

$\sqrt{2} \left|z + \frac{4}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}\right| = 8$

$\sqrt{2} |z + 2 - 2i| = 8$ يكافئ

$\sqrt{2} |z - (-2 + 2i)| = 8$ يكافئ

$\sqrt{2} |z - (-2 + 2i)| = 8$ يكافئ

$|z - z_D| = \frac{8}{\sqrt{2}}$ يكافئ $MD = 4\sqrt{2}$ ومنه المجموعة

(τ) هي دائرة مركزها النقطة D ونصف قطرها $4\sqrt{2}$

للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$

أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \left(3 + \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

2 أ/ بين أن $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{\left(\frac{2}{x} \ln x\right)(x) - 1(\ln x)^2}{x^2} = \frac{3}{x} + \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{3x - 2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$$

ب/ إستنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

بما أن $x^2 > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$

ومنه نستنتج أن الدالة f متناقصة تماما على $[0; \beta]$

ومتزايدة تماما على المجال $[\beta; +\infty[$

x	0	β	$+\infty$
$f'(x)$		○	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\beta)$	$+\infty$

3 بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما α

حيث : $0,3 < \alpha < 0,4$

$$3 \ln x + \frac{(\ln x)^2}{x} = 0 \text{ تكافئ } f(x) = 0$$

$$\ln x \left(3 + \frac{\ln x}{x} \right) = 0 \text{ تكافئ}$$

$$\ln x = 0 \text{ أو } 3 + \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ تكافئ}$$

$$x = 1 \text{ أو } 3 + \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ تكافئ}$$

هذه الأخيرة حلها هو α

نعتبر الدالة t المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $t(x) = 3 + \frac{\ln x}{x}$

الدالة t مستمرة ورتيبة على المجال $[0,3; 0,4]$

$$\begin{cases} t(0,3) = -1,01 \\ t(0,4) = 0,71 \end{cases} \text{ ولدينا } t(0,3) \times t(0,4) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن $t(x) = 0$ تقبل

حلا وحيدا α حيث : $0,3 < \alpha < 0,4$

ومنه نستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما

α حيث : $0,3 < \alpha < 0,4$

4 تأكد أن : $\ln(\alpha) = -3\alpha$

1 أ/ عين $g'(x)$ بدلالة a و b

$$g'(x) = 2a \left(\frac{1}{x} \right) \ln x + b \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$g'(x) = \left(\frac{1}{x} \right) (2a \ln x + b)$$

ب/ تأكد من المعطيات السابقة أن : $a = -1$ و $b = 2$

المنحني (C_g) يقبل قيمة حدية عند النقطة ذات

الفصلة $x_0 = e$ معناه $g'(e) = 0$ ومنه

$$g'(e) = \left(\frac{1}{e} \right) (2a \ln e + b) = 0$$

$$2a + b = 0 \dots (1)$$

المنحني (C_g) يشمل النقطة $(e; 1)$ معناه $g(e) = 1$

$$a(\ln e)^2 + b \ln(e) = 1 \text{ ومنه}$$

$$a + b = 1 \dots (2)$$

نحل الجملة $\begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$ بالطرح نجد $a = -1$

بالتعويض في (2) نجد $b = 2$

$$g(x) = -(\ln x)^2 + 2 \ln(x) \text{ ومنه}$$

2 عين بيانيا وضعية (C_g) و (Δ)

x	0	β	$+\infty$
$g(x) + 3x$		○	+
الوضع النسبي	(C_g) تحت (Δ)	(C_g) يقطع (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

3 إستنتج إشارة $h(x)$

لدينا $h(x) = g(x) - (-3x)$ ومنه إشارة $h(x)$ لها

علاقة بالوضع النسبي بين المنحني (C_g) و (Δ)

x	0	β	$+\infty$
$h(x)$		○	+

II-f هي دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ :

$$f(x) = 3 \ln x + \frac{(\ln x)^2}{x}$$

1 بين أن : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln x \left(3 + \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

تفسير النتيجة هندسيا : المستقيم $x = 0$ مقارب عمودي

رسالتي إليكم تلاميذي الأعزاء

السلام عليكم ورحمة الله ، بسم الله والصلاة والسلام على رسول الله

☺ إلى تلاميذي الأعزاء ، طلبة البكالوريا إني أود أن أرافقكم في هذه الأيام الأخيرة من المراجعة ، مرافقة الأخ الناصح الذي سيسر نجاحكم وتفوقكم في شهادة البكالوريا بإذن الله ☺ تلاميذي المجتهدين فلتعلموا أن الحياة مليئة بالدروب منها السهل ومنها الوعر ، وإني أؤكد لكم بأن البكالوريا ماهي سوى محطة من محطات الحياة ، محطة سنقف عندها مطولا ، لأنها وببساطة هي من ستحدد اختيارك لدراسة التخصص ، وبعده الجانب المهني من حياتك وإني لأجزم بأن أغلبكم يضع الآن هدفا نصب عينيه ليحققه ، لذا لا تدعو الفتور يحول بينكم وبين تحقيق أهدافكم وجعل أحلامكم واقعا

☺ كونوا على يقين بأن من توكل على الله وفوض أمره إليه لن يخيب ، لكن رافقوا ذلك بالصلاة والدعاء والتقرب إلى الله محبة لا طمعا ، كونوا ربانيين وأسرفوا في ترتيب دعواتكم إلى الله

☺ وبجانب ذلك أدرسوا ، وكافحوا ، انهضوا باكرا ، اصنعوا لأنفسكم مخططا تسيرون عليه هذه الفترة ، شدوا الهمة وجاهدوا بنفس طويل لأجل أهدافكم التمسوا دعوة التوفيق من آبائكم وأمهاتكم ☺ اعتنوا بالجانب الصحي والنفسي لديكم ، فالعقل السليم في الجسم السليم

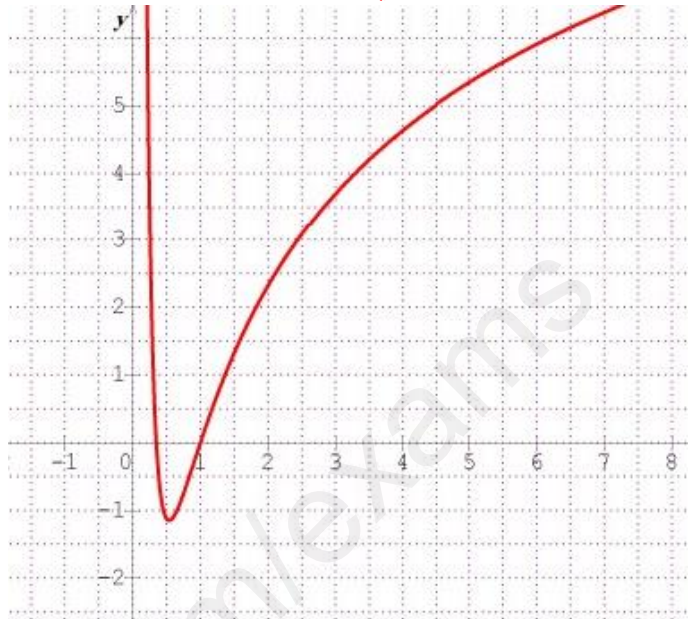
☺ وأخيرا ، تأكدوا بأن الله قد قسم أرزاق عباده من قبل. والنجاح جزء من هذا الرزق ، ثقوا بالله وبأنفسكم وسلوه عز وجل التوفيق

واعلموا أن أستاذكم عبد الفتاح بوقفة يضع بين أيديكم كل جهوده لنجاحكم ، فلا تترددوا في طلب المساعدة أيام المراجعة وإني أسأل الله أن يبارك خطواتكم نحو العلم وأن يهيج قلوبكم وقلوب والديكم بالنجاح وفقكم الله

مما سبق لدينا $3 + \frac{\ln x}{x} = 0$ تقبل حلا وحيدا α ومنه

$\ln \alpha = -3\alpha$ ، ومنه $\frac{\ln \alpha}{\alpha} = -3$ ، ومنه $3 + \frac{\ln \alpha}{\alpha} = 0$

أنشئ (C_f) و (Δ) ، يعطي : $\beta = 0,5$ و $f(\beta) = -1,2$



5 أحسب مشتقة الدالة : $x \mapsto x \ln(x) - x$

$$(x \ln x - x)' = 1 \times \ln x + \frac{1}{x} \times x - 1 = \ln x$$

بين أن مساحة الحيز المستوي S_α المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات : $x = \alpha$ و $y = 0$

$x = 1$ هي $S_\alpha = (-9\alpha^3 - 9\alpha^2 - 3\alpha + 3)u_\alpha$

لدينا المنحنى (C_f) يقع تحت محور الفواصل في $[1; \alpha]$ ومنه

$$S_\alpha = - \int_\alpha^1 f(x) dx = \int_1^\alpha f(x) dx$$

$$= \int_1^\alpha \left(3 \ln x + \frac{(\ln x)^2}{x} \right) dx$$

$$= \left[3(x \ln x - x) + \frac{1}{3} (\ln x)^3 \right]_1^\alpha$$

$$= \left[3x \ln x - 3x + \frac{1}{3} (\ln x)^3 \right]_1^\alpha$$

$$= \left(3\alpha \ln \alpha - 3\alpha + \frac{1}{3} (\ln \alpha)^3 \right) - (-3)$$

لدينا مما سبق $\ln \alpha = -3\alpha$ ومنه بالتعويض نجد

$$= \left(3\alpha(-3\alpha) - 3\alpha + \frac{1}{3} (-3\alpha)^3 \right) + 3$$

$$= \left(3\alpha(-3\alpha) - 3\alpha + \frac{1}{3} (-3\alpha)^3 \right) + 3$$

$$S_\alpha = (-9\alpha^3 - 9\alpha^2 - 3\alpha + 3)u_\alpha$$

و.ه.م

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عينه مع التعليل

1. الدالة الأصلية للدالة $f: x \rightarrow \frac{1}{x \ln(x^2)}$ على المجال $]1; +\infty[$ والتي تنعدم من أجل $\sqrt{e}$ هي:

(أ) $F(x) = \frac{1}{2} \ln(\ln x) + \ln 2$ (ب) $F(x) = \frac{1}{2} \ln(\ln x) - \ln 2$ (ج) $F(x) = \frac{1}{2} \ln(2 \ln x)$

2. حل المعادلة : $2C_n^2 - A_n^1 = 0$ هو :

(أ) $n \in \{0; 2\}$ (ب) $n \in \{2; 3\}$ (ج) $n = 2$

3. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم : $A = 1 + \ln(2e) + \ln(3e) + \dots + \ln(en)$ تساوي :

(أ) $n + \ln(n!)$ (ب) $n - \ln(n!)$ (ج) $n! + \ln(n)$

4. (u_n) متتالية معرفة بـ: $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}$

نعرف المتتالية (v_n) من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n + 1}$ ، قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية غير ثابتة هي:

(أ) $\alpha = 1$ (ب) $\alpha = -1$ (ج) $\alpha = 3$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

صندوق يحوي 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس ، منها كريتان تحملان الرقم 1 و ثلاث كريات تحمل الرقم 0

و خمس كريات تحمل الرقم 2 .

1. نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الصندوق ، ونعتبر الحدثين A و B حيث :

A " الكريات المسحوبة تحمل أرقاما مختلفة " ، B " الكريات المسحوبة تحمل أرقاما جذاؤها معدوما "

(أ) أحسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمال الحدثين A و B على الترتيب .

(ب) بين أن : $P(A \cap B) = \frac{7}{10}$ ، هل الحدثان A و B مستقلان ؟ علل.

(ج) علما أن جداء أرقام الكريات معدوما ، ما احتمال أن تكون مختلفة .

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الأرقام المتساوية المحصل عليها.

(أ) برر أن مجموعة قيم X هي : $X \in \{0; 2; 3\}$

(ب) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب تباينه $V(X)$.

التمرين الثالث : (05 نقاط)

المتتالية (u_n) معرفة بالحددين : $u_0 = 0$ ، $u_1 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} - \frac{1}{9}u_n$

نعرف على $\mathbb{N}$ المتتاليتين (v_n) و (w_n) كمايلي : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ و $w_n = 3^n \times u_n$

1. أحسب : u_2 ثم w_0, v_1, w_0, v_1

2. أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها ، ثم عبر عن الحد العام v_n بدلالة n .

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_{n+2} + w_n = 2w_{n+1}$ ، ماذا نقول عن المتتالية (w_n) ؟

ج) استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

3. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$

ب) استنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ فإن : $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ، ثم عين نهاية المتتالية (u_n)

4. نضع من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

بين أن : $0 < S_n \leq 3 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \ln\left(\frac{a+be^x}{c}\right)$ حيث a, b, c أعداد حقيقية غير معدومة.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$

إذا علمت أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (Δ) بجوار $+\infty$ و الآخر أفقي (Δ') بجوار $-\infty$

حيث المستقيم (Δ) يشمل النقطتين $A(0; -\ln 2)$ و $B(\ln 2; 0)$ والمستقيم (Δ') يشمل النقطة A

1. باستعمال المستقيم المقارب الأفقي (Δ') بين أن : $c = 2a$.

2. عين معادلة المستقيم (Δ) .

3. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x + \ln\left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c}e^{-x}\right)$.

4. بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - \ln 2)] = \ln\left(2 \cdot \frac{b}{c}\right)$ واستنتج أن : $c = 2b$.

5. مما سبق استنتج أن : $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$

II. أ - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ حيث f' هي مشتقة الدالة f

ج - استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

د - أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل .

هـ - أرسم المستقيمين (Δ) و (Δ') ثم أرسم المنحنى (C_f)

III. لتكن الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = \ln\left(\frac{1+e^{|x|}}{2}\right)$ ، (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ - بين أن الدالة h زوجية .

ب - اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقاً من (C_f) ثم أرسمه .

التمرين الأول : (04,5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = \frac{1}{8}$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$

I. f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = x(2 - x)$

(1). ادرس اتجاه تغير الدالة f .

(2). بين أنه إذا كان: $x \in]0; 1[$ فإن: $f(x) \in]0; 1[$

II. (1). احسب كلا من u_1 و u_2 .

(2). برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

(3). بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة.

III. (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب: $v_n = 1 - u_n$

(1). عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n

(2). برهن بالتراجع أن من اجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

(3). استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4). عين أصغر عدد طبيعي n يحقق: $u_n > 1 - 10^{-20}$

(5). أحسب بدلالة n الجداء $p(n)$ حيث: $p(n) = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$ ، ثم عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(n)$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على 6 كريات حمراء و 4 كريات سوداء.

يحتوي صندوق U_2 على 3 كريات حمراء و كرية سوداء و كرية بيضاء.

I. نسحب عشوائيا على التوالي و دون ارجاع 3 كريات من الصندوق U_1 .

(1). شكل شجرة الاحتمالات التي تتمزج هذه الوضعية.

(2). أحسب احتمال الحادثة A حادثة الحصول على 3 كريات حمراء.

(3). أحسب احتمال الحادثة B حادثة الحصول على كرية حمراء على الأقل.

II. نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد من الصندوق U_1 و كرية واحدة من الصندوق U_2 .

(1). علما أن الكرية المسحوبة من U_2 سوداء .

- ما هو احتمال سحب كرية حمراء على الأقل.

(2). ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة.

(أ). بين أن قيم المتغير العشوائي X هي: 0 و 1 .

(ب). احسب الأمل الرياضي، ثم استنتج: $E(1444X + 2023)$.

(ج). أحسب: $P((\ln X)^2 - \ln X \leq 0)$.

III. نضيف n كرية سوداء إلى الصندوق U_1 و n كرية حمراء إلى الصندوق U_2 ،

نسحب كرية واحدة من الصندوق U_1 و كرية واحدة من الصندوق U_2 . و لتكن C حادثة الحصول على كرتين من نفس اللون.

- عين قيمة n حتى يكون: $P(C) = \frac{3}{7}$

$P(z) = (z+1-i)(z^2+2z+4)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث:

I. حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z) = 0$

II. نعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، النقطة A ، B و C التي لواحقها على الترتيب:

z_A ، z_B و z_C حيث: $z_A = -1+i$ ، $z_B = -1+\sqrt{3}i$ و $z_C = \overline{z_B}$.

(1). اكتب z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي.

(2). اكتب $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)$ على الشكل الجبري، ثم الشكل الأسّي.

(3). استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

(4). أ. عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{2z_A}{\sqrt{2}z_B}\right)^n$ تخيلي صرف جزؤه التخيلي موجب تماما.

ب. بين أن: $\left(\frac{z_B}{2}\right)^{2023} + \left(\frac{z_C}{2}\right)^{1444} = -1$

(5). عين المجموعة (Γ) للنقط M من المستوى ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z+1-i| = |iz+\sqrt{3}+i|$

التمرين الرابع: (07,5 نقاط)

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $g(x) = 2e^{x-1} - x - 1$

(1). احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها.

(2). أ. بين أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما العدد 1 و الآخر α بحيث: $-0,6 < \alpha < -0,5$

ب. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = 2x - 2 + (x+2)e^{1-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم

المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1). أ. بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، ثم احسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب. بين أنه من اجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^{1-x}g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج. بين أنه من اجل $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = xe^{1-x}$ ، ثم استنتج أن: (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيتها.

د. بين أن: $f(\alpha) = 2\alpha + \frac{2}{\alpha+1}$ ، ثم اعط حصرًا لـ $f(\alpha)$.

(2). أ. بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = 2x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ ، ثم ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

ب. بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب كتابة معادلة له.

(3). أ. أنشئ كلا من (Δ) و (T) ، ثم مثل (C_f) . نقبل أن: $f(\beta) = 0$ ، بحيث: $-1,61 < \beta < -1,63$ و $f(\alpha) \approx 3,73$

ب. عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m ، التي من اجلها تقبل المعادلة: $f(x) = 2(x-1) + m$ حلين مختلفين في الإشارة.

(4). أ. بين أن الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $H(x) = (-x-3)e^{1-x}$ دالة أصلية للدالة $(x+2)e^{1-x}$ على $\mathbb{R}$

ب. استنتج A مساحة الحيز المحدد بـ: (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = -2$ و $x = 1$

الحل النموذجي للموضوع الأول لاختبار البكالوريا التجريبية 2023

العلامة النهائية	العلامة الجزئية	الإجابة التمرين الأول: (04 نقاط)
01	0.25×2 0.5	1. $F(x) = \int_{\sqrt{e}}^x \left(\frac{1}{t \ln t^2} \right) dt = \int_{\sqrt{e}}^x \left(\frac{\frac{1}{t}}{2 \ln t} \right) dt = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{e}}^x \frac{1}{\ln t} dt = \frac{1}{2} [\ln(\ln t)]_{\sqrt{e}}^x$ $= \frac{1}{2} [\ln(\ln x) + \ln(2)] = \frac{1}{2} \ln(2 \ln x)$
01	0.25×2 0.5	2. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $1 + \ln(2e) + \ln(3e) + \dots + \ln(en) = 1 + \ln 2 + \ln(e) + \ln 3 + \ln(e) + \dots + \ln n + \ln(e)$ $= (1 + 1 + \dots + 1) + \ln(2 \times 3 \times \dots \times n) = n + \ln(n!)$
01	0.25×2 0.25×2	3. $2C_n^2 - A_n^1 = 0 \Rightarrow 2 \left(\frac{n!}{2!(n-2)!} \right) - n = 0 \Rightarrow 2 \left(\frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} \right) - n = 0$ $\Rightarrow n(n-1) - n = 0 \Rightarrow n(n-2) = 0 \Rightarrow n = 0 \text{ أو } n = 2$ $n = 0$ مستحيلة لأنه $n \geq 2$ إذن $\boxed{n=2}$
01	0.25 0.25 0.25×2	4. $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{3u_n + 1}{u_n + 3} - \alpha}{\frac{3u_n + 1}{u_n + 3} + 1} = \frac{3u_n + 1 - \alpha(u_n + 3)}{3u_n + 1 + u_n + 3}$ و منه: $= \frac{(3-\alpha)u_n + 1 - 3\alpha}{4(u_n + 1)} = \frac{(3-\alpha)}{4} \left(\frac{u_n + \frac{1-3\alpha}{3-\alpha}}{u_n + 1} \right)$ ومنه: $-\alpha: \frac{1-3\alpha}{3-\alpha} = -\alpha$ أي: $1 - 3\alpha = -\alpha(3 - \alpha)$، و منه: $\alpha^2 - 1 = 0$، إذن: $\alpha = -1$ مرفوض، $\alpha = 1$
02	0.5 0.5 0.5 0.25 0.25	التمرين الثاني: (04 نقاط) 1) حساب احتمال الحادثتين A و B الحادثة $\bar{A}$ "الكريات تحمل نفس الرقم" $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_3^3 + C_5^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{1+10}{120} = \frac{109}{120}$ الحادثة $\bar{B}$ "لا توجد كرية تحمل الرقم 0" $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{35}{120} = \frac{85}{120} = \frac{17}{24}$ ب) تبين أن $P(A \cap B) = \frac{7}{10}$: $P(A \cap B) = \frac{C_3^1 \times C_7^2 + C_3^2 \times C_7^1}{C_{10}^3} = \frac{63+21}{120} = \frac{84}{120} = \frac{7}{10}$ بما أن: $P(A) \times P(B) = \frac{1853}{2880}$ و $P(A \cap B) = \frac{2016}{2880}$ منه: $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ فإن الحادثتين A و B غير مستقلتين. ج) حساب احتمال أن تكون أرقام الكريات مختلفة علما أن جداءها معدوم: $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{7}{10} \times \frac{24}{17} = \frac{84}{85}$

(2) ^(*) تعيين القيم الممكنة لـ X : لكرات إما تحمل نفس الرقم فإن $X=3$ و تحمل أرقاما مختلفة مثنى مثنى فإن $X=0$ أو كرتان تحملان نفس الرقم و الأخرى تحمل رقما مختلفا فإن $X=2$ ، إذن: مجموعة القيم الممكنة لـ X هي $\{0,2,3\}$. **0.75**

(ب) تعريف قانون الاحتمال:

$x_i =$	0	2	3	Σ
$P(X = x_i) =$	$\frac{30}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{11}{120}$	1
$x_i \cdot P_i =$	0	$\frac{158}{120}$	$\frac{33}{120}$	$\frac{191}{120}$
$x_i^2 \cdot P_i =$	0	$\frac{316}{120}$	$\frac{99}{120}$	$\frac{415}{120}$

$$P(X=3) = P(\bar{A}) = \frac{11}{120}$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_7^1 + C_2^2 \times C_8^1 + C_5^2 \times C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{79}{120}$$

$$P(X=0) = \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{30}{120}$$

0.75 **0.5** $Var(X) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 \cdot p_i - [E(X)]^2 = \frac{13319}{14400} \approx 0,925$ منه: $E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot p_i = \frac{191}{120} \approx 1,59$: $Var(X)$ حساب التباين $(*)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

لدينا: $\begin{cases} u_0 = 0 ; u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} - \frac{1}{9}u_n \end{cases}$ ، $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$ و $w_n = 3^n \times u_n$

1) حساب الحدود :

لدينا: $u_2 = \frac{2}{3}u_1 - \frac{1}{9}u_0$ ومنه نجد : $u_2 = \frac{2}{3}$

لدينا: $v_0 = u_1 - \frac{1}{3}u_0$ أي نجد : $v_0 = 1$ و $v_1 = u_2 - \frac{1}{3}u_1$ أي : $v_1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$ ومنه : $v_1 = \frac{1}{3}$

لدينا: $w_0 = 3^0 \times u_0$ أي : $w_0 = 0$ و $w_1 = 3^1 \times u_1$ ومنه : $w_1 = 3$

2) أ- من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا: $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{3}u_{n+1}$ أي : $v_{n+1} = \frac{2}{3}u_{n+1} - \frac{1}{9}u_n - \frac{1}{3}u_{n+1}$ أي : $v_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} - \frac{1}{9}u_n$

ومنه : $v_{n+1} = \frac{1}{3}\left(u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n\right)$ أي : $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$ ، إذن : المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

وبالتالي من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا : $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

ب- من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا : $w_{n+2} + w_n = 3^{n+2} \times u_{n+2} + 3^n \times u_n$ أي : $w_{n+2} + w_n = 3^{n+2} \times \left(\frac{2}{3}u_{n+1} - \frac{1}{9}u_n\right) + 3^n \times u_n$

أي : $w_{n+2} + w_n = \frac{2 \times 3^{n+2}}{3}u_{n+1} - \frac{3^{n+2}}{9}u_n + 3^n \times u_n$ أي : $w_{n+2} + w_n = 2 \times 3^{n+1} \times u_{n+1} - 3^n \times u_n + 3^n \times u_n$

ومنه : $w_{n+2} + w_n = 2 \times 3^{n+1} \times u_{n+1}$ ، إذن : $w_{n+2} + w_n = 2w_{n+1}$ هـ م

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $w_{n+2} + w_n = 2w_{n+1}$ وهذا ما يدل على أن المتتالية (w_n) حسابية .

لدينا مما سبق : $w_0 = 0$ و $w_1 = 3$ وبالتالي : (w_n) متتالية حسابية أساسها $r = 3$ ، إذن : $w_n = 3n$

ج- لدينا : $w_n = 3^n \times u_n$ أي : $u_n = \frac{w_n}{3^n}$ ومنه : $u_n = \frac{3n}{3^n}$

3أ- من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ لنبين أن : $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$.

ط1 من أجل $n \geq 1$ لدينا : $\frac{3n+3}{3^{n+1}} > 0$ أي : $u_{n+1} > 0$ ، هذا من جهة .

ومن جهة أخرى لدينا : $u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n = \frac{3(n+1)}{3^{n+1}} - \frac{2}{3} \times \frac{3n}{3^n} = \frac{3n+3}{3^{n+1}} - \frac{6n}{3^{n+1}}$ أي : $u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n = \frac{3-3n}{3^{n+1}}$.

لكن لدينا : $n \geq 1$ أي : $1-n \leq 0$ ومنه : $3-3n \leq 0$ و $3^{n+1} > 0$ إذن : $u_{n+1} - \frac{2}{3}u_n \leq 0$ أي : $u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$.

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$.

ط2 نستعمل البرهان بالتراجع لإثبات من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ فإن : $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$: $P(n)$.

- لنتحقق من صحة $P(n)$ من أجل $n=1$ أي : $0 < u_2 \leq \frac{2}{3}u_1$ ومنه : $0 < \frac{2}{3} \leq \frac{2}{3}$ (محقة) .

- نفرض صحة $P(n)$ من أجل n كفي أي : $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$ ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي : $0 < u_{n+2} \leq \frac{2}{3}u_{n+1}$.

لدينا : $u_{n+2} = \frac{2}{3}u_{n+1} - \frac{1}{9}u_n$ أي : $u_{n+2} - \frac{2}{3}u_{n+1} = -\frac{1}{9}u_n$ لكن نعلم أن : $-\frac{1}{9}u_n \leq 0$ أي أن : $u_{n+2} - \frac{2}{3}u_{n+1} \leq 0$

وبالتالي : $u_{n+2} \leq \frac{2}{3}u_{n+1}$ لكن نعلم أيضا : $u_{n+2} > 0$ إذن نجد : $0 < u_{n+2} \leq \frac{2}{3}u_{n+1}$.

وأخيرا : من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ يكون : $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$.

ب- لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$ أي : $0 < u_2 \leq \frac{2}{3}u_1$ ، $0 < u_3 \leq \frac{2}{3}u_2$ ، $0 < u_4 \leq \frac{2}{3}u_3$ ،

..... $0 < u_n \leq \frac{2}{3}u_{n-1}$ ، $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$. بالضرب طرف طرف نجد :

$$0 < u_2 \times u_3 \times \dots \times u_{n-1} \times u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} (u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n-1}) \text{ أي : } 0 < u_2 \times u_3 \times \dots \times u_{n-1} \times u_n \leq \frac{2}{3}u_1 \times \frac{2}{3}u_2 \times \dots \times \frac{2}{3}u_{n-1}$$

بالإختزال نجد : $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times u_1$ لكن : $u_1 = 1$ ، إذن نجد : $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ هـ م .

4) من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

مما سبق لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ أي : $0 < u_1 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0$ ، $0 < u_2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^1$ ، $0 < u_3 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$ ،

..... ، $0 < u_{n-1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$ ، $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ، بجمع طرف طرف نجد :

$$0 < S_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \text{ أي : } 0 < u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

- لكن نعلم أن : $\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ هو مجموع لحدود متتابعة من متتالية هندسية عدد الحدود هو n حدا

$$\text{إذن : } 0 < S_n \leq 1 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \text{ أي : } 0 < S_n \leq \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}} \text{ ومنه نجد : } 0 < S_n \leq 3 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \text{ هـ م .}$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I.

1. لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\ln 2 = \ln\left(\frac{a}{c}\right)$ ، ومنه : $\frac{c}{a} = 2$ وبالتالي : $c = 2a$

2. معادلة المستقيم : $y = x - \ln 2$: (Δ)

3. من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = \ln\left[e^x \left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c}e^{-x}\right)\right] = \ln e^x + \ln\left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c}e^{-x}\right) = x + \ln\left(\frac{b}{c} + \frac{a}{c}e^{-x}\right)$

4. لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - \ln 2)] = \ln 2 + \ln\left(\frac{b}{c}\right) = \ln\left(2 \cdot \frac{b}{c}\right)$ ، وبالتالي : $\ln\left(2 \cdot \frac{b}{c}\right) = 0$ إذن : $2 \cdot \frac{b}{c} = 1$ وفي الأخير نجد : $c = 2b$

5. مناسب و بالتعويض نجد : $f(x) = \ln\left(\frac{\frac{c}{2} + \frac{c}{2}e^x}{c}\right) = \ln\left[\frac{c\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}{c}\right] = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$

II.

أ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

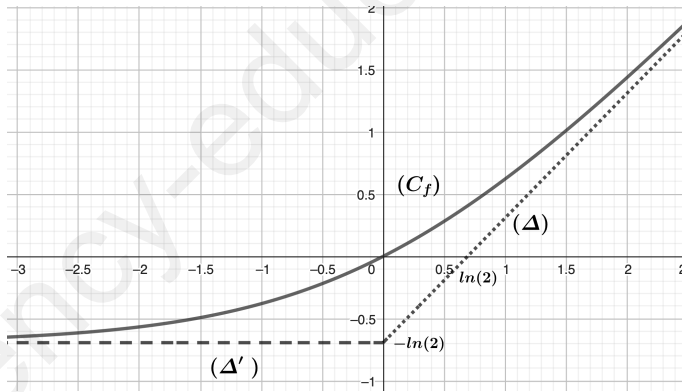
ب. من أجل كل عدد حقيقي x : لدينا : $f'(x) = \left(\frac{\frac{1}{2}e^x}{\frac{1+e^x}{2}}\right) = \left(\frac{1}{2}e^x \cdot \frac{2}{1+e^x}\right) = \left(\frac{e^x}{e^x(1+e^{-x})}\right) = \frac{1}{1+e^{-x}}$

ج. من أجل كل عدد حقيقي x : لدينا : $f'(x) > 0$ ، وبالتالي : f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\ln 2$	$+\infty$

د. دراسة وضعية (C_f) بالنسبة الى حامل محور الفواصل . لدينا : $f(x) = 0$ معناه : $\frac{1+e^x}{2} = 1$ ، ومنه : $x = 0$ ، وبالتالي : على المجال $]0; +\infty[$ نجد : (C_f) تحت (xx') وعلى المجال $]0; +\infty[$ نجد : (C_f) فوق (xx')

ومن أجل $x = 0$ نجد : (C_f) يقطع (xx') في النقطة O .
هـ. الرسم



III.

أ. لدينا : $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة الى 0 و $h(-x) = \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right) = h(x)$ ، ومنه h دالة زوجية

ب. لدينا : $h(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ \frac{1+e^{-x}}{2} & x \leq 0 \end{cases}$ وبالتالي : (C_h) ينطبق على (C_f) على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم نرسم نظير (C_h) بالنسبة الى محور التناظر على المجال $] -\infty; 0[$ لان h دالة زوجية.

رسم (C_h)

علي المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول.

التمرين الأول: (04 نقاط)

$$(1) \quad (u_n) \text{ المتتالية المعرفة بـ: } u_0 = 0 \text{ و من كل اجل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = \frac{2}{2\sqrt{2}-u_n}.$$

أ) احسب u_1 و u_2 ، استنتج أن (u_n) ليست حسابية و ليست هندسية .

ب) برهن بالتراجع ان من اجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < \sqrt{2}$.

ت) استنتج ان المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$.

ث) اثبت ان المتتالية (u_n) متزايدة على $\mathbb{N}$

ج) استنتج انها مقاربة و احسب نهايتها .

$$(2) \quad (v_n) \text{ المتتالية المعرفة على } \mathbb{N} : v_n = \frac{u_n}{\sqrt{2}-u_n}.$$

أ) اثبت ان (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين اساسها و حدها الاول .

ب) استنتج بدلالة n عبارة v_n و اثبت ان من كل اجل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{n\sqrt{2}}{n+1}$.

(3) نضع من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $w_n = \ln(u_n)$

أ) احسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$.

$$\text{ب) اثبت ان : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{2} \ln 2$$

التمرين الثاني (04 نقاط)

كيس به ثمانية كريات لا نفرق بينها عند اللمس ثلاث منها بيضاء مرقمة بـ: 2، 2، 3.

وأربع خضراء مرقمة بـ : 1، 2، 2، 3. وكرية واحدة حمراء مرقمة بـ: 2.

نسحب عشوائيا و في آن و احد من الكيس ثلاث كريات .

(1) أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : " الحصول على ثلاث كريات من نفس الرقم " .

B : " الحصول على ثلاث كريات لها الألوان الثلاثة " .

C : " الحصول على كرية حمراء على الأكثر " .

D : " الحصول على كرية واحدة بيضاء مرقمة بالرقم 3 من الكريات المسحوبة " .

(2) احسب : $P(A \cap B)$ ثم استنتج $P_B(A)$ و $P(A \cup B)$.

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد ألوان الكرات المسحوبة من الكيس.

❖ عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و احسب أمله $E(X)$ أليرياضياتي

(4) نعيد التجربة و نسحب عشوائيا كرتين على التوالي بإرجاع.

❖ ماهو احتمال الحصول كرتين من نفس اللون ؟.

التمرين الثالث : (05 نقاط)

اجب مع التبرير ب : صحيح او خاطئ في كل حالة مما يلي :

(1) الدالة f المعرفة على المجال $]0;1[$ بشكل : $f(x) = e^{-x} \ln x$ متزايدة تماما.

(2) m القيمة المتوسطة على المجال $[1;e]$ للدالة المعرفة ب : $x \mapsto \frac{1+\ln x}{x}$ هي : $m = \frac{2}{3(e-1)}$.

(3) الدالة : $x \mapsto x(\ln x - x - 1)$ حل للمعادلة التفاضلية $y'' = \frac{1}{x} - 1$ على $]0;+\infty[$.

(4) (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب : $u_n = 3^n e^{-3n}$ متتالية متقاربة.

(5) من اجل كل عدد طبيعي n ، $\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n} = 1$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

(I) g دالة معرفة علي $]0;+\infty[$ كمايلي : $g(x) = x^2 - x - \ln x$.

(1) احسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) احسب $g(1)$ و استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ ب : $f(x) = x^2 - 1 - (\ln x)^2$ ،

نرمز ب (C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب الي المعلم المتعامد المتجانس $(\vec{o}; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة : 1cm)

(1) بين ان من اجل $x \in]0;+\infty[$: $f(x) = x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)$ و استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) بين ان : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ و فسر النتيجة بيانيا.

(3) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{2g(x)}{x} + 2$ ثم

استنتج اتجاه تغير f و شكل جدول تغيراتها

(4) بين أن المستقيم (T) ذا المعادلة $y = 2x - 2$ مماس لـ (C_f) عند نقطته A التي فاصلتها 1.

(5) أنشئ (T) و (C_f) علي المجال $]0;+\infty[$. (نقبل ان A هي نقطة انعطاف لـ (C_f))

(6) m عدد حقيقي. (Δ_m) المستقيم حيث : $y = mx - m$ معادلة له.

أ - تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي m ، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) .

ب - ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = mx - m$.

(III) لتكن الدالة H المعرفة على $]0;+\infty[$ ب : $H(x) = x(\ln x - 1)$ ،

(1) تحقق ان الدالة H دالة اصلية للدالة : $x \mapsto \ln x$ على $]0;+\infty[$.

(2) باستعمال مكاملة بالتجزئة ، اثبت ان : $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$.

(3) بين ان S مساحة حيز المستوي المحدد ب (C_f) و المستقيمت التي معادلاتها : $x = e$ ، $x = 1$ و $y = 0$ ،

هي : $S = \frac{1}{3}(e^3 - 6e + 8) \text{ cm}^2$

التمرين الأول: (04 نقاط)

(I) لنكن المتتالية (u_n) و المتتالية (v_n) المعرفتين كما يلي :

$$u_0 = 1, v_0 = 2 \text{ و من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ و } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}$$

(1) احسب : u_1 و v_1 .

(2) اثبت ان من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{4}(v_n - u_n)$.

(3) برهن بالتراجع ان من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < v_n$.

(4) اثبت ان المتتالية (u_n) متزايدة تماما و اثبت ان المتتالية (v_n) متناقصة تماما.

(II) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = v_n - u_n$ و $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

(1) أثبت أن المتتالية (w_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ثم عبر عن w_n بدلالة n . ما هي نهاية (w_n) ؟

(2) استنتج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان و متقاربتان.

(3) عبر عن S_n بدلالة n و أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = \frac{u_n + 1}{2}$.

(4) استنتج عبارة u_n بدلالة n .

(5) اثبت ان : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{5}{3}$.

التمرين الثاني : (04,5 نقاط)

I. نعتبر في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $\bar{z}^2 - \sqrt{2}\bar{z} + 2 = 0 \dots (E)$

و العدد المركب : $z_1 = \frac{4}{\sqrt{2} - i\sqrt{6}}$ و $\omega = -8$ حيث $(\bar{z})$ هو مرافق العدد المركب z .

(1) أكتب z_1 على الشكل الجبري و العدد ω على الشكل الاسي.

(2) تحقق أن z_1 حلا للمعادلة (E) ، ثم استنتج z_2 الحل الثاني للمعادلة (E)

(3) أحسب طوليلة و عمدة للعدد المركب z_1 ثم اكتبه على الشكل الاسي.

(4) بين أن z_1^6 عددا حقيقيا.

II. المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A, B و C لواقعها على الترتيب $z_A = 4 - 4i\sqrt{3}$ ، $z_B = 8$ ، و $z_C = \omega$.

(1) عين على الشكل الجبري الجذرين التربيعيين L_1 و L_2 للعدد المركب z_A .

(2) S التشابه المباشر الذي مركزه O و يحول A إلى B .

أ) اكتب الصيغة المركبة لـ S ثم حدد بدقة طبيعته.

ب) استنتج ان المثلث OAB متقايس الأضلاع.

ت) عين z_I لاحقة النقطة I منتصف القطعة $[AC]$ و تحقق ان $|z_I| = 4$

(3) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|z| = 2|2i|$ ، عين بدقة طبيعة المجموعة (Γ) .

الجنس	الذكور	الإناث
التخصص		
الأطباء	5	3
الممرضون	8	4

التمرين الثالث : (04 نقاط)

أعضاء الطاقم الصحي لمؤسسة استشفائية يتوزعون حسب الجدول المقابل :
يُراد تشكيل بطريقة عشوائية لجنة مكونة من ثلاثة عناصر من هذه المؤسسة للمشاركة في إحدى الدورات التكوينية.

(1) ليكن الحدث A : " العناصر التي وقع عليها الاختيار كلها من الإناث "

$$P(A) = \frac{7}{228}$$

(ب) علما أن العناصر التي وقع عليها الاختيار كلها من الإناث احسب احتمال ان تكون من نفس التخصص.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد تخصصات العناصر التي يقع عليها الاختيار.

$$(أ) \text{ بين أن : } P(X=1) = \frac{69}{285} \text{ ثم استنتج قانون احتمال المتغير } X.$$

(ب) احسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

التمرين الرابع: (07,5 نقاط)

(I) الدالة العددية المعرفة و المتزايدة تماما على المجال $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^x - x^2 + 3x - 1$

تحقق ان : $g(0) = 0$ و استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

(II) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x^2 - x)e^{-x} + x$

(C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلي المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) اثبت ان من اجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = \frac{(x^2 - x + xe^x)}{e^x}$

(2) اثبت ان : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و ان : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

(3) اثبت ان : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ و فسر النتيجة بيانيا.

(4) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لمستقيم (Δ) الذي $y = x$ معادلة له .

(5) اثبت ان من اجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$

(6) ادرس اتجاه تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

(7) اثبت ان من اجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}$

(8) استنتج (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين احداثياتهما بقيم مضبوطة.

(9) اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند نقطته التي فاصلتها 2 .

(10) تأخذ : $f(4) = 4, 2$ ، أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f) .

(11) تحقق ان الدالة $H : x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ دالة اصلية للدالة $h : x \mapsto -x^2e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

(12) استنتج ان : $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = -\frac{2e-5}{e}$

(13) باستعمال مكاملة بالتجزئة ، اثبت ان : $\int_0^1 xe^{-x} dx = \frac{e-2}{e}$

(14) احسب S مساحة حيز المستوي المحدد بـ (C_f) و المستقيمت التي معادلاتها : $x=0$ و $x=1$ و $y=x$.



مديرية التربية الوطنية لولاية سوق أهراس

امتحان بكالوريا تجريبية للتعليم الثانوي

الشعبة: علوم تجريبية

ثانوية: أبو مهاجر دينار

من إعداد الأستاذ: بن جاب الله

دورة ماي 2023

المدة 3 سا و 30 د

اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (4 نقاط)

يحتوي صندوق U على 5 كريات من بينهم كرتين بيضاوين و ثلاث كريات حمراء و يحتوي صندوق V على 3 كريات من بينهم كرتين حمراوين و كرية واحدة بيضاء . جميع الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس . نسحب عشوائيا كرتين من أحد الصندوقين بالكيفية التالية : " نختار ورقة عشوائيا من بين أوراق متماثلة مرقمة من 1 إلى 7 فاذا ظهر رقما زوجيا نسحب الكرتين في آن واحد من U و إذا ظهر رقما فرديا نسحب الكرتين على التوالي دون إرجاع من V " .

نسمي A الحدث " الحصول على رقم زوجي " و نسمي M الحدث " الكرتان المسحوبتان من نفس اللون " .

1. بين أن احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون علما أن البطاقة المسحوبة تحمل رقما فرديا هو $\frac{1}{3}$.

2. أنقل ثم أكمل شجرة الاحتمالات المقابلة .

3. أحسب $P(\overline{M})$.

4. أحسب $P_M(A)$ احتمال أن تكون الكرتان

مسحوبتان من الصندوق U علما أنهما من نفس اللون .

5. نجمع جميع كريات الصندوقين في كيس واحد ثم نسحب ثلاث كريات دون إرجاع الكرية المسحوبة في كل مرة .

ما احتمال الحصول على الأقل على كرية حمراء واحدة .

التمرين الثاني : (4 نقاط)

(u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتان على $\mathbb{R}$ به $u_0 = 0$ و بالعلاقتين : $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1$, $v_n = (2u_n + \alpha)^2$ و $\alpha \in \mathbb{R}$.

I. أحسب u_1 و u_2 ثم عين قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{9}$ يطلب حساب حدها الأول .

II. نضع $\alpha = -3$.

1. أكتب v_n بدلالة n و استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2. بين أن : $2u_0 + 2u_1 + \dots + 2u_n = \frac{3}{2} \left[2n - 1 + \left(\frac{1}{3} \right)^n \right]$.

التمرين الثالث : (5 نقاط)

I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\square$ المعادلة: $(\bar{z} + 3i)(z^2 - 3\sqrt{3}z + 9) = 0$.

II. A, B, C و D أربعة نقط من المستوي المركب $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لواحقتها على الترتيب : $z_A = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

$$z_B = \bar{z}_A, \quad z_C = 3i, \quad z_D = -\bar{z}_B$$

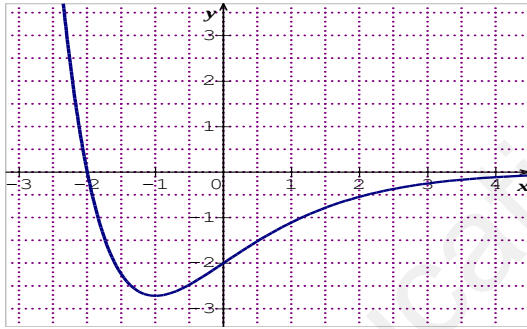
1. أكتب z_A, z_B, z_C, z_D على الشكل الأسّي و استنتج أن النقط A, B, C و D تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها .

2. بين أن النقط: O, A و D في إستقامة ثم استنتج طبيعة المثلث ABD .

3. عين لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABD ثم تحقق أن: $z_G^{2023} + z_G = 0$.

4. حدد طبيعة المجموعة (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي المركب التي تحقق: $|\bar{z}| = |iz + 3|$.

بين أن صور (Γ) بالدوران r الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ هي محور القطعة $[OD]$.



التمرين الرابع : (7 نقاط)

I. الدالة العددية g معرفة على $\square$ ب: $g(x) = -\frac{x+2}{e^x}$

(C_g) تمثيلها البيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ الشكل المقابل .

أحسب $g(-2)$ ثم حدد إشارة $g(x)$ بقراءة بيانية .

II. الدالة العددية f معرفة على $\square$ ب: $f(x) = (x-3)e^x + 3$

(C_f) تمثيلها البيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (حيث : $\|\vec{OI}\| = 1\text{cm}$)

1. أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و فسر النتيجة بيانياً ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب) أدرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 3$.

2. أ) بين أنه من أجل كل x من $\square$ فان : $f'(x) = g(-x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

ب) بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثيتها.

3. برهن أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على المجال $[2; +\infty[$ حيث $2.82 < \alpha < 2.83$.

4. أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند 0 ثم أنشئ كل من (T) و (Δ) و (C_f) .

5. عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة : $f(x) = \ln(m)$ حلان مختلفان في الإشارة .

6. أحسب باستعمال التكامل بالتجزئة العدد A_α مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين

الذين معدلتيهما $x = \alpha$ و $x = 0$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 نقاط)

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء مرقمة بـ : (0,1,2) و أربعة كريات حمراء مرقمة بـ : (1,1,2,3) و ثلاث كريات سوداء مرقمة بـ : (1,2,3) . جميع الكريات متماثلة لا نفرق بينها في اللمس .
نسحب من الكيس 3 كريات في آن واحد و نعتبر الحادثين التاليين :

A " الكريات المسحوبة متمايزة اللون مثنى مثنى " B " الكريات المسحوبة متمايزة الرقم مثنى مثنى " .

1. أحسب $P(A)$ و بين أن $P(B) = \frac{5}{12}$.

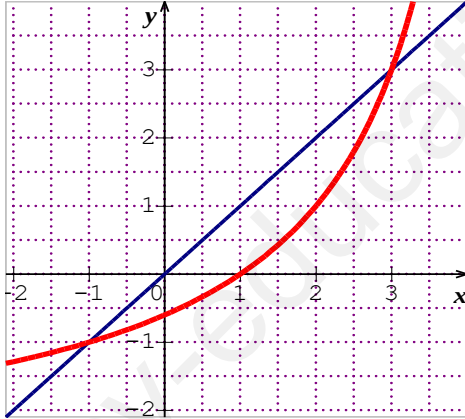
2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب أصغر الأرقام المحصل عليها .

أ) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X و بين أن : $E(X) = \frac{47}{60}$.

ب) أحسب العددين T و S حيث : $T = P(e^{X-1} - 1 \geq 0)$ و $S = E(1440X + 316)$.

التمرين الثاني : (4 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty; 5[$ بـ $f(x) = \frac{3-3x}{x-5}$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم



المتعامد و المتجانس $(O.\vec{i}; \vec{j})$ و (Δ) المستقيم

ذو المعادلة $y = x$ (الشكل المقابل) .

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ

$$u_0 = 2 \text{ و العلاقة : } u_{n+1} = \frac{3-3u_n}{u_n-5}$$

1. أنقل الشكل على ورقة ميليمترية ثم مثل الحدود الأربع الأولى للمتتالية (u_n) مع إبراز خطوط الإنشاء .

2. ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .

3. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 < u_n \leq 2$.

4. بين أن (u_n) متتالية متناقصة تماماً و استنتج صحة تخمينك حول تقاربها .

5. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 + u_{n+1} \leq \frac{2}{3}(1 + u_n)$.

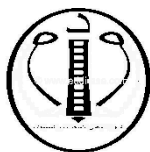
ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 1 + u_n \leq 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الثالث : (5 نقاط)

1. A و B نقطتين من المستوي المركب $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لاحقتاهما معرفتين كما يلي : $z_A = 2i$ و $2z_A + \bar{z}_B = 2$.
2. أ) بين أن لاحقة النقطة D صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A و زاويته $-\frac{\pi}{2}$ و نسبته $\frac{1}{2}$ هي $1+i$.
ب) استنتج طبيعة المثلث ABD .
3. عين لاحقة النقطة C صورة النقطة D بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AB}$ ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $ABCD$.
4. عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب $\left(\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A}\right)^n$ حقيقيا .
5. حدد طبيعة المجموعة (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي المركب التي تحقق :
$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \|2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC}\|$$
 ثم أنشئها .

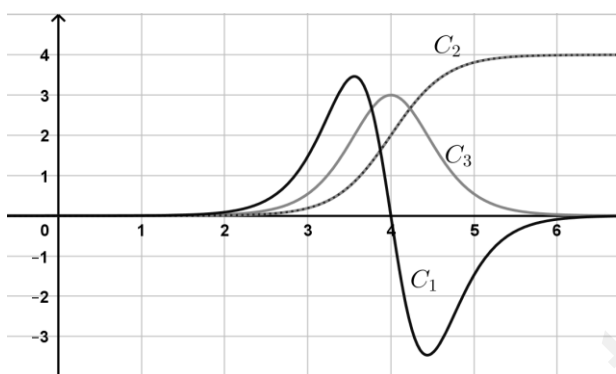
التمرين الرابع : (7 نقاط)

- I. نعتبر الدالة العددية g معرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب : $g(x) = 3x + 2 + \ln(x+1)$.
1. بين أن g متزايدة تماما على المجال $]-1; +\infty[$.
2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.46 < \alpha < -0.47$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.
- II. لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب : $f(x) = \left(3 - \frac{1}{x+1}\right) \ln(x+1)$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (حيث : $\|\vec{OI}\| = 1cm$)
1. أحسب كل من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.
2. بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ فان : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
3. أثبت أن : $f(\alpha) = -\frac{(3\alpha+2)^2}{\alpha+1}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.
4. أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند 0 .
5. أنشئ كل من (T) و (C_f) ثم عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة : $f(x) = m$ حلان مختلفان في الإشارة .
6. أ) أحسب الدالة المشتقة على المجال $]-1; +\infty[$ للدالة : $x \mapsto (x+1) \ln(x+1) - x$.
ب) استنتج دالة أصلية للدالة f على $]-1; +\infty[$ و التي تنعدم عند 0 .
7. بين أن الدالة h المعرفة على المجال $\square$ بـ $h(x) = \frac{3|x|+2}{|x|+1} \ln(|x|+1)$ دالة زوجية ثم أنشئ (C_h) بالاستعانة بـ (C_f) .



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول



التمرين الأول: (04 نقاط)

المستوي منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

الشكل المقابل يمثل منحنى دالة f معرفة وقابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ وكذلك منحنى دالتها المشتقة f' والمشتقة الثانية f'' .

(1) انسب، مع التبرير، كل منحنى من المنحنيات (C_1) ، (C_2) و (C_3) الى دالته.

(2) بقراءة بيانية :

(أ) عين معامل توجيه مماس المنحنى (C_2) عند النقطة ذات القاصلة 4

(ب) عين احداثيات نقط انعطاف المنحنى (C_1)

(3) نعتبر A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_3) ، محور الفواصل والمستقيمت الى معادلاتها $x=4$ و

$x=6$ بين أن : $A=2$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرفة بـ : $u_1 = 5$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{1 + u_n}$.

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > 2$

(2) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $v_n = \frac{3}{u_n - 2}$.

(أ) بين أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_1

(ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ؛ ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

(3) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n = n^2 + 4n$



التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

يراد عشوائيا تشكيل لجنة من بين اربع رجال $H_1; H_2; H_3; H_4$ وخمس نساء $F_1; F_2; F_3; F_4; F_5$ اللجنة مكونة من

ثلاث اعضاء رئيس ونائبان حيث للنائبان نفس المهام

نعتبر الحوادث: $A; B; C; D$ حيث:

A : اللجنة من نفس الجنس
 B : النائبان من جنسين مختلفين
 C : H_1 و H_2 عضوان في اللجنة
 D : اللجنة تضم امرأة واحدة على الاكثر

(1) احسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمال الحادثتين A و B ؛ وبين ان $P(C) = \frac{1}{12}$ و $P(D) = \frac{17}{42}$

(2) علما ان الرئيس رجل؛ ماهو احتمال ان يكون النائبان من نفس الجنس؟

(3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل لجنة عدد النائبات (أي النواب نساء) فيها.

(أ) عين قانون احتمال X واحسب امله الرياضي $E(X)$

(ب) احسب $P[\ln(X+1) < 1]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. الدالة العددية g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (2x+1)e^{2x} - 1$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(2) أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها

(ب) احسب $g(0)$ استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x(1 - e^{2x}) + 3$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب

الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x $f'(x) = -g(x)$. حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

(3) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 3$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

(ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

(4) بين ان المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين فاصلتهما α و β حيث $\ln 2 < \alpha < 1$

$$\text{و } -3.2 < \beta < -3$$

(5) أنشئ (Δ) و المنحنى (C_f)

(6) λ عدد حقيقي، حيث: $\lambda < 0$ نرمز بـ: $A(\lambda)$ الى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_3) ، المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتهما $x = \lambda$ و $x = 0$

احسب $A(\lambda)$ بدلالة λ ثم احسب $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$.

انتهى الموضوع الأول



$$(u_n) \text{ متتالية عددية معرفة بعدها الأول } u_1 = \frac{1}{3} \text{ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n \text{ بـ: } u_{n+1} = \frac{n+3+2nu_n}{3(n+1)}$$

- (1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n : u_n \leq 1$
- (2) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة
- (3) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $v_n = n(1-u_n)$.

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ احسب حدها الأول v_1

(ب) اكتب عبارة v_n بدلالة n ؛ ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

(4) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(5) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n$

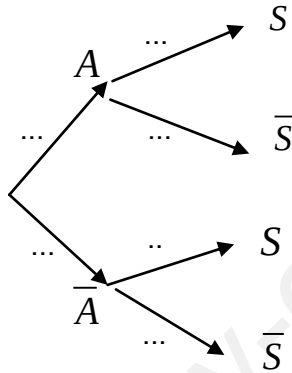
التمرين الثاني : (05 نقاط) (تعطى كل القيم بالتقريب الى 10^{-3})

قبيل امتحان البكالوريا قدمت مكتبة تخفيض في سعر نوعين من المراجع الخاصة بالرياضيات احدهما خاص بحلول مواضيع البكالوريات السابقة والاخر ملخص دروس ومقترحات

نقرض ان كل طالب بكالوريا اشترى مرجع واحد

ونعتبر ان 20% من الطلبة اشترى المرجع الخاص بحلول البكالوريات السابقة بحيث 90% منهم اعجبوا بالمرجع و 82% من الطلبة الذين زاروا المكتبة اعجبوا بالمرجع الذي اختاروه

فيما يلي نختار عشوائيا طالب بكالوريا ونعتبر الحادثتين: A : الطالب اشترى مرجع خاص بحلول مواضيع البكالوريات السابقة S : الطالب معجب بمرجعه الذي اختاره.



(1) اثبت أن $P_{\bar{A}}(S) = 0.8$.

(2) انقل وأكمل شجرة الاحتمالات المقابلة التي تنمذج الوضعية

(3) نختار عشوائيا طالب معجب باختياره؛ ما احتمال ان يكون قد اشترى مرجع خاص بحلول مواضيع البكالوريات السابقة؟

(4) نختار على التوالي خمسة طلاب من الذين اشترى احد المراجع.

ولنعتبر المتغير العشوائي X الذي يعبر عن عدد الطلبة المعجبين بالمرجع الذي اختاروه من بين هؤلاء الخمس طلبة.

(أ) بين ان X باخذ القيم: $\{0,1,2,3,4,5\}$

(ب) عرف قانون احتمال X .

(ج) احسب احتمال ان يعجب بالمرجع اكثر من 3 طلبة.

(5) نختار عشوائيا n طالب من الذين اشترى احد المراجع (n عدد طبيعي) ولنعتبر P_n احتمال ان يكون n طالب معجب بمرجعه.

- اذا علمت ان: $P_n = (0.82)^n$ ابتداءً من أي قيمة للعدد الطبيعي n يكون: $P_n < 0.01$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(I) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ ؛ المعادلة (1) $Z^2 + 2Z + 4 = 0$



(II) المستوي المركب منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النفط A, B و C لواحقتها : $Z_A = -2$ ، $Z_C = -1 - i\sqrt{3}$ و $Z_B = -1 + i\sqrt{3}$

- (1) عين الشكل الأسّي لكل من Z_A ، Z_B . ثم استنتج الشكل الأسّي للعدد المركب Z_C
- (2) استنتج ان النفط A, B و C تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها
- (3) نعتبر النقطة D ذات اللاحقة Z_D نظيرة النقطة C بالنسبة إلى النقطة A بين ان : $Z_D = -3 + i\sqrt{3}$.
- (4) اكتب العدد $\frac{Z_C - Z_B}{Z_D - Z_B}$ على شكله الاسي ثم استنتج طبيعة المثلث BCD

(5) (Δ) مجموعة النفط M من المستوي ذات اللاحقة Z (M تختلف عن A و B) حيث $\left| \frac{iZ + 2i}{-2Z - 2 + 2i\sqrt{3}} \right| = \frac{1}{2}$

عين طبيعة المجموعة (Δ)

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. الدالة العددية f معرفة على $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = 1 - \frac{\ln x^2}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و فسر النتائج هندسيا.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها

(2) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم ذو المعادلة $y = 1$.

(3) احسب $f(-x) + f(x)$ وماذا تستنتج؟

(4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0.71 < \alpha < -0.70$

(5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يشمل النقطة $A(0,1)$ ويمس المنحنى (C_f) في نقطتين يطلب حساب

احداثيات كل منهما ثم تحقق ان : $y = -\frac{1}{e}x + 1$ معادلة للمماس (T)

(6) ارسم بعناية المماس (T) والمنحنى (C_f) .

(7) m عدد حقيقي ؛ (Δ_m) مستقيم حيث $y = mx + 1$ معادلة له

أ) تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي m النقطة $A(0,1)$ تنتمي الى كل المستقيمات (Δ_m) .

ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx + 1$

(8) أ) I_n مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) المستقيمات التي معادلاتها $y = 1$ و $x = 1$ و $x = n$ حيث n

عدد طبيعي $(n > 1)$. بين أن : $I_n = \frac{1}{2} \ln^2 n$ ثم عين اصغر عدد طبيعي n_0 بحيث اذا كان $n \geq n_0$ فان : $I_n > \frac{1}{2}$.

انتهى الموضوع الثاني



BAC-MAHROUZ-2023-BOUCHAREB

على التلميذ أن يختار أحد الموضوعين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

عَيِّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير.

(1) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية : $-y' + 2y - 2 = 0$ و الذي يحقق $y(0) = 2024$ هو :(أ) $f(x) = 2023e^{2x} - 1$ ، (ب) $f(x) = 2023e^{2x} + 1$ ، (ج) $f(x) = -2023e^{2x}$.(2) مجموعة حلول المتراجحة : $9^x - 4.3^x + 4 \leq 0$ في المجموعة $\mathbb{R}$ هو :(أ) $S = \Phi$ ، (ب) $S = \left] -\infty; \ln\left(\frac{2}{3}\right) \right]$ ، (ج) $S = \left\{ \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \right\}$.(3) حلول المعادلة $6.C_n^3 + A_n^2 = 36$ في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ هي: (أ) $S = \{0; 4\}$ ، (ب) $S = \{4\}$ ، (ج) $S = \Phi$ (4) القيمة المتوسطة للدالة f المعرفة بالعلاقة $f(x) = \frac{2e^{-x}}{2e^{-x} + 1}$ على المجال $[0; \ln 2]$ هي :(أ) $m = -1 + \frac{\ln 2}{\ln 3}$ ، (ب) $m = 1 - \frac{\ln 3}{\ln 2}$ ، (ج) $m = -1 + \frac{\ln 3}{\ln 2}$.(5) ليكن Z عدد مركب حيث : $Z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$. قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون Z^n حقيقي هي :(أ) $n = 4k$ ، (ب) $n = 4k + 2$ ، (ج) $n = 2k + 4$. حيث $k \in \mathbb{N}$.

التمرين الثاني : (05 نقاط)

الشكل المرفق هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$ و المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.(1) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.(ب) بيِّن أنه إذا كان $x \in [0, \sqrt{3}]$ فإن : $f(x) \in [0, \sqrt{3}]$.(2) نعرف المتتالية (u_n) كمايلي : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$ (أ) مثل الحدود u_0 ; u_1 ; u_2 على محور الفواصل مبرزاً خطوط التمثيل.(ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .(ج) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.(د) بيِّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - \sqrt{1+u_n^2})}{\sqrt{1+u_n^2}}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) و استنتج تقاربها .(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$ (أ) بيِّن أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول ثم أكتب عبارة v_n بدلالة n .(ب) استنتج u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.(ج) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{3}{3 - u_0^2} + \frac{3}{3 - u_1^2} + \dots + \frac{3}{3 - u_n^2}$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

نعتبر صندوقين متماثلين U_1 ، U_2 بهما كرات متماثلة لا نفرق بينها باللمس بحيث :
 U_1 يحتوي على خمس كرات حمراء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 2 ، 1 ، 1 و ثلاث كرات خضراء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 1 .
 U_2 يحتوي على ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 و كرتين خضراوين تحملان الرقمين 0 ، 1 .
 نختار عشوائيا احد الصندوقين . اذا كان U_1 نسحب منه كرتين على التوالي دون ارجاع واذا كان U_2 نسحب منه كرتين على التوالي و بإرجاع.

- (1) أحسب احتمال الحوادث التالية : A "سحب كرتين من نفس اللون" و B "سحب كرتين تحملان نفس الرقم"
- (2) بين أن : $P(A \cap B) = \frac{37}{175}$. هل الحدثان A و B مستقلان ؟ علّل .

- (3) اذا علمت أن الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين ، فما هو احتمال ان تكون من الصندوق U_1 ؟
- (4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين من الصندوق U_1 .
 أ) عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرّف قانون احتماله . ب) أحسب $E(-3X+7)$.

التمرين الرابع: (07 نقط)

- (I) لتكن الدالة العددية g المعرفة والمتزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = (x \ln x)^2 + \ln x + 1$.
 • بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,32 < \alpha < 0,33$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.
- (II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ بـ : $f(x) = x - \frac{1}{x \ln x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(\vec{i}; \vec{j})$. (وحدة الطول 1Cm)

- (1) أ) بين أن : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ثم فسّر النتيجة بيانيا.

- ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا . أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- (2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي X من المجال $]0; 1[\cup]1; +\infty[$: $f'(x) = 1 + \frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

- (3) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و للمستقيم (Δ) .
- (4) ليكن المستقيم (T) ذا المعادلة $y = x + \beta$ حيث β عدد حقيقي. عين قيمة β حتى يكون المستقيم (T) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

- (5) أرسم (Δ) ، (T) و المنحنى (C_f) . (علما أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها λ حيث : $1,53 < \lambda < 1,54$. نأخذ $f(\alpha) \approx 3$.)

- (6) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة : $X = e^{\frac{1}{x.m}}$ حلين متمايزين.

- (7) أحسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (Δ) و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين : $x = 3$ ، $x = 4$.

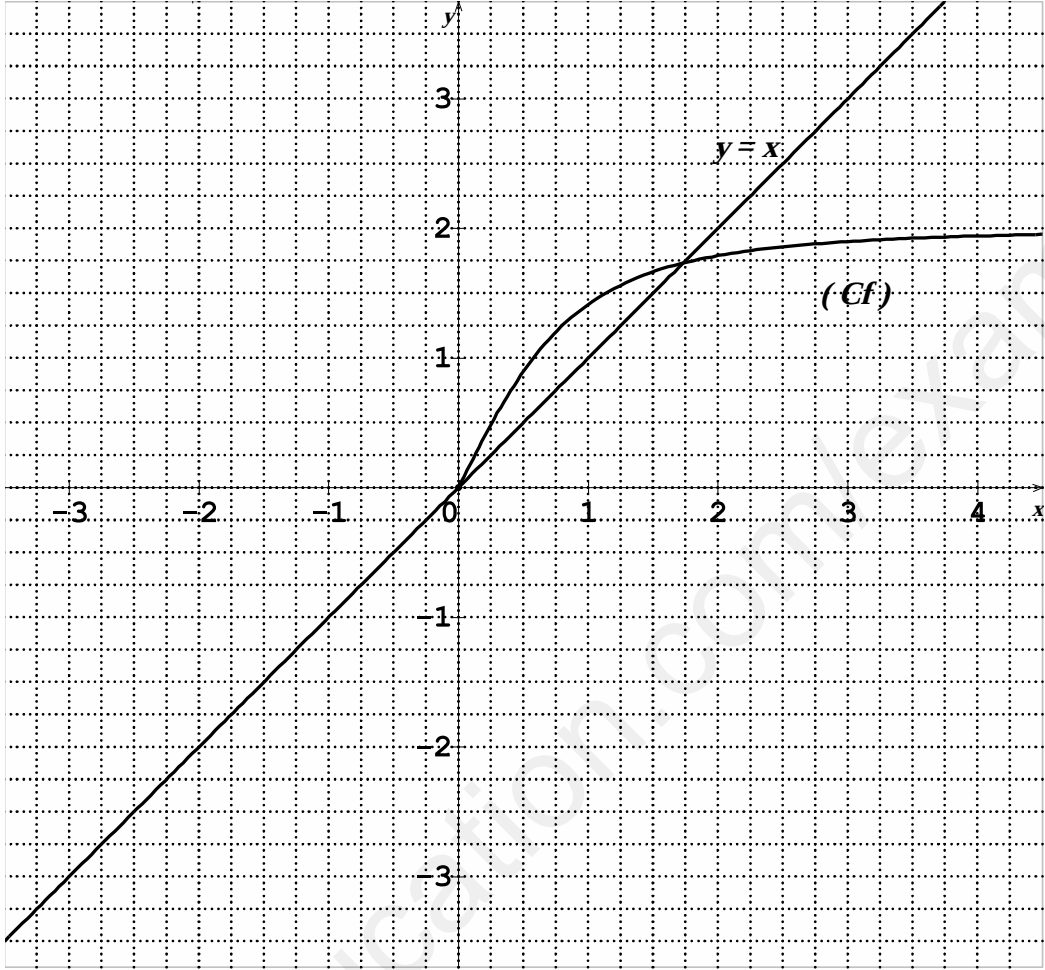
- (III) لتكن الدالة h المعرفة على المجال $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ بـ : $h(x) = [f(x)]^2$

- أ) أحسب $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ (دون حساب عبارة $h(x)$).

ب) أدرس اتجاه تغير الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها.

الوثيقة المرفقة

الاسم و اللقب :



ملاحظة: تعاد الوثيقة المرفقة مع ورقة الإجابة

$$(1) \text{ لتكن المتتالية } (u_n) \text{ المعرفة بـ } u_0 = \alpha \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = (\ln 2)u_n + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right)$$

أ- عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) متتالية ثابتة .

$$(2) \text{ من أجل: } \alpha = 3$$

(أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 2 < u_n \leq 3$

(ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} - u_n = (\ln 2 - 1)(u_n - 2)$

(ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ و برّر تقاربها .

$$(د) \text{ أحسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$(3) \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ نعتبر المتتالية العددية } (v_n) \text{ المعرفة بـ: } v_n = 2u_n - 4$$

(أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \ln 2$ يطلب تعيين حدّها لأول v_0 .

(ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n و استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n = (\ln 2)^n + 2$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ مرة أخرى .

$$(4) \text{ تحقق أن: } \frac{(\ln 4)^n}{u_n - 2} = 2^n \text{ ثم أحسب بدلالة } n \text{ المجموع: } S_n = \frac{1}{u_0 - 2} + \frac{\ln 4}{u_1 - 2} + \frac{(\ln 4)^2}{u_2 - 2} + \dots + \frac{(\ln 4)^n}{u_n - 2}$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

$$(1) \text{ حل في مجموعة الأعداد المركبة } \mathbb{C} \text{ المعادلة ذات المجهول } z \text{ التالية: } (\bar{z} - 1 + 3i)(z^2 - 10z + 50) = 0$$

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B و C لواحقها على الترتيب :

$$z_C = 1 + 3i \text{ و } z_B = \bar{z}_A, \text{ و } z_A = 5 + 5i$$

(2) (أ) أكتب كل من z_B و z_A على الشكل الأسّي.

(ب) علّم النقط A, B و C .

$$(ج) \text{ عيّن طولاً و عمدة العدد المركب } \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$$

(د) استنتج طبيعة المثلث ABC ثم أحسب مساحته .

$$(3) (أ) \text{ أكتب على الشكل الجبري العدد } a \text{ حيث: } a = \left(\frac{z_B}{5\sqrt{2}}\right)^{2025} - \left(\frac{z_A}{5\sqrt{2}}\right)^{2023}$$

(ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون a^n تخليفاً صرفاً موجباً.

$$(4) (أ) \text{ عين } z_D \text{ لاحقة النقطة } D \text{ حتى يكون الرباعي } ADBC \text{ مستطيل.}$$

(ب) عين z_I لاحقة النقطة I منتصف القطعة $[BC]$ ثم بين أن النقط I, O, D على استقامة واحدة .

$$(5) \text{ عين طبيعة } (\Gamma) \text{ مجموعة النقط } M \text{ من المستوي ذات اللاحقة } z \text{ والتي تحقق: } |-iz + i - 3| = |z - 5 - 5i|$$

ثم أنشئها في المعلم السابق.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 5 كريات حمراء و 3 كريات بيضاء ، كل الكريات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس ، نسحب من الكيس 3 كريات عشوائياً و في آن واحد . نعتبر الحوادث التالية:

A : "الكريات المسحوبة كلها حمراء " ، B : "توجد كرية واحدة حمراء " ، C : "توجد على الأقل كرية واحدة بيضاء " .

$$(1) \text{ أحسب احتمال كل حدث من الحوادث التالية: } A, B, C$$

(2) ننزع من الكيس الكريات البيضاء ونضع مكانها n كرية سوداء حيث n عدد طبيعي و يحقق: $n \geq 2$.
نسحب عشوائيا من الكيس كرتين على التوالي وبدون إرجاع .

- نقترح اللعبة التالية: سحب كرية حمراء يخسر 10 نقاط ، وسحب كرية سوداء يربح 5 نقاط .
ليكن المتغير العشوائي X الذي يرقى بكل سحب كرتين مجموع النقاط المحصل عليها .
(أ) ماهي القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ؟

(ب) بين أن
$$P(X = 10) = \frac{n(n-1)}{(n+4)(n+5)}$$

(ج) أكتب قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.
(د) عين قيمة n حتى تكون اللعبة عادلة .
(هـ) كيف نختار عدد الكريات السوداء حتى تكون اللعبة مربحة ؟

التمرين الرابع : (07 نقاط)

(I) في الشكل المقابل (Δ) مستقيم معادلته $y = x + 1$ و (Γ) منحنى الدالة $x \mapsto e^x$

(1) بقراءة بيانية برر لماذا من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x - (x + 1) \geq 0$

(2) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - e^x$

(أ) أدرس اتجاه تغير الدالة g (لا يطلب حساب النهايات) .

(ب) برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-2.2 < \alpha < -2.1$

(ج) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $f(x) = e^{2x} - x^2 e^x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ cm}$$

(1) (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

(ب) أثبت أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = -2e^x \cdot g(x)$.

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) عين بدون حساب $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\alpha + h) - f(\alpha)}{h}$ فسر النتيجة بيانيا .

(4) أكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

(5) أثبت أن : $f(\alpha) = \alpha^2(1 - \frac{1}{4}\alpha^2)$ ثم عين حصارا لـ $f(\alpha)$.

(6) أحسب $f(1)$ ثم أرسم (T) و (C_f) . (نقبل أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث : $-0.8 < \beta < -0.7$ و نأخذ $f(\alpha) = -0.53$.)

(7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = 2x + |m|$.

(8) نعتبر الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $H(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$

(أ) برهن أن H دالة أصلية للدالة $x \mapsto x^2 e^x$ على $\mathbb{R}$.

(ب) أحسب بدلالة α مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور الفواصل والمستقيمين المعرفين

بالمعادلتين : $x = -4$ و $x = \alpha$.

(III) نعتبر الدالة K المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $K(x) = e^{-2|x|} - x^2 e^{-|x|}$

(أ) بين أن K دالة زوجية .

(ب) أشرح كيف يمكن رسم المنحنى (C_K) الممثل للدالة K ثم أرسمه في المعلم السابق.

تصحیح بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات دورة ماي 2023 الموضوع الأول

التمرين الأول: 05 نقاط

(1) الإجابة (ب)

$y' + 2y - 2 = 0$ (*) معناه: $-y' = -2y + 2$ معناه: $y' = 2y - 2$ و منه: $a = 2$ و $b = -2$
الحل الخاص للمعادلة التفاضلية (*) هي الدالة التي تحقق: $f(x) = Ce^{2x} + 1$ و $f(0) = 2024$
أي $C + 1 = 2024$ و منه $C = 2023$

و منه الحل الخاص للمعادلة التفاضلية (*) هو الدالة التي تحقق: $f(x) = 2023e^{2x} + 1$

(2) الإجابة (ج)

حلول المتراجحة: $9^x - 4.3^x + 4 \leq 0$ أي: $3^{2x} - 4.3^x + 4 \leq 0$ أي: $(3^x)^2 - 4.3^x + 4 \leq 0$

نضع: $3^x = t$ تصبح المتراجحة $t^2 - 4t + 4 \leq 0$

المعادلة $t^2 - 4t + 4 = 0$ تقبل حلا مضاعفا لأن: $\Delta = 16 - 16 = 0$ و هو: $t_1 = t_2 = 2$

و منه: $t^2 - 4t + 4 \leq 0$ تكافئ: $(t - 2)^2 \leq 0$ و تكون المتراجحة محققة من أجل $t = 2$

أي: $3^x = 2$ أي: $x \ln 3 = \ln 2$ و منه: $x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$ إذن حلول المتراجحة هي: $S = \left\{ \frac{\ln 2}{\ln 3} \right\}$

(3) الإجابة (ب)

لدينا: $n \geq 2$ و $n \geq 3$ و منه: $n \geq 3$

المعادلة: $6.C_n^3 + A_n^2 = 36$ تكافئ: $6 \cdot \frac{n!}{3!(n-3)!} + \frac{n!}{(n-2)!} = 36$

تكافئ: $(n-2) \cdot (n-1) \cdot n + (n-1) \cdot n = 36$

تكافئ: $(n^2 - 3n + 2) \cdot n + (n^2 - n) = 36$

تكافئ: $n^3 - 2n^2 + n - 36 = 0$

الجزر: $n = 4$ أي: $n^3 - 2n^2 + n - 36 = (n-4) \cdot (n^2 + 2n + 9)$

إما $n = 4$ أو $n^2 + 2n + 9 = 0$ و المعادلة ليس لها حلا في $\mathbb{R}$ لأن $\Delta < 0$ إذن قيمة $n = 4$

(4) الإجابة (ج)

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{\ln 2} \frac{2e^{-x}}{2e^{-x} + 1} dx \\ &= \frac{-1}{\ln 2} \left[\ln(2e^{-x} + 1) \right]_0^{\ln 2} \\ &= \frac{-1}{\ln 2} [\ln 2 - \ln 3] \\ &= -1 + \frac{\ln 3}{\ln 2} \end{aligned}$$

(5) الإجابة (أ)

$Z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ فإن الشكل الاسي لـ Z هو: $Z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

قيم n التي من أجلها $Z^n \in \mathbb{R}$ معناه $\arg(Z^n) = k\pi$ أي $\arg(Z) = k\pi$ أي: $\frac{n\pi}{4} = k\pi$ و منه $n = 4k$ حيث k عدد طبيعي.

التمرين الثاني : (05 نقاط)
(1) أ) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{1+x^2} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x}{x^2 + 1} : [0, +\infty[\text{ على } f \text{ قابلة للاشتقاق}$$

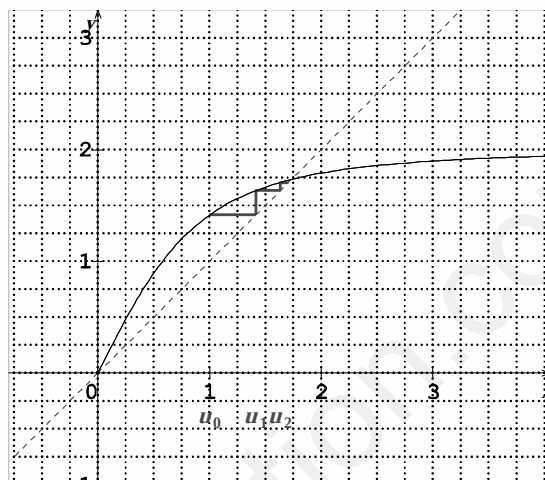
$$f'(x) = \frac{2}{(x^2 + 1)\sqrt{1+x^2}} \text{ ومنه:}$$

إذن مهما يكن $x \in [0, +\infty[: f'(x) > 0$ و عليه الدالة f متزايدة تماما على $[0, +\infty[$.

ب) لدينا : $x \in [0, \sqrt{3}]$ أي: $0 \leq x \leq \sqrt{3}$ و الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0, \sqrt{3}]$ لأنها متزايدة تماما على المجال $[0, +\infty[$.

إذن : $f(0) \leq f(x) \leq f(\sqrt{3})$.

لدينا: $f(0) = 0$ ، $f(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ ، و منه $f(x) \in [0, \sqrt{3}]$.
(2) أ) تمثيل الحدود : $u_0 ; u_1 ; u_2$



ب) التخمين حول اتجاه تغير المتتالية:

بما ان الحدود مرتبة ترتيبا تصاعديا أي : $u_0 < u_1 < u_2 < \dots$ فإن المتتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و تتقارب عند العدد $\sqrt{3}$.

ج) البرهان بالتراجع: $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

نضع $P(n)$ الخاصية من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1$

ولدينا $1 \in [1, \sqrt{3}]$ فإن $1 \leq u_0 \leq \sqrt{3}$ إذن $P(0)$ محققة .

نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة أي $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$ و نبين أن $P(n+1)$ صحيحة أي : $1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$.

لدينا من فرضية التراجع $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$ و الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1, \sqrt{3}]$

فإن : $f(1) \leq f(u_n) \leq f(\sqrt{3})$ أي: $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$ و $\sqrt{2} > 1$ أي $1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$ و منه $P(n+1)$ صحيحة .

إذن الاستلزام صحيح و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n - u_n \sqrt{1+u_n^2}}{\sqrt{1+u_n^2}} \text{ أي: } u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{\sqrt{1+u_n^2}} - u_n \quad (د)$$

0, 5	$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - \sqrt{1 + u_n^2})}{\sqrt{1 + u_n^2}} \quad \text{أي :}$ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$ أي: $1 \leq u_n^2 \leq 3$ أي: $2 \leq u_n^2 + 1 \leq 4$ و منه : $0 \leq 2 - \sqrt{u_n^2 + 1} \leq 1 \quad \text{أي :} \quad 2 - 2 \leq 2 - \sqrt{u_n^2 + 1} \leq 2 - 1 \quad \text{ومنه :} \quad -2 \leq -\sqrt{u_n^2 + 1} \leq -\sqrt{2}$ ومنه : $2 - \sqrt{u_n^2 + 1} > 0$ و بالتالي $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.
0, 25	بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى بـ $\sqrt{3}$ فهي متقاربة. (3) أ) نبرهن أن (V_n) متتالية هندسية . $v_{n+1} = qv_n \quad \text{متتالية هندسية معناه}$
0, 5	لدينا : $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{3 - u_{n+1}^2} = \frac{\frac{4u_n^2}{1 + u_n^2}}{3 - \frac{4u_n^2}{1 + u_n^2}} = \frac{4u_n^2}{-u_n^2 + 3} = 4 \left(\frac{u_n^2}{3 - u_n^2} \right)$ أي $v_{n+1} = 4v_n$ إذن $v_{n+1} = 4v_n$
0,25	و منه (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = 4$ و حدّها الأول $V_0 = \frac{1}{2}$. - عبارة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 \cdot q^n = \frac{1}{2} 4^n$ و منه : $v_n = \frac{1}{2} (4)^n$. (ب) عبارة u_n بدلالة n : $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$ أي : $3v_n - v_n \cdot u_n^2 = u_n^2$ أي : $3v_n = v_n \cdot u_n^2 + u_n^2$ أي : $u_n = \pm \sqrt{\frac{3v_n}{1 + v_n}} \quad \text{أي :} \quad u_n^2 = \frac{3v_n}{1 + v_n} \quad \text{ومنه :} \quad u_n^2 \cdot (1 + v_n) = 3v_n$
0,25	- بما أن : $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$ فإن : $u_n = \sqrt{\frac{3v_n}{1 + v_n}}$ إذن : $u_n = \sqrt{\frac{\frac{3}{2} \cdot (4)^n}{1 + \frac{1}{2} \cdot (4)^n}}$.
0,25	- حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\frac{3}{2} \cdot (4)^n}{1 + \frac{1}{2} \cdot (4)^n}}$ أي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3}{2 \cdot 4^{-n} + 1}}$ أي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3}{2 \cdot e^{-n \ln 4} + 1}} = \sqrt{3}$ لأن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n \ln 4} = 0$ و منه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$.
0,5	(ج) حساب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = \frac{3}{3 - u_0^2} + \frac{3}{3 - u_1^2} + \dots + \frac{3}{3 - u_n^2}$ لدينا: $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$ أي : $v_{n+1} = \frac{3}{3 - u_n^2}$ و منه : $S_n = (v_0 + 1) + (v_1 + 1) + \dots + (v_n + 1)$ أي : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n + (n + 1)$ أي : $S_n = \frac{v_0}{q - 1} \cdot (q^{n+1} - 1) + (n + 1)$ أي : $S_n = \frac{1}{6} \cdot (4^{n+1} - 1) + (n + 1) \quad \text{و منه :} \quad S_n = \frac{1}{3} \cdot (4^{n+1} - 1) + (n + 1)$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

U_1 : السحب على التوالي دون إرجاع الكرتين ، U_2 : السحب على التوالي مع إرجاع الكرتين .
 A "سحب كرتين من نفس اللون إما من الصندوق الأول أو من الصندوق الثاني.
عدد الحالات الممكنة لسحب الكرتين من الصندوق U_1 هو : $A_8^2 = 56$.

عدد الحالات الممكنة لسحب الكرتين من الصندوق U_2 هو عدد قوائم : $5^2 = 25$.

$$P(A) = P(R \cap U_1) + P(V \cap U_1) + P(R \cap U_2) + P(V \cap U_2)$$

$$. P(A) = \frac{689}{1400} \text{ و منه : } P(A) = \frac{1}{2} \left(\frac{A_3^2 + A_5^2}{A_8^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{3^2 + 2^2}{5^2} \right) \text{ أي :}$$

B "سحب كرتين تحملان نفس الرقم بمعنى كرتين تحملان رقم 1 من U_1 أو كرتين تحملان الرقم 0 من U_1 أو كرتين تحملان الرقم 0 من U_2 أو 1 من U_2 أو 2 من U_2 .

$$. P(B) = \frac{583}{1400} \text{ و منه : } P(B) = \frac{1}{2} \left(\frac{A_3^2 + A_2^2}{56} + \frac{3^2 + 1^2 + 1^2}{25} \right)$$

$$(2) \text{ نبين أن : } P(A \cap B) = \frac{37}{175}$$

$A \cap B$ تعني سحب كرتين من نفس اللون و من نفس الرقم و من U_1 أو U_2 .

$$. P(A \cap B) = \frac{37}{175} \text{ و منه : } P(A \cap B) = \frac{1}{2} \left(\frac{A_3^2 + A_2^2}{56} + \frac{1^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2}{25} \right)$$

الحدثان A و B مستقلان معناه : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ أي : $P(A \cap B) = \frac{689}{1400} \cdot \frac{583}{1400}$ أي :

$$. P(A \cap B) = \frac{37}{175} \approx 0,21 \text{ و } P(A) \cdot P(B) = \frac{401687}{1960000} \approx 0,20$$

إذن : $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ و منه : الحدثان A و B غير مستقلان.

(3) ليكن الحدث C : "سحب كرتين من لونين مختلفين "

$$. P(C) = \frac{1}{2} \left(\frac{2(A_3^1 \times A_5^1)}{56} + \frac{2(3^1 \times 2^1)}{25} \right) = \frac{711}{1400}$$

$$\text{طريقة 2 : } P(C) = P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{711}{1400}$$

$$P(U_1 \cap C) = \frac{2(A_3^1 \times A_5^1)}{56} \times \frac{1}{2} \text{ حيث : } P_C(U_1) = \frac{P(U_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{15}{56} \times \frac{1400}{711} = \frac{15}{56}$$

$$\text{و منه : } P_C(U_1) = \frac{125}{237}$$

(4) المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين من الصندوق U_1 .

قيم المتغير العشوائي هي : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

$$, P(X=1) = \frac{2(A_2^1 \times A_4^1) + A_5^2}{56} = \frac{24}{56} , P(X=1) = \frac{2(A_2^1 \times A_4^1)}{56} = \frac{20}{56} , P(X=0) = \frac{A_2^2}{56} = \frac{2}{56}$$

$$. P(X=1) = \frac{2(A_4^1 \times A_2^1)}{56} = \frac{10}{56}$$

قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

قيم X	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{56}$	$\frac{20}{56}$	$\frac{24}{56}$	$\frac{10}{56}$

0,25

حساب الامل الرياضياتي: $E(X) = \sum_{i=1}^{i=4} X_i \cdot P_i = \frac{20}{56} + \frac{48}{56} + \frac{30}{56}$ أي: $E(X) = \frac{98}{56}$ و منه: $E(X) = \frac{7}{4}$.

0,25

$$E(-3X+7) = -3\left(\frac{7}{4}\right) + 7 = \frac{7}{4}$$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

0,5

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة والمتزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = (x \ln x)^2 + \ln x + 1$.

(1) نبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,32 < \alpha < 0,33$.

لدينا: الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ فهي رتيبة تماما و مستمرة.

و: $g(0,32) \approx -0,01$ ، $g(0,33) \approx 0,03$ و $g(0,32) \cdot g(0,33) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α و يحقق: $g(\alpha) = 0$.

جدول تغيرات الدالة g :

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

0,25

إشارة $g(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - \frac{1}{x \ln x}$.

0,25

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x \ln x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0^-$ لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x - \frac{1}{x \ln x} \right) = +\infty$

لدينا:

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+
$x \ln x$	-	0	+

0,25

نستنتج أن $x=0$ مستقيم مقارب موازي لحامل محور الترتيب.

0,25

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(x - \frac{1}{x \ln x} \right) = +\infty \quad \text{ب)}$$

0,25

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(x - \frac{1}{x \ln x} \right) = -\infty$$

0,25

نستنتج أن $x=1$ مستقيم مقارب موازي لحامل محور الترتيب.

0,25

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{x \ln x} \right) = +\infty$$

0,5

(2) أ) الدالة f قابلة للإشتقاق على المجالين $]0; 1[$ و $]1; +\infty[$ دالتها المشتقة f' حيث: $f'(x) = 1 + \frac{1 + \ln x}{(x \ln x)^2}$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x \ln x)^2} \quad \text{أي:} \quad f'(x) = \frac{(x \ln x)^2 + \ln x + 1}{(x \ln x)^2} \quad \text{و منه:}$$

0,25

x	0	a	$1 + \infty$
$f'(x)$	-	0	+

(ب) إشارة f' من إشارة $g(x)$:

0,25

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]0; \alpha[$ و متزايدة تماما على المجالين $[\alpha; 1[$ و $]1; +\infty[$.

0,25

x	0	a	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(a)=3$	$+\infty$	$+\infty$

جدول تغيرات الدالة f :

(3) نبين أن المستقيم (Δ) مقارب مائل: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x \ln x} \right) = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$.
 إذن $y = x$ مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$.

0,25

x	0	1	$+\infty$
$-x$	0	-	-
$\ln x$	-	0	+
$f(x) - x$	+	-	-

- دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)

ومنهُ : على المجال $]0; 1[$ (C_f) يقع فوق (Δ) وعلى المجال $]1; +\infty[$ (C_f) يقع تحت (Δ) .

0,25

(4) $y = x + \beta$ تعيين β حتى يكون (T) مماساً للمنحنى (C_f) معناه : $f'(a) = 1$

أي : $\frac{(a \ln a)^2 + \ln a + 1}{(a \ln a)^2} = 1$ أي : $\ln a + 1 = 0$ أي : $\ln a = -1$ و منه : $a = e^{-1}$.

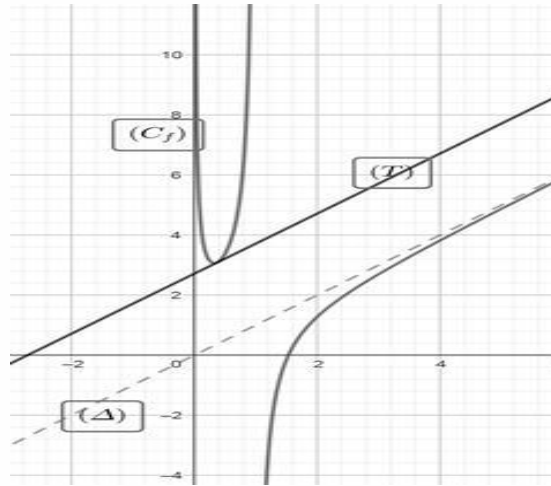
$$f(e^{-1}) = e^{-1} - \frac{1}{e^{-1} \ln e^{-1}} = e^{-1} + \frac{1}{e^{-1}}$$

0,25

(T) أي : $y = f'(e^{-1}) \cdot (x - e^{-1}) + e^{-1} + e$ أي : $y = x - e^{-1} + e^{-1} + e$ و منه : $y = x + e$ هي معادلة المماس (T)

0,25

أي : $\beta = e$ و منه نقطة التماس $A(e^{-1}, e^{-1} + e)$.



(6) تعيين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $X = e^{\frac{1}{x.m}}$ حلين متمايزين:

لدينا: $X = e^{\frac{1}{x.m}}$

من أجل $x > 0$: $x \ln x = \frac{x}{x.m}$

من أجل $\frac{1}{x \ln x} = m$: $x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$

أي: $x - \frac{1}{x \ln x} = x - m$

ومنه: $f(x) = x - m$

حلول المعادلة (I) هو إيجاد فواصل النقاط المشتركة بين (C_f) و المستقيم $y = x - m$ أي:

المعادلة تقبل حلين متمايزين معناه: $-m > e$ أي: $m < -e$ أي: $m \in]-\infty, -e[$.

(7) مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين: $x = 3$ ، $x = 4$:

$$A = \ln(\ln 4) - \ln(\ln 3) \text{ أي: } A = [\ln(\ln x)]_3^4 \text{ أي: } A = \int_3^4 \left(\frac{1}{\ln x} \right) dx \text{ أي: } A = \int_3^4 (x - f(x)) dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{x \ln x} \right) dx$$

ومنه: $A = \ln\left(\frac{\ln 4}{\ln 3}\right) \text{ cm}^2$

(I) لتكن الدالة h المعرفة على المجال $]0; 1[\cup]1; +\infty[$ ب: $h(x) = [f(x)]^2$.

أ) الدالة h قابلة للاشتقاق على المجالين $]0; 1[$ و $]1; +\infty[$ و دالتها المشتقة h' حيث: $h'(x) = 2 \cdot f'(x) \cdot f(x)$.

إشارة $h'(x)$ من إشارة $f(x)$ و $f'(x)$.

x	0	a	1	λ	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+	+
$f(x)$	+	+	-	0	+
$h'(x)$	-	0	+	-	+

الدالة h متناقصة تماماً على المجال $]0; \alpha]$ و $]1; \lambda]$ و متزايدة تماماً على المجالين $[\alpha; 1[$ و $[\lambda; +\infty[$.

0,25

جدول التغيرات:

x	0	a	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	+	+	-	0
$h'(x)$	-	0	+	+
$h(x)$	$+\infty$	9	0	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)]^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x)]^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^2 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)]^2 = +\infty$$

<u>0.25×2</u>	$u_0 = \alpha$ (1) أ- لدينا $u_{n+1} = (\ln 2)u_n + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right)$ تعين α حتى تكون المتتالية ثابتة معناه $u_{n+1} = u_n = \dots = u_0 = \alpha$ ومنه $\alpha = (\ln 2)\alpha + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right)$ $\alpha = \frac{\ln\left(\frac{e^2}{4}\right)}{1 - \ln(2)} = \frac{\ln\left(\left(\frac{e}{2}\right)^2\right)}{\ln(e) - \ln(2)}, \alpha = \frac{2\ln\left(\frac{e}{2}\right)}{\ln\left(\frac{e}{2}\right)}, \alpha = 2$ إذن $\alpha = 2$. (2) نضع $u_0 = 3$ ومنه $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = (\ln 2)u_n + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right) \end{array} \right\}$ أ- برهان بالتراجع : نسمى $P_{(n)}$ الخاصية من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $2 < u_n \leq 3$ نتحقق من أجل $P_{(0)}$ لدينا $u_0 = 3$ ومنه $2 < u_0 < 3$ محققة نفرض صحة الخاصية $P_{(n)}$ من أجل n عدد طبيعي كيفي ، ثم نبين صحتها من أجل $(n+1)$. لدينا من فرضية التراجع $2 < u_n \leq 3$ ومنه
<u>0.25</u>	
<u>0.25</u>	

$$2\ln 2 < (\ln 2)u_n \leq 3\ln 2$$

$$2\ln 2 + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right) < (\ln 2)u_n + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right) \leq 3\ln 2 + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right)$$

$$2 < u_{n+1} \leq 3 \quad \text{إن} \ln(2^2) + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right) < u_{n+1} \leq \ln(2^3) + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right)$$

$$\ln\left(4 \times \frac{e^2}{4}\right) < u_{n+1} \leq \ln\left(2^3 \times \frac{e^2}{4}\right)$$

$$2 < u_{n+1} \leq 2 + \ln(2) \leq 3$$

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع (حسب الخاصية الوراثية) فإنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$2 < u_n \leq 3$$

$$u_{n+1} - u_n = (\ln 2)u_n + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right) - u_n$$

$$.. u_{n+1} - u_n = (\ln 2)u_n + \ln(e^2) - \ln(4) - u_n \quad \text{ب-حساب}$$

$$u_{n+1} - u_n = (\ln 2 - 1)u_n + 2 - 2\ln 2 = (\ln 2 - 1)u_n - 2(-1 + \ln 2)$$

$$u_{n+1} - u_n = (\ln 2 - 1)(u_n - 2)$$

$$. u_{n+1} - u_n = (\ln 2 - 1)(u_n - 2) \quad \text{ومنه من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ فإن}$$

ت-دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n) :

$$u_{n+1} - u_n = (\ln 2 - 1)(u_n - 2) \quad \text{لدينا}$$

$$\text{و } 2 < u_n \leq 3 \text{ فإن } u_{n+1} - u_n < 0 \text{ من أجل}$$

$$(\ln 2 - 1) < 0$$

كل عدد طبيعي $\mathbb{N}$ إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

بما ان المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

بما ان المتتالية (u_n) متقاربة فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

$$\text{نحل المعادلة : } l = (\ln 2)l + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right) \quad \text{أي } l = (\ln 2)l + 2 - 2\ln 2 \quad \text{أي } l(1 - \ln 2) = 2(1 - \ln 2)$$

$$\text{ومنه : } l = 2$$

أ- اثبات ان المتتالية (v_n) متتالية هندسية : حساب v_{n+1} :

0.75

$$v_n = 2u_n - 4; \quad v_{n+1} = 2u_{n+1} - 4 \quad ; \quad v_{n+1} = 2 \left((\ln 2)u_n + \ln \left(\frac{e^2}{4} \right) \right) - 4$$

...

$$v_{n+1} = 2((\ln 2)u_n + 2 - \ln 4) - 4 ; \quad v_{n+1} = 2(\ln 2)u_n + 4 - 4\ln 2 - 4; \quad v_{n+1} = \ln 2(2u_n - 4)$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \ln 2$ وحدها الأول $v_0 = 2$

ب- كتابة عبارة v_n بدلالة n :

0.25

بما أن (v_n) متتالية هندسية فإن : $v_n = 2(\ln 2)^n$ ثم كتابة u_n بدلالة v_n

$$v_n = 2u_n - 4 \quad ;$$

$$2u_n = v_n + 4 \quad ; \quad u_n = \frac{1}{2}v_n + 2$$

0.25

بالتعويض نجد $u_n = (\ln 2)^n + 2$

0.25

ت- حساب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [(\ln 2)^n + 2] = 2$ لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln 2)^n = 0$

$$s_n = \frac{1}{u_0 - 2} + \frac{\ln 4}{u_1 - 2} + \frac{(\ln 4)^2}{u_2 - 2} + \dots + \frac{(\ln 4)^n}{u_n - 2} : \text{حساب المجموع (6)}$$

0.25

$$\frac{(\ln 4)^n}{u_n - 2} = 2^n \quad \text{تحقق أن}$$

$$v_n = 2u_n - 4 \quad ; \quad \frac{v_n}{2} = u_n - 2 \quad ; \quad \frac{1}{\frac{v_n}{2}} = \frac{1}{u_n - 2} ;$$

لدينا :

$$\frac{1}{u_n - 2} = \frac{2}{v_n} = \frac{2}{2(\ln 2)^n} ; \quad \frac{(\ln 4)^n}{u_n - 2} = \frac{(2\ln 2)^n}{(\ln 2)^n} = \frac{2^n (\ln 2)^n}{(\ln 2)^n} = 2^n$$

0.5

$$S_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = \frac{1}{1-2} (1 - 2^{n+1}) \quad \text{المجموع}$$

$$S_n = -1 + 2^{n+1}$$

التمرين الثاني 04 نقاط

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$:

$$\overline{z_1} - 1 + 3i = 0 ; z_1 = 1 + 3i$$

$$\Delta = (-10)^2 - 4(50)(1) = -100 ; \Delta = 100i^2$$

$$z_2 = 5 + 5i ; z_3 = 5 - 5i ; S = \{1 + 3i ; 5 + 5i ; 5 - 5i\}$$

(2) أ- كتابة كل من z_A ; z_B على الشكل الأسّي :

$$|z_A| = \sqrt{(5)^2 + (5)^2} = 5\sqrt{2}$$

0.25

$$z_A = 5\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ومنه } \arg(z_A) = \theta \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$|z_B| = |\overline{z_A}| = \sqrt{(5)^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{أي } \arg(z_B) = \arg(\overline{z_A}) = \theta \begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

0.25

$$z_B = 5\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

0.25

(ب) تعليم النقاط :

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \text{ (ج) طول العدد المركب}$$

0.25 × 2

$$\left| \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right| = \left| \frac{(5 + 5i) - (1 + 3i)}{(5 - 5i) - (1 + 3i)} \right| = \left| \frac{(4 + 2i)(4 + 8i)}{(4 - 8i)(4 + 8i)} \right| = \left| \frac{16 - 16 + 40i}{16 + 64} \right|$$

$$\left| \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right| = \left| \frac{1}{2}i \right| = \frac{1}{2}$$

$$\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \arg\left(\frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{2} : \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \text{ عمدة العدد المركب}$$

0.25

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}; (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad (د)$$

$$\left| \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right| = \frac{CA}{CB} = \frac{1}{2}$$

0.25

المثلث ABC قائم في C

$$CB = 2CA; CA = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \text{ و}$$

$$\cdot \frac{CB \times CA}{2} = \frac{2(2\sqrt{5})(2\sqrt{5})}{2} = 20 \text{ u.a هي مساحة المثلث } ACB$$

0.25

(أ) كتابة العدد a على الشكل الجبري:

$$a = \left(\frac{-z_B}{5\sqrt{2}} \right)^{2025} - \left(\frac{z_A}{5\sqrt{2}} \right)^{2021}$$

$$= -e^{i\frac{-\pi}{4}} - e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$= -\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) - \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a = \sqrt{2} i$$

0.25

(ب) تعيين قيم n حتى يكون a^n تخيليا صرفا:

$$a^n \text{ تخيليا صرفا معناه: } \arg(a^n) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\text{لدينا: } a = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{2}} \text{ معناه: } a^n = \sqrt{2} e^{i\frac{n\pi}{2}} \text{ معناه: } \frac{n\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ و منه: } n = 1 + 2k$$

(3) - أ- تعيين z_D حتى يكون الرباعي $ABDC$ مستطيل معناه $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$ و منه

$$z_D - z_A = z_B - z_C$$

$$z_D = z_B - z_C + z_A$$

$$z_D = 5 - 5i - 1 - 3i + 5 + 5i \text{ ومنه}$$

$$z_D = 9 - 3i$$

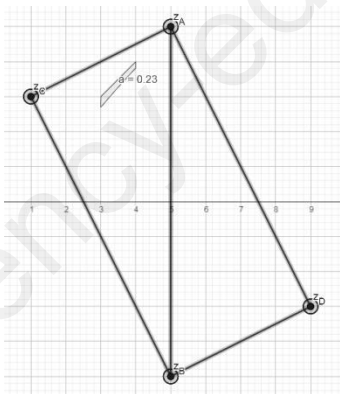
0.25

ب- لاحقة z_I منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$

$$z_I = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{1 + 3i + 5 - 5i}{2} = 3 - i$$

0.25

$$\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{OI} \text{ أي } \frac{z_D - z_O}{z_I - z_O} = \frac{9 - 3i}{3 - i} = 3$$



0.25	تبيين أن نقاط على استقامية ومنه النقاط D, I, O في استقامية واحدة
0.25	طبيعة (Γ) حيث $ -i.z + i - 3 = z - 5 - 5i $ $ -i.\left(z + \frac{i-3}{-i}\right) = -i \left z + \frac{i-3}{-i}\right = z - 1 - 3i $ $ z - (3+i) = z - (5+5i) ; z - z_C = z - z_A $ $CM = AM$
0.25	الإنشاء:

	التمرين الثالث 04 نقاط
0.25	عدد الحالات الممكنة هو : $C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!}$ ومه $C_8^3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$
0.5	حساب $P(A)$: $P(A) = \frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$
0.5	حساب $P(B)$: $P(B) = \frac{C_5^1 \times C_3^2}{C_8^3} ; P(B) = \frac{5 \times 3}{56} = \frac{15}{56}$
0.5	حساب $P(C)$: نلاحظ أن الحدث C هو الحدث المعاكس لـ A ومنه $P(C) = 1 - P(A)$ $P(C) = 1 - \frac{5}{28} = \frac{23}{28}$
0.25 × 3	(2) القيم الممكنة لـ $X = \{-5; 10; -20\}$ حساب : $p(X = -5) = \frac{2A_n^1 \times A_5^1}{A_{n+5}^2} = \frac{10n}{(n+4)(n+5)}$
0.25	$p(X = 10) = \frac{A_n^2}{A_{n+5}^2} = \frac{n(n-1)}{(n+4)(n+5)}$ $p(X = -20) = \frac{A_5^2}{A_{n+5}^2} = \frac{20}{(n+4)(n+5)}$

0.5

X_i	-20	-5	10
$p(X = X_i)$	$\frac{20}{(n+4)(n+5)}$	$\frac{10n}{(n+4)(n+5)}$	$\frac{n(n-1)}{(n+4)(n+5)}$
$p(X = X_i)$ X_i	$\frac{-400}{(n+4)(n+5)}$	$\frac{-50n}{(n+4)(n+5)}$	$\frac{10n^2 - 10n}{(n+4)(n+5)}$

0.25

$$. E(x) = \frac{10n^2 - 60n - 400}{(n+4)(n+5)} \text{ الأمل الرياضي}$$

0.25

$$. n = 10 \text{ ومنه : } E(x) = 0 \text{ قيم } n \text{ حتى تكون اللعبة عادلة اذا كان :}$$

$$10n^2 - 60n - 400 = 0$$

0.25

$$. n > 10 \text{ ومنه } E(x) > 0 \text{ قيم } n \text{ حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب :}$$

يمكن اختيار عدد الكريات السوداء احدى عشرة كرية على الأقل لكي تكون اللعبة مربحة.

التمرين الرابع 07 نقاط

(1)

0.25

(1) - بقراءة بيانية بما أن (Γ) فوق (Δ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن

$$. e^x - (x+1) \geq 0$$

(2) أ- دراسة اتجاه تغير الدالة g :

$$g'(x) = 2x + 1 - e^x = -(e^x - (x+1)) \text{ حساب } g'(x) :$$

$$g'(x) \leq 0 ; x \in \mathbb{R}$$

ومنه الدالة g متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty; 0]$ و $[0; +\infty[$.

ب- برهان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $-2.2 < \alpha < -2.1$

(مبرهنة القيم المتوسطة)

0.25

بما أن الدالة g مستمرة ورتيبة تماماً لأنها متناقصة تماماً على المجال $]-2.2; -2.1[$

0.25

$$\text{حسب مبرهنة القيم المتوسطة} \begin{cases} g(-2.2) = 0.11 \\ g(-2.1) = -0.02 \end{cases} \quad g(-2.2) \times g(-2.1) < 0$$

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-2.2 < \alpha < -2.1$ و $g(\alpha) = 0$.

0.25

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

ج- جدول إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x :

(II

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - x^2 e^x) = 0 \quad (1)$$

0.5

إذن المنحى (C_f) يقبل مستقيم مقارب موازي لمحور الفواصل بجوار $-\infty$ معادلته $y = 0$

ب-

0.25

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - x^2 e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^{2x} \left(1 - \frac{x^2}{e^x} \right) \right] = +\infty$$

(1) أ- حساب $f'(x)$: الدالة f معرفة وتقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ دالتها المشتقة

0.25

$$f'(x) = 2e^{2x} - 2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x = 2e^x \left(-\frac{1}{2}x^2 - x + e^x \right)$$

$$f'(x) = -2e^x \cdot g(x)$$

0.25

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

(ب) اتجاه تغير : جدول الإشارة $f'(x)$

0.25

الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; \alpha]$ و الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[\alpha; +\infty[$.

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$f(a)$	$+\infty$

$$(2) \text{ تعين } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+\alpha) - f(\alpha)}{h} = f'(\alpha) = 0$$

منحنى (C_f) يقبل مماس أفقي عند النقطة ذات الفاصلة $X_\alpha = \alpha$ معادلته $y = f(\alpha)$.

$$(3) \text{ معادلة المماس } (T) \text{ عند } 0 : y = 2x + 1 \dots (T) \quad \left\{ \begin{array}{l} f'(0) = 2 \\ f(0) = 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} g(\alpha) = 0 ; e^\alpha = \frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha \\ f(\alpha) = e^{2\alpha} - \alpha^2 e^\alpha = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha\right)^2 - \alpha^2 \left(\frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha\right) \\ f(\alpha) = \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{4}\alpha^2\right) \end{cases}$$

(4) إثبات أن

$$-2.2 < \alpha < -2.1 ; (-2.1)^2 < \alpha^2 < (-2.2)^2$$

$$1 - \frac{(-2.2)^2}{4} < 1 - \frac{1}{4}\alpha^2 < 1 - \frac{(-2.1)^2}{4}$$

الحصر

$$(-2.1)^2 \left(1 - \frac{(-2.2)^2}{4}\right) < \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{4}\alpha^2\right) < (-2.2)^2 \left(1 - \frac{(-2.1)^2}{4}\right)$$

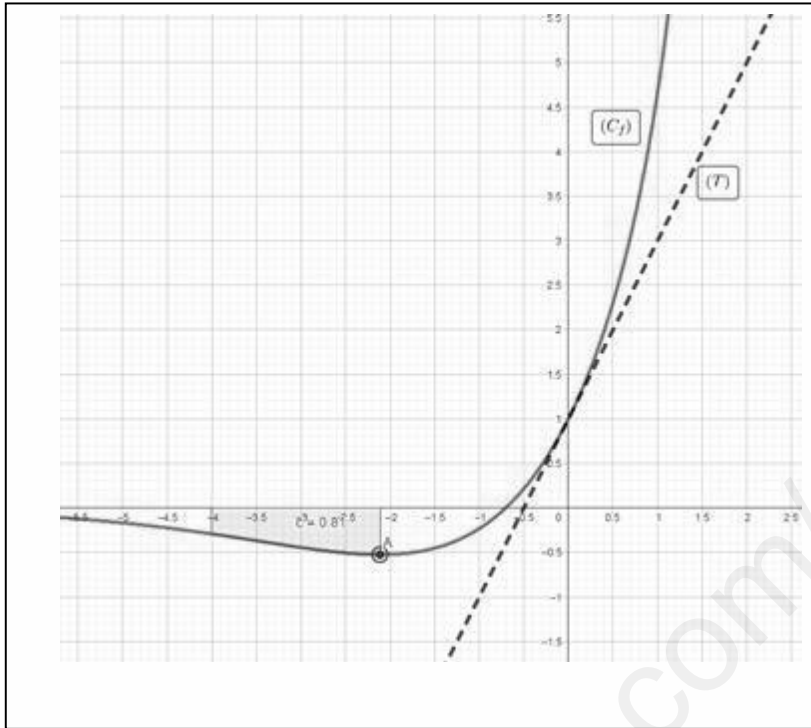
$$-0.9261 < f(\alpha) < -0.4961$$

$$\text{نأخذ } f(\alpha) = -0,53$$

0.25

(6) حساب $f(1)$ ومنه $f(1) = e^2 - e$

الرسم :



0.25

(7) مناقشة بيانية :

$$(1) \quad \begin{cases} f(x) = 2x + |m| \dots (I) \\ y = f(x) \end{cases} \text{ تعني } f(x) = 2x + |m| \dots (I)$$

هو إيجاد فواصل النقاط المشتركة بين (C_f) و المستقيم (Δ_m) معادلته $y = 2x + |m|$

إذا كان $|m| < 1$ معناه $-1 \leq m \leq 1$ فإن المعادلة (I) ليس لها حلا في $\mathbb{R}$.

إذا كان $|m| = 1$ معناه $m = 1$ أو $m = -1$ فإن المعادلة (I) تقبل حلا مضاعفا

معدوما.

إذا كان $|m| > 1$ أي: $m \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ فإن المعادلة (I) تقبل حلين مختلفين في

الإشارة.

(8) أ) حساب $H'(x)$ الدالة H معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$H'(x) = (2x - 2 + x^2 - 2x + 2)e^x$$

H أصلية الدالة h على $\mathbb{R}$.

$$H'(x) = x^2 e^x \quad ; \quad H'(x) = h(x)$$

ب) حساب مساحة الحيز بدلالة α .

0.5

$$A = \int_{-4}^{\alpha} (0 - f(x)) dx = -\frac{1}{2} \int_{-4}^{\alpha} 2e^{2x} dx + \int_{-4}^{\alpha} x^2 e^x dx$$

$$A = \left[H(x) - \frac{1}{2} e^{2x} \right]_{-4}^{\alpha}$$

$$A = \left[\frac{-1}{2} e^{2\alpha} + (\alpha^2 - 2\alpha + 1) e^{\alpha} + \frac{1}{2} e^{-8} - 26e^{-4} \right]$$

III) أ- إثبات أن الدالة K زوجية : من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإن $-x \in \mathbb{R}$

0.25

$$K(-x) = K(x) \text{ حساب}$$

ب- كيفية إنشاء (C_K) :

على المجال $]-\infty; 0]$ المنحنى (C_K) ينطبق على (C_f) .

0.25

على المجال $[0; +\infty[$ $K(x) = f(-x)$ و عليه المنحنى (C_K) يناظر (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب.

