❖ المتتاليات العددية ❖ شعبة العلوم التجريبية ❖ دورة جوان 2018 ❖ الموضوع الأول ❖

## التمرين رقم 01

$(u_n)$ متتالية عددية معرفة بحدها الأول $u_0$ حيث $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$:

$$u_{n+1} = 1 - \frac{9}{u_n + 5}$$

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_n > -2$.

ب) بين أن $(u_n)$ متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ واستنتج أنها متقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$:

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}$$

- أثبت أن المتتالية $(v_n)$ حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.

3) عبر بدلالة $n$ عن $v_n$ و $u_n$، واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ .

4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$:

$$u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n = \frac{1}{3}(1 - n^2)$$

## حل التمرين رقم 01

لدينا:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 - \dfrac{9}{u_n + 5} \end{cases}$$

1) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$: $u_n > -2$

نسمي $P(n)$ الخاصية:

« من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n > -2$ »

التحقق من صحة الخاصية $P(0)$:

لدينا من أجل $n = 0$:

$$\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ \quad و \\ 1 > -2 \end{array}\right. \longrightarrow u_0 > -2$$

ومنه:

الخاصية $P(0)$ محققة.

نفرض أن الخاصية $P(n)$ صحيحة.

أي:

« من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n > -2$ »

ونبرهن أن الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

أي:

« من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} > -2$ »

لدينا من الفرضية:

$u_n > -2$

$u_n + 5 > -2 + 5$

$u_n + 5 > 3$

$\frac{1}{u_n + 5} < \frac{1}{3}$

$\frac{9}{u_n + 5} < \frac{9}{3}$

$\frac{9}{u_n + 5} < 3$

$-\frac{9}{u_n + 5} > -3$

$1 - \frac{9}{u_n + 5} > 1 - 3$

$1 - \frac{9}{u_n + 5} > -2$

$u_{n+1} > -2$

ومنه:

الخاصية $P(n+1)$ صحيحة.

نتيجة:

« من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n > -2$ »

1) ب) البرهان أن $(u_n)$ متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$:

معناه نبرهن أن:

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

لدينا:

$$u_{n+1}-u_n=1-\frac{9}{u_n+5}-u_n$$
$$=\frac{u_n+5-9-u_n(u_n+5)}{u_n+5}$$
$$=\frac{u_n-4-{u_n}^2-5u_n}{u_n+5}$$
$$=\frac{-{u_n}^2-4u_n-4}{u_n+5}$$
$$=-\frac{{u_n}^2+4u_n+4}{u_n+5}$$
$$u_{n+1}-u_n=-\frac{(u_n+2)^2}{u_n+5}$$

حسب نتيجة البرهان بالتراجع لدينا:

$$u_n>-2$$

ينتج:

$$\begin{cases} u_n+2>0 \\ \text{و} \\ u_n+5>3 \end{cases}$$

أي:

$$\begin{cases} (u_n+2)^2>0 \\ \text{و} \\ u_n+5>0 \quad (\text{لأن: } 3>0) \end{cases}$$

فنكتب:

$$\frac{(u_n+2)^2}{u_n+5}>0$$

وعليه:

$$-\frac{(u_n+2)^2}{u_n+5}<0$$

ومنه:

$$u_{n+1}-u_n<0$$

نتيجة:

$(u_n)$ متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

استنتاج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة:

بما أن $(u_n)$ متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ $(u_{n+1}-u_n<0)$ ومحدودة من الأسفل بالعدد $-2$ $(u_n>-2)$ فهي إذن متقاربة.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n$:

$$v_n=\frac{1}{u_n+2}$$

البرهان أن المتتالية $(v_n)$ حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول:

تكون $(v_n)$ متتالية حسابية أساسها $r$ إذا كان:

$$v_{n+1}=r+v_n$$

لدينا:

$$v_n=\frac{1}{u_n+2}$$

ومنه:

$$v_{n+1}=\frac{1}{u_{n+1}+2}$$
$$=\frac{1}{1-\frac{9}{u_n+5}+2}$$
$$=\frac{1}{3-\frac{9}{u_n+5}}$$
$$=\frac{1}{\frac{3(u_n+5)-9}{u_n+5}}$$
$$=\frac{1}{\frac{3u_n+15-9}{u_n+5}}$$
$$=\frac{1}{\frac{3u_n+6}{u_n+5}}$$
$$=\frac{1}{\frac{3(u_n+2)}{u_n+5}}$$
$$=\frac{u_n+5}{3(u_n+2)}$$

بتفكيك البسط نكتب:

$$v_{n+1} = \frac{(u_n+2)+3}{3(u_n+2)}$$

$$= \frac{\cancel{(u_n+2)}}{3\cancel{(u_n+2)}} + \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}(u_n+2)} \qquad \left(\text{تذكر أن : } u_n > -2\right)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{(u_n+2)}$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3} + v_n \qquad \left(\text{من الشكل : } v_{n+1} = r + v_n\right)$$

نتيجة:

المتتالية $(v_n)$ حسابية أساسها $\frac{1}{3}$

وحدها الأول:

$$v_0 = \frac{1}{u_0+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$v_0 = \frac{1}{3}$$

3) التعبير بدلالة $n$ عن $v_n$ و $u_n$ وحساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ :

التعبير بدلالة $n$ عن $v_n$:

تعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية حدها الأول $v_0$ بالعبارة:

$$v_n = v_0 + r \times n$$

ومنه:

$$v_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}n = \frac{1}{3}(n+1)$$

$$v_n = \frac{1}{3}(n+1)$$

التعبير بدلالة $n$ عن $u_n$:

لدينا:

$$v_n = \frac{1}{u_n+2}$$

ومنه:

$$v_n(u_n+2) = 1$$

$$v_n u_n + 2v_n = 1$$

$$v_n u_n = 1 - 2v_n$$

$$u_n = \frac{1-2v_n}{v_n}$$

$$u_n = \frac{1}{v_n} - \frac{2v_n}{v_n}$$

$$u_n = \frac{1}{v_n} - 2$$

بالتعويض:

$$u_n = \frac{1}{\frac{n+1}{3}} - 2$$

$$= \frac{3}{n+1} - 2$$

$$u_n = \frac{3}{n+1} - 2$$

حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{n+1} - 2\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(3 \times \frac{1}{n+1} - 2\right) = -2$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -2$$

لأن:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$$

4) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي $n$:

$$u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n = \frac{1}{3}(1-n^2)$$

نضع:

$$T = u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$$

لدينا مما سبق:

$$u_n = \frac{1}{v_n} - 2$$

ومنه:

$$T = \left(\frac{1}{v_0} - 2\right)v_0 + \left(\frac{1}{v_1} - 2\right)v_1 + \cdots + \left(\frac{1}{v_n} - 2\right)v_n$$

$$= 1 - 2v_0 + 1 - 2v_1 + \cdots + 1 - 2v_n$$

$$= (1+1+\cdots+1) - 2(v_0 + v_1 + \cdots + v_n)$$

$$= S_1 - 2S_2$$

حيث:

$$\begin{cases} S_1 = 1 + 1 + \cdots + 1 \\ \text{و} \\ S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_n \end{cases}$$

■ $S_1$ هو مجموع $(n+1)$ مرة العدد 1.

أي:

$$S_1 = n + 1$$

■ $S_2$ هو مجموع $(n+1)$ حدا من حدود متتابعة لمتتالية حسابية حدها الأول $v_0 = \frac{1}{3}$ وأساسها $r = \frac{1}{3}$، يعطى بالعبارة:

$$S_2 = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times \left(\text{الحد الأول في المجموع} + \text{الحد الأخير في المجموع}\right)$$

بالتعويض:

$$S_2 = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n)$$
$$= \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}(n+1)\right)$$
$$= \frac{n+1}{2}\left(\frac{1+n+1}{3}\right)$$
$$S_2 = \frac{(n+1)(n+2)}{6}$$

لدينا مما سبق:

$$T = S_1 - 2S_2$$

ومنه:

$$T = n + 1 - 2\frac{(n+1)(n+2)}{6}$$
$$= n + 1 - \frac{(n+1)(n+2)}{3}$$
$$= \frac{3(n+1) - (n+1)(n+2)}{3}$$
$$= \frac{1}{3}[3(n+1) - (n+1)(n+2)]$$
$$= \frac{1}{3}(n+1)(3 - n - 2)$$
$$= \frac{1}{3}(n+1)(1-n)$$
$$= \frac{1}{3}(1+n)(1-n)$$
$$= \frac{1}{3}(1-n^2)$$

ومنه:

$$u_0v_0 + u_1v_1 + \cdots + u_nv_n = \frac{1}{3}(1-n^2)$$