



امتحان البكالوريا التجريبي

المدرسة العليا للأساتذة بورقلة
مصلحة النشاطات الثقافية والرياضية
دورة أفريل 2024
الشعبة: علوم تجريبية
المادة: الرياضيات
المدة: 3 ساعات و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتين:
الموضوع الأول

التمرين الأول (4 ن)

المتتالية العددية (U_n) معرفة بـ : $U_0 = 2$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{1}{2} (U_n - n) - 1$

1. أحسب U_1 و U_2

2. أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n + n > 0$

ب. بين أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما

3. المتتالية العددية (V_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $V_n = U_n + n$

أ. بين أن المتتالية (V_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب. اكتب عبارة V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n

ج. أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

4. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = \ln U_0 + \ln (U_1 + 1) + \ln (U_2 + 2) + \dots + \ln (U_n + n)$

• بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = (n + 1) (2 - n) \ln \sqrt{2}$

التمرين الثاني (4 ن)

يحتوي كيس U_1 على : ثلاث كريات تحمل الرقم 1 و أربع كريات تحمل الرقم 2، ويحتوي كيس U_2 على : ست كريات بيضاء وأربع كريات حمراء، كل الكريات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس.

1. نسحب عشوائيا من U_2 كرتين على التوالي وبإرجاع، أحسب احتمال كلاً من الحدثين الآتين

• الحدث A: " الحصول على كرتين من نفس اللون "

• الحدث B: " الحصول على كرية حمراء على الأكثر "

2. نسحب عشوائيا كرية من U_1 ، إذا كانت تحمل الرقم 1 نسحب عشوائيا من U_2 كرتين على التوالي بدون إرجاع، وإذا كانت

تحمل الرقم 2 نسحب عشوائيا من U_2 ثلاث كريات في آن واحد.

نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب من U_2 عدد الكريات البيضاء المسحوبة.

أ. عين قيم المتغير العشوائي X

ب. بين أن : $P(X = 1) = \frac{2}{5}$ و $P(X = 2) = \frac{3}{7}$

ج. عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$

التمرين الثالث (5 ن)

(I) حلّ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z - 2i)(z^2 + 2z + 4) = 0$

(II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لاحقاتها

$z_D = 2$ و $z_C = 2i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_A = -1 + i\sqrt{3}$ حيث :

1. أ. أكتب كلّاً من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي

ب. استنتج أنّ النقط A ، B ، C تنتمي إلى نفس الدائرة يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

2. أ. أكتب العدد المركب $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي.

ب. استنتج طبيعة المثلث ABD

3. لتكن M نقطة من المستوي لاحقها z

أ. عيّن (Γ_1) مجموعة النقط M حيث : $z = 2i + e^{i\theta}$ و θ يسمح $\mathbb{R}$

ب. عيّن (Γ_2) مجموعة النقط M حيث : $|\overline{z} + 2i| = |iz + \sqrt{3} + i|$

التمرين الرابع (7 ن)

(I) الدالة العددية g معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^3 - 1 + 2 \ln x$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة g على $]0; +\infty[$

2. أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$

(II) الدالة العددية f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ وفسّر النتيجة هندسياً ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب. بين أنّه من أجل كلّ x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ ثم شكّل جدول تغيرات الدالة f

2. أ. بين أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب. أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

3. أنشئ كلّاً من (Δ) و (C_f)

4. أ. باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$

ب. أحسب S مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات : $x = 1$ ، $y = x - 1$ و $x = e$

5. الدالة العددية h معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = f(e^x)$

• أدرس اتجاه تغير الدالة h على $\mathbb{R}$ ثم شكّل جدول تغيراتها (لا يُطلب حساب $h(x)$).

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4 ن)

مسابقة يختار فيها تلميذ عشوائيا 3 أسئلة في آن واحد من علبة غير شفافة تحتوي على 6 أسئلة علمية، 5 أسئلة أدبية و 4 أسئلة في الثقافة العامة حيث في كل نوع من الأنواع الثلاثة يوجد سؤال واحد باللغة الأجنبية.

1. أحسب احتمال كلاً من الحدثين الآتيين

أ. A : " الأسئلة الثلاثة متميزة النوع مثنى مثنى "

ب. B : " سؤال واحد على الأكثر باللغة الأجنبية "

$$2. \text{ أ. بين أن } P(A \cap B) = \frac{107}{455}$$

ب. استنتج احتمال أن تكون كل الأسئلة متميزة النوع مثنى مثنى علماً أنه من بينها سؤال واحد على الأكثر باللغة الأجنبية.

3. عند الإجابة على سؤال علمي يكسب التلميذ نقطتين، ويكسب نقطة عند الإجابة على سؤال أدبي أو سؤال في الثقافة العامة،

نفترض أن التلميذ يُجيب على كل الأسئلة ونعتبر X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل سحب مجموع النقاط المحصل عليها.

أ. برّر أن مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $\{3; 4; 5; 6\}$

ب. عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$

ج. استنتج قيمة $E(1962X + 2024)$

التمرين الثاني (4 ن)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير.

1. حلّ المعادلة $\bar{z} + 2 + i = 0$ ذات المجهول z في $\mathbb{C}$ هو :

أ) i (ب) $-i$ (ج) $2 - i$

2. عمدة للعدد المركب z حيث $z = -2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ هي :

أ) $\frac{\pi}{3}$ (ب) $-\frac{\pi}{3}$ (ج) $\frac{4\pi}{3}$

3. إذا كان العدد المركب z تخيلياً صرفاً فإن z^{2024} عدد :

أ) تخيلي صرف (ب) حقيقي موجب (ج) حقيقي سالب

4. إذا كانت α عمدة للعدد المركب z وطويلة z تساوي 1 فإن العدد المركب $\frac{i}{z}$ يكتب على الشكل الأسّي :

أ) $e^{2\alpha}$ (ب) $e^{i(\frac{\pi}{2}-\alpha)}$ (ج) $e^{i(\frac{\pi}{2}+2\alpha)}$

التمرين الثالث (5 ن)

الدالة العددية f معرفة على المجال $[1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x + 1}$

ونعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$

1. بين أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[1; +\infty[$

2. أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq U_n < 2$
 ب. بين أن المتتالية (U_n) متزايدة
 ج. استنتج أن (U_n) متقاربة ثم عين نهايتها l
3. أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 2 - U_{n+1} \leq \frac{3}{4}(2 - U_n)$
 ب. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 2 - U_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$
 ج. أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
4. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$
 أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n \geq 2n - 2 + 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$
 ب. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

التمرين الرابع (7 ن)

- (I) الدالة العددية g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - x + e^{x-1}$
1. أدرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$
2. أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$
- (II) الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x - 1 + \frac{x}{e^{x-1}}$
- و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
1. أ. أحسب كلاً من $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 ب. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x-1}}$
 ج. استنتج أن الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.
2. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0, 3 < \alpha < 0, 4$
3. أ. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$
 ب. أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)
4. أ. بين أن (C_f) يقبل مماساً وحيداً (T) موازياً للمستقيم (Δ) يُطلب كتابة معادلة له.
 ب. أحسب $f(-2)$ ثم أنشئ كلاً من (Δ) ، (T) و (C_f)
- ج. ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = x - |m|$
5. نرمز بـ $A(\alpha)$ إلى مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات : $y = x - 1$ ، $x = 1$ و $x = \alpha$
- أ. باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب $\int_{\alpha}^1 x e^{1-x} dx$
- ب. بين أن $A(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \alpha - 2$ ثم استنتج حصراً للعدد $A(\alpha)$

انتهى الموضوع الثاني

الإختبار التجريبي رقم 4 (Bac 2024)

التمرين 01 (4 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء و ثلاث كريات سوداء كل الكريات متماثلة وغير متميزة عند اللمس
نسحب من الصندوق أربع كريات في آن واحد

1 أحسب احتمال الحدث A : "الحصول على الأقل على كرية بيضاء "

2 ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب العدد $ax + y$

حيث x يمثل عدد الكريات البيضاء و y يمثل عدد الكريات السوداء و a عدد حقيقي
أ/ عين قيم المتغير العشوائي X

ب/ عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$ بدلالة a

ج/ عين قيمة العدد الحقيقي a حتى يكون $E(X) = \frac{32396}{7}$

3 نسحب الآن من هذا الكيس أربع كريات على التوالي بالإرجاع

أحسب احتمال الحدث B : "الحصول على الأقل على كرية بيضاء "

التمرين 02 (4 نقاط)

(I) لتكن في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 - (3 + i)z + 4 = 0 \dots (E)$

1 عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب $-8 + 6i$

2 حل المعادلة (E) نرمز إلى الحلين بـ z_1 و z_2 حيث $|z_1| < |z_2|$

(II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B ، C التي

لواحقها على الترتيب i ، z_1 و z_2

1 أكتب العدد المركب $L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي

2 بين أن النقطة C هي صورة النقطة B بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيين عناصره المميزة

3 استنتج طبيعة المثلث ABC

التمرين 03 (5 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_1 = \frac{1}{2}$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right) u_n$

1 أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n \geq 0$

ب/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة ، ثم عين نهاية المتتالية (u_n)

2 نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $v_n = \frac{u_n}{n}$

أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_1

ب/ أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

3 نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $w_n = \ln(v_n)$

أ/ أثبت أن المتتالية (w_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول w_1

ب/ أحسب بدلالة n كل من P_n و S_n حيث : $P_n = \frac{u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n}{n!}$ و $S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$

التمرين 04 (7 نقاط)

-I f هي الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{2}x^2(3 - 2\ln x) + 1$; $x \in]0; +\infty[$
 $f(0) = 1$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة 2cm)

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، فسر بيانها النتيجة المحصل عليها ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2 أدرس قابلية الاشتقاق لـ f عند $x_0 = 0$

ب/ أثبت أن f قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$

3 أحسب $f'(x)$ على المجال $[0; +\infty[$ ، ثم استنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

4 بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α حيث $4,6 < \alpha < 4,7$

5 أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

-II g هي الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

1 أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ، ثم أدرس إتجاه تغير الدالة g'

2 استنتج إشارة $g'(x)$ على المجال $[0; +\infty[$

3 أدرس إتجاه تغير الدالة g

4 استنتج الوضع النسبي بين (C_f) و (T)

5 أحسب $f(6)$ ثم أنشئ كلا من (C_f) و (T) .

6 بإستعمال التكامل بالتجزئة أحسب بدلالة n : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \ln x \, dx$ حيث n عدد طبيعي

7 استنتج بدلالة n المساحة $A(n)$ بـ cm^2 للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمماس (T)

والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = 1$ و $x = \frac{1}{n}$ ،

بالتوفيق إن شاء الله

إذا أدار الله سفينتك لليمين فتأذيت وتألمت ، فاعلم ان
 اليسار كان موتك المحتم ، فاحمد الله دائما



1 عين الجذرين التربيعيين للعدد المركب $-8 + 6i$

نضع $w = x + iy$ حيث $w^2 = -8 + 6i$ ومنه

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \dots (1) \\ x^2 - y^2 = -8 \dots (2) \\ 2xy = 6 \dots (3) \end{cases} \text{ لدينا } \begin{cases} x = 1 \\ \text{أو} \\ x = -1 \end{cases} \text{ نجد } 2x^2 = 2 \text{ ومنه } y = 3 \text{ أو } y = -3$$

بالتعويض في (3) نجد

✓ إذا كان $x = 1$ ، فإن $2y = 6$ ، أي أن

$y = 3$ ، ومنه نستنتج أن : $w = 1 + 3i$

✓ إذا كان $x = -1$ ، فإن $2y = 6$ ، أي أن

$y = -3$ ، ومنه نستنتج أن : $w = -1 - 3i$

2 حل المعادلة (E)

لدينا : $\Delta = -8 + 6i$ ، ومنه $\Delta = (1 + 3i)^2$

ومن المعادلة (E) تقبل حلان هما

$$z_1 = \frac{3 + i + 1 + 3i}{2} = 2 + 2i$$

$$z_2 = \frac{3 + i - 1 - 3i}{2} = 1 - i$$

(II) 1 أكتب العدد المركب $L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي

$$L = \frac{1 - i - i}{2 + 2i - i} = \frac{1 - 2i}{2 + i} \times \frac{2 - i}{2 - i} = -i$$

$$L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

2 بين أن النقطة C هي صورة النقطة B

لدينا $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-\frac{\pi}{2}i}$ ، ومنه $z_C - z_A = e^{-\frac{\pi}{2}i}(z_B - z_A)$

ومنه نستنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بدوران

مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{2}$

3 استنتج طبيعة المثلث ABC

$$\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1 \Rightarrow \frac{AC}{AB} = 1 \Rightarrow AC = AB$$

$$\arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$$

ومنه نستنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في A

عدد الحالات الممكنة : $C_4^4 = 35$

1 حساب $P(A)$

$$P(A) = \frac{C_4^1 C_3^3 + C_4^2 C_3^2 + C_4^3 C_3^1 + C_4^4 C_3^0}{35} = \frac{35}{35} = 1$$

2 أ/ عين قيم المتغير العشوائي X

$$\begin{cases} a(1) + 3 = a + 3 \\ a(2) + 2 = 2a + 2 \\ a(3) + 1 = 3a + 1 \\ a(4) + 0 = 4a \end{cases} \text{ عند سحب أربع كرات نميز مايلي :}$$

ومن قيم المتغير العشوائي X هي

$$\{a + 3; 2a + 2; 3a + 1; 4a\}$$

ب/ عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X

$$P(X = a + 3) = \frac{C_4^1 C_3^3}{35} = \frac{4}{35}$$

$$P(X = 2a + 2) = \frac{C_4^2 C_3^2}{35} = \frac{18}{35}$$

$$P(X = 3a + 1) = \frac{C_4^3 C_3^1}{35} = \frac{12}{35}$$

$$P(X = 4a) = \frac{C_4^4 C_3^0}{35} = \frac{1}{35}$$

x_i	$a + 3$	$2a + 2$	$3a + 1$	$4a$
$P(X = x_i)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

❖ أحسب أمله الرياضي $E(X)$

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i P_i = \frac{4(a + 3) + 18(2a + 2) + 12(3a + 1) + 4a(1)}{35} = \frac{80a + 60}{35} = \frac{16a + 12}{7}$$

$$E(X) = \frac{80a + 60}{35} = \frac{16a + 12}{7}$$

ج/ عين قيمة العدد الحقيقي a حتى يكون $E(X) = \frac{32396}{7}$

$$\frac{16a + 12}{7} = \frac{32396}{7} \Rightarrow 16a + 12 = 32396$$

ومنه $16a + 12 = 32396$ ، ومنه $a = 2024$

3 نسحب الآن من هذا الكيس أربع كرات على التوالي بالإرجاع

أحسب احتمال الحدث B : " الحصول على الأقل على

كرية بيضاء "

$$P(B) = \frac{4(4^1 \times 3^3) + 6(4^2 \times 3^2) + 4(4^3 \times 3^1) + 4^4}{7^4} = \frac{2320}{2401}$$

1/ أ/ برهن بالتراجع أنه $u_n \geq 0$

نسمي الخاصية $p(n) : u_n \geq 0$

من أجل $n = 1$ ، لدينا $u_1 = \frac{1}{2} \geq 0$ ، ومنه $u_1 = \frac{1}{2} \geq 0$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n = 1$

نفرض صحة $p(n)$ من أجل n كفي حيث $n \geq 1$

ونبرهن صحة $p(n+1)$ أن $u_{n+1} \geq 0$

لدينا $u_n \geq 0$ ، ومنه $\left(\frac{n+1}{2n}\right) u_n \geq 0$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n+1$

ومنه نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

فإن $u_n \geq 0$

ب/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right) u_n - u_n = u_n \left[\frac{n+1}{2n} - 1\right]$$

$$u_{n+1} - u_n = u_n \left[\frac{-n+1}{2n}\right]$$

من أجل كل $n \geq 1$ فإن $-n+1 \leq 0$

ومنه $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ، ومنه نستنتج أن (u_n) متناقصة

❖ استنتج أنها متقاربة : بما أن (u_n) متناقصة

ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة

❖ تعيين نهاية المتتالية (u_n)

بما أن (u_n) متقاربة والدالة f المعرفة بـ $f(x) = x$

مستمرة من أجل كل $x \geq 1$ فإن نهاية (u_n) تحقق

$$l = \frac{1}{2}l$$

حيث $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n+1}{2n}\right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n}{2n}\right] = \frac{1}{2}$ لدينا $l = \frac{1}{2}l$ معناه $l - \frac{1}{2}l = 0$ معناه $\frac{1}{2}l = 0$ ، ومنه

$$l = 0 \text{ ، ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

2/ أ/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{\left(\frac{n+1}{2n}\right) u_n}{n+1} = \frac{u_n}{2n} = \frac{1}{2} v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$

حدها الأول $v_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{1}{2}$

ب/ أكتب عبارة v_n بدلالة n

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$$

❖ استنتج عبارة u_n بدلالة n

بما أن $u_n = n \times v_n$ فإن $u_n = n \times v_n$ ، ومنه $u_n = \frac{n}{2^n}$

3/ أ/ أثبت أن المتتالية (w_n) حسابية

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\frac{1}{2} v_n\right) = \ln \frac{1}{2} + \ln(v_n)$$

$$w_{n+1} = \ln \frac{1}{2} + w_n$$

ومنه (w_n) متتالية حسابية أساسها $r = \ln \frac{1}{2}$

حدها الأول $w_1 = \ln(v_1) = \ln \frac{1}{2}$

عبارة w_n بدلالة n

$$w_n = w_1 + (n-1)r$$

$$w_n = \ln \frac{1}{2} + (n-1) \ln \frac{1}{2} = n \ln \frac{1}{2}$$

ب/ أحسب بدلالة n كل من S_n و P_n

$$S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$$

نلاحظ أن S_n هي حدود متتابعة لمتتالية حسابية ومنه

$$S_n = \frac{n}{2} \left(\ln \frac{1}{2} + n \ln \frac{1}{2} \right) = \frac{n}{2} \left[(n+1) \ln \frac{1}{2} \right]$$

$$P_n = \frac{u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n}{n!}$$

$$P_n = \frac{u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n}{1 \times 2 \times \dots \times n} = \frac{u_1}{1} \times \frac{u_2}{2} \times \dots \times \frac{u_n}{n}$$

$$P_n = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$$

$$P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \dots \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+\dots+n}$$

$$P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

1/ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3}{2} x^2 - x^2 \ln x + 1 \right] = 1$$

فسر بيانيا النتيجة المحصل عليها

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$ فإن الدالة f

مستمرة عند $x_0 = 0$

$$(T): y = 2(x - 1) + \frac{5}{2}$$

$$(T): y = 2x + \frac{1}{2}$$

g-II دالة معرفة بـ: $g(x) = f(x) - 2x - \frac{1}{2}$

① أحسب $g'(x)$ و $g''(x)$ ، ثم أدرس إتجاه تغير الدالة g'

$$g'(x) = f'(x) - 2$$

$$g''(x) = f''(x) = 2(1 - \ln x) - \frac{1}{x} \times 2x$$

$$g''(x) = -2 \ln x$$

x	0	1	$+\infty$
$g''(x)$		+	-
$g'(x)$	-2	0	$-\infty$

ومنه الدالة g' متزايدة تماما على المجال $]0; 1]$

ومتناقصة تماما على المجال $[1; +\infty[$

② إستنتج إشارة $g'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

بما أن الدالة g' تقبل قيمة حدية عظمى هي 0 عند $x = 1$ ومنه نستنتج أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$

$$g'(x) \leq 0$$

③ أدرس إتجاه تغير الدالة g

الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	-
$g(x)$	$\frac{1}{2}$	0	$-\infty$

④ إستنتج الوضع النسبي بين (C_f) و (T)

ندرس إشارة الفرق $f(x) - 2x - \frac{1}{2} = g(x)$

لما $x \in]0; 1[$ فإن (C_f) يقع فوق (T)

لما $x \in]1; +\infty[$ فإن (C_f) يقع تحت (T)

لما $x = 1$ فإن (C_f) يخترق (T) في $(1; \frac{5}{2})$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} x^2 (3 - 2 \ln x) + 1 \right] = -\infty$$

② أدرس قابلية الإشتقاق لـ f عند $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3}{2} x - x \ln x \right] = 0$$

ومنه f قابلة للإشتقاق عند $x_0 = 0$

ب/ أثبت أن f قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$

لدينا من جهة f قابلة للإشتقاق عند $x_0 = 0$

ومن جهة أخرى f هي عبارة عن جداء ومجموع

دوال قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$

ومنه نستنتج أن f قابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$

③ أحسب $f'(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

$$f'(x) = x(3 - 2 \ln x) - \frac{2}{x} \times \frac{x^2}{2}$$

$$f'(x) = 3x - 2x \ln x - x = 2x(1 - \ln x)$$

❖ إستنتج إتجاه تغير الدالة f

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 1 - \ln x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = e \end{cases}$$

x	0	e	$+\infty$
$2x$		+	+
$1 - \ln x$		+	-
$f'(x)$		+	-

ومنه f متزايدة تماما على المجال $]0; e]$ ومتناقصة

تماما على المجال $[e; +\infty[$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	1	$\approx 4,7$	$-\infty$

④ بين ان المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيدا α

f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[4,6; 4,7]$

$$\begin{cases} f(4,6) = 0,44 \\ f(4,7) = -0,05 \end{cases} \Rightarrow f(4,6) \times f(4,7) < 0$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة

$$f(x) = 0 \text{ تقبل حل وحيدا } \alpha \text{ حيث } 4,6 < \alpha < 4,7$$

⑤ أكتب معادلة المماس (T) عند الفاصلة 1

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(f(x) - 2x - \frac{1}{2} \right) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 g(x) dx$$

$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - x^2 \ln x + 1 - 2x - \frac{1}{2} \right) dx$$

$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x - x^2 \ln x + \frac{1}{2} \right) dx$$

$$A(n) = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) dx - I_n$$

$$A(n) = \left[\frac{x^3}{2} - x^2 + \frac{x}{2} \right]_{\frac{1}{n}}^1 - I_n = \left[\frac{x^3 - 2x^2 + x}{2} \right]_{\frac{1}{n}}^1 - I_n$$

$$A(n) = - \left(\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}}{2} \right) - I_n$$

$$A(n) = - \left(\frac{\frac{1}{n^3} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n}}{2} \right) - I_n$$

$$A(n) = - \left(\frac{\frac{1-2n+n^2}{n^3}}{2} \right) - I_n = - \frac{1-2n+n^2}{2n^3} - I_n$$

$$A(n) = \frac{-n^2+2n-1}{2n^3} - \frac{\ln n}{3n^3} - \frac{1}{9n^3} + \frac{1}{9}$$

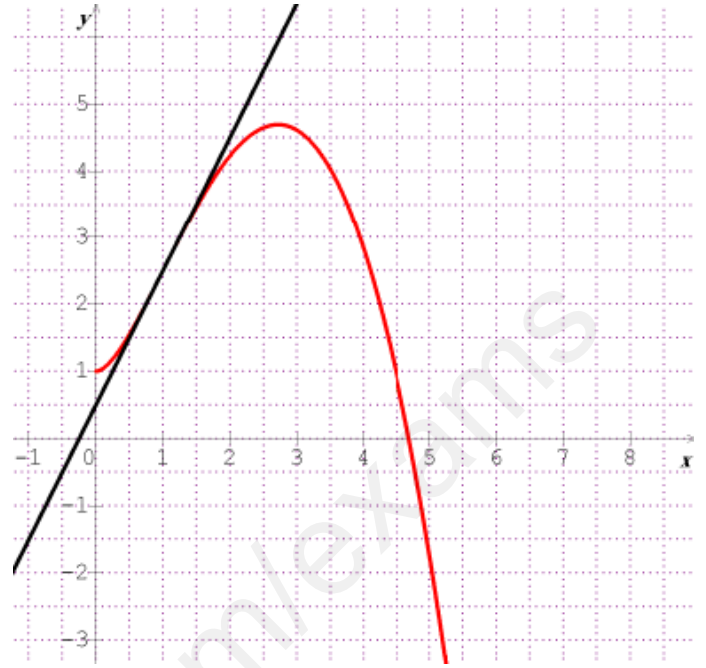
$$A(n) = \frac{-9n^2+18n-9-6\ln n-2+2n^3}{18n^3}$$

$$A(n) = \left(\frac{2n^3-9n^2+18n-11-6\ln n}{18n^3} \right) \times 4 \text{ (u.a)}$$

5 أحسب $f(6)$

$$f(6) = -9,5$$

أنشئ كلا من (C_f) و (T)



6 أحسب بدلالة n : $I_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 \ln x dx$

$u(x) = \ln x$	$u'(x) = \frac{1}{x}$
$v(x) = \frac{x^3}{3}$	$v'(x) = x^2$

$$I_n = \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_{\frac{1}{n}}^1 - \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{n}}^1 x^2 dx$$

$$I_n = \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_{\frac{1}{n}}^1 - \left[\frac{x^3}{9} \right]_{\frac{1}{n}}^1 =$$

$$I_n = - \left(\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{3} \ln \frac{1}{n} \right) - \left(\frac{1}{9} - \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^3}{9} \right)$$

$$I_n = - \left(\frac{1}{3n^3} (-\ln n) \right) - \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9n^3} \right)$$

$$I_n = \frac{\ln n}{3n^3} + \frac{1}{9n^3} - \frac{1}{9}$$

7 إستنتج المساحة $A(n)$ بـ cm^2 لحيز المستوي

المحدد بالمنحني (C_f) والمماس (T) والمستقيمين

الذين معادليهما : $x = \frac{1}{n}$ و $x = 1$

بما أن $0 < \frac{1}{n} \leq x \leq 1$ أي أن $0 \leq x \leq 1$

ومنه (C_f) يقع فوق (T) في المجال $[0; 1]$ ومنه



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04,5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بعدها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$

(1) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 3}$ حيث a و b عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما.

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > -1$

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$

أ- بين أن المتتالية (v_n) حسابية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول.

ب- عبر عن v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = \frac{u_0}{u_0 + 1} + \frac{u_1}{u_1 + 1} + \dots + \frac{u_n}{u_n + 1}$

أحسب S_n بدلالة n

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي وعاء U على كرتين بيضاوين وثلاث كريات سوداء ويحتوي وعاء V على كرتين بيضاوين وكرتين سوداوين (كل الكريات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس).

نرمي مرة واحدة نردا غير مزيف أوجهه مرقمة من 1 إلى 6 فإذا ظهر على الوجه العلوي للنرد رقم أصغر أو يساوي 2 نسحب كرية واحدة من الوعاء U وإذا ظهر على الوجه العلوي للنرد رقم آخر (أكبر تماما من 2) نسحب كرية واحدة من الوعاء V

نعتبر الأحداث التالية: U : "سحب كرية من الوعاء U " ، V : "سحب كرية من الوعاء V " ،
 B : "سحب كرية بيضاء" ، N : "سحب كرية سوداء"

(1) بين أن $p(U) = \frac{1}{3}$ ثم استنتج $p(V)$

(2) شكل شجرة الاحتمالات التي تتمزج هذه الوضعية.

(3) بين أن احتمال سحب كرية سوداء يساوي $\frac{8}{15}$

(4) إذا سحبنا كرية سوداء، ما احتمال أن تكون من الوعاء U ؟

التمرين الثالث: (04,5 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(z - i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

نعتبر النقط A ، B و C من المستوي لواقعها $z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \sqrt{3} - i$ و $z_C = i$ على الترتيب.

أ- أكتب العدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الأسّي.

ب- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ تخيليا صرفا.

(3) أ- عين العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه A ويحول B إلى C محددًا نسبته وزاويته.

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC

(4) عين (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق: $|z - z_A|^2 + |z - z_B|^2 = 5$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (2x + 1)e^x + 1$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + 2 + (2x - 1)e^x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(2) أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل عند $-\infty$ مستقيما مقاربا مائلا (D) معادلته $y = x + 2$

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D)

(3) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

- 4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,86 < \alpha < -0,85$
- 5) أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (D) في نقطة وحيدة فاصلتها $-\frac{1}{2}$
- ب- اكتب معادلة Δ (T)
- 6) أنشئ (D) ، (T) و (C_f)
- 7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $(2x-1)e^x - m + 2 = 0$

انتهى الموضوع الأول

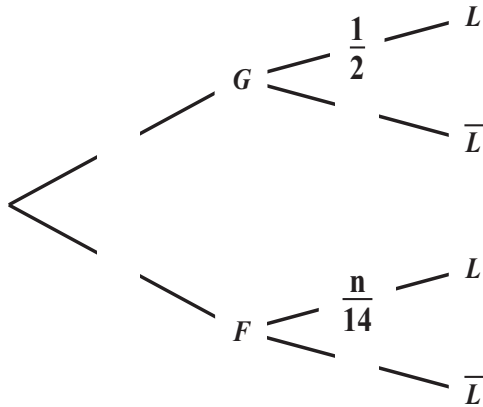
الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04,5 نقاط)

يتكون قسم ثانوية من 26 ولد و 14 بنت. من بين كل تلاميذ هذا القسم 13 ولد و n بنت مسجلون في نادي تعلم اللغات.

نختار عشوائيا تلميذا من القسم ونعتبر الأحداث التالية:

G : "التلميذ المختار ولد"، F : "التلميذ المختار بنت"، L : "التلميذ المختار مسجل في نادي تعلم اللغات"



(1) أحسب $p(F)$ و $p(G)$

(2) أنقل ثم أكمل شجرة الاحتمالات المقابلة.

(3) بين أن $p(L) = \frac{13+n}{40}$

(4) التلميذ المختار مسجل في نادي تعلم اللغات. ما احتمال أن يكون ولدا؟

(5) جد قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون الحدثان L و G مستقلين.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير.

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+2}{x} \right)$ تساوي:

(أ) 0 (ب) 2 (ج) $+\infty$

(2) إذا كانت الدالة $x \mapsto x(\alpha \ln x + \beta)$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto -\ln x$ على المجال $]0; +\infty[$ فإن:

(أ) $\alpha = -1$ و $\beta = 0$ (ب) $\alpha = -1$ و $\beta = 1$ (ج) $\alpha = -1$ و $\beta = -1$

(3) العدد الحقيقي I حيث $I = \int_{-2}^4 \frac{2x}{x^2+1} dx$ يساوي:

(أ) $\ln \frac{17}{5}$ (ب) $-\ln 17 + \ln 5$ (ج) $\ln 17 + \ln 5$

(4) n عدد طبيعي غير معدوم. العدد المركب $(1+i)^n$ تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان:

(أ) $n = 2 + 8k$ (ب) $n = 4k$ (ج) $n = 2 + 4k$

التمرين الثالث: (04,5 نقاط)

(1) (u_n) متتالية حسابية متناقصة معرفة بحدّها الأول u_0 وأساسها r

أ- عين u_2 ثم r علما أن: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 24 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 210 \end{cases}$

ب- أكتب u_n بدلالة n ثم احسب المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

- (2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = e^{14-3n}$ حيث e هو أساس اللوغاريتم النيبيري
- أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0
- ب- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. ماذا تستنتج؟

- (3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $T_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ و $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$
- أ- أحسب المجموع T_n بدلالة n والجداء P_n بدلالة n
- ب- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- f و g الدالتان العدديتان معرفتان على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln x - \frac{x-1}{x}$ و $g(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x$
- (C_f) و (C_g) تمثيلهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j})$
- (1) أ- بين أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ وفسر النتيجة بيانياً.

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- (2) أ- أحسب $f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f

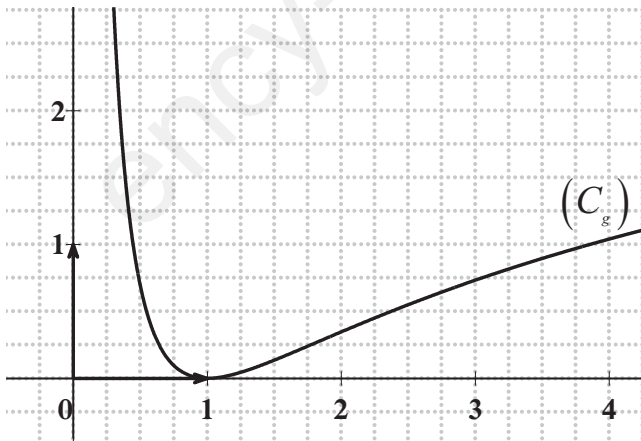
ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

- (3) الشكل المقابل يمثل جدول تغيرات الدالة $f - g$ على المجال $]0; +\infty[$

- أ- حدد إشارة $f(x) - g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$
- ب- استنتج الوضعية النسبية للمنحنيين (C_g) و (C_f)

x	0	1	$+\infty$
$g' - f'$	-	0	+
$g - f$	$+\infty$	0	1

- (4) a عدد حقيقي أكبر تماماً من 1. M نقطة من (C_f) فاصلتها a و N نقطة من (C_g) فاصلتها a
- برر أن $MN < 1$



- (5) الشكل المقابل هو التمثيل البياني للدالة g على المجال $]0; +\infty[$

أ- أنقل (C_g) ثم أنشئ (C_f) في نفس المعلم.

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من

$$g(x) - f(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}, \quad]0; +\infty[$$

- (6) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_g) و (C_f) والمستقيمين $x=1$ و $x=e$

انتهى الموضوع الثاني



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط).

في ثانوية الصادق مخلوف شكل أستاذ رفقة سبعة تلاميذ خمسة منهم ذكور أحدهم اسمه "أنس" والآخرات إناث نادياً لنصرة فلسطين و التعريف بالقضية الفلسطينية .

يريد الأستاذ رئيس تحرير المجلة أن يختار معه من خلال التلاميذ السبعة لجنة الإشراف على مجلة " القدس " يقوم فيها تلميذ واحد بجمع المقالات ، و تلميذ آخر بجمع الخواطر و القصائد ، و تلميذ آخر بتصميم المجلة .

(1) أثبت أن عدد اللجان التي يمكن تكوينها هو : 210 لجنة .

(2) احسب احتمال الأحداث التالية :

الحدث A : " تكوين لجنة تضم أنس " و الحدث B : " تكوين لجنة تضم تلميذا واحدا فقط " .

الحدث C : " تكوين لجنة تضم ثلاث تلميذات " و الحدث D : " تكوين لجنة لا تضم التلميذات " .

(3) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل اختيار عدد الذكور في اللجنة المكونة .

(أ) عين مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X .

(ب) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

(4) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ ، ثم استنتج قيمة $E(1445X - 2024)$.

التمرين الثاني (5 نقاط).

لتكن (u_n) متتالية هندسية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ حيث :
$$\begin{cases} u_0 + u_1 + u_2 = 28 \\ u_0 \times u_1 \times u_2 = 512 \end{cases}$$

(1) أحسب الحدود u_0 و u_1 و u_2 ثم أكتب عبارة u_n بدلالة n .

(2) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة بـ : $v_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = \frac{2v_n}{v_n + 1}$.

(أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < v_n < 1$.

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (v_n) ثم استنتج أنها متقاربة نحو نهاية l .

(ج) بين أن النهاية l هي حل للمعادلة : $x^2 - x = 0$ يطلب حسابها .

(3) لتكن (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n = 1 - \frac{1}{v_n}$.

(أ) بين أن المتتالية (w_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الأول .

(ب) أكتب w_n بدلالة n ثم بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{2^n}{1+2^n}$.

(4) احسب بدلالة n المجموعين S_1 و S_2 حيث : $S_1 = u_0 w_0 + u_1 w_1 + \dots + u_n w_n$ و $S_2 = \frac{1}{v_0} + \frac{2}{v_1} + \dots + \frac{2^n}{v_n}$.

التمرين الثالث (4 نقاط).

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$. (وحدة الرسم 1cm) .

(1) حل في المجموعة $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ الجملة التالية : $\begin{cases} z_1 - 2z_2 = -1 - 2\sqrt{3} \\ \overline{z_1} - \overline{z_2} = -\sqrt{3} - i \end{cases}$

(2) لتكن : A, B, C, D والنقط التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A = 1, z_B = 1 + 2i, z_C = 1 + \sqrt{3} + i, z_D = \overline{z_C}$.

(أ) أكتب العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي ثم أعط تفسيراً هندسياً لـ $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$.

(ب) علم النقط A, B, C, D ، ثم حدد طبيعة المثلث ABC ،

(ج) استنتج أن صورة C بدوران مركزه A يطلب تعيين زاويته .

(د) حدد الطبيعة الهندسية للرباعي $ABCD$.

(3) هل يمكن إيجاد قيم العدد الطبيعي n حيث يكون العدد $\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)^n$ تخيلياً صرفاً ؟ علل إجابتك .

(4) نعتبر التحاكي h الذي مركزه A و نسبته 3- . أكتب العبارة المركبة للتحاكي h في المستوي المركب .

(5) لتكن (Δ) مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\arg(z - z_A) = \arg(z_B - z_A) - \frac{\pi}{3} + k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$.

* تحقق من أن النقطة C تنتمي إلى (Δ) ، ثم حدد المجموعة (Δ) .

التمرين الرابع (7 نقاط).

I. الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = -2 + (x+2)e^{x+2}$.

(1) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

(ب) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في $\mathbb{R}$ يحقق : $-1.15 < \alpha < -1.14$.

(ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = -2x + (x-1)e^{-x+2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول 1cm) .

(1) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x)$ ثم فسر النتيجة هندسياً .

(ج) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -2x$.

- (2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(-x)$ ، ثم استنتج إشارة $f'(x)$.
ب) حدد اتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]-\infty; -\alpha]$ و $]-\alpha; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها .
- (3) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) ، يطلب تعيين معادلة له .
- (4) نضع $f(-\alpha) = -1.95$ ، أحسب $f(0)$ ثم أنشئ (Δ) ، (T) و (C_f) .
- (5) جد قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $(x-1)e^{-x+2} - e^m = 0$ حلين متميزين .
- (6) H الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $H(x) = \int_1^x (t-1)e^{-t+2} dt$ ، حيث $x > 1$. (x عدد حقيقي)
أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين عبارة الدالة H .
ب) ماذا تمثل الدالة H ؟
ج) أحسب بالسنتيمتر مربع ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمت التي معادلاتها : $y = -2x$ ، $x = 0$ و $x = 1$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (5 نقاط).

يحتوي صندوق U_1 على كرتين زرقاوين، ثلاث كريات حمراء وكرتين صفراوين، و يحتوي صندوق U_2 على كرتين زرقاوين و كرية حمراء (كل الكريات متماثلة و لا نفرق بينها عند اللمس) .

I. نسحب عشوائيا و في آن واحد 3 كريات من الصندوق U_1 ونعتبر الأحداث A ، B ، C الآتية :

A : " الحصول على ثلاث كريات مختلفة الألوان مثلى مثلى " ، B : " الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون " C : " الحصول على كرية حمراء على الأقل " .

(1) أحسب $p(A)$ ، $p(B)$ و $p(C)$ احتمال الأحداث A ، B و C على الترتيب.

(2) أحسب الإحتمال $p(B \cap C)$ ، هل الحدثان B و C مستقلان ؟ علل .

(3) إستنتج إحتمال الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون علما أنه توجد كرية حمراء على الأقل .

II. نسحب كرتين في آن واحد من U_1 و كرتين على التوالي و بإرجاع من U_2 .

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة .

(1) عين مجموعة قيم المتغير العشوائي X .

(2) عين قانون إحتمال المتغير العشوائي X ، ثم أحسب $p(e^{2X} < 2024)$.

(3) نضيف n كرية صفراء إلى الصندوق U_1 حيث : $n \geq 2$ و كرية واحدة صفراء إلى U_2 .

• أحسب إحتمال الحصول على كرية واحدة صفراء .

التمرين الثاني (4 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

(1) في الشكل المقابل ، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $\left[-\frac{4}{3}; +\infty\right]$ بـ : $f(x) = \sqrt{3x+4}$.

(أ) أعد رسم هذا الشكل في ورقة الإجابة ، ثم مثل الحدود الأربعة الأولى.

على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربا .

(2) (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 4$.

(ب) بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n+1)(4-u_n)}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}$.

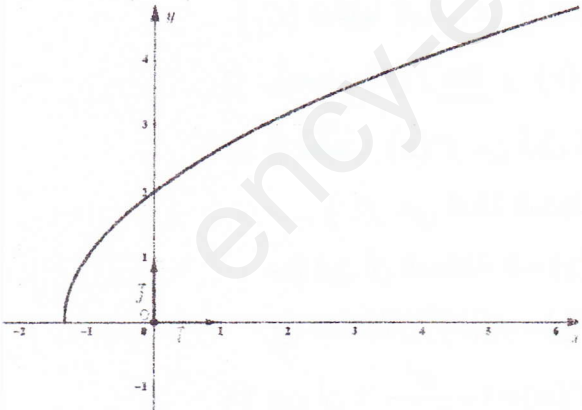
(ج) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ علل

(3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < \frac{3}{\sqrt{3u_n+4}+4} \leq \frac{1}{2}$.

و أن : $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

(4) (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 4 - u_n \leq 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

(ب) استنتج نهاية المتتالية (u_n) .



التمرين الثالث (4 نقاط)

- I. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 12 = 0$.
- II. في كل مما يلي ، نعتبر المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
- نعتبر النقط A و B و C التي لاحقاتها على الترتيب ، حيث : $z_A = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = -\sqrt{3} + 3i$.
- (1) أ) اكتب z_A على الشكل الأسّي ، ثم استنتج الشكل الأسّي لكل من z_C و z_B .
 ب) بين أن : $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{1445} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^{1445} = -\sqrt{3}$.
- (2) علما أن : $z_C = iz_A$ ، حدد طبيعة المثلث OAC .
 ب) عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث OAC .
- ج) عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق : $\|\overline{AM} + \overline{CM} + \overline{OM}\| = 9$.
 د) أنشئ المجموعة (Γ) في المعلم $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
- (3) نعتبر النقطة D ذات اللاحقة z_D نظيرة C بالنسبة لحامل محور الفواصل .
 أ) بين أن : $z_D = -\sqrt{3} - 3i$.
 ب) عين عمدة العدد المركب $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_B}$ ، ثم استنتج أن المستقيمان (AD) و (BC) متعامدان .
 ج) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_D - z_A}{z_C - z_B}\right)^n$ تخيلي صرف جزؤه التخيلي موجب تماما .

التمرين الرابع (7 نقاط)

- I. g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = a + bx \ln(x+2)$.
 (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث المنحنى (C_g) يقبل عند النقطة $A(-1; 1)$ مماسا يمر من المبدأ .
- II. f الدالة العددية المعرفة على $]-2; +\infty[$ ب : $f(x) = 1 + x \ln(x+2)$.
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $1cm$) .
- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا .
- (2) أ) أحسب $f'(x)$ من أجل كل x من المجال $]-2; +\infty[$ ، ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f' .
 (f' هي الدالة المشتقة للدالة f) .
 ب) بين أن المعادلة $f'(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-0.6 < \alpha < -0.5$.
 ج) حدد إشارة $f'(x)$ على $]-2; +\infty[$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيرات الدالة f .
- (3) بين أن : $f(\alpha) = 1 - \frac{\alpha^2}{2 + \alpha}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}) .
- (4) ليكن (T) مماسا للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 .
 أ) بين أن المماس (T) يشمل المبدأ O إذا وفقط إذا كان : $f(x_0) = x_0 f'(x_0)$.
 ب) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسين (T) و (T') يشملان المبدأ O ، يطلب تعيين معادلة لكل منهما .

(5) أنشئ (T) ، (T') و (C_f) .

(6) الدالة العددية المعرفة على $]-2; +\infty[$ بـ : $F(x) = 2x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}(x^2 - 4)\ln(x+2)$.

(أ) تحقق أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-2; +\infty[$.

(ب) نضع : $S(\lambda) = \int_{\lambda}^0 f(x)dx$ حيث λ عدد حقيقي يحقق : $-2 < \lambda < 0$.

• أحسب $S(\lambda)$ ، ثم فسر النتيجة ببيانها .

(7) لتكن الدالة h المعرفة على $]-2; +\infty[$ بـ : $h(x) = [f(x)]^2$.

(أ) دون تعيين عبارة الدالة h ، أحسب $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$.

(ب) عين اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها .

1514

الإجابة النموذجية لامتحان بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات .

الشعبة : علوم تجريبية .

العلامة	الإجابة النموذجية								
	الموضوع الأول :								
$P(C) = \frac{0}{A_7^3}$	04 نقاط								
$P(C) = 0$	مناقشة التمرين 01.								
ومنه :	(1) إثبات أن عدد الأرقام التي يمكن ذكرها مع 210 لجنة								
(2) تكون لجنة لتفهم نصيحات :	$card(u) = A_7^3$								
$P(D) = \frac{card(D)}{card(u)}$	$card(u) = \frac{7!}{(7-3)!}$								
$P(D) = \frac{A_7^3}{A_7^3}$	$card(u) = \frac{7!}{4!}$								
$P(D) = \frac{2}{7}$	$card(u) = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!}$								
ومنه :	$card(u) = 7 \times 6 \times 5$								
(3) تعيين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X :	$card(u) = 210$								
ومنه :	(2) حساب احتمال الأحداث التالية :								
في حالة اللجنة تفهم ذكر و 2 أرقام لدينا : $X=2$	(3) تكون لجنة تفهم نصيحات :								
في حالة اللجنة تفهم ذكر و 3 أرقام لدينا : $X=3$	$P(A) = \frac{card(A)}{card(u)}$								
في حالة اللجنة تفهم 3 أرقام لدينا : $X=4$	$P(A) = \frac{(A_7^1 \times A_6^2) \times 3}{A_7^3}$								
وعليه : $X \in \{2, 3, 4\}$	$P(A) = \frac{3}{7}$								
(4) تعريف قانون الامتثال للمتغير العشوائي X :	ومنه :								
<table border="1"> <tr> <td>$X = \alpha_i$</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>$P(X = \alpha_i)$</td> <td>$\frac{1}{7}$</td> <td>$\frac{4}{7}$</td> <td>$\frac{2}{7}$</td> </tr> </table>	$X = \alpha_i$	2	3	4	$P(X = \alpha_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	(5) تكون لجنة تفهم نصيحات وإراضة :
$X = \alpha_i$	2	3	4						
$P(X = \alpha_i)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$						
حيث :	$P(B) = \frac{card(B)}{card(u)}$								
ومنه :	$P(B) = \frac{(A_5^1 \times A_4^2) \times 3}{A_7^3}$								
$P(X=2) = P(B)$	$P(B) = \frac{1}{7}$								
$P(X=2) = \frac{1}{7}$	ومنه :								
$P(X=3) = \frac{(A_5^2 \times A_2^1) \times 3}{A_7^3}$	(6) تكون لجنة تفهم ثلاث نصيحات :								
$P(X=3) = \frac{4}{7}$	$P(C) = \frac{card(C)}{card(u)}$								
$P(X=4) = P(D)$									
$P(X=4) = \frac{2}{7}$									

01

(1) حساب التوقع الرياضي

كتابة عبارة u_n لا بدلالة n .

لدينا : $u_n = u_0 \times q^n$

حيث $u_0 = 16$ و $q = \frac{u_1}{u_0}$

$q = \frac{1}{2}$

ومنه : $u_n = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(2) البرهان التراجعي أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$

نعمنا $P(n)$ الخاصية $0 < u_n < 1$

التحقق : $n=1$: $0 < u_1 < 1$

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i P(X = \alpha_i)$$

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{7} + 3 \times \frac{4}{7} + 4 \times \frac{2}{7}$$

$$E(X) = \frac{22}{7}$$

استنتاج : $E(11445X - 1024) = 11445 E(X) - 1024$

$$E(11445X - 1024) = 11445 \times \frac{22}{7} - 1024$$

$$E(11445X - 1024) = 11445 \times \frac{22}{7} - 1024$$

$$E(11445X - 1024) = 17622 \frac{1}{7}$$

ومنه :

$$P(X=3) = \frac{(A_1^2 \times A_2^1) 3}{A_7^3}$$

$$P(X=3) = \frac{4}{7}$$

$$P(X=1) = P(D)$$

$$P(X=1) = \frac{2}{7}$$

ومنه:

$$P(B) = \frac{(A_5 \times A_2) 3}{A_7^3}$$

$$P(B) = \frac{1}{7}$$

ومنه:

(ج) تكون لجنة تضم ثلاث تلميذات

$$P(C) = \frac{\text{cond}(C)}{\text{cond}(U)}$$

01

كتابة عبارة لا بدالة n.

$$U_n = U_0 \times q^n$$

$$q = \frac{U_1}{U_0} \quad \text{حيث } U_0 = 16 \text{ و}$$

$$q = \frac{1}{2}$$

$$U_n = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ومنه:

(2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n.

$$0 < V_n < 1$$

نعمنا (P(n) الخاصة

التحقق أن P(n) صحيحة.

$$\text{لدينا: } V_0 = \frac{1}{2} \text{ و } 0 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\text{أي: } 0 < V_0 < 1$$

ومنه P(0) صحيحة.

ننظر في أن P(n) صحيحة من أجل n عدد طبيعي أي:

$$0 < V_n < 1 \text{ ونسعى من جهة (P(n+1) أي: } 0 < V_{n+1} < 1$$

$$\text{لدينا: } V_{n+1} = \frac{2V_n}{V_n + 1}$$

$$V_{n+1} = \frac{2V_n + 2 - 2}{V_n + 1}$$

$$V_{n+1} = \frac{2(V_n + 1) - 2}{V_n + 1}$$

$$V_{n+1} = 2 - \frac{2}{V_n + 1}$$

$$\text{لدينا: } 0 < V_n < 1$$

$$1 < V_n + 1 < 2$$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{V_n + 1} < 1$$

$$1 < \frac{2}{V_n + 1} < 2$$

$$-2 < -\frac{2}{V_n + 1} < -1$$

$$2 - 2 < 2 - \frac{2}{V_n + 1} < 2 - 1$$

$$0 < V_{n+1} < 1$$

ومنه (P(n+1) صحيحة.

إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع ومن أجل كل عدد طبيعي n.

$$0 < V_n < 1$$

(ب) حساب التوزيع الحتمي

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i P(X=\alpha_i)$$

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{7} + 3 \times \frac{4}{7} + 1 \times \frac{2}{7}$$

$$E(X) = \frac{22}{7}$$

استنتاج: $E(1145X - 2024)$

$$E(1145X - 2024) = 1145 E(X) - 2024$$

$$E(1145X - 2024) = 1145 \times \frac{22}{7} - 2024$$

$$E(1145X - 2024) = \frac{17624}{7}$$

ومنه:

05 نقاط

مناقشة التمرين 02

(أ) حساب الحدود U_1 و U_2

لدينا (لما) متتالية هندسية معادة.

$$\text{ولدينا: } 512 = U_0 \times U_1 \times U_2$$

$$\text{ومنه: } U_1 \times U_2 = 512$$

$$\text{أي: } U_1^3 = 512$$

$$U_1 = \sqrt[3]{512}$$

$$\text{ومنه: } U_1 = 8$$

$$\text{وعليه: } \begin{cases} U_0 + U_2 = 20 \\ U_0 \times U_2 = 64 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} U_0 + U_2 = 28.8 \\ U_0 \times U_2 = \frac{512}{8} \end{cases}$$

ومنه U_0 و U_2 هما حلان للمعادلة ذات المجهول x

$$\text{التالية: } x^2 - 20x + 64 = 0$$

$$\text{حيث: } \Delta = 144$$

$$\text{ومنه: } x_1 = 16 \text{ و } x_2 = 4$$

بما أن المتتالية (لما) هندسية متناهية نقول

$$\text{حيث: } U_0 = 16 \text{ و } U_2 = 4$$

$$\text{وعليه: } (U_0, U_1, U_2) = (16, 8, 4)$$

02

$$\text{ومنه: } l^2 - l = 0$$

معناه حل المعادلة $x^2 - x = 0$

$$\text{وعليه: } l(l-1) = 0$$

$$\text{أي: } l = 0 \text{ أو } l = 1$$

بما أن $V_0 = \frac{1}{2}$ و (لما) متتالية متناهية نقول

$$\text{أي: } \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = 1$$

(3) نبين أن المتتالية (لما) هندسية أي: $q = \frac{1}{2}$ مع حساب حدما للحد

$$W_{n+1} = 1 - \frac{1}{V_{n+1}}$$

$$W_{n+1} = 1 - \frac{1}{\frac{2V_n}{V_n + 1}}$$

$$W_{n+1} = 1 - \frac{V_n + 1}{2V_n}$$

$$W_{n+1} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2V_n}$$

$$W_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2V_n}$$

(ب) دراسة لخاصة من المتتالية (لما) ثم استنتاج أنها متناهية

بحرناية l.

دراسة الفرق $V_{n+1} - V_n$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{2V_n}{V_n + 1} - V_n$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{2V_n - V_n(V_n + 1)}{V_n + 1}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{V_n(2 - V_n - 1)}{V_n + 1}$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{V_n(-V_n + 1)}{V_n + 1}$$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n.

$$0 < V_n < 1$$

$$1 < V_n + 1 < 2$$

وعليه $V_{n+1} - V_n < 0$ أي أن الفرق $V_{n+1} - V_n$ من إشارات $(-V_n + 1)$

$$\text{أي: } 0 < V_n < 1$$

$$-1 < -V_n < 0$$

$$\text{أي: } 0 < -V_n + 1 < 1$$

بمعنى ① و ③ طرفي نريد

03

$$S_n = \frac{z^0}{V_0} + \frac{z^1}{V_1} + \dots + \frac{z^n}{V_n}$$

$$S_n = 1 + z^0 + 1 + z^1 + \dots + 1 + z^n$$

$$S_n = 1(n+1) + z^0 + z^1 + \dots + z^n$$

$$S_n = n+1 + \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

$$S_n = n+1 - (1+z^{n+1})$$

$$S_n = n+1 - 1 - z^{n+1}$$

$$S_n = n+1 - z^{n+1}$$

ومنه:

04 سطر

صاخنة العيون 03

الحل ٤: $z \times z$ المعادلة التالية

$$\{z_1 - 2z_2 = 1 + 2\sqrt{3} \dots (1)\}$$

$$\{z_1 - z_2 = -\sqrt{3} + i \dots (2)\}$$

من المعادلة (2) نجد:

$$\overline{z_1} - \overline{z_2} = -\sqrt{3} + i$$

$$\overline{z_1} - \overline{z_2} = -\sqrt{3} + i$$

$$z_1 - z_2 = -\sqrt{3} + i$$

وعليه يصبح لدينا:

$$\{z_1 - 2z_2 = 1 + 2\sqrt{3} \dots (1)\}$$

$$\{z_1 - z_2 = -\sqrt{3} + i \dots (2)\}$$

بضرب المعادلة (1) في العدد (1) نجد:

$$\{-z_1 + 2z_2 = 1 + 2\sqrt{3} \dots (4)\}$$

$$\{z_1 - z_2 = -\sqrt{3} + i \dots (2)\}$$

نجمع (4) و (2) طرف بـ طرف:

$$z_2 = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 1 + \sqrt{3} + i$$

ومنه:

بضرب قيمة z_2 في المعادلة (3) نجد:

$$z_1 = z_2 - \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 1 + \sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 1 + 2i$$

ومنه:

$$V_n = \frac{1}{1 - \omega_n}$$

$$V_n = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$V_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{2^n}}$$

$$V_n = \frac{1}{\frac{2^n + 1}{2^n}}$$

$$V_n = \frac{2^n}{2^n + 1}$$

$$V_n = \frac{2^n}{1 + 2^n}$$

ومنه:

٤. حساب دالة المجموع S_n

لدينا:

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$u_n \omega_n = 16 \left(\frac{1}{4}\right)^n \left[-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

$$u_n \omega_n = 16 \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$u_n \omega_n = 16 \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$S_n = 16 \left(\frac{1}{4}\right)^0 + 16 \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \dots + 16 \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$S_n = 16 \left[\left(\frac{1}{4}\right)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$$

$$S_n = 16 \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$S_n = 16 \times \frac{4}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$$

$$S_n = \frac{64}{3} \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1\right]$$

حساب دالة المجموع S_n

لدينا:

$$S_n = \frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_1} + \dots + \frac{1}{V_n}$$

$$\frac{z^n}{V_n} = \frac{z^n}{1 + z^n}$$

$$\frac{z^n}{V_n} = z^n \times \frac{1 + z^n}{z^n}$$

$$\frac{z^n}{V_n} = 1 + z^n$$

$$\frac{z^n}{V_n} = 1 + z^n$$

إذاً ABC مثلث متساوي الأضلاع.

٢. استنتاج أن C هو مركز B يعبر عن مركز A مع

نفس زاوية.

$$\frac{z_c - z_a}{z_b - z_a} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_c - z_a = e^{-i\frac{\pi}{3}} (z_b - z_a)$$

ومن C هو مركز B بالدوران الذي مركزه A

وزاوية $\frac{\pi}{3}$.

٣. إيجاد القيمة العددية للزاوية ABC

$$z_c - z_b = 1 + \sqrt{3} + i - 1 - 2i = \sqrt{3} - i$$

٢. P كـ متناهي العدد $\frac{z_c - z_a}{z_b - z_a}$ على الدائرة الوحدة

$$\frac{z_c - z_a}{z_b - z_a} = \frac{1 + \sqrt{3} + i - 1}{1 + 2i - 1}$$

$$\frac{z_c - z_a}{z_b - z_a} = \frac{\sqrt{3} + i}{2i}$$

$$\frac{z_c - z_a}{z_b - z_a} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

$$\frac{z_c - z_a}{z_b - z_a} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

ومنه:

التفسير الهندسي: $\arg\left(\frac{z_c - z_a}{z_b - z_a}\right)$

$$\overline{z_1 - z_2} = -\sqrt{3} + i \quad \text{ومنه}$$

$$z_1 - z_2 = -\sqrt{3} + i \quad \text{أيضا}$$

$$\begin{cases} z_1 - 2z_2 = -1 - 2\sqrt{3} \dots (1) \\ z_1 - z_2 = -\sqrt{3} + i \dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 - 2z_2 = -1 - 2\sqrt{3} \dots (1) \\ z_1 - z_2 = -\sqrt{3} + i \dots (2) \end{cases}$$

بضرب المعادلة (1) في العدد (1) نجد:

$$\begin{cases} -z_1 + 2z_2 = 1 + 2\sqrt{3} \dots (3) \\ z_1 - z_2 = -\sqrt{3} + i \dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -z_1 + 2z_2 = 1 + 2\sqrt{3} \dots (3) \\ z_1 - z_2 = -\sqrt{3} + i \dots (2) \end{cases}$$

نجمع (3) و (2) فنجد:

$$z_2 = 1 + \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 1 + \sqrt{3} + i$$

ومنه:

بضرب معادلة (2) في العدد (2) نجد:

$$z_1 - z_2 = -\sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 1 + \sqrt{3} + i - \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 1 + 2i$$

ومنه:

$$S_n = 16 \left[\left(\frac{1}{4} \right)^0 + \left(\frac{1}{4} \right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \right]$$

$$S_n = 16 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$S_n = 16 \cdot \frac{4}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right]$$

$$S_n = \frac{64}{3} \left[\left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} - 1 \right]$$

مساب بكتابة المجموع S_n

$$S_n = \frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_1} + \dots + \frac{1}{V_n}$$

لدينا:

$$\frac{1}{V_n} = \frac{2^n}{1 + 2^n}$$

$$\frac{1}{V_n} = 2^n \cdot \frac{1 + 2^{-n}}{2^n}$$

$$\frac{1}{V_n} = 1 + 2^{-n}$$

(04)

إذاً ABC مثلث متساوي الأضلاع.
(ج) استنتج أن C هو مركز B يدور A مع
تعيين زاوية.

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_C - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}} (z_B - z_A)$$

ومنه C هو مركز B يدور A مع
زاوية $\frac{\pi}{3}$.

ج) تحديد الطبيعة الهندسية للرسم $ABCD$

$$z_C - z_B = 1 + \sqrt{3} + i - 1 - 2i = \sqrt{3} - i$$

$$z_C - z_B = \sqrt{3} - i$$

$$z_D - z_A = 1 + \sqrt{3} - i - 1 = \sqrt{3} - i$$

$$z_D - z_A = \sqrt{3} - i$$

$$z_C - z_B = z_D - z_A$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$

ومنه الراس $ABCD$ متوازي أضلاع

$$AB = BC$$

ومنه الراس $ABCD$ متساوي

(3) لا يمكن إيجاد قيم m بحيث يكون العدد

$$\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right)^m$$

$$\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right)^m$$

$$\arg \left[\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right)^m \right] = \frac{\pi}{2} + K\pi, K \in \mathbb{Z}$$

$$m \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = \frac{\pi}{2} + K\pi$$

$$-\frac{m\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + K\pi$$

$$-\frac{m}{3} = \frac{1}{2} + K$$

$$-m = \frac{3}{2} + 3K$$

ومنه لا يمكن إيجاد عدد طبيعي m لأن $\frac{3}{2} + 3K$ ليس عدداً صحيحاً.

(2) كتابة العدد $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1 + \sqrt{3} + i - 1}{1 + 2i - 1} = \frac{\sqrt{3} + i}{2i}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3} + i}{2i}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{2e^{i\frac{\pi}{2}}}$$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

ومنه:

$$\arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = -\frac{\pi}{3} + 2K\pi, K \in \mathbb{Z}$$

$$\arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = -\frac{\pi}{3} + 2K\pi, K \in \mathbb{Z}$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3} + 2K\pi, K \in \mathbb{Z}$$

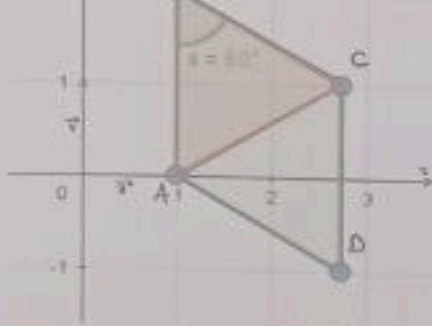
(ج) نعلم النقط A, B, C و D

$$A(1,0) \quad \text{ومنه} \quad z_A = 1$$

$$B(1,2) \quad \text{ومنه} \quad z_B = 1 + 2i$$

$$C(1 + \sqrt{3}, 1) \quad \text{ومنه} \quad z_C = 1 + \sqrt{3} + i$$

$$D(1 + \sqrt{3}, -1) \quad \text{ومنه} \quad z_D = z_C$$



نحدد طبيعة المثلث ABC

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1$$

$$AB = AC \quad \text{ومنه} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3} + 2K\pi, K \in \mathbb{Z}$$

(05)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

فإن:

(ج) دراسة إتجاه تغير الدالة g

جاء الدالة المشتقة $g'(x)$ في حالة الدالة $g(x)$ على R و $g(x)$ المتماثلة

$$g'(x) = e^{x+2} \cdot (x+2) \cdot e^{x+2}$$

$$g'(x) = (x+2) \cdot e^{2x+4}$$

$$g'(x) = (x+2) \cdot e^{2x+4}$$

إشارة الدالة المشتقة

(4) العبارات المركبة التالية R

R المتكافئة التي يكون لكل نقطة الذات اللفظة R

النقطة 'الذات اللفظة' R' مع A ونفسه 3 .

$$z' - z_A = -3(z - z_A)$$

$$z' - z_A = -3z + 3z_A$$

$$z' = -3z + 4$$

(5) البعض من أن النقطة C تنتمي إلى (5)

فيان الراسيا ABCD ماسي

(3) لا يمكن ايجاد قيم العدد الطبيعي m بحيث يكون العدد

$$\left(\frac{z_c - z_a}{z_b - z_a} \right)^m$$

الطلي

$$\left(\frac{z_c - z_a}{z_b - z_a} \right)^m$$

$$\arg \left(\frac{z_c - z_a}{z_b - z_a} \right)^m = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$m \arg \left(\frac{z_c - z_a}{z_b - z_a} \right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

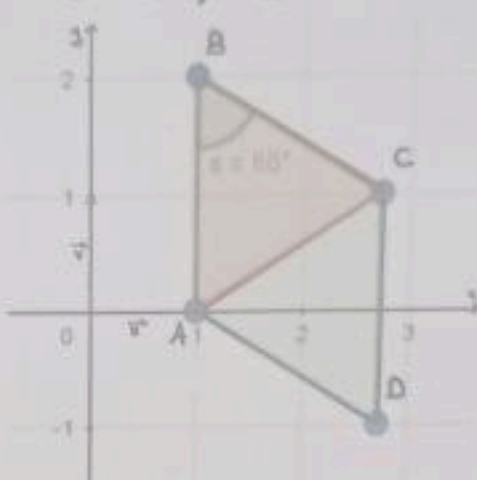
$$-\frac{m\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$-\frac{m}{3} = \frac{1}{2} + k$$

$$-m = \frac{3}{2} + 3k$$

ومن لا يمكن ايجاد عدد طبيعي m لان $\frac{3}{2} + 3k$ ليس عدداً صحيحاً.

$D(1, \sqrt{3}, -1)$ و $z_D = z_C$



زجده طرية العنات ABC

$$\frac{z_c - z_a}{z_b - z_a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\left| \frac{z_c - z_a}{z_b - z_a} \right| = 1$$

ومن $AB = AC$ و $(\vec{AB}, \vec{AC}) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

فان:

(ب) دراسة انجاصتير الدالة في

مساء الدالة المشتقة: الدالة قابلة للتفاضل على $\mathbb{R}$ و الدالة المشتقة هي

$$g'(x) = e^{x+2} + (x+2)e^{x+2}$$

$$g'(x) = (1+x+2)e^{x+2}$$

$$g'(x) = (x+3)e^{x+2}$$

اشاق الدالة المشتقة

$$g'(x) = (x+3)e^{x+2}$$

لدينا من امل كل $x \in \mathbb{R}$: $e^{x+2} > 0$

ومن اشاق لعا g' من اشاق $x+3$

نفع: $x+3 = 0$

ومن: $x = -3$

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
g'(x)	-	0	+

لانه الدالة في من اربعة نما على المجال $[-3, +\infty[$

الدالة في متناخضة نما على المجال $]-\infty, -3]$

جدول تغيرات الدالة

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
g'(x)	-	0	+
g(x)	$-\infty$	$-2e^{-1}$	$+\infty$

$$g(-3) = -2e^{-1}$$

$$g(-3) = -2e^{-1}$$

(ب) نبيس ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيدا

في $\mathbb{R}$ يقص $(-1, 1)$ و $(1, 1.5)$

(4) العنات المركبة للحال $\mathbb{R}$

الحال المتكامل الذي يرخص لكل نقطة الالات اللفة في

النقطة الالات اللفة لا مرع A ونسبه 3

$$z - z_A = -3(z - z_A)$$

$$z' = z_A - 3z + 3z_A$$

$$z' = -3z + 4z_A$$

$$z' = -3z + 4$$

ومن

(5) التقص من ان النقطة C تنتمي الى (A)

$$k \in \mathbb{Z}, \arg(z - z_A) = \arg(z_b - z_A) - \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$\arg(z - z_A) - \arg(z_b - z_A) = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$\arg \left(\frac{z - z_A}{z_b - z_A} \right) = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

أما

$$(\vec{AB}, \vec{AZ}) = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

ومن

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

ولدينا من الحواب 2, 4

اذا النقطة C تنتمي الى (A)

تحدد معبرية النقطة (A)

المعبرية (A) هي المستقيم (AC) مع اعد النقطة A

$$L_{004}$$

$$M_{04}$$

(4) مساء العنات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-2 + (x+2)e^{x+2}]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2 + x e^x e^2 + 2 e^x e^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x+2} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -2$$

فان:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-2 + (x+2)e^{x+2}]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x+2} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) = +\infty$$

الدالة g معرفة ومستمرة على $\mathbb{R}$ ومن ثم على المجال $[1.15, 1.14]$.
 الدالة g متزايدة تماماً على المجال $[-3, +\infty]$ ومن ثم

على المجال $[1.15, 1.14]$

لدينا $g(-1.14) \approx 0.03$ و $g(-1.15) \approx -0.05$

إذن $g(-1.15) \times g(-1.14) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيمة المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$
 تملك حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$ ومن $-1.15 < \alpha < -1.14$
 سيشارك $g(x)$ على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	x	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II) حساب النهاية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-2x + (x-1)e^{-x+2}]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \left[2 - \frac{x}{e^x} + (x+1)e^2 \right]$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

حيث

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-2x + (x-1)e^{-x+2}]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-2x + \left(\frac{x}{e^x} - e^x \right) e^2 \right]$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

حيث

(C) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-2x + (x-1)e^{-x+2} + 2x]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{-x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} - e^x \right) e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x) = 0$$

ومن ثم

المتغير المستقل x

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + 2x) = 0$$

وحيث أن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-2x)] = 0$$

أي

وعليه المستقيم $y = -2x$ والمعادلة $y = 2x$ هما مثلان المقاربين

(D) عند $+\infty$

(E) دراسة الوضع النسبي للنقطة $(1, 2)$ والمستقيم (A)

نحرم إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = (x-1)e^{-x+2}$$

لدينا من أجل كل $\alpha \in \mathbb{R}$ $e^{-x+2} > 0$

ومن ثم إشارة الفرق $f(x) - y$ من إشارة $x-1$

نضع

$$\frac{x-1}{x} = 0$$

$$x = 1$$

x	$-\infty$	x	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضع النسبي	(D) وضع تحت (A)	(E) وضع فوق (A)	(F) وضع فوق (A)

(F) تبين أنه من أجل كل x عكسي x $f(x) = g(x)$

الدالة f قابلة للاستمرار على $\mathbb{R}$ ولها المشتقة هي

$$f'(x) = -2 + e^{-x+2} - (x-1)e^{-x+2}$$

$$f'(x) = -2 + (1-x+1)e^{-x+2}$$

$$f'(x) = -2 + (-x+2)e^{-x+2}$$

لدينا من أجل كل $\alpha \in \mathbb{R}$ $f'(x) = -2 + (x+2)e^{-x+2}$

ومن ثم $g'(x) = -2 + (-x+2)e^{-x+2}$

$$f'(x) = g'(x) \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

إذن من أجل كل x

المتغير المستقل x

نضع $f(x) = 0$ و $g(x) = 0$

ومن ثم $x = \alpha$

(II) تعيين معادلة المماس

$$(I) y = f'(x)(x-2) + f(2)$$

$$f'(2) = -4 + e^0 \quad \text{و} \quad f(2) = -3$$

$$f'(2) = -3$$

$$(II) y = -2(x-2) - 3$$

$$y = -2x + 4 - 3$$

وعليه $\alpha = -x$

نضع $g(x) > 0$ و $g(x) < 0$

ومن ثم $x > -x$

وعليه $x < -x$

نضع $g(x) < 0$ و $g(x) > 0$

ومن ثم $-x < x$

وعليه $x > -x$

$$f(x) = -2 + e^{-x+2} \cdot (x-1)e^{-x+2}$$

$$f'(x) = -2 + (1-x+1)e^{-x+2}$$

$$f'(x) = -2 + (-x+2)e^{-x+2}$$

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = -2 + (x+2)e^{-x+2}$

$g(-x) = -2 + (-x+2)e^{-x+2}$ ومنه

أيضا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = g(-x)$

الاستنتاج : إشارة $f'(x)$

نضع $f'(x) = 0$ معادلة $g(-x) = 0$

$-x = 2$ ومنه $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

هنا

(ج) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot 2x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-2x + (x+2)e^{-x+2} \cdot 2x]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{-x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} - e^x \right) e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot 2x) = 0$$

ومن

[07]

تعيين معادلة المماس (أ)

(أ) $y = f'(2)(x-2) + f(2)$

حيث $f(2) = -2$ و $f'(2) = -4 + e^0$

$f'(2) = -3$

(أ) $y = -3(x-2) - 2$ وعليه

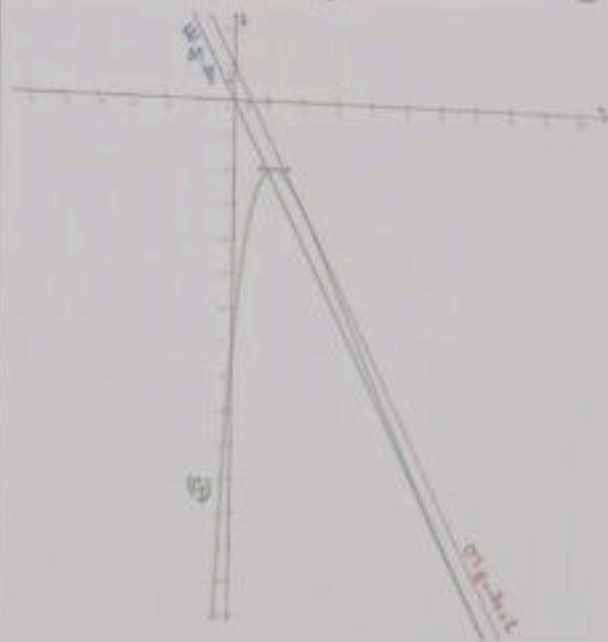
$y = -3x + 4 - 2$

(أ) $y = -3x + 2$

(ب) حساب $f(0)$: $f(0) = -2(0) + (0-1)e^{-0+2} = -2 + (-1)e^2 = -2 - e^2$

$$f(0) = -e^2$$

إشارة (أ)، (ب) و (ج)



(د) تعيين قيم الوسط الحديتين m من قبل المعادلة

$$e^{-x+2} - e^m = 0 \quad (x-1)e^{-x+2} = e^m$$

لدينا $(x-1)e^{-x+2} = e^m$

أيضا $(x-1)e^{-x+2} = e^m$

ومن $-2x + (x-1)e^{-x+2} = -2x + e^m$

وعليه $x = -2$

نضع $f'(x) > 0$ معادلة $g(-x) > 0$

$-x > 2$ ومنه $x < -2$

وعليه $x < -2$

نضع $f'(x) < 0$ معادلة $g(-x) < 0$

$-x < 2$ ومنه $x > -2$

وعليه $x > -2$

جدول إشارة $f'(x)$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-

(ج) تحديد إشارات زخم الدالة f

الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty, -2]$

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-2, +\infty[$

جدول زخم الدالة f

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-
$f'(x)$		$f'(-2)$	

(د) تعيين أن (أ) يمثل مماسا (ب) مماسا (ج) مماسا (د) مماسا

(أ) إذا كانت المعادلة $f(x) = f'(x)$ متساوية

من أجل ذلك نحل المعادلة $f(x) = f'(x)$

$$-2 + (x-1)e^{-x+2} = -2$$

$$(x-1)e^{-x+2} = 0$$

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $(x-1)e^{-x+2} = 0$ ومنه $x = 1$

أيضا المعنى (أ) يمثل مماسا (ب) مماسا (ج) مماسا (د) مماسا

ذات المعادلة 2

[08]

$$A = \int_0^1 (y - f(x)) dx$$

$$A = \int_0^1 (-2x + 2x - (x-1)e^{-x+2}) dx$$

$$A = - \int_0^1 (x-1)e^{-x+2} dx$$

$$A = [xe^{-x+2}]_0^1$$

$$A = e^{-1}$$

ومن

أيضا

$$f(x) = -2x + e^m$$

من معادلة الخط المماس $f(x) = f'(x)$ نعلم أن

المستقيم من المعادلة $f(x) = f'(x)$

المعادلة $e^{-x+2} = e^m$ نحل حدين متساويين

$$0 < e^m < 1$$

$$m < 0$$

$$m < 0$$

(د) استعمال الكسالة المعروفة $f(x) = f'(x)$

$$f(x) = f'(x) \Rightarrow -2x + e^m = -2x + e^m$$



x	$-\infty$	x	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-
$f'(x)$	$-\infty$	$f'(1)$	$-\infty$

(3) نعين أن (أ) يدل معالسا (ت) موزال (أ)

(5) "أ" معالسا لمعادن معطل الترمية

من أجل ذلك نحل المعادلة $f(x) = -2$

$$-2 + (-x+2)e^{-x+2} = -2$$

$$(-x+2)e^{-x+2} = 0$$

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x+2} > 0$ ومنه $-x+2 = 0$
 $x = 2$

لدينا المعنى (أ) يدل معالسا (ت) موزال (أ) عند الدقة

ذات المعادلة 2

(5) نعين قيم الوسط الحصى m من قبل المعادلة

$$(x-1)e^{-x+2} - e^m = 0$$

$$(x-1)e^{-x+2} - e^m = 0 \quad \text{لدينا}$$

$$(x-1)e^{-x+2} = e^m \quad \text{أثبات}$$

$$-2x + (x-1)e^{-x+2} = -2x + e^m \quad \text{ومن}$$

$$A = \int_0^1 (y - f(x)) dx$$

$$A = \int_0^1 (-2x + 2x - (x-1)e^{-x+2}) dx$$

$$A = - \int_0^1 (x-1)e^{-x+2} dx$$

$$A = [xe^{-x+2}]_0^1$$

$$A = e^{-1}$$

ومن

انتهى

$$f(x) = -2x + e^m$$

معصورة حلول المعادلة معا من أجل نقطة تقاطع (أ) مع

المستقيم من المعادلة $y = -2x + e^m$

المعادلة $-2x + e^m = (x-1)e^{-x+2}$ نحل حلين معبارين

إذا رقط إذا كان $0 < e^m < 1$

أثبات $m < 1$

ومن $m < 0$

(6) باستخدام المعادلة المعروفة نعين $H(x)$ الدالة

$$H(x) = \int_1^x (t-1)e^{-t+2} dt$$

$$u(t) = t-1 \quad u'(t) = 1$$

$$v(t) = e^{-t+2} \quad v'(t) = -e^{-t+2}$$

$$H(x) = \left[(t-1)e^{-t+2} \right]_1^x + \int_1^x e^{-t+2} dt$$

$$H(x) = \left[(t-1)e^{-t+2} \right]_1^x - \left[e^{-t+2} \right]_1^x$$

$$H(x) = \left[e^{-t+2} (-t+1-1) \right]_1^x$$

$$H(x) = \left[-te^{-t+2} \right]_1^x$$

$$H(x) = -xe^{-x+2} + e$$

ومن

$$f(x) = -2x + (x-1)e^{-x+2} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x + (x-1)e^{-x+2}$$

نضع من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ $R(x) = f(x) + 2x$

ومن الدالة H مع الدالة الأصلية للدالة R والتي

نستخدم من أجل $x=1$

(7) حساب مساحة المنحني المنحني بالمعنى (أ)

والمنحنيات التي منها $y=0$ و $x=1$

$$A = \int_0^1 |f(x) - y| dx$$

الموضوع الثاني:

$$P(B \cap C) \neq P(B) \times P(C)$$

ومن هنا، إذن الحدثان B و C ليسا مستقلين

(3) إيجاد $P_C(B)$

$$P_C(B) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$$

$$P_C(B) = \frac{1}{35} \times \frac{31}{31}$$

$$P_C(B) = \frac{1}{31}$$

ومن هنا:

(4) تعيين مجموعة قيم المتغير العشوائي X

$$X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

(5) تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X

$X = x_i$	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{8}{63}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{22}{63}$	$\frac{8}{63}$	$\frac{1}{63}$

$$P(X=0) = \frac{C_4^0}{C_7^4} \times \frac{1^4}{3^4}$$

$$P(X=0) = \frac{8}{63}$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_4^3}{C_7^4} \times \frac{1^1}{3^1} + \frac{C_4^1}{C_7^4} \times \frac{(1 \times 2) \times 2}{3^2}$$

$$P(X=1) = \frac{8}{21}$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 \times C_4^2}{C_7^4} \times \frac{1^2}{3^2} + \frac{C_4^2}{C_7^4} \times \frac{1^2}{3^2} + \frac{C_3^1 \times C_4^3}{C_7^4} \times \frac{(1 \times 2) \times 2}{3^3}$$

$$P(X=2) = \frac{22}{63}$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^3 \times C_4^1}{C_7^4} \times \frac{1^3}{3^3} + \frac{C_4^3}{C_7^4} \times \frac{(1 \times 2) \times 2}{3^2}$$

$$P(X=3) = \frac{8}{63}$$

05 مثال

مسألة التمرين 01

(1) حساب $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$

$$\text{card}(\omega) = C_7^3$$

$$\text{card}(\omega) = 7!$$

$$\text{card}(\omega) = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{6 \times 4!}$$

$$\text{card}(\omega) = 35$$

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\omega)}$$

$$P(A) = \frac{C_2^1 \times C_3^2 \times C_2^1}{C_7^3}$$

$$P(A) = \frac{12}{35}$$

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\omega)}$$

$$P(B) = \frac{C_3^3}{C_7^3}$$

$$P(B) = \frac{1}{35}$$

$$P(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\omega)}$$

$$P(C) = \frac{C_3^1 \times C_4^2 + C_3^2 \times C_4^1 + C_3^3}{C_7^3}$$

$$P(C) = \frac{31}{35}$$

(2) حساب $P(B \cap C)$

$B \cap C$ "الحصول على زلزال بحريات من ضمن اللون وكرة حمراء على الأقل"

$$B \cap C = \{RRR\}$$

$$P(B \cap C) = \frac{\text{card}(B \cap C)}{\text{card}(\omega)}$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{35}$$

الحدثان B و C ليسا مستقلين.

التحليل

$$P(B) \times P(C) = \frac{12}{35} \times \frac{31}{35} \text{ و } P(B \cap C) = \frac{1}{35}$$

$$P(B) \times P(C) = \frac{372}{1225}$$

04 مثال

مسألة التمرين 02

$$P(X=4) = \frac{C_3^4}{C_7^4} \times \frac{1^4}{3^4}$$

$$P(X=4) = \frac{1}{63}$$

حساب $P(e^{2X} < 2024)$

حل في R المراجعة $e^{2X} < 2024$

$$2X < \ln 2024$$

$$X < \frac{\ln 2024}{2}$$



$$P(X=1) = \frac{8}{21}$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^2 \times \frac{1}{3^2} + C_4^2 \times \frac{1}{3^2} + C_5^2 \times \frac{1}{3^2} + C_6^2 \times \frac{1}{3^2}}{C_7^2}$$

$$P(X=2) = \frac{28}{63}$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^3 \times \frac{1}{3^3} + C_4^3 \times \frac{1}{3^3} + C_5^3 \times \frac{1}{3^3} + C_6^3 \times \frac{1}{3^3}}{C_7^3}$$

$$P(X=3) = \frac{8}{63}$$

BNC = "الحصول على زلات كريات من ضمن اللون وكرة حمراء على الأقل"

$$BNC = \{RRR\}$$

$$P(BNC) = \frac{\text{card}(BNC)}{\text{card}(\Omega)}$$

$$P(BNC) = \frac{1}{35}$$

الحدثان B و C ليسا مستقلان.

التحليل

$$P(B) \times P(C) = \frac{12}{35} \times \frac{31}{35} \text{ و } P(B \cap C) = \frac{1}{35}$$

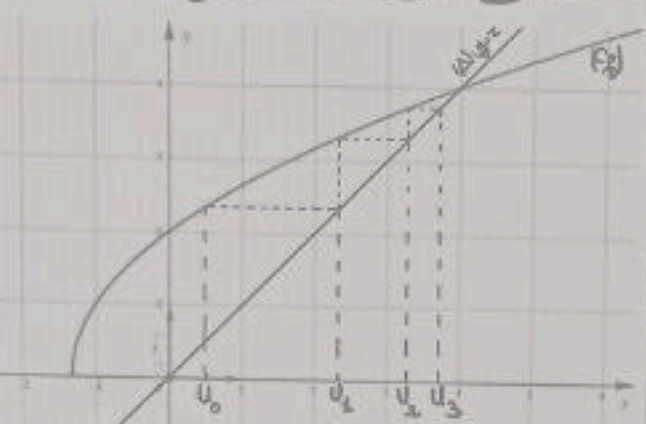
$$P(B) \times P(C) = \frac{372}{1225}$$

10

04 سؤال

مناقشة التعريف 05

1) نفصل البرهان الذي على صور التوزيع دون حسابها مع إبراز خط التوزيع



2) نضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها لدينا: $0 < u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ و $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ متزايدة تمامًا ومتقاربة نحو نقطة نهاية تتماثل ضمن (P) مع المستقيم (A) ذي المعادلة: $y = x$

3) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < u_n < 4$

نصمم P(n) الخاصة: $0 < u_n < 4$ والتحقق أن P(0) صحيحة.

$$\text{لدينا: } 0 < \frac{1}{2} < 4 \text{ و } u_0 = \frac{1}{2}$$

$$\text{أي: } 0 < u_0 < 1$$

وهو P(0) صحيحة.

نقرن أن P(n) صحيحة من أجل n عدد طبيعي كافي أننا $0 < u_n < 4$ ونبرهن صحة P(n+1) أي: $0 < u_{n+1} < 4$

$$\text{لدينا: } 0 < u_n < 4$$

$$0 < 3u_n < 12$$

$$4 < 3u_n + 4 < 16$$

$$\sqrt{4} < \sqrt{3u_n + 4} < \sqrt{16}$$

$$0 < 2 < u_{n+1} < 4$$

$$P(X=4) = \frac{C_3^3}{C_7^3} \times \frac{1}{3^3}$$

$$P(X=4) = \frac{1}{63}$$

حساب $P(e^{2X} < 2024)$

حلي R الصراحة: $e^{2X} < 2024$

$$2X < \ln 2024$$

$$X < \frac{\ln 2024}{2}$$

وهو: $X=0$ أو $X=1$ أو $X=2$ أو $X=3$

$$P(e^{2X} < 2024) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

$$P(e^{2X} < 2024) = 1 - P(X=4)$$

$$P(e^{2X} < 2024) = \frac{62}{63}$$

وهو:

3) حساب احتمال الحصول على كرة واحدة صفراء

ليكن الحدث D: "الحصول على كرة واحدة صفراء"

$$P(D) = \frac{\text{card}(D)}{\text{card}(\Omega)}$$

$$P(D) = \frac{C_{n+2}^2 \times C_5^2 \times \frac{3}{4^2} + C_5^2 \times \frac{1}{4^2}}{C_{n+7}^2}$$

$$P(D) = \frac{5 \cdot \frac{(n+2)!}{(n+1)!} \times \frac{9}{16} + \frac{10}{(n+7)!} \times \frac{1}{16}}{2!(n+5)!}$$

$$P(D) = \frac{5 \cdot (n+2)}{(n+7)(n+6)} \times \frac{9}{16} + \frac{10}{(n+7)(n+6)} \times \frac{1}{16}$$

$$P(D) = \frac{45}{8} \times \frac{n+2}{n^2+13n+42} + \frac{5}{4} \times \frac{1}{n^2+13n+42}$$

$$P(D) = \frac{45(n+2)+10}{8(n^2+13n+42)}$$

وهو:

11

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $2 < \sqrt{3u_n + 4} < 4$

$$6 < \sqrt{3u_n + 4} + 4 < 8$$

$$\frac{1}{8} < \frac{1}{\sqrt{3u_n + 4} + 4} < \frac{1}{6}$$

$$0 < \frac{3}{8} < \frac{3}{\sqrt{3u_n + 4} + 4} < \frac{1}{2}$$

$$0 < \frac{3}{\sqrt{3u_n + 4} + 4} < \frac{1}{2} \text{ و عليه من أجل كل } n \in \mathbb{N}$$

$$0 < u_{n+1} - u_n < \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}) \text{ و } n \in \mathbb{N}$$

$$u_{n+1} - u_n = 4 - \sqrt{3u_n + 4}$$

$$u_{n+1} - u_n = (4 - \sqrt{3u_n + 4})(4 + \sqrt{3u_n + 4})$$

وهو P(n+1) صحيحة.

إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع ومن أجل عدد طبيعي n: $0 < u_n < 4$

نبيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n + 1)(4 - u_n)}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{3u_n + 4} - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(\sqrt{3u_n + 4} - u_n)(\sqrt{3u_n + 4} + u_n)}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 4 - u_n^2}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$$

$0 < u_n < 4$
 نعلم $P(n)$ الحاصية
 التحقق أن $P(0)$ صحيحة
 لدينا $0 < \frac{1}{2} < 4$ و $u_0 = \frac{1}{2}$
 أيا $0 < u_0 < 4$
 ومنه $P(0)$ صحيحة

نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل n عند طبعها كيمي أيما
 $0 < u_{n+1} < 4$ ونسعى من صحة $P(n+1)$ أيا
 لدينا $0 < u_n < 4$
 $0 < 3u_n < 12$
 $4 < 3u_n + 4 < 16$
 $\sqrt{4} < \sqrt{3u_n + 4} < \sqrt{16}$
 $0 < 2 < u_{n+1} < 4$

$P(0) = \frac{C_{n+2}^1 \times C_5^1}{C_{n+7}^1} \times \frac{3^2}{4^2} + \frac{C_5^2}{C_{n+7}^2} \times \frac{1^2}{4^2}$
 $P(0) = \frac{5 \cdot (n+2)!}{(n+7)!} \times \frac{9}{16} + \frac{10}{2!(n+5)!} \times \frac{1}{16}$
 $P(0) = \frac{5 \cdot (n+2)}{(n+7)(n+6)} \times \frac{9}{16} + \frac{10}{(n+7)(n+6)} \times \frac{1}{16}$
 $P(0) = \frac{45}{8} \cdot \frac{n+2}{n^2+13n+42} + \frac{5}{4} \times \frac{1}{n^2+13n+42}$
 $P(0) = \frac{45(n+2)+10}{8(n^2+13n+42)}$

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$
 $6 < \sqrt{3u_n + 4} + 4 < 8$
 $\frac{1}{8} < \frac{1}{\sqrt{3u_n + 4} + 4} < \frac{1}{6}$
 $0 < \frac{3}{8} < \frac{3}{\sqrt{3u_n + 4} + 4} < \frac{1}{2}$
 وعليه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$
 $0 < \frac{3}{\sqrt{3u_n + 4} + 4} < \frac{1}{2}$
 نبيّن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})$
 $u_n - u_{n+1} = u_n - \sqrt{3u_n + 4}$
 $u_n - u_{n+1} = \frac{(u_n - \sqrt{3u_n + 4})(u_n + \sqrt{3u_n + 4})}{u_n + \sqrt{3u_n + 4}}$
 $u_n - u_{n+1} = \frac{16 - 3u_n - 4}{u_n + \sqrt{3u_n + 4}}$
 $u_n - u_{n+1} = \frac{12 - 3u_n}{u_n + \sqrt{3u_n + 4}}$
 $u_n - u_{n+1} = \frac{3}{u_n + \sqrt{3u_n + 4}} (u_n - u_{n-1})$
 لدينا $0 < \frac{3}{u_n + \sqrt{3u_n + 4}} < \frac{1}{2}$
 $0 < \frac{3}{u_n + \sqrt{3u_n + 4}} (u_n - u_{n-1}) < \frac{1}{2} (u_n - u_{n-1})$
 إذن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n - u_{n+1} < \frac{1}{2} (u_n - u_{n-1})$
 (ب) نبيّن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ عند طبعها n
 $0 < u_n - u_{n+1} < 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$
 لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n - u_{n+1} < \frac{1}{2} (u_n - u_{n-1})$
 من أجل $n=0$: $0 < u_0 - u_1 < \frac{1}{2} (u_0 - u_{-1})$
 من أجل $n=1$: $0 < u_1 - u_2 < \frac{1}{2} (u_1 - u_0)$
 من أجل $n=2$: $0 < u_2 - u_3 < \frac{1}{2} (u_2 - u_1)$
 من أجل $n=3$: $0 < u_3 - u_4 < \frac{1}{2} (u_3 - u_2)$
 من أجل $n=4$: $0 < u_4 - u_5 < \frac{1}{2} (u_4 - u_3)$
 نضرب المتباينات ① إلى ⑤ طرفي نضرب بعد

ومنه $P(n+1)$ صحيحة
 إذن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع ومن أجل كل عدد طبيعي n
 $0 < u_n < 4$
 (ج) نبيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n
 $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n + 1)(u_n - u_{n-1})}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$
 $u_{n+1} - u_n = \sqrt{3u_n + 4} - u_n$
 $u_{n+1} - u_n = \frac{(\sqrt{3u_n + 4} - u_n)(\sqrt{3u_n + 4} + u_n)}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$
 $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 4 - u_n^2}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$
 $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n + 4}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$
 من جهة أخرى: $(u_n + 1)(u_n - u_{n-1}) = u_n^2 - u_{n-1}^2 + u_n - u_{n-1}$
 $(u_n + 1)(u_n - u_{n-1}) = -u_n^2 + 3u_n + 4$
 $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n + 1)(u_n - u_{n-1})}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$
 ومنه
 (د) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)
 لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n + 1)(u_n - u_{n-1})}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$
 ولدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 < u_n < 4$
 ومنه $-4 < -u_n < 0$ و $1 < u_n + 1 < 5$
 $0 < u_n - u_{n+1} < 4$
 وعليه $(u_n + 1)(u_n - u_{n-1}) > 0$ و $\sqrt{3u_n + 4} + u_n > 0$
 ومنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n > 0$
 إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً.
 نعلم المتتالية (u_n) متقاربة.
 التعليل
 المتتالية (u_n) متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى بالعدد 4
 خصماً متقاربة نوعاً محدودة.
 (هـ) نبيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n
 $0 < \frac{3}{\sqrt{3u_n + 4} + 4} < \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} \cos \theta_A = \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ \cos \theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ \sin \theta_A = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \theta_A = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$Z_A = 2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

إذن: استنتاج الشكل الأسلاك من Z_A و Z_B :

$$Z_B = 2\sqrt{3} e^{-i\frac{\pi}{6}} \quad \text{وهو} \quad Z_B = \overline{Z_A}$$

$$Z_C = -\sqrt{3} + 3i \quad \text{لدينا}$$

$$Z_C = i\sqrt{3} + 3i \quad \text{أو}$$

$$Z_C = i(3 + \sqrt{3})$$

$$Z_C = i Z_A \quad \text{وهو: } Z_C = i Z_A \quad \text{حيث } i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$Z_C = e^{i\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$Z_C = 2\sqrt{3} e^{i\frac{3\pi}{6}}$$

$$\left(\frac{Z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{1145} + \left(\frac{Z_B}{2\sqrt{3}}\right)^{1145} = -\sqrt{3} i$$

$$\left(\frac{Z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{1145} = \left(\frac{2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}}\right)^{1145}$$

$$\left(\frac{Z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{1145} = e^{i\frac{1145\pi}{6}}$$

$$\left(\frac{Z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{1145} = \cos\left(\frac{1145\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{1145\pi}{6}\right)$$

$$\frac{1145\pi}{6} = \frac{240 \times 6\pi + 5\pi}{6}$$

$$\frac{1145\pi}{6} = 2(120)\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$\left(\frac{Z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{1145} = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$$

$$\left(\frac{Z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{1145} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\left(\frac{Z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{1145} = -\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\left(\frac{Z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{1145} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \quad \text{إذن:}$$

$$0 \leq h - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (h - U_0)$$

$$0 \leq h - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (h - \frac{1}{2})$$

$$0 \leq h - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{3}{2}$$

$$0 \leq h - U_n \leq 7 \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{2}$$

$$0 \leq h - U_n \leq 7 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$0 \leq h - U_n \leq 7 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 7 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (h - U_n) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = h$$

$$\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{\text{MHS}} = \left(\frac{2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}}\right)^{\text{MHS}}$$

$$\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{\text{MHS}} = e^{-\frac{1145\pi}{6}}$$

$$\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{\text{MHS}} = \cos\left(\frac{1145\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{1145\pi}{6}\right)$$

$$\frac{1145\pi}{6} = \frac{1140\pi + 5\pi}{6}$$

$$\frac{1145\pi}{6} = 2(120)\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{1145}{5} \left| \frac{6}{1140} \right|$$

$$\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{\text{MHS}} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$$

$$\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{\text{MHS}} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{\text{MHS}} = -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{\text{MHS}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

اذن:

$$\Delta = (-6) - 1145\pi$$

$$\Delta = -12$$

$$\Delta = (2i\sqrt{3})^2$$

مما له حلين متمايين هما:

$$z_1 = \frac{6 + 2i\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{6 - 2i\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1 = 3 + i\sqrt{3} \quad z_2 = 3 - i\sqrt{3}$$

$$S = \{3 - i\sqrt{3}, 3 + i\sqrt{3}\}$$

اذن:

(14) كتابة z_A على الشكل الأسّي:

$$z_A = 3 + i\sqrt{3}$$

$$|z_A| = \sqrt{9+3}$$

$$|z_A| = \sqrt{12}$$

$$|z_A| = 2\sqrt{3}$$

13

$$z_6 = \frac{3\sqrt{3} + i(3 + \sqrt{3})}{3}$$

ومنه:

$$\| \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{OH} \| = 9$$

$$\| \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GH} \| = 9$$

$$\| 3\overrightarrow{GH} \| = 9$$

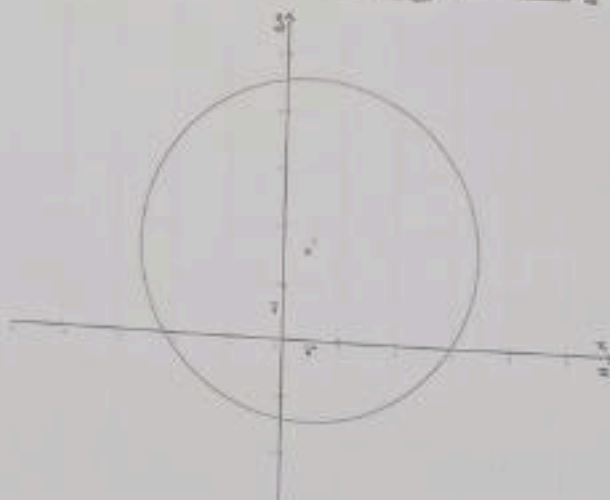
$$GH = 3$$

ومنه:

اذن (14) مجموعة النقط Δ من المستوى هي الدائرة التي

مركزها $\left(\frac{3\sqrt{3}}{3}, \frac{3 + \sqrt{3}}{3}\right)$ ونصف قطرها 3.

(15) إنشاء المجموعة (14)



$$z_0 = -\sqrt{3} - 3i$$

اذن (16) نظيرة C بالنسبة لخط مستقيم الموازي

$$z_D = \overline{z_C}$$

$$z_D = -\sqrt{3} + 3i$$

$$z_D = -\sqrt{3} - 3i$$

(17) تعيين نقطة الدور المركبة $\frac{z_0 \cdot z_A}{z_C \cdot z_B}$

$$\frac{z_0 \cdot z_A}{z_C \cdot z_B} = \frac{(-\sqrt{3} - 3i)(3 - i\sqrt{3})}{(\sqrt{3} + 3i)(3 + i\sqrt{3})}$$

$$\frac{z_0 \cdot z_A}{z_C \cdot z_B} = \frac{-(3 + \sqrt{3}) - i(3\sqrt{3} - 9)}{(3 + \sqrt{3}) + i(3\sqrt{3} + 9)}$$

$$\frac{z_0 \cdot z_A}{z_C \cdot z_B} = \frac{-(3 + \sqrt{3}) - i(3\sqrt{3} - 9)}{(3 + \sqrt{3}) + i(3\sqrt{3} + 9)}$$

$$\frac{z_0 \cdot z_A}{z_C \cdot z_B} = \frac{-(3 + \sqrt{3}) - i(3\sqrt{3} - 9)}{(3 + \sqrt{3}) + i(3\sqrt{3} + 9)}$$

$$\left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^{\text{MHS}} = \left(\frac{2\sqrt{3}e^{-\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}}\right)^{\text{MHS}}$$

$$\left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^{\text{MHS}} = e^{-\frac{1145\pi}{6}}$$

$$\left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^{\text{MHS}} = \cos\left(\frac{-1145\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-1145\pi}{6}\right)$$

$$\left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^{\text{MHS}} = \cos\left(\frac{1145\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{1145\pi}{6}\right)$$

$$\frac{1145\pi}{6} = 2(120)\pi + \frac{5\pi}{6}$$

$$\left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^{\text{MHS}} = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^{\text{MHS}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

اذن:

$$\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{\text{MHS}} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^{\text{MHS}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{\text{MHS}} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^{\text{MHS}} = -\frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{\text{MHS}} + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^{\text{MHS}} = -\sqrt{3}$$

اذن:

(18) تحديد طبيعة المثلث OAC :

$$z_C = i z_A$$

$$\frac{z_C}{z_A} = i$$

$$\frac{z_C - z_0}{z_A - z_0} = i$$

$$\arg\left(\frac{z_C - z_0}{z_A - z_0}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{و} \quad \left|\frac{z_C - z_0}{z_A - z_0}\right| = 1$$

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad |z_C - z_0| = |z_A - z_0|$$

$$OC = OA$$

اذن المثلث OAC قائم في O ومتساوي الساقين

(19) تعيين z_G لافقة G مركز ثقل المثلث OAC

$$z_G = \frac{z_0 + z_A + z_C}{3}$$

$$z_G = \frac{-\sqrt{3} - 3i + 3 + i\sqrt{3} + 3i}{3}$$

14

$$f(1,1) = 1$$

$$g(1) = 1$$

$$a - b \ln(t) = 1$$

$$a = 1$$

$$\frac{z_0 - z_A}{z_C - z_B} = \frac{(-\sqrt{3} - 3i)(1 + i)}{(3 + i\sqrt{3})(1 - i)}$$

$$\frac{z_0 - z_A}{z_C - z_B} = \frac{1 + i}{1 - i}$$

$$z_c = iz_a$$

$$\frac{z_c}{z_a} = i$$

$$\frac{z_c - z_o}{z_a - z_o} = i$$

$$\arg\left(\frac{z_c - z_o}{z_a - z_o}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ و } \left|\frac{z_c - z_o}{z_a - z_o}\right| = 1$$

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad ; \quad |z_c - z_o| = |z_a - z_o|$$

$$OC = OA$$

إذن المثلث OAC قائم في O ومتساوي الساقين
 (ب) نعيّن z_g الحقة G مركز مثلث OAC

$$z_g = \frac{z_o + z_a + z_c}{3}$$

$$z_g = \frac{3 + i\sqrt{3} - \sqrt{3} + 3i}{3}$$

$$z_o = -\sqrt{3} - 3i$$

لدينا Δ نظيرة C بالنسبة لخط مرور المراكز

$$z_o = \overline{z_c}$$

$$z_o = -\sqrt{3} + 3i$$

$$z_o = -\sqrt{3} - 3i$$

(ج) نعيّن بعدد المركب $\frac{z_o \cdot z_a}{z_c - z_o}$

$$\frac{z_o \cdot z_a}{z_c - z_o} = \frac{(-\sqrt{3} - 3i)(-3 - i\sqrt{3})}{-\sqrt{3} + 3i - 3 - i\sqrt{3}}$$

$$\frac{z_o \cdot z_a}{z_c - z_o} = \frac{-(3 + \sqrt{3}) - i(3 + \sqrt{3})}{-(3 + \sqrt{3}) + i(3 + \sqrt{3})}$$

$$\frac{z_o \cdot z_a}{z_c - z_o} = \frac{-(3 + \sqrt{3}) - i(3 + \sqrt{3})}{-(3 + \sqrt{3}) + i(3 + \sqrt{3})}$$

لدينا $A(1,1) \in (C)$

$$g(-1) = 1$$

$$a - b \ln(1) = 1$$

$$a = 1$$

ولدينا $A(1,1)$ ينتمي الى المماس الذي يمر من المبدأ

$$y_1 = g'(1)x_1$$

الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-1, +\infty[$ ودالتها المستمرة

$$g'(x) = b \ln(x+2) + \frac{bx}{x+2}$$

$$g'(1) = b \ln(1) + \frac{b}{1}$$

$$g'(1) = -b$$

$$1 = -b(-1)$$

$$b = 1$$

$$g(x) = 1 + x \ln(x+2)$$

(II) معيار النهايات

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 + x \ln(x+2)]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+2) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} [1 + x \ln(x+2)]$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \ln(x+2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$$

التفسير المبرهن للنسبة
 المبرهن (Q) يقبل مستقيم معان α و β لخط مرور
 التماس معادلته $\alpha x = \beta$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{z_o - z_a}{z_c - z_o} = \frac{(-3 - i\sqrt{3}) - (1 + i)}{(-3 + i\sqrt{3}) - (1 - i)}$$

$$\frac{z_o - z_a}{z_c - z_o} = \frac{1+i}{1-i}$$

$$\frac{z_o - z_a}{z_c - z_o} = \frac{(1+i)^2}{2}$$

$$\frac{z_o - z_a}{z_c - z_o} = \frac{2i}{2}$$

$$\frac{z_o - z_a}{z_c - z_o} = i$$

$$\arg\left(\frac{z_o - z_a}{z_c - z_o}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

إذن المستقيمان (BC) و (AD) متعامدان

(ج) نعيّن قيم العدد الطبيعي m حتى يكون $\left(\frac{z_a - z_o}{z_b - z_c}\right)^m$

تخيل صرف جزؤه التخيلي من حيث تنمنا

$$\arg\left[\left(\frac{z_a - z_o}{z_b - z_c}\right)^m\right] = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$m \arg\left(\frac{z_a - z_o}{z_b - z_c}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\frac{m\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\frac{m}{2} = \frac{1}{2} + 2k$$

$$m = 1 + 4k, k \in \mathbb{N}$$

ومنه:

مسافة التعريف 04

(04 مثال)

(ج) نعيّن العددين الجذريين a و b
 لدينا المصنف (Q) يقبل عند النهاية $A(1,1)$ معان α و β
 من المبدأ

(ج) جدول إشارات $f'(x)$

x	-2	x	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

اذن الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-2, \alpha]$
الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[\alpha, +\infty[$

جدول تغير الدالة f

x	-2	x	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(3) نبيّن أن: $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2+x}$

لدينا: $f'(x) = 0$ أي: $\ln(x+2) + \frac{x}{x+2} = 0$

$$\ln(x+2) = -\frac{x}{x+2}$$

ولدينا: $f(x) = 1 + x \ln(x+2)$

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2+x}$$

إذن: $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2+x}$

لدينا: $-0.6 < x < -0.5$

ومنه: $(-0.6)^2 < x^2 < (-0.5)^2$ و $-2.06 < 2+x < -1.5$

$$0.25 < x^2 < 0.36 \quad 1.4 < 2+x < 1.5$$

$$\frac{1}{1.5} < \frac{1}{2+x} < \frac{1}{1.4}$$

بضرب ① و ② نحصل على:

$$\frac{0.25}{1.5} < \frac{x^2}{2+x} < \frac{0.36}{1.4}$$

$$-\frac{0.36}{1.4} < -\frac{x^2}{2+x} < -\frac{0.25}{1.5}$$

$$1 - \frac{0.36}{1.4} < 1 - \frac{x^2}{2+x} < 1 - \frac{0.25}{1.5}$$

$$0.74 < f(x) < 0.83$$

الدالة f قابلة للاستمرار على $]-2, +\infty[$ والدالة المستمرة صغرى.

$$f(x) = \ln(x+2) + \frac{x}{x+2}$$

دراسة إشارات تغير الدالة f

الدالة f قابلة للاستمرار على $]-2, +\infty[$ والدالة المستمرة صغرى.

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{x+2-x}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x+2+2}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x+4}{(x+2)^2}$$

لدينا من أجل كل $x \in]-2, +\infty[$: $(x+2)^2 > 0$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $x+4$

$$x+4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

ومنه: $x = -4$

جدول إشارات $f'(x)$

x	-2	x	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

اذن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]-2, +\infty[$

(ب) نبيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ قابل حل وحيداً حيث: $-0.6 < x < -0.5$

الدالة f معرفة ومستمرة على $]-2, +\infty[$ ومن ثم على المجال $[-0.6, -0.5]$

الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]-2, +\infty[$ ومن ثم على المجال $[-0.6, -0.5]$

لدينا: $f(-0.6) \approx 0.07$ و $f(-0.5) \approx -0.09$

$$f(-0.6) \times f(-0.5) < 0$$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ قابل حل وحيداً في $\mathbb{R}$ ضمن $-0.6 < x < -0.5$

(4) نبيّن أن المعام (ت) يشمل الصدا 0 إذا وظ

$$f(x_0) = x_0 f'(x_0)$$

لدينا: $y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

المعام (ت) يشمل الصدا 0 إذا وظ

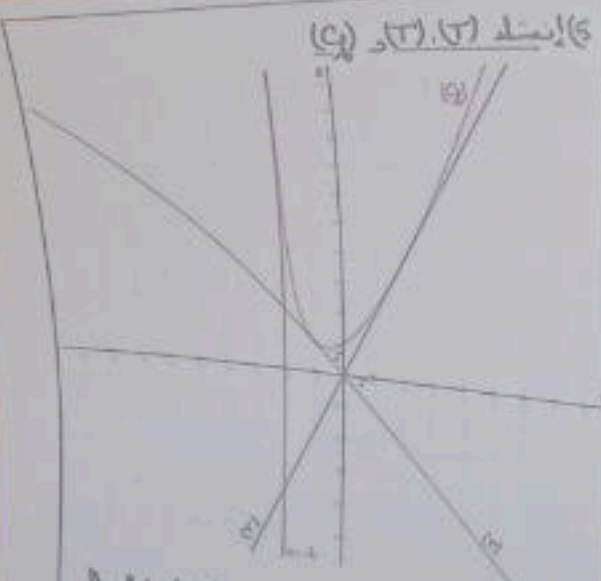
$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0)$$

$$f(x_0) = x_0 f'(x_0)$$

ومنه: $f(x_0) = x_0 f'(x_0)$

(ب) نبيّن أن المعام (ق) قابل معام (ت) و (ج)

بشمل الصدا 0 مع زعيم معادلة لكل معام



الخطوط (1) إلى (20) هي أمثلة للدالة f على المجال

$$\ln(x+2) = -\frac{1}{2+x}$$

$$f(x) = 1 + x \ln(x+2)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{x^2}{2+x}$$

أثبتنا حصول $f'(x) > 0$

$$-0.6 < x < 0.5$$

$$2.96 < 2+x < 2.95 \text{ و } (-0.5)^2 < x^2 < (-0.6)^2$$

$$1.4 < 2+x < 1.5 \quad 0.25 < x^2 < 0.36 \quad (1)$$

$$\frac{1}{1.5} < \frac{1}{2+x} < \frac{1}{1.4} \quad (2)$$

بصرف (1) و (2) نعرف بمخرج زائد

$$\frac{0.25}{1.5} < \frac{x^2}{2+x} < \frac{0.36}{1.4}$$

$$-\frac{0.36}{1.4} < -\frac{x^2}{2+x} < -\frac{0.25}{1.5}$$

$$1 - \frac{0.36}{1.4} < 1 - \frac{x^2}{2+x} < 1 - \frac{0.25}{1.5}$$

$$0.74 < f(x) < 0.83 \quad \text{إذن}$$

[16]

أذن الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]-0.6, +\infty[$ و $f(0) = 1$

نستبين أن المعادلة $f(x) = 0$ ليس لها حل وحيد حيث $-0.6 < x < 0.5$

الدالة f معرفة ومستمرة على $]-0.6, +\infty[$ ومن ثم على المجال $[-0.6, 0.5]$

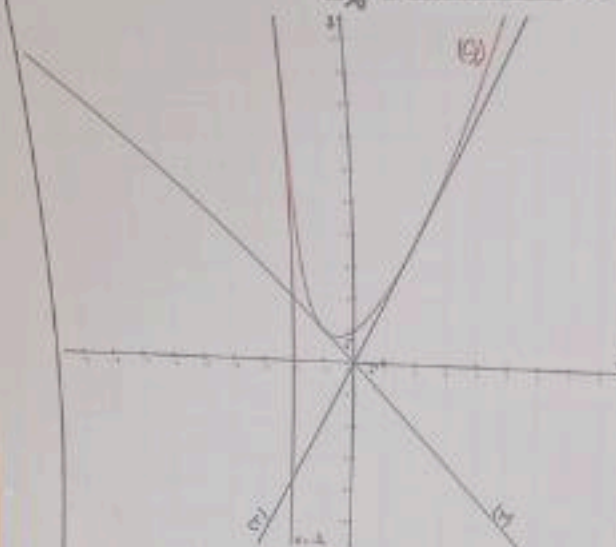
الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]-0.6, +\infty[$ ومن ثم على المجال $[-0.6, 0.5]$

$$f'(-0.5) \approx 0.07 \text{ و } f'(-0.6) \approx -0.09$$

$$f'(-0.5) \times f'(-0.6) < 0$$

إذن حسب مبرهنة القيمة المتوسطة المعادلة $f'(x) = 0$ ليس لها حل وحيد في $\mathbb{R}$ إذن $-0.6 < x < 0.5$

5) إنبطة (1), (2), (3) و (4)



6) نتحقق أن الدالة F دالة أولية للدالة f على المجال $]-0.6, +\infty[$

الدالة F قابلة للاشتقاق على $]-0.6, +\infty[$ و $F'(x) = f(x)$

$$F'(x) = 2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \left[2x \ln(x+2) + \frac{x^2-4}{x+2} \right]$$

$$F'(x) = 2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} (2x \ln(x+2) + x - 2)$$

$$F'(x) = 2 - \frac{x}{2} + x \ln(x+2) + \frac{x}{2} - 1$$

$$F'(x) = 1 + x \ln(x+2)$$

إذن الدالة F دالة أولية للدالة f على المجال $]-0.6, +\infty[$

7) حساب $S(x)$

$$S(x) = \int_0^x f(t) dt$$

$$S(x) = [F(x)]_0^x$$

$$S(x) = F(x) - F(0)$$

$$S(x) = -2 \ln(2) - 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x^2 - 4) \ln(x+2)$$

8) مبرهنة التفاضل المتكامل بين المتكاملين $S(x)$ و $f(x)$

$$x=0 \text{ و } x=1$$

9) نتبين أن المعادلتين (1) و (2) يمثلان المبدأ 0

$$f(x_0) = x_0 f'(x_0)$$

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

المعادلة (2) تمثل المبدأ 0 معناه

$$0 = -x_0 f'(x_0) + f(x_0)$$

$$f(x_0) = x_0 f'(x_0)$$

نستبين أن المعادلتين (1) و (2) تمثلان المبدأ 0 مع دمج معادلة التفاضل

$$f(x_0) = x_0 f'(x_0)$$

$$1 + x_0 \ln(x_0+2) = x_0 \left[\ln(x_0+2) + \frac{x_0}{x_0+2} \right]$$

$$1 + x_0 \ln(x_0+2) = x_0 \ln(x_0+2) + \frac{x_0^2}{x_0+2}$$

$$\frac{x_0^2}{x_0+2} = 1$$

$$\frac{x_0^2}{x_0+2} - 1 = 0$$

$$\frac{x_0^2 - x_0 - 2}{x_0+2} = 0$$

$$x_0^2 - x_0 - 2 = 0 \text{ و } x_0^2 - x_0 - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9$$

$$x_0 = 2 \text{ و } x_0 = -1$$

ومنه المبرهن (1) يمثل معادلتين (1) و (2) يمثلان المبدأ 0 عند النقطة التي ندرسها هنا $x=2$ و $x=-1$

معادلة المعادلتين (1) و (2) عند النقطة ذات التماس

$$(1) \quad y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$(2) \quad y = \left(\ln(4) + \frac{1}{2} \right) x$$

$$(3) \quad y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$(4) \quad y = -x$$

[17]

10) حساب $R(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$

$$R(x) = 2 f'(x) - f(x)$$

نستبين أن $R(x)$ دالة أولية للدالة $f(x)$

$$R'(x) = 2 f''(x) - f'(x)$$

$$f'(x) > 0 \text{ و } x \in]-0.6, +\infty[$$

$$F'(x) = 2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \left[2x \ln(x+2) + \frac{x^2-4}{x+2} \right]$$

$$F'(x) = 2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{1}{2} (2x \ln(x+2) + x-2)$$

$$F'(x) = 2 \cdot \frac{x}{2} + x \ln(x+2) + \frac{x}{2} - 1$$

$$F'(x) = 1 + x \ln(x+2)$$

لكن الدالة F دالة أمثلة للدالة f على المجال $]-2, +\infty[$ على المجال $S(x)$

$$S(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$S(x) = [F(x)]_a^0$$

$$S(x) = F(0) - F(x)$$

$$S(x) = -2 \ln(2) - 2x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} (x^2 - 4) \quad (x=2)$$

$S(x)$ هو صيغة الجبر من المستوى المحدد بالمنطق (Q) حامل من القواعد والمستقيمين الذين تعادلها صيغة $x=0$ و $x=2$

$$\frac{x_0^2}{x_0+2} - 1 = 0$$

$$\frac{x_0^2 - x_0 - 2}{x_0+2} = 0$$

$$x_0+2=0 \text{ و } x_0^2-x_0-2=0 \text{ مع } x_0=2 \quad \Delta=9 \quad x_0'=2 \text{ و } x_0=-1$$

في المنطق (Q) اصل معادلتين (T) و (T') يمثلان المبدأ

عند التعويضين الذين فاصلنا صيغة $x=2$ و $x=-1$

معادلة المعادلتين (Q) المنطق (Q) عند التعويض ذات المعادلة

$$(T) \quad y = \int_1^2 (t) dt \quad \text{لدينا}$$

$$(T') \quad y = \left(\ln(t) + \frac{1}{t} \right) \alpha \quad \text{ومنه}$$

$$(Q) \quad y = \int_1^2 (t) dt \quad \text{معادلة المعادلتين (Q) المنطق (Q) عند التعويض ذات المعادلة}$$

$$(T') \quad y = \int_1^2 (t) dt \quad \text{لدينا}$$

$$(T) \quad y = -\alpha \quad \text{ومنه}$$

[14]

(P) حساب $R(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$

الدالة R خالية للاشتقاق على $]-2, +\infty[$ ودائما المنطق

$$R'(x) = 2f'(x)f(x)$$

في نفس اتجاه تغير الدالة R

$$R'(x) = 2f'(x)f(x) \quad \text{لدينا}$$

ولدينا من أجل كل $x \in]-2, +\infty[$: $f(x) > 0$

ومنه إشارة $R'(x)$ من إشارة $f'(x)$

وعليه

x	-2	x	$+\infty$
$R'(x)$		-	+

لكن الدالة R متناقصة تماما على المجال $]-2, x[$

الدالة R متزايدة تماما على المجال $[x, +\infty[$

جدول تغيرات الدالة R

x	-2	x	$+\infty$
$R'(x)$		-	+
$R(x)$		$+\infty$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -2} R(x) = \lim_{x \rightarrow -2} [f(x)]^2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} R(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} R(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

نتقدم لكم كل التوفيق في امتحان شهادة البكالوريا

[18]



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ حيث $f(x) = \frac{5x}{3x+5}$

(1) اثبت ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$

(2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) بـ :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 0$

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج انها متقاربة واحسب نهايتها .

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{\beta}{u_n}$

(أ) عين قيمة β حتى تكون المتتالية (v_n) حسابية اساسها 3 يطلب حساب حدّها الأول

(ب) نضع $\beta = 5$

• اكتب v_n بدلالة n واستنتج عبارة u_n بدلالة n

• أحسب بدلالة n الجداء p_n حيث: $p_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_2} \times \dots \times e^{v_n}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(I) حل في مجموعة الإعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 2\sqrt{2}z + 3 = 0$

(II) المستوى المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، لتكن A, B, C و G ، النقط من

المستوي التي لواحقها: $z_A = \sqrt{2} + i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 2\sqrt{2}$ ، $z_D = -\sqrt{2} + 3i$ و $z_G = 2i$

(أ) تحقق أن النقطتين A و B تنتميان إلى دائرة مركزها C يطلب تعيين نصف قطرها.

(ب) تحقق أن $z_C = z_A + z_B$ و $|z_A| = |z_B|$ ثم استنتج طبيعة الرباعي $OACB$.

(3) بين أن النقطة G مرجح للجملة المنقلة $\{(C;1), (D;2)\}$.

(4) (Γ) مجموعة النقط (z) من المستوي حيث : $(iz+2)\overline{(iz+2)} = 36$ ، عين طبيعة المجموعة (Γ)

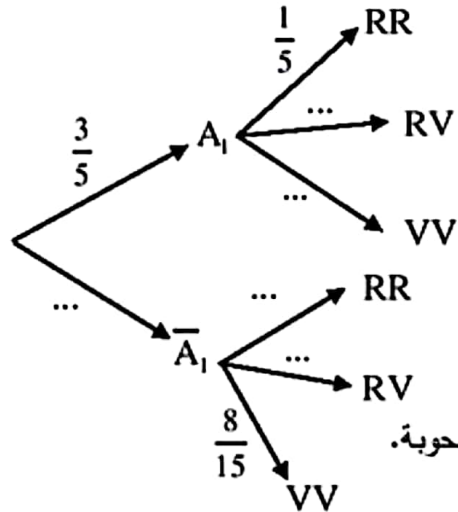
التمرين الثالث: (04 نقاط)

لدينا صندوقين متماثلين ، الصندوق الأول U_1 يحوي 3 كريات حمراء و كريتين خضراء ، الصندوق الثاني U_2

يحتوي كرتين حمراوين وثلاث كريات خضراء . (كل الكريات متمثلة ولا تميز بينها في اللمس) .

نقوم بسحب كرية عشوائية من U_1 ونضعها في U_2 ثم نسحب عشوائيا كرتين في ان واحد

نرمز ب الحدث A_1 : سحب كرية حمراء من U_1 و ب: سحب كرتين حمراوين من U_2 و VV "سحب كرتين خضراوين من U_2 و RR لسحب كرية حمراء وكرية خضراء من U_2 .



(1) أنجز شجرة الاحتمالات الموافقة لمعطيات النص .

(2) احسب: $P(A_1)$ و $P(A_1 \cap RR)$

(3) تحقق ان $P(RR) = \frac{11}{75}$ هل الحدثان A_1 و RR مستقلان ؟

(4) علما ان الكرتين المسحوبتين حمراوين من U_2

ما احتمال ان تكون الكرية المسحوبة من الكيس U_1 حمراء ؟

(5) واليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

(ا) عين قيم المتغير العشوائي X .

(ب) عَرّف قانون المتغير العشوائي X .

احسب الاحتمال : $P(x^2 - 1 \geq 0)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{2e-x}{x} - \ln x$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها .

(3) احسب $g(e)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) لتكن f دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = (2e-x) \ln x$

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (نأخذ : $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 1cm$)

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = g(x)$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

(3) أ) عين احداثيات نقط تقاطع المنحني (C) مع حامل محور الفواصل

(ب) احسب $f(2)$ و $f(e^2)$ ثم أنشئ المنحني (C)

(ج) عين معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة e .

(4) لتكن h الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = (2e-x) |\ln x|$

و (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق .

(ا) اكتب h دون رمز القيمة المطلقة.

(ب) اشرح كيفية رسم المنحني (C_h) انطلاقا من المنحني (C_f) ثم أنشئه.

(5) ا) باستعمال التكامل بالتجزئة عين الدالة الاصلية F للدالة f التي تحقق : $F(e) = 0$

(ب) احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C) مجور الفواصل والمستقيمين المقاربين $x=1$ و $x=e$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقاط)

(I) (v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما معرفة من أجل كل عدد طبيعي حيث :

$$e^{v_0} \times e^{v_1} = e^6 \quad \text{و} \quad \ln v_0 + \ln v_2 = 2 \ln 2$$

(1) أحسب $v_1; v_0$ ، ثم استنتج قيمة الأساس q

(2) نضع: $v_0 = 4$ و $q = \frac{1}{2}$

(أ) عبر عن الحد العام v_n بدلالة n

(ب) أحسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = \ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + \dots + \ln v_n$

(II) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة لكل n عدد طبيعي كما يلي : $u_0 = 6$ و $u_{n+1} = \sqrt{9u_n + 10}$

(1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $6 \leq u_n \leq 10$

(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج انها متقاربة.

(4) بين انه من أجل كل عدد طبيعي n : $10 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(10 - u_n)$

(5) استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 10 - u_n \leq v_n$ ثم احسب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

كيس به 8 كريات متماثلة ، لا نفرق بينها باللمس ، منها 4 بيضاء تحمل الأرقام 1.1.2.3 و 4 خضراء تحمل الأرقام 1.2.2.3.

(I) نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الكيس.

(1) احسب احتمال الحادثة A : " سحب كرتين مختلفتين في اللون ".

(2) احسب احتمال الحادثة B : " سحب كرتين تحمل رقم فردي على الأقل ".

(3) احسب احتمال الحادثة C : " سحب كرتين تحمل رقمين جداولهما عدد زوجي ".

(II) نقترح اللعبة التالية: للمشاركة يدفع اللاعب $\alpha(DA)$ ، α عدد طبيعي معطى DA تعني دينار جزائري

فإذا سحب كرتين تحملان رقم 3 يحصل على DA 1000 و إذا سحب كرتين تحملان رقم 2 يحصل على DA 100 و يخسر ما دفعه في باقي الحالات

ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ربح أو خسارة اللاعب بدلالة α .

(1) برّر أن قيم المتغير العشوائي هي $\{-\alpha; 100 - \alpha; 1000 - \alpha\}$: ثم عرّف قانون احتماله.

(2) بيّن أن الأمل الرياضي للمتغير العشوائي بدلالة هو : $E(x) = \frac{1300}{28} - \alpha$

(3) أوجد أصغر قيمة ممكنة لـ α حتى تكون اللعبة ليست في صالح اللاعب

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(I) نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z) = (\bar{z} - 1 + 8i)(z - 4 - 5i)$

حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

(II) نعتبر في المستوى المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \bar{u}, \bar{v})$. النقط C, B, A لواحقها :

$$z_C = 1 + 8i \quad z_B = 4 + 5i \quad z_A = 1 + 2i$$

(1) أكتب العدد L على الشكل الجبري حيث $L = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.

(2) اعط تفسيراً هندسياً لطويلة وعمدة العدد المركب L

(3) استنتج طبيعة المثلث ABC .

(4) لتكن النقطة D مرجح الجملة المتقلة $\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\}$.

(أ) عين Z_D لاحقة النقطة D .

(ب) بين ان الرباعي $ABCD$ مربع .

(ج) عين المجموعة (Γ) للنقط $M(z)$ من المستوي التي تحقق : $\|MA - MB + MC\| = 6$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \bar{i}, \bar{j})$ حيث : $\|\bar{i}\| = 1 \text{ cm}$

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (2x + 1)e^x - 1$

(1) ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها. (حساب النهايات مطلوب)

(2) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على $\mathbb{R}$ ثم تحقق أن $\alpha = 0$.

(1) حدد حسب قيم x اشارة $g(x)$. السابق انتهى الموضوع الثاني

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x(1 - e^{-x})^2$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(3) (أ) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x غير معنوم $f'(x) = (e^{-x} - 1)g(-x)$

(ب) بين أن الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(4) بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) . ادرس الوضعية النسبية بين (Δ) و (C_f) .

(5) (أ) أكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

(ب) ادرس الوضعية النسبية بين (T) و (C_f) .

(ج) استنتج ان (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها.

(6) احسب $f(-1)$ ، ثم أنشئ (T) ; (Δ) و (C_f) .

نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = |x|(1 - e^{|x|})^2$.

(أ) بين أن الدالة h زوجية.

(ب) أنشئ (C_h) منحنى الدالة h انطلاقاً من (C_f) مع الشرح



الموسم الدراسي: 2023 - 2024

دورة ماي 2024

أستاذ المادة: أنس مُعطيات



ثانوية أحمد بن بلة - آفلو -

امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي

الشعبة : علوم تجريبية

المدة: 3 ساعات و 30 دقيقة

اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_{n+1} = 1 - \frac{4}{u_n + 3}$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1 < u_n \leq 0$

(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$

(أ) بيّن أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدّها الأول.

(ب) اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n و أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = e^{u_0 v_0} \times e^{u_1 v_1} \times e^{u_2 v_2} \times \dots \times e^{u_n v_n}$

- بيّن أن $S_n = e^{\frac{-n^2 - n}{4}}$ ، هل (S_n) متتالية متقاربة؟

التمرين الثاني (4 نقاط)

يحتوي صندوق U على 3 كريات حمراء و كرتين سوداوين ، و يحتوي صندوق V على 4 كريات حمراء و 3 كريات سوداء (كل الكريات متماثلة و لانميّز بينها باللمس).

نرمي زهرة نرد غير مزيفة مرقمة من 1 إلى 6 مرة واحدة ، إذا تحصلنا على رقم مضاعف لـ 3 نسحب كرتين في آن واحد من الصندوق U ، وفي باقي الحالات نسحب كرتين على التوالي و بدون إرجاع من الصندوق V .

نعتبر الحادثتين: A : الحصول على رقم مضاعف لـ 3 و B : الحصول على كرتين من نفس اللون

(1) بين أن احتمال سحب كرتين من نفس اللون من الصندوق V هو $\frac{3}{7}$

(2) أ) اكمل شجرة الاحتمالات المقابلة ، ثم أحسب $P(B)$.

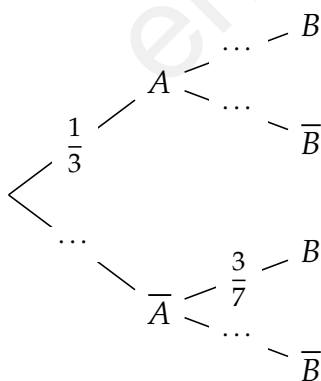
(ب) علماً أن الكرتين المسحوبتين من نفس اللون ما احتمال أن تكونا من الصندوق V ؟

(3) نعتبر اللعبة التالية: للمشاركة يدفع اللاعب αDA (حيث α عدد حقيقي موجب تماماً)

فإذا سحب اللاعب كرتين من نفس اللون يربح $100 DA$ و إذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يخسر ما دفعه.

و ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل قيمة ربح أو خسارة اللاعب.

- عيّن قيم المتغير العشوائي X ، ثم بيّن أن أمله الرياضي $E(X) = \frac{880}{21} - \alpha$





التمرين الثالث (4 نقاط)

نعتبر في المستوي المركب $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب: $z_A = 1 + i$ و $z_B = \sqrt{3} + i$

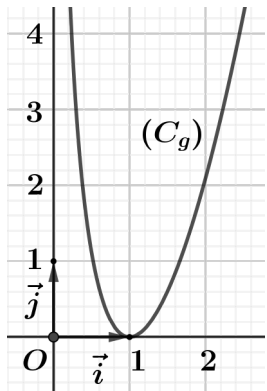
(1) اكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي. ثم استنتج الشكل الأسّي للعدد $\frac{z_A}{z_B}$.

(2) اكتب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

(3) اكتب على الشكل الجبري العدد $\left(\frac{\sqrt{2}z_A}{z_B}\right)^{2024}$ ، ثم عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ عدداً حقيقياً موجباً.

(4) عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث $z = \sqrt{3} + i + e^{i\theta}$ و θ تسمح $\mathbb{R}$.

التمرين الرابع (8 نقاط)



(I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 - 1 + (\ln x)^2 - 2 \ln x$
تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
كما هو موضح في الشكل المقابل.

- احسب $g(1)$ ، ثم بقراءة بيانية حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1 - (\ln x)^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$.

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و فسّر النتيجة بيانياً.

(2) (أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(ج) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

(د) اكتب معادلة المماس (T) عند نقطة الإنعطاف.

(3) (أ) بيّن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

(ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(4) بيّن أنه توجد نقطتين من (C_f) يكون عندهما المماس يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين فاصلتيهما (معدلتا المماسين غير مطلوبتين).

(5) بيّن أن (C_f) يقطع حامل محاور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,34 < \alpha < 0,35$

(6) ارسم كلاً من (Δ) ، (T) و المنحنى (C_f) .

(7) (أ) بيّن أن الدالة $x \mapsto \ln x - \frac{1}{3}(\ln x)^3$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1 - (\ln x)^2}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$.

(ب) احسب بالـ cm^2 مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمتان (Δ) ، $x = e^{-1}$ و $x = e$.

انتهى الموضوع الأول



الموضوع الثاني

التمرين الأول (4 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة و لا نَمِيز بينها باللمس منها ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 2 و ثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 2 و أربع كريات سوداء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 1 ، 2 .
نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق و نعتبر الحوادث التالية:

A: سحب ثلاث كريات من نفس اللون.

B: سحب ثلاث كريات مختلفة الأرقام مثلى مثلى.

C: سحب كرية حمراء على الأكثر.

(1) احسب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$.

(2) بين أن $P(A \cap B) = \frac{1}{40}$ ثم استنتج $P(A \cup B)$ و $P_A(B)$. هل A و B حادثتان مستقلتان؟

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الصندوق.

(أ) برّر أن قيم المتغير العشوائي X هي $\{0; 1; 2; 3\}$.

(ب) عرّف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضي.

التمرين الثاني (4 نقاط)

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية: $(z - 1)(z^2 + 4z + 7) = 0$

(II) نعتبر في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B و C لواحقها على الترتيب:

$$L = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و نضع:} \quad z_C = \overline{z_B}, \quad z_B = -2 + i\sqrt{3}, \quad z_A = 1$$

(1) اكتب العدد L على الشكل المثلثي.

(2) (أ) اكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

(ب) استنتج أن C هي صورة B بدوران R يطلب تعيين عناصره المميزة.

(3) عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي ABDC متوازي أضلاع ، ثم حدّد بدقة طبيعته.

(4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوى ذات اللاحقة z حيث: $|iz - i| = |\bar{z} + 2 + i\sqrt{3}|$

- عيّن مجموعة النقط (Γ) ، ثم استنتج صورتها بالدوران R.

التمرين الثالث (4 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = e^3$ و من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$

(1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > e^2$

(2) ادرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) . هل (u_n) متقاربة ؟

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \ln(u_n) - 2$

(أ) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدّها الأول.

(ب) عبّر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n و أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) احسب P_n بدلالة n حيث : $P_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$

التمرين الرابع (8 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ : $f(x) = 2x + \frac{1}{e^x - 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$)

(1) (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانياً.

(2) (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$ ، ثم فسّر النتيجتين بيانياً.

(ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لكل من المستقيمين $(\Delta_1) : y = 2x$ و $(\Delta_2) : y = 2x - 1$.

(3) (أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{0\}$ ، $f'(x) = \frac{(2e^x - 1)(e^x - 2)}{(e^x - 1)^2}$

(ب) استنتج أن الدالة f متزايدة تماماً على كل من المجالين $]-\infty; -\ln 2]$ و $[\ln 2; +\infty[$ و متناقصة تماماً على كل من المجالين $]-\ln 2; 0[$ و $]0; \ln 2]$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

(4) من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ أحسب $f(-x) + f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة بيانياً.

(5) ارسم كلاً من (Δ_1) ، (Δ_2) و المنحنى (C_f) . (يعطى $f(\ln 2) = \ln 4 + 1$ و $f(-\ln 2) = -\ln 4 - 2$)

(6) ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = 2x + m$.

(7) (أ) بيّن أن الدالة $x \mapsto -x + \ln(e^x - 1)$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{e^x - 1}$ على المجال $]0; +\infty[$.

(ب) احسب $\int_{\ln 2}^1 \frac{dx}{e^x - 1}$ و فسّر النتيجة بيانياً.

(8) h دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x) = |f(x)|$

- اشرح كيفية رسم منحنى الدالة h إنطلاقاً من (C_f) ثم أرسمه في نفس المعلم السابق.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانويات : أبي بكر الصديق + الجيلالي بونعامة - العطاف -
- هوارى بومدين - الروينة -



دورة ماي 2024

مديرية التربية لولاية عين الدفلى
امتحان البكالوريا التجريبي
الشعبة : علوم تجريبية

المدة : 03 سا و 30 د

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :
الموضوع الأول :

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس U_1 على ثلاث كريات تحمل الأرقام 0 ، 1 و 3 ، ويحتوي كيس U_2 على خمس كريات تحمل الأرقام 2 ، 2 ، 3 ، 3 و 4 . لا نميز بين الكريات عند اللمس. نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الكيس U_1

- اذا كان مجموع رقمي الكرتين المسحوبتان زوجيا نسحب كرتين على التوالي دون ارجاع من الكيس U_2
 - اذا كان مجموع رقمي الكرتين المسحوبتان فرديا نسحب كرتين على التوالي مع الإرجاع من الكيس U_2
- نعتبر الحدثين: A : " مجموع رقمي الكرتين المسحوبتان من الكيس U_1 زوجيا "
- B : " مجموع رقمي الكرتين المسحوبتان من الكيس U_2 زوجيا "

1. (ا) أحسب الاحتمال $P(A)$ و $P_A(B)$ ، ثم استنتج $P(A \cap B)$

(ب) بين أن : $P(\bar{A} \cap B) = \frac{26}{75}$ ، ثم احسب $P(B)$

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي جداء الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة من U_1 و U_2

(ا) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم احسب أمله الرياضياتي .

(ب) استنتج $P(X^2 - 36X + 288 = 0)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(I) - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية : $(z + 1 + i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4) = 0$

(II) - المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

نعتبر النقط A ; B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A = \sqrt{3} + i$; $z_B = \sqrt{3} - i$ و $z_C = -1 - i$

1. أكتب العدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث ABO

2. عين z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $AOBD$ متوازي أضلاع ، ثم حدد نوعه بدقة .

3. عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقيا سالبا .

4. z عدد مركب ، عين بدقة مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث :

$$\arg(z - z_B)^2 + 2\arg(\bar{z} - z_B) = \frac{4}{5}\arg(z_C) + 2k\pi \quad \text{مع } k \in \mathbb{Z}$$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $U_0 = 4e^{-2}$ و $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n \cdot \sqrt{U_n}$

1. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < U_n < 4$
2. أدرس رتبة المتتالية (U_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .
3. نعرّف على $\mathbb{N}$ المتتالية العددية (V_n) كما يلي : $V_n = 2^n [\ln U_n - \ln 4]$
(أ) بين أن (V_n) متتالية هندسية أساسها 3 يطلب حساب حدّها الأول .
(ب) أكتب عبارة V_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $U_n = 4e^{-2(\frac{3}{2})^n}$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$
4. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \ln(U_0) + 2 \cdot \ln(U_1) + \dots + 2^n \cdot \ln(U_n)$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

- I. الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x + e^x$.
1. ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .
2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.56 < \alpha < -0.57$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.
II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = (x+2)(1 - e^{-x-1})$.
(C_f) لتمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1cm$.
1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
2. (أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) ، بجوار $+\infty$
(ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
3. (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^{-x-1}g(x+1)$.
(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .
(ج) بين أن : $f(\alpha - 1) = \alpha + 2 + \frac{1}{\alpha}$ ، ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha - 1)$
4. (أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين $f(x) = 0$ و $f'(x) = 1$ ، ثم فسر النتائج المحصل عليها بيانيا .
(ب) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 .
5. أرسم كلاً من المستقيمين (Δ) و (T) و المنحنى (C_f) .
6. m وسيط حقيقي ، عين بيانيا قيم m التي من أجلها يكون للمعادلة $e^{x+m+1} = x + 2$ حلين متميزين .
7. (أ) λ عدد حقيقي حيث $\lambda > -2$ ، باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن دالة أصلية للدالة $x \rightarrow (x+2)e^{-x-1}$ والتي تتعدم عند -2 .
(ب) أحسب بدلالة λ المساحة $\mathcal{A}(\lambda)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = -2$ و $x = \lambda$ ، ثم تحقق أن : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda) = e$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

$$(I) \quad \alpha - 2\beta = 3 + (2 - \sqrt{3})i \quad \text{و} \quad \beta \text{ عدنان مركبان ، حل في } \mathbb{C} \text{ الجملة التالية :} \\ \alpha + 4\beta = 2 + 2\sqrt{3}i$$

$$(II) \quad \text{المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس } (O; \vec{u}; \vec{v})$$

$$\text{نعتبر النقط } A; B; C \text{ التي لواحقها على الترتيب : } z_A = 2 + 2i; z_B = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}; z_C = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ و}$$

1. أكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسّي ، ثم استنتج ان النقط $A; B; C$ تنتمي الى نفس الدائرة (ψ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .

2. (I) أكتب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الأسّي ، ثم على الشكل الجبري .

(ب) استنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

3. بيّن أن العدد $\left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{1445} + \left(\frac{z_C}{2\sqrt{2}}\right)^{2024}$ حقيقي سالب .

4. حدد مجموعة النقط $M(z)$ والتي تحقق : $|2z - 4 - 4i| - 2|\bar{z} + \sqrt{2} + i\sqrt{6}| = 0$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة والمتزايدة تماما على المجال $[-1; 0]$ بـ : $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{8x^2 + 1}}$. و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها

البياني ، $y = \frac{2}{3}x$: (Δ) و $y = x$: (D) مستقيمان في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (أنظر الوثيقة المرفقة)

1. (I) بيّن أنه إذا كان $x \in]-1; 0[$ فإن $f(x) \in]-1; 0[$

(ب) بيّن أنه من أجل كل $x \in]-1; 0[$ فإن : $f(x) - x = \frac{x(3 - \sqrt{8x^2 + 1})}{\sqrt{8x^2 + 1}}$

(ج) جد حصر للعدد $3 - \sqrt{8x^2 + 1}$ على المجال $]-1; 0[$

ثم استنتج أنه من أجل كل x من $]-1; 0[$ يكون : $f(x) - x < 0$

2. نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_0 = \frac{-2}{3}$ و من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = f(U_n)$

(I) مثل على محور الفواصل الحدود U_0 ، U_1 و U_2 ، ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير (U_n) وتقاربها .

(ب) بين بالتراجع انه من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون : $-1 < U_n < 0$.

(ج) حدد اتجاه تغير المتتالية (U_n) ، ماذا عن تقاربها ؟

3. (V_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = \frac{U_n^2}{U_n^2 - 1}$

(I) بين ان المتتالية (V_n) هندسية أساسها 9 ويطلب تعيين حدها الاول .

(ب) عبر عن V_n بدلالة n ، ثم بيّن أنه من اجل كل $n \in \mathbb{N}$: $U_n = -\frac{2 \times 3^n}{\sqrt{4 \times 9^n + 5}}$ وأن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -1$

4. أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = \frac{1}{1 - U_0^2} + \frac{1}{1 - U_1^2} + \dots + \frac{1}{1 - U_n^2}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

كيس يحتوي على أربع كريات حمراء و أربع بيضاء كل الكريات لانفرك بينها عند اللمس
نسحب عشوائيا من الكيس n كرية على التوالي بإرجاع (n عدد طبيعي حيث : $n \geq 2$)
نعتبر الأحداث التالية :

A : " نتحصل على كريات من اللونين " B : " نتحصل على كرية بيضاء على الأكثر " C : " نتحصل على كريات من نفس اللون " D : " نتحصل على كرية بيضاء واحدة فقط "

1. احسب إحتمال الحادثتين : C و D

$$2. \text{ بيّن أن : } P(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}, P(A \cap B) = \frac{n}{2^n} \text{ و } P(B) = \frac{n+1}{2^n}$$

(II) - نضيف الآن الى الكيس السابق $2n$ كرية بيضاء مع n عدد طبيعي حيث : $n \geq 2$.

ثم نسحب منه كريتين على التوالي بدون ارجاع ، وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات البيضاء المتبقية في الكيس

- عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم أحسب امله الرياضياتي .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) - h الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = x^2 + 2\ln x - (\ln x)^2$

1. بين انه من اجل كل $x > 0$ يكون : $x - \ln x > 0$ ثم استنتج اشارة $x^2 - 2\ln x$ على المجال $]0; +\infty[$.

2. (ا) بين ان الدالة h متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

(ب) بيّن ان المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $0.76 < \alpha < 0.78$ ، ثم استنتج اشارة $h(x)$ حسب قيم x

(II) - f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = x + \frac{(\ln |x|)^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. بين ان الدالة f فردية .

- نقتصر فيما يلي على دراسة تغيرات الدالة f على المجال $]0; +\infty[$

2. بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ ، ثم احسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، و فسر النتائج بيانيا .

3. (ا) بيّن أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ يكون : $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

4. (ا) بيّن أن المستقيم $y = x$: (Δ) مقارب للمنحنى (C_f) ، ومماس له في نقطة A يطلب تحديد احداثيها .

(ب) حدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) ، هل النقطة A نقطة انعطاف للمنحنى ؟ ، علل .

5. احسب $f(4)$ ، $f(5)$ ، ثم أنشئ (Δ) و (C_f) على $\mathbb{R}^*$ (نقبل أن $f(\alpha) \approx 0.8$)

6. احسب المساحة المحصورة بين (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتيهما : $x = -1$ و $x = -2$

انتهى الموضوع الثاني



المدة: 03 سا ونصف

اختبار البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول:

صندوقان غير شفافين U و V ، يحتوي الصندوق U على أربع كريات حمراء وأربع كريات بيضاء، ويحتوي الصندوق V على كرتين حمراوين وأربع كريات بيضاء (الكرات كلها متماثلة لا نميز بينها عند اللمس) نعتبر التجربة العشوائية التالية: نسحب كرتين في آن من الصندوق U إذا كانتا من نفس اللون نسحب كرتين في آن واحد من الصندوق V ، وإذا كانتا من لونين مختلفين نضعهما في الصندوق V ونسحب منه كرتين في آن واحد. نعتبر الأحداث التالية:

- A : "الكرتان المسحوبتان من الصندوق U من نفس اللون"، B : "الكرتان المسحوبتان من الصندوق V بيضاوان"
 C : "الكرتان المسحوبتان من الصندوق V حمراوان"، D : "الكرتان المسحوبتان من الصندوق V مختلفتي اللون"
 (1) احسب $P(A)$.

(2) بين أن: $P_A(B) = \frac{1}{15}$ و $P_A(B) = \frac{3}{28}$ ، ثم استنتج $P(B)$.

- (3) علما أن الكرتين المسحوبتين من الصندوق V بيضاوان، ما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من الصندوق U من نفس اللون؟

- (4) اكمل شجرة الاحتمالات الموضحة في الوثيقة المرافقة.

- (5) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة من الصندوق V .
 أ) عين قيم المتغير العشوائي X .
 ب) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

التمرين الثالث:

نعتبر المتتاليتين العدديتين (U_n) و (V_n) المعرفتين على $\mathbb{N}^*$ كما يلي:

$$\begin{cases} V_1 = 12 \\ V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3} \end{cases}$$

- (1) نضع: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $W_n = V_n - U_n$

أ) بين أن المتتالية (W_n) هندسية أساسها $\frac{1}{12}$.

ب) اكتب عبارة الحد العام للمتتالية (W_n) .

ج) احسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$

- (2) أ) ادرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (U_n) و (V_n) .
 ب) استنتج أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متقاربتان نحو نفس النهاية.
 (3) نعتبر المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $t_n = 3U_n + 8V_n$
 أ) بين أن المتتالية (t_n) ثابتة على $\mathbb{N}^*$.
 ب) استنتج النهاية المشتركة للمتتاليتين (U_n) و (V_n) .
 (4) نعتبر المجموع S_n المعرف على $\mathbb{N}^*$ بـ: $S_n = \sum_{k=1}^n C_n^k (V_k - U_k)$. عبر بدلالة n عن المجموع S_n .

التمرين الثالث:

- I. نعتبر الأعداد المركبة z_1 ، z_2 و z_3 بحيث: $z_1 = 2 - 2i$ ، $z_2 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$ و $z_3 = \frac{z_2}{z_1}$.
 (1) أ) اكتب كل من z_1 ، z_2 على شكل أسي.
 ب) استنتج شكل أسي للعدد z_3 .
 (2) أ) اكتب z_3 على الشكل الجبري، ثم على شكل مثلي.
 ب) استنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
 II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B و M لواحقتها z_1 ، z_2 و z على الترتيب.
 ولنعتبر العدد المركب L المعرف من أجل كل عدد مركب z يختلف عن z_1 كما يلي: $L = \frac{z - z_2}{z - z_1}$
 (1) عين (E_1) مجموعة النقط M بحيث: $|L| = 1$.
 (2) عين (E_2) مجموعة النقط M بحيث: $L \in \mathbb{R}^*$.
 (3) عين (E_1) مجموعة النقط M بحيث: L تخيلي صرف.

التمرين الرابع:

- I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (x^2 + 2x)e^{x-1} - 1$.
 (1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
 (2) أ) بين أن: المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث: $0,58 < \alpha < 0,59$.
 ب) ادرس إشارة $g(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x .
 II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^2 e^{x-1} - x$
 (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (وحدة الطول هي: $2cm$)
 (1) أ) احسب كلا من: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 ب) بين أن: المستقيم (D) ذا المعادلة المختصرة $y = -x$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$.
 ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (D) .
 (2) أ) بين أن: من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$.
 ب) استنتج أن: f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; \alpha]$ و متزايدة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) اثبت أن (C) يقبل مماسين متوازيين أحدهما ينطبق على (D) ، ثم اكتب معادلة ديكارتية للمماس الثاني.

د) بين أن (C) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين فاصلتي كل منهما.

3) انشئ كلا من المماسين السابقين، احسب $f(0)$ و $f(1)$ ، ثم مثل (C) . (نأخذ: $f(\alpha) \approx -0,36$).

4) ليكن m وسيطا حقيقيا، ناقش بيانها تبعا لقيم m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) = -x + m$.

5) نعتبر التكامل I بحيث: $I = \int_{-1}^0 x^2 e^{x-1} dx$.

أ) باستخدام المكاملة بالتجزئة مرتين احسب قيمة I .

ب) فسر هندسيا النتيجة المحصل عليها.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول:

1. نعتبر كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب z المعروف كما يلي: $p(z) = z^3 + 2z^2 - 16$.

1) احسب $P(2)$ ، ثم استنتج كثير الحدود $Q(z)$ من الدرجة الثانية بحيث يكون:

من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z-2) \cdot Q(z)$.

2) أ) حل في مجموعة المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $P(z) = 0$.

ب) اكتب كل حل من حلول المعادلة السابقة على شكل مثلثي، ثم على شكل أسي.

II. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B ، C و D

لواحقها z_A ، z_B ، z_C و z_D على الترتيب بحيث: $z_A = -2 - 2i$ ، $z_B = 2$ و $z_D = \overline{z_A}$.

1) علم النقط A ، B و D .

2) احسب z_C بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

3) نعتبر العدد المركب L المعروف بـ: $L = \frac{z_A}{z_D}$.

أ) اكتب العدد L على شكل أسي.

ب) أعط تفسيرا هندسيا لكل من $|L|$ و $\arg(L)$.

ج) استنتج طبيعة المثلث AOD .

التمرين الثاني:

1. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى

المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. كما هو موضح في الشكل المرفق.

1) اثبت أن: الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$.

2) بين أن: إذا كان: $x \in [1; 2]$ فإن: $f(x) \in [1; 2]$.

II. نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

1) أ. مثل على حامل محور الفواصل الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية (U_n) مبرزا خطوط الانشاء.

ب. أعط تخمينا حول رتبة وتقارب المتتالية (U_n) .

(2) أ. برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < U_n \leq 2$

ب. اثبت أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

ج. برر تقارب المتتالية (U_n) .

III. نعتبر المتتاليتين العدديتين (V_n) و (W_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي: $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n}$ و $W_n = \ln V_n$.

(1) أ) بين أن المتتالية (W_n) هندسية أساسها 2.

ب) اكتب عبارة الحد العام للمتتالية (W_n) ، ثم استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (V_n) .

(2) أ) استنتج أن: من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n} \right]^{-1}$.

ب) احسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

(3) نعتبر الجداء P_n المعرف على $\mathbb{N}$ بـ: $P_n = V_0 \times V_1 \times \dots \times V_n$.

عبر بدلالة n عن الجداء P_n .

التمرين الثالث:

يحتوي صندوق غير شفاف على أربع كريات بيضاء، ثلاث كريات سوداء وكريتين حمراوين (الكريات كلها متماثلة لا نميز بينها عند اللمس). نسحب عشوائيا في آن واحد ثلاث كريات من هذا الصندوق.

(1) احسب احتمال كل حدث من الأحداث التالية:

A : " سحب كريتين سوداوين وكرية حمراء " ، B : " سحب ثلاث كريات مختلفة اللون "

C : " سحب كرية حمراء على الأقل "

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الألوان التي تحملها الكريات الثلاث المسحوبة.

أ) برر أن: قيم المتغير العشوائي X هي: $\{1; 2; 3\}$

ب) بين أن: $P(X = 2) = \frac{55}{84}$ ، ثم عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين الرابع:

I. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 - 2 \ln(x)$

(1) ادرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) استنتج أن: من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $g(x) > 0$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1 + \ln(x)}{x}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (وحدة الطول هي: 2cm)

(1) أ) احسب كلا من: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب) بين أن: المستقيم (D) ذا المعادلة المختصرة $y = \frac{x}{2}$ مقارب مائل لـ (C).

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (D).

(2) أ) بين أن: من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) اثبت أن (C) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي المستقيم (D) في النقطة A ذات الفاصلة 1 ، ثم اكتب معادلة له.

(3) أ) بين أن: من أجل كل $x \in]0; +\infty[$: $f''(x) = \frac{2\ln(x)-1}{x^3}$.

ب) ادرس إشارة $f''(x)$ ، ثم استنتج أن: (C) يقبل نقطة انعطاف وحيدة B يطلب تعيين إحداثياتها.

ج) اكتب معادلة ديكارتية لـ (T') مماس (C) في النقطة B .

(4) أ) بين أن: (C) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α بحيث: $0,34 < \alpha < 0,35$.

ب) انشئ كلا من (D) ، (T) و (T') ، ثم مثل (C) .

(5) ليكن m وسيطا حقيقيا، ناقش بيانيا تبعا لقيم m عدد حلول المعادلة: $f(x) = \frac{1}{2}x + m$

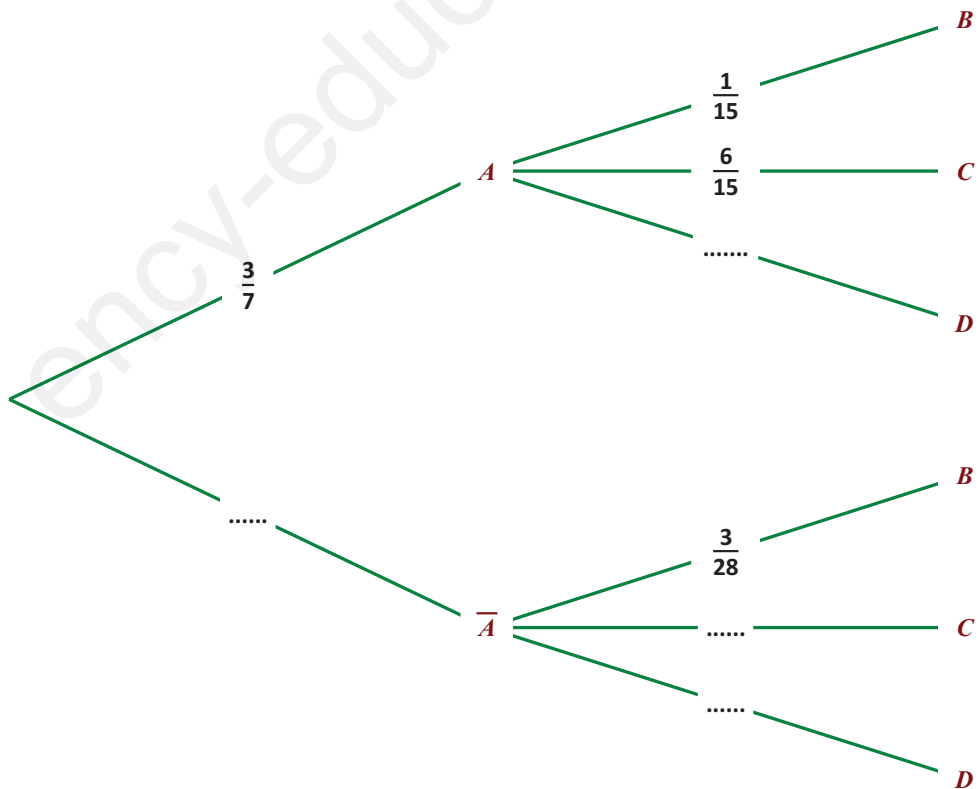
(6) احسب بـ cm^2 مساحة الحيز تحت المنحنى (C) بين العددين 1 و e .

انتهى الموضوع الثاني

الشكل الخاص بتمثيل حدود المتتالية:



شجرة الاحتمالات



الوثيقة المرافقة



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول:

التمرين الأول (04 نقاط) :

أجب بصحيح او خطأ مع التبرير في كل حالة :

(1) $Z = 2 \left(\sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3} \right)$ عدد مركب حيث

الشكل المثلثي للعدد المركب Z هو $Z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$.

(2) العبارة $Z' = 2iZ + 5 - i$ تعرف دوران مركزه Ω ذات اللاحقة $Z_{\Omega} = \frac{7}{5} + \frac{9}{5}i$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

(3) $Z_1 = 1 - i$ و $Z_2 = 1 + i$ هما حلان للمعادلة $Z^2 - 2Z + 2 = 0$.

(4) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z حيث $|\bar{Z} + 1 - 3i| = |iZ - 2i|$ هي حامل محور الفواصل.

التمرين الثاني (04 نقاط) :

U_1 و U_2 صندوقان متماثلان يحتوي U_1 على 5 كرات حمراء و 4 بيضاء ويحتوي U_2 على 4 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء. (الكرات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس).

نرمي زهرة نرد غير مزيفة إذا حصلنا على رقم مضاعف لـ 3 نسحب كرتين في آن واحد من الصندوق U_1 وفي باقي الحالات نسحب كرتين على التوالي مع ارجاع الكرة المسحوبة من U_2 .

نسمي الحدث A : "الحصول على رقم مضاعف لـ 3"

نسمي الحدث B : "الحصول على كرتين من نفس اللون"

(1) أنقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم اكملها.

(2) احسب $P(B)$.

(3) علما أن الكرتين المسحوبتين من نفس اللون. أحسب احتمال

أن يكونا من الصندوق U_2

(4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة العدد 2 في حال كانت الكرتين من نفس اللون ، والعدد 1- في حال كانت الكرتين مختلفتين في اللون.

• عرف قانون احتمال للمتغير العشوائي X ثم بين أن $E(X) = \frac{205}{441}$.

التمرين الثالث (04 نقاط) :

نعتبر المتتالية الهندسية (V_n) حدودها موجبة تماما و المعرفة على N كالآتي:

$$\begin{cases} v_0 = e^2 \\ v_4 - 9v_2 = 0 \end{cases}$$

(1) أ/ أثبت أن أساس المتتالية (V_n) $q = 3$ ثم أكتب v_n بدلالة n وأحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n$.

ب/ أحسب بدلالة n كلا من S_n و P_n حيث :

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n \quad \text{و} \quad S_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2$$

(2) نعتبر المتتالية العددية (W_n) المعرفة على N كالآتي $w_n = \ln(v_n)$.

أ/ برهن أن المتتالية (W_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب/ أكتب عبارة الحد العام للمتتالية (W_n) بدلالة n .

ج/ احسب المجموع $T_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

التمرين الرابع (08 نقاط):

I (1) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$

1/ أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

ب/ أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2/ أ/ بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلين في $\mathbb{R}$ أحدهما معدوم والآخر $-1.52 < \alpha < -1.51$.

ب/ إستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II (2) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{i}, \vec{j}; O)$ (وحدة الطول 1cm).

1/ أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -g(x)$.

ج/ إستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$ ($f(\alpha) \approx 0.38$).

د/ عين دون حساب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ثم فسر النتيجة هندسياً.

2/ أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x$ مستقيماً مقارباً مائلاً للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ثم أدرس وضعيته بالنسبة ل (C_f) .

ب/ بين أن للمنحنى نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتهما.

3/ أرسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f) على المجال $[-2; +\infty[$.

4/ ناقش بيانياً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة

$$(m-x)e^x + (x^2 + 3x + 2) = 0 \text{ على المجال } [-2; +\infty[.$$

III (3) h و H الدالتان المعرفتان على $\mathbb{R}$ ب:

$$h(x) = x + f(x) \quad \text{و} \quad H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$$

1/ عين الأعداد الحقيقية a , b و c حتى تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x) dx \text{ عدد حقيقي موجب تماماً حيث:}$$

2/ أحسب التكامل $A(\lambda)$ وفسر النتيجة هندسياً.

الموضوع الثاني:

التمرين الأول (04 نقاط):

يحتوي صندوق على 5 كرات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس منها 2 كرية خضراء و 3 كريات حمراء

(1) نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الصندوق ونرمز بـ X للمتغير العشوائي الذي يمثل عدد الكريات الخضراء المسحوبة.

أ/ تحقق أن $P(X = 0) = \frac{3}{10}$ ، ثم عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X وأحسب أمله الرياضي.

ب/ أحسب احتمال الحدث A : "الكرتان المسحوبتان من نفس اللون"

(2) نسحب الآن من الصندوق كرتين على التوالي بالطريقة التالية: إذا كانت الكرية المسحوبة حمراء نعيدها إلى الصندوق أما إذا كانت الكرية المسحوبة خضراء لا نعيدها.

نرمز للكرية الخضراء بالرمز V و الحمراء بالرمز R

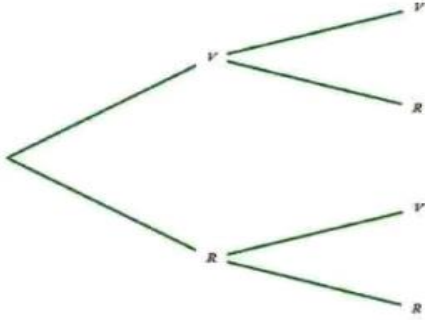
أ/ أنقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها.

ب/ أحسب احتمال الحادثين:

B : "الكرية المسحوبة الاولى خضراء"

C : "إحدى الكرتين المسحوبتين خضراء"

ج/ بين أن احتمال أن يبقى في الصندوق 2 كرية خضراء هو $\frac{9}{25}$.



التمرين الثاني (05 نقاط):

نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة على N كالآتي: $u_0 = 11$ و $u_{n+1} = 2 + \sqrt{u_n - 2}$

(1) أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 \leq u_n \leq 11$.

(2) أثبت أن (U_n) متناقصة و ماذا تستنتج؟ وأحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(u_n - 3)$ ثم

إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $0 \leq u_n - 3 \leq 8 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ و إستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ بطريقة أخرى.

(4) (V_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي: $v_n = \ln(u_n - 2)$

أ) برهن أن (V_n) متتالية هندسية، يطلب تحديد أساسها و حدها الأول v_0 ثم أكتب بدلالة n عبارة v_n ثم إستنتج عبارة u_n بدلالة n .

ب) أكتب بدلالة n المجموع S_n و P_n حيث:

$$P_n = (u_0 - 2) \times (u_1 - 2) \times \dots \times (u_n - 2)$$

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$$

ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n$.

التمرين الثالث (04 نقاط):

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B و C

التي لواحقها على الترتيب: $Z_A = 1 + \sqrt{3}i$ ، $Z_B = -1 + \sqrt{3}i$ ، $Z_C = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$ ،

(1) أ/ أكتب Z_A و $Z_E = \frac{Z_A}{1+i}$ على الشكل المثلثي.

ب/ أثبت أن $Z_C - Z_B = -\sqrt{3}i(Z_A - Z_B)$ ثم إستنتج طبيعة المثلث ABC .

(2) عين Z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A; 1), (B; -1), (C; 1)\}$ ثم إستنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

(3) أ/ اكتب العدد Z_E على شكله الجبري ثم إستنتج القيم المضبوطة لـ $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$

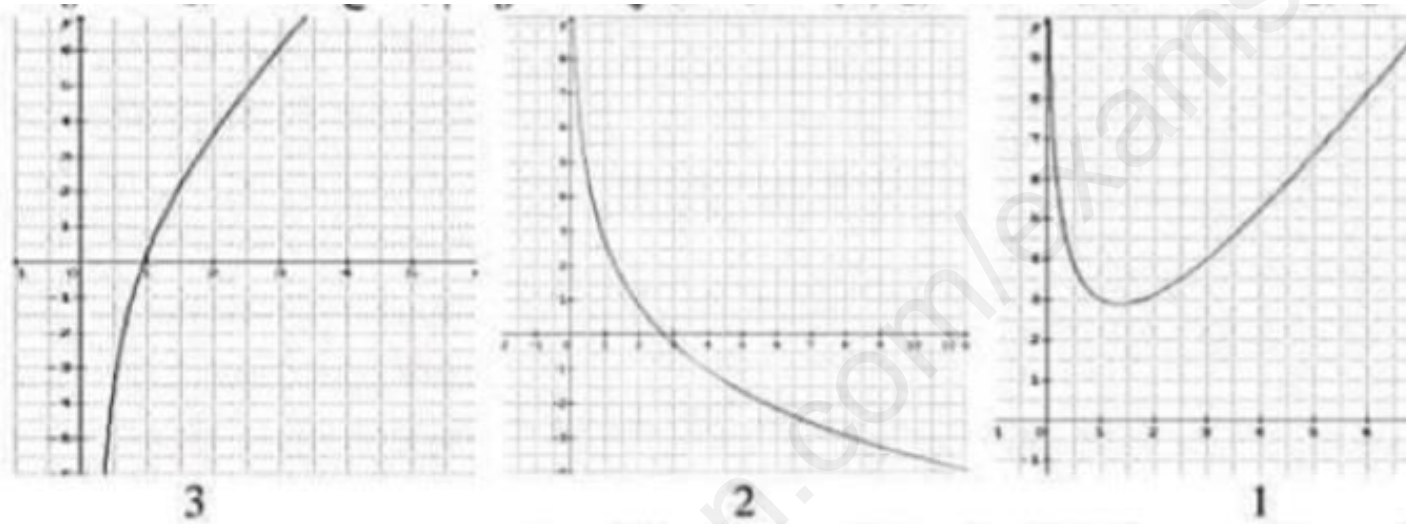
ب/ عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $(\sqrt{2}Z_E)^n$ عددا حقيقيا.

ج/ عين مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z حيث $\arg((1+i)Z - Z_A) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

التمرين الرابع (07 نقاط):

I) الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = (x+1)(x+e) - e(x \ln x)$

1/ من بين التمثيلات البيانية الثلاثة عين (C) التمثيل البياني للدالة g' ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة g



2 / أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ ، ثم إستنتج ان $g(x) > 0$ على المجال $]0; +\infty[$.

II) نعتبر f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = \ln(x+1) + \frac{e \ln x}{x+1}$

نسوي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2 / أ/ بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$.

ب/ استنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3 / أ/ بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α تحقق $0.7 < \alpha < 0.8$.

ب/ (γ) هو المنحنى الممثل للدالة $\ln(x+1)$ في المعلم السابق.

أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln(x+1)]$. فسر النتيجة بيانيا ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (γ) .

4 / أنشئ (γ) و (C_f) .

III) الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; \frac{2}{3}[$ ب: $h(x) = f(-3x+2)$

دون حساب عبارة $h(x)$ حدد إتجاه تغير الدالة h على مجموعة تعريفها

بالتوفيق للجميع في شهادة البكالوريا

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على ثلاث كريات بيضاء مرقمة بـ : 0، 1، 2 و سبع كريات حمراء مرقمة بـ : 0، 1، 1، 2، 2، 2 كل الكريات متماثلة لانفرق بينها عند اللمس

نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق

(1) احسب احتمال الحوادث الآتية

"A الكريات المسحوبة تحمل أرقام زوجية "

"B الحصول على كرية بيضاء واحدة على الأقل "

"C الحصول على ثلاث كريات مجموع أرقامها زوجي "

(2) بين أن $P(A \cap B) = \frac{2}{15}$ هل الحدثين A و B مستقلتين ؟

(3) علما أن الكريات المسحوبة تحمل أرقام زوجية ما احتمال ان تكون منها واحدة على الأقل بيضاء .

(4) نعتبر المتغير العشوائي X المرتبط بعدد الكرات المتحصل عليها التي تحمل أرقام زوجية .

• عرف قانون احتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب امله الرياضيائي $E(X)$

• احسب $P(e^X - e \geq 0)$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z + 1 - \sqrt{3})(z^2 + 2z + 4) = 0$

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A، B، C و D لاحقاتها على

الترتيب : $z_A = -1 + \sqrt{3}i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = -1 + \sqrt{3}$ $z_D = iz_C$

1. اكتب z_A على شكل أسي .

2. بين أن $z_B - z_C = i(z_A - z_C)$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

3. بين أن النقط C ، D و A على استقامة واحدة .

4. عين قيم العدد الطبيعي حتى يكون $\left(\frac{\sqrt{6}}{z_C - z_A}\right)^n$ تخيلي صرف .

5. بين أن العدد المركب Z حيث $Z = \left(\frac{z_A}{2}\right)^{2024} + \left(\frac{z_B}{2}\right)^{1445}$ حقيقي .

6. عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z والتي تحقق :

$$\text{Arg}(z_B - z) - \text{Arg}(z_A - z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1. (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = \ln 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \ln \left(\frac{1+e^{u_n}}{2} \right)$$

- أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$.
 ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = \frac{1-e^{u_n}}{2}$.
 ج) استنتج أن (u_n) متتالية متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ ، ثم استنتج أنها متقاربة .

2. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{e^{u_n} - 1}$.

أ. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ يطلب تعيين حددها الأول.

ب. عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

3. احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \ln(e^{u_0} - 1) + \ln(e^{u_1} - 1) + \ln(e^{u_2} - 1) + \dots + \ln(e^{u_n} - 1)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 1 + 2 \ln x$

- 1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.
 2) بين أن للمعادلة: $g(x) = 0$ حل وحيد α وأن $0,52 < \alpha < 0,53$.
 3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = -x + \frac{3+2\ln x}{x}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1 \text{ cm}$

1) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسياً.

ت) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ث) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ج) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم المقارب (Δ) .

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) بين أن $f(\alpha) = 2 \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha \right)$ ثم استنتج حصراً لـ $f(\alpha)$

4) بين أن (C_f) يقبل مماساً (T) يوازي (Δ) يطلب كتابة معادلة له.

5) أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f) (نضع $f(0,22) = f(2,11) = 0$)

6) m وسيط حقيقي . ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة : $3 + 2 \ln x - mx = 0$

7) احسب العدد الحقيقي I حيث $I = \int_{e^{-1}}^e \frac{3+2\ln x}{x} dx$ ، فسر النتيجة.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي الصندوق U على أربع كريات بيضاء و ثلاث كريات سوداء و الصندوق V على ثلاث كريات بيضاء و كرة واحدة سوداء كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس .

نعمد طريقة السحب التالية نسحب كرية واحدة من الصندوق U

إذا كانت بيضاء نضعها في الصندوق V و نسحب كرتين في آن واحد من الصندوق V

إذا كانت سوداء نضعها في الصندوق V و نسحب كرتين بالتتابع دون إرجاع من الصندوق V

(1) شكل شجرة احتمالات توضح فيها التجربة

(2) احسب احتمال الحوادث الآتية :

A "الكرية المسحوبة من الصندوق U سوداء "

B "الكرتين المسحوبتين من الصندوق V لها نفس اللون "

(3) علما أن الكرتين المسحوبتين من الصندوق V لها نفس اللون ما احتمال أن تكون الكرية المسحوبة من الصندوق U سوداء

(4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بعدد الكريات سوداء المسحوبة من الصندوق V

(5) عرف قانون احتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب أمله الرياضي.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

أجب بصح أو خطأ مع التبرير في كل حالة :

1. شكل أسي للعدد z حيث : $z = \frac{2-2i}{1+\sqrt{3}}$ هو $z = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

2. عمدة العدد المركب : $Z = 2i (\sin \theta - i \cos \theta)$ هي : $Arg(Z) = -\theta + 2k\pi$

3. مجموعة النقط M من المتوي ذات اللاحقة z التي تحقق $2i\bar{z} = 2 + (3+i\sqrt{3})e^{i\theta}$ هي :

دائرة مركزها A لاحتقها $z_A = -i$ ونصف قطرها $r = \sqrt{3}$

4. من أجل كل العدد الطبيعي n فردي $(\sqrt{3}-i)^{3n}$ تخيلي صرف

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) (u_n) متتالية عددية معرفة بـ : $u_0 = \alpha$ (حيث α عدد حقيقي) و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2 - \frac{4}{u_n + 3}$

(أ) عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة .

(2) في كل مايتاتي نفرض أن $u_0 = 0$

(أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < 1$

(ب) بين أن (u_n) متتالية متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ، ثم استنتج أنها متقاربة .

(3. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 1 - u_{n+1} \leq \frac{1}{3}(1 - u_n)$

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 1 - u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$\bullet \text{ بين أن } n+1 - \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) \leq S_n < n+1$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 1 + xe^{1-x}$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $-0,28 < \alpha < -0,27$.

(3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{3}x^2e^{2-2x} + \frac{2}{3}xe^{1-x}$.

(C_f) المنحنى البياني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$

(1 أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(ب) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ فسر النتيجة هندسيا .

(2 أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{2}{3}g'(x) \cdot g(x)$

(ب) بين أن الدالة f متناقصة على المجالين $]-\infty; \alpha]$ و $[1; +\infty[$ و متزايدة على المجال $[1; \alpha]$.

(ج) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(ح) بين أن $f(\alpha) = -\frac{1}{3}$

(3) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين احدهما المبدأ O و الأخرى فاصلتها β حيث $-0,8 < \alpha < -0,7$.

(4) أرسم المنحنى (C_f) على المجال $[-1; +\infty[$.

(5) H الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $H(x) = -\frac{1}{4}(2x^2 + 2x + 1)e^{2-2x}$

(أ) بين أن الدالة H أصلية للدالة $h \mapsto x^2e^{2-2x}$ على $\mathbb{R}$.

(ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن $\int_0^1 xe^{1-x} dx = e - 2$.

(ت) احسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين $y = 0$ ، $x = 0$ و $x = 1$.

انتهى الموضوع الثاني

التوفيق في امتحان شهادة البكالوريا



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التربية الوطنية



مجمع التربية والتعليم الخاص - دار النجاح -

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

الشعبة : علوم تجريبية

دورة: جوان 2024

الأستاذ : لقمان بعون

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (4 نقاط)

يحتوي كيس على 10 كريات متماثلة لتمييز بينها باللمس، منها : 5 كريات بيضاء مرقمة بـ: 0 ; 1 ; 2 ; 3 و 4 كريات حمراء مرقمة بـ: -1 ; -2 ; 0 ; 1 . وكرية خضراء مرقمة بـ: 2 .
نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات في آن واحد . أحسب احتمال تحقق الأحداث التالية :

1. A : " الكريات المسحوبة من نفس اللون " B : " من بين الكريات المسحوبة يوجد لونين على الأقل "

C : " جداء ارقام الكريات المسحوبة معدوم " D : " مجموع ارقام الكريات المسحوبة يساوي 3 " .

2. أحسب احتمال الحصول على 3 كريات مجموع أرقامها يساوي 3 علما أنها من نفس اللون .

3. نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة العدد $x + \alpha$.

حيث x هو عدد الألوان المتحصل عليها في السحبة الواحدة، α عدد حقيقي .

(أ) حدّد قيم المتغير العشوائي X بدلالة α ثم عرف قانون احتماله .

(ب) أوجد قيمة α بحيث : $E(X) = \frac{40521}{20}$

التمرين الثاني : (4 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = e^4 - 1$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1} = -1 + e\sqrt{u_n + 1}$.

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n + 1 > e^2$.

2. (أ) أدرس إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ثمّ استنتج أنّها متقاربة .

(ب) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1} + 1 - e^2 < \frac{1}{2} (u_n + 1 - e^2)$.

(ج) برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $0 < u_n + 1 - e^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^n (e^4 - e^2)$ ثمّ استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

3. المتتالية (v_n) معرفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ : $v_n = -1 + \ln(\sqrt{u_n + 1})$.

(أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسيّة أساسها $q = \frac{1}{2}$ يطلب إيجاد حدّها الأوّل .

(ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n . ثمّ تأكد مرة أخرى من $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.



4. أحسب المجموع S حيث : $S = \ln(u_0 + 1) + \ln(2(u_1 + 1)) + \dots + \ln(4048(u_{2024} + 1))$

التمرين الثالث : (5 نقاط) اختر الاجابة الصحيحة الوحيدة في كل حالة مع التبرير:

1. إذا كان $\int_1^2 f'(x)f''(x)dx = 8$ و $f'(2) - f'(1) = 2$ فإن قيمة $f'(2) + f'(1)$ تساوي

(أ) 8 (ب) 16 (ج) 4

2. إذا كان $\theta \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$ فإن الشكل الأسّي للعدد المركّب $z = 1 - e^{i\theta}$ هو :

(أ) $z = 2 \cos\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)}$ (ب) $z = \cos\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{2}\right)}$ (ج) $z = 2 \cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)}$

3. المتتالية العددية (w_n) معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = 4 \times 5^n - 2n + 1$

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$

S_n يساوي: (أ) $5^{n+1} - (n+1)^2$ (ب) $5^{n+1} - n^2$ (ج) $5^n - n^2$

4. من بين 8 رجال و 5 نساء إحتمال إختيار لجنة مكوّنة من 5 أعضاء من بينهم رئيس و نائب بحيث يكون الرئيس رجل

و النائب امرأة يساوي (أ) $\frac{11}{39}$ (ب) $\frac{4}{9}$ (ج) $\frac{10}{39}$

5. القيمة المضبوطة للتكامل $\int_0^1 \frac{x}{1+e^{-x^2}} dx$ تساوي (أ) $\ln \frac{1+e}{2}$ (ب) $\ln \sqrt{\frac{1+e}{2}}$ (ج) $\ln \sqrt{1+e}$

التمرين الرابع : (7 نقاط)

I. لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = e^{-x} - x + 1$.

1. أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1.2 < \alpha < 1.3$.

2. حدّد حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{xe^x}{1+e^x}$ (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و فسّر النتيجة بيانياً، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. (أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{e^x g(-x)}{(1+e^x)^2}$

(ب) بيّن أن الدالة f متزايدة تماماً على $[-\alpha; +\infty[$ و متناقصة تماماً على $]-\infty; -\alpha]$ ثم شكل جدول تغيراتها .

3. (أ) بين أن $y = x$ معادلة لـ (Δ) المستقيم المقارب المائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

(ب) أدرس الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f) . (ج) بيّن أن $f(-\alpha) = 1 - \alpha$ ثم جد حصراً للعدد $f(-\alpha)$.

4. أنشئ (Δ) و (C_f) ثم ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x) = f(m)$.

5. لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بـ (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين اللّذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = 1$.

بيّن أنه من أجل كل $x \in [0; 1]$: $\frac{xe}{2} \leq f(x) \leq \frac{x}{e+1}$ ثم بيّن أن $\frac{e}{4} \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{2(e+1)}$.

إنتهى الموضوع الأوّل



الموضوع الثاني

التمرين الأول : (4 نقاط)

$$\begin{cases} \ln(u_1) + \ln(u_2) = 11 \\ u_1 + u_2 = e^4(1 + e^3) \end{cases} \quad (u_n) \text{ متتالية هندسية متزايدة تماما ، حدودها موجبة تماما حدّها الأول } u_0 \text{ و أساسها } q \text{ حيث :}$$

1. أحسب u_1 ، u_2 ثم استنتج قيمة الأساس q .

نضع فيما يلي : $u_1 = e^4$ و $q = e^3$

2. جد u_0 و عبّر عن u_n بدلالة n ، ثم أكتب S_n بدلالة n حيث : $S_n = \ln u_0 + \ln u_1 + \dots + \ln u_n$.

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 2n - 3 + e^{3n+1}$.

3. تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = v_n + u_n$ حيث (v_n) متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها و حدّها الأول .

نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $t_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

4. بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $t_n = (n+1)(n-3) + \frac{e^{3n+4} - e}{e^3 - 1}$.

التمرين الثاني : (4 نقاط)

صندوق U_1 يحتوي ثلاث كريات حمراء و كرتين سوداوين و صندوق U_2 يحتوي على كرتين حمراوين و ثلاث كريات سوداء . كريات كل كيس متماثلة و لا نفرّق بينها باللمس .

نختار عشوائيا صندوقا من الصندوقين فإذا كان U_1 نسحب منه كرتين في آن واحد و إذا كان U_2 نسحب منه كرتين على التوالي بحيث لا نعيد الكرية المسحوبة الأولى قبل السحب الموالي . نسمّي الحدث R_i سحب كرية حمراء مع $i \in \{0; 1; 2\}$

1. بين أنّ $P_{U_1}(R_1) = \frac{3}{5}$.

2. (أ) أنقل شجرة الاحتمالات على ورقة إجابتك ثم أكملها. أنظر الوثيقة المرفقة

(ب) أحسب $P(R_1)$.

(ج) أحسب احتمال الحصول على كرتين لهما نفس اللون من U_1 .

3. إذا علمت أنّ الكرتين المسحوبتين من نفس اللون ما هو احتمال أن تكونا من U_1 .

4. نعتبر اللعبة التالية: في التجربة السابقة يحصل لاعب على 10 نقاط لكل كرية حمراء مسحوبة و يحصل على 7- نقاط لكل كرية سوداء مسحوبة و ليكن المتغيّر العشوائي X الذي يرفق بكل إمكانية سحب مجموع النقاط المحصّل عليها.

(أ) هل اللعبة في صالح اللاعب .

(ب) أحسب $P\left(\log\left(\frac{X}{2}\right) > 0\right)$.

التمرين الثالث : (5 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - (2 + \sqrt{2})z + 2 + \sqrt{2} = 0$.



2. ليكن a العدد المركب المُعرّف بـ : $a = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (أ) بيّن أنّ $|a| = \sqrt{2} + \sqrt{2}$. حيث $|a|$ تمثل طولية العدد المركب a .
- (ب) بيّن أنّ $a = 1 + e^{i\frac{\pi}{4}}$ ، ثمّ استنتج أنّ $a = 2 \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{i\frac{\pi}{8}}$.
3. استنتج قيمة كلّ من $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
4. (أ) بيّن أنّ العدد a^{2020} تخيليّ صرف و أنّ a^{2024} حقيقيّ .
- (ب) جد أكبر قيمة للعدد الطبيعي n حتى يكون $|a|^n < 2024$.
- (ج) جد مجموعة النقط M ذات اللّاحقة z من المستوي التي تحقق $|z - a| = |-8 + 6i|$.
5. حدّد صورة العدد a بالدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه w ذات اللّاحقة -2 و $z_w = -2$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

التمرين الرابع : (7 نقاط)

- I. لتكن الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = a \ln(x) - \frac{b}{x} + 1$ و (C_g) تمثيلها البياني .
1. إذا علمت أنّ المنحنى (C_g) يقبل عند النقطة $A(e; 2)$ مماساً معامل توجيهه $3e^{-1}$ بيّن أنّ : $a = 2$ و $b = e$.
2. أدرس تغيّرات الدالة g . ثمّ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[1, 49; 1, 51]$.
3. أدرس إشارة $g(x)$ حسب قيم x .
- II. نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{\ln(x) + xe}{x^2}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.
1. أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثمّ فسّر النتائج بيانيّاً .
2. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماماً : $f'(x) = \frac{g\left(\frac{1}{x}\right)}{x^3}$. ثمّ أدرس اتجاه تغيّر f و شكّل جدول تغيّراتها .
3. بيّن أنّ : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha\left(\frac{e+\alpha}{2}\right)$ ، ثمّ استنتج حصراً للعدد $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.
4. بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث $0, 3 < x_0 < 0, 4$.
5. أنشئ كلّاً من (C_f) و مستقيماته المقاربة .

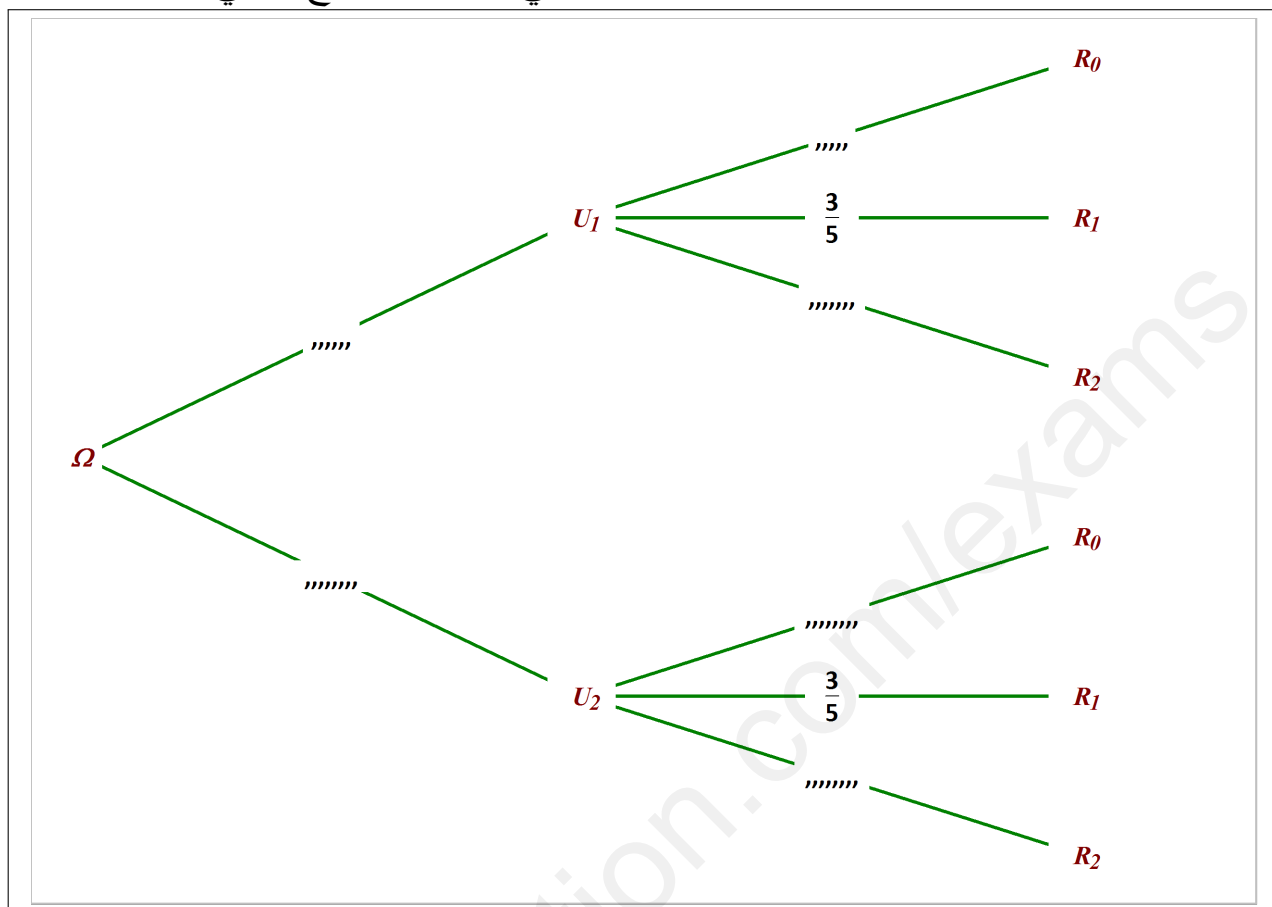
$$III. \text{ نضع من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} : A_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} f(x) dx \quad ; \quad I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$$

- (أ) باستعمال التكامل بالتجزئة بيّن أنّ : $I_n = \frac{n+1}{e^n} - \frac{n+2}{e^{n+1}}$. ثمّ بيّن أنّ : $A_n = I_n + e$
- (ب) أحسب I_0 و A_0 و أعط تفسيراً هندسياً للعدد A_0 . ثمّ بيّن أنّ المتتالية (A_n) متقاربة نحو العدد e .

إنتهى الموضوع الثاني



الوثيقة المرفقة الخاصة بالتمرين الثاني من الموضوع الثاني



13 ماي 2024

3 ع دة

المدة: 3 ساعات ونصف

مديرية التربية لولاية الجلفة

ثانوية سي شريف بلعشر - الجلفة -

الاختبار التجريبي في مادة الرياضيات

عالج موضوعا واحدا على الخيار

الموضوع الأول

التمرين الأول:

(u_n) المتتالية المعرفة بـ: $u_0 = e^2 - 1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = (1 + u_n)e^{-2} - 1$

1- ابرهن بالتراجع على انه من اجل كل عدد طبيعي n : $1 + u_n > 0$

ب- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = (1 + u_n)(e^{-2} - 1)$ ثم استنتج اتجاه تغير (u_n)

2) (v_n) المتتالية المعرفة على N بـ: $v_n = 3(1 + u_n)$

ا- بين ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب- اكتب v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n ، احسب $\lim u_n$

ج- بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $\ln v_0 + \ln v_1 + \dots + \ln v_n = (n+1)(-n+2+\ln 3)$

التمرين الثاني:

يحتوي صندوق على 4 كريات بيضاء تحمل الأرقام 1، 1، 1، 1 و 3 كريات حمراء تحمل الأرقام 1، 1، 1.

و 3 كريات سوداء تحمل الأرقام 1، 1، 1. (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس)

1) ن سحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الصندوق

نعتبر الحادثتين A «سحب 3 كريات من نفس اللون» و B «سحب 3 كريات تحمل نفس الرقم»

أ- احسب احتمال كل حادثة من الحوادث التالية: A ، B ، $A \cap B$ و $A \cup B$

ب- احسب احتمال «سحب 3 كريات تحمل نفس الرقم علما أنها من نفس اللون»

ج- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب مجموع أرقام الكريات المسحوبة.

- عين قيم المتغير العشوائي X .

- اكتب قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

2) ن سحب الآن 3 كريات من الصندوق على التوالي وبدون إرجاع

ما هو احتمال «سحب 3 كريات ذات ألوان مختلفة مثني مثني»

التمرين الثالث:

(1) حل في C المعادلة: $\frac{\sqrt{3}}{z-1} = i$ واستنتج حل المعادلة: $\frac{\sqrt{3}}{-iz-1} = i$

(2) نعتبر النقط A, B, C, D في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ التي لواحقتها على الترتيب هي:

$$z_D = -1 + i\sqrt{3} \text{ و } z_C = \sqrt{3} + i, z_B = 1 - i\sqrt{3}, z_A = -\sqrt{3} - i$$

- جد الطويلة وعمدة لكل عدد من الأعداد المركبة: z_A, z_B, z_C, z_D .

(3) أ- عين لاحقة منتصف كل من القطعتين $[AC]$ و $[BD]$.

ب- أكتب العدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$ على الشكل الأسّي.

ج- استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$ وعين لاحقة مركز ثقله.

(4) عين مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\| = 8$

التمرين الرابع:

أ) الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي: $g(x) = x + e^x$
 (1) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) برهن إن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0,5 < \alpha < -0,6$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

(3) أثبت أن: $\int_{\alpha}^0 g(x) dx = 1 + \alpha - \frac{1}{2} \alpha^2$

ب) f الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; \alpha] \cup]\alpha; +\infty[$: $f(x) = \ln\left(\frac{1}{g(x)}\right)$

(c) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

(1) احسب نهايتي f عند α وعند $+\infty$.

ب- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = -x$ مقارب مائل للمنحني (c) ثم ادرس وضعية (c) بالنسبة إلى (Δ) .

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أنه يوجد مماس (T) للمنحني (c) يوازي (Δ) بطلب كتابة معادلة له.

(4) ارسم (Δ) , (T) و (c).

(5) ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : $\ln\left(\frac{e^x}{x+e^x}\right) = m$

(6) الدالة المعرفة على المجال $]-\infty; -\alpha[$ كمايلي: $h(x) = x - \ln(1 - xe^x)$

(y) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-\infty; -\alpha[$: $h(x) = f(-x)$

ب- بين كيف يمكن انشاء المنحني (y) انطلاقا من المنحني (c) ثم ارسم المنحني (y) في المعلم السابق.

الموضوع الثاني ☺☺

التمرين الثاني (4 نقاط):

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس والمباشر $(O, \vec{i}, \vec{j})$ نعتبر A, B, C, D نقط لواحقتها :

$$Z_D = -Z_B, Z_C = 2e^{i\frac{\pi}{2}}, Z_B = \overline{Z_A}, Z_A = \sqrt{3} - i$$

1/ حلول المعادلة : $Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4 = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ هي :

$$\{Z_A, Z_B\} / \text{أ} \quad \{Z_B, Z_D\} / \text{ب} \quad \{Z_A, Z_D\} / \text{ج}$$

2/ الكتابة الجبرية للعدد المركب : $L = \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$ هي :

$$L = -1 + i\sqrt{3} / \text{أ} \quad L = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} / \text{ب} \quad L = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} / \text{ج}$$

3/ المثلث ABC هو مثلث :

أ/ متساوي الساقين ب/ متقايس الأضلاع ج/ قائم في B

4/ مجموعة النقط M ذات اللاحقة $Z = x + iy$ و التي تحقق : $|\overline{Z} - Z_C| = |Z + Z_D|$ هي مستقيم ذي المعادلة :

$$y = \sqrt{3}x / \text{أ} \quad y = \frac{-x}{\sqrt{3}} / \text{ب} \quad y = x - \sqrt{3} / \text{ج}$$

التمرين الأول (5 نقاط):

في الشكل نمثل الدالة f المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ و (Δ) مستقيم معادلته $y = x$

1/ أحسب $f(1)$ و $f(\sqrt{3})$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[1; \sqrt{3}]$

2/ أثبت أنه من أجل $x \in [1; \sqrt{3}]$ فإن : $f(x) \in [1; \sqrt{3}]$

II المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_{n+1} = f(U_n)$, $U_0 = 1$

1/ مثل على حامل محور الفواصل الحدود : U_1, U_2, U_3 , مبرزا خطوط الانشاء في الشكل المرفق (الصفحة 5)

2/ ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها

3/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq U_n \leq \sqrt{3}$

4/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(2 - \sqrt{U_n^2+1})}{\sqrt{U_n^2+1}}$ و استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n)

5/ استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة

III نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = \frac{U_n^2}{3 - U_n^2}$

أ/ بين أن المتتالية (V_n) متتالية هندسية أساسها $q = 4$ ثم أحسب حدها الأول V_0

ب/ اكتب عبارة V_n بدلالة n , ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n , ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

ج/ أحسب بدلالة n : $P_n = \frac{(U_0 \times U_1 \times \dots \times U_n)^2}{(3 - U_0^2)(3 - U_1^2) \dots (3 - U_n^2)}$



التمرين الثالث (4 نقاط):

وكالة تجارية للاتصالات تتكون من 12 شخص (8 رجال و 4 نساء) ، منهم رجل واحد اسمه منير ، وامرأة واحدة اسمها نادية . نريد تشكيل لجنة للتسیر بها 3 أعضاء (كل شخص له الحق أن يكون في اللجنة) .

I / ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها في حالة أن الأعضاء لهم نفس المهام .

II / الآن ، في حالة أعضاء اللجنة مكونة من : الرئيس ، النائب ، الأمين العام

I / عين عدد اللجان التي يمكن تشكيلها .

2/ أحسب إحتمال الحوادث التالية : A : 'اللجنة تظم منير' . B : 'اللجنة تتكون من رجلين و امرأة' .

C : 'اللجنة تتكون من منير أو نادية' . D : 'اللجنة مكونة من امرأة على الأكثر' .

3/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرافق بكل لجنة مختارة عدد الرجال الذين تم اختيارهم ضمن اللجنة

أ/ عين قيم المتغير العشوائي X ب/ عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ج/ أحسب الامل الرياضي $E(X)$

التمرين الرابع (07 نقاط):

I / g هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كمايلي : $g(x) = x^2 + \ln x$.

1/ أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

2/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.6 < \alpha < 0.7$

2 / إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

II / f هي الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = x^2 - 1 + (\ln(x))^2$.

نسمى (C_f) المنحنى الممثل لها في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (مع $OI = 1cm$)

1/ أحسب نهايات الدالة f عند حدود مجال تعريفها

2/ تحقق أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$

3/ إستنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم أنجز جدول تغيراتها

4 / أ/ أكتب معادلة المستقيم (D) مماس للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1,0)$

ب/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (D) .

5/ أنشئ المستقيم (D) و المنحنى (C_f) . مع $(f(\alpha) = -0.4)$

6/ أ/ بين أن الدالة H المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $H(x) = x \ln(x) - x$ دالة أصلية للدالة h حيث : $h(x) = \ln(x)$

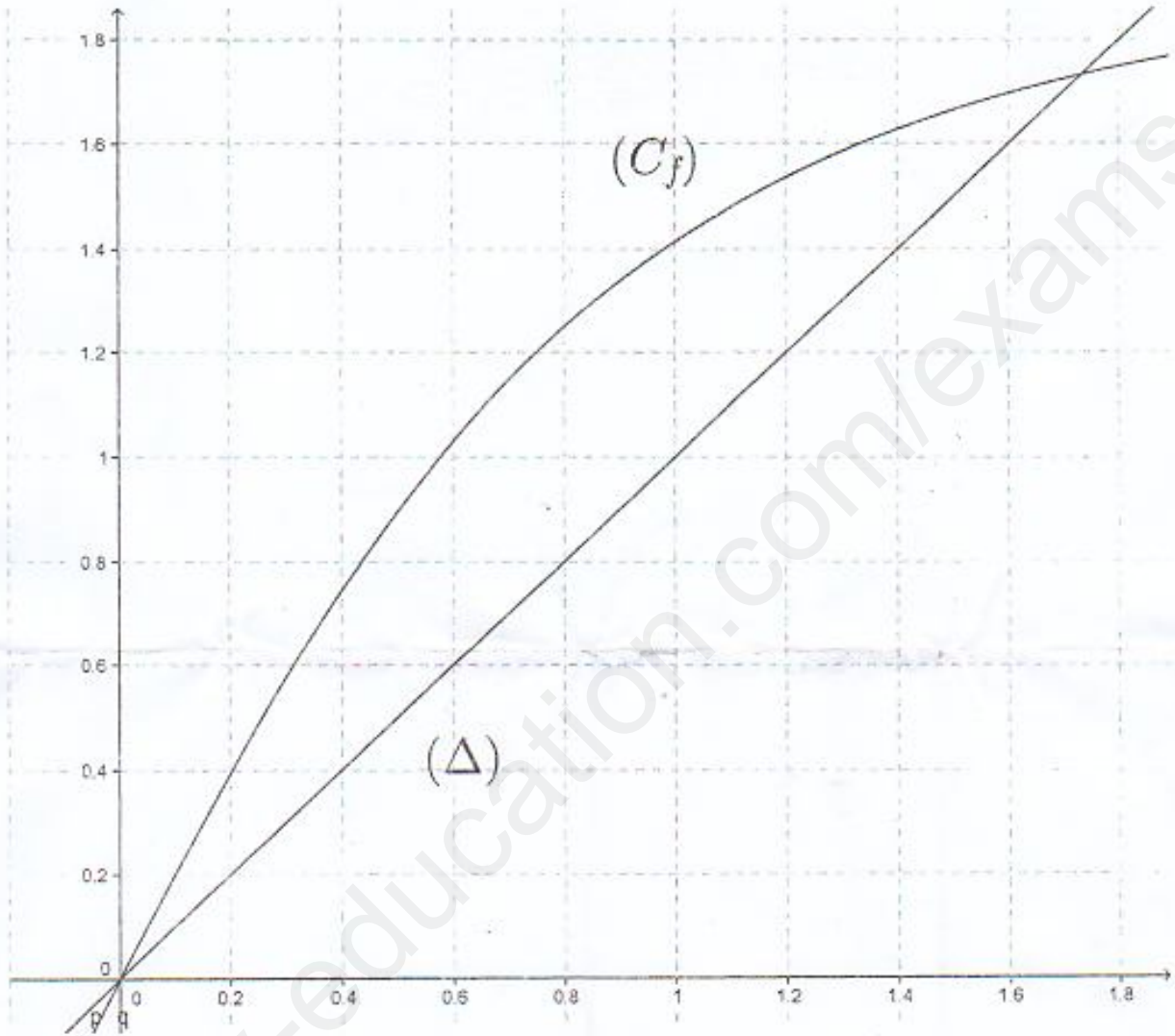
أ/ باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $\int_1^e \ln^2(x) dx = e - 2$

ب/ إستنتج مساحة الحيز S المحصور بين المنحنى (C_f) والمستقيمت (D) و $x=1$ و $x=e$

إنتهى

بالتوفيق للجميع في بكالوريا جوان 2024

الوثيقة المرفقة : اللقب : الاسم : القسم :

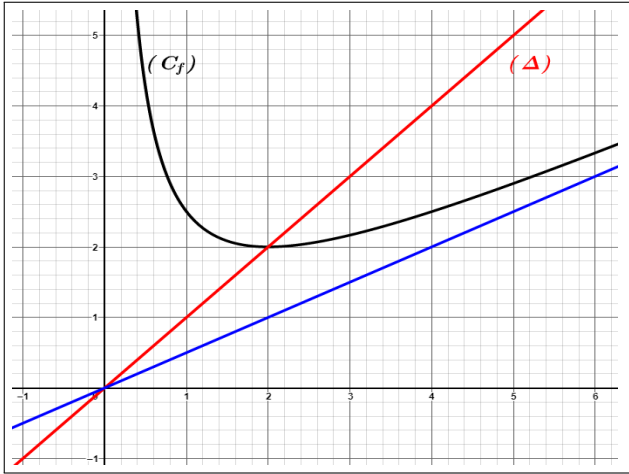


الصفحة 5 من 4

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)



في الشكل المقابل (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x}$ والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

① المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

أ - أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الاجابة ثم مثل دون حساب على محور الفواصل الحدود الثلاثة الأولى للمتتالية (u_n)

ب - ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربا

ج - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 2$

د - أثبت أن (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة

② المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \ln\left(\frac{u_n - 2}{u_n + 2}\right)$

أ - يبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول v_0

ب - اكتب v_n ثم u_n بدلالة n ، واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

ج - احسب بدلالة n الجداء P_n حيث : $P_n = \left(1 - \frac{4}{u_0 + 2}\right) \times \left(1 - \frac{4}{u_1 + 2}\right) \times \dots \times \left(1 - \frac{4}{u_n + 2}\right)$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

نعتبر الأعداد المركبة a ، b و c حيث : $a = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ ، $b = 1 + i\sqrt{3}$ و $c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

① تحقق أن $ac = 4b$ و $b\bar{c} = a$ ($\bar{c}$ مرافق c)

② أ - اكتب العددين المركبين b و c على الشكل المثلثي ثم استنتج أن $a = 4\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)$

ب - عين القيمة المضبوطة لكل من $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$

③ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

لتكن النقط B ، C و D التي لواحقها على الترتيب : b ، c و a^4 ، وليكن R الدوران الذي مركزه مبدأ المعلم O وزاويته $\frac{\pi}{12}$ والذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها Z النقطة M' ذات اللاحقة Z'

أ - تحقق أن $Z' = \frac{1}{4}aZ$ ثم جد صورة النقطة C بالدوران R

ب - استنتج طبيعة المثلث OBC

ج - يبين أن $a^4 = 128b$ ثم استنتج أن النقط B و D في استقامية

د - عين (Δ) مجموعة النقط M من المستوي التي يكون من أجلها العدد $\frac{Z - Z_B}{Z - Z_D}$ عددا حقيقيا سالبا تماما

اختبار في مادة : الرياضيات / الشعبة : علوم تجريبية / بكالوريا تجريبية 2024

التمرين الثالث : (05 نقاط)

يحتوي كيس على 8 كريات متماثلة لانفرق بينها باللمس منها أربع كريات سوداء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 0 و 2 وأربع كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 و 2

* ن سحب عشوائيا و في آن واحد 3 كريات من الكيس
نعتبر الاحداث التالية :

A : " الكريات المسحوبة تحمل نفس الرقم "

B : " الكريات المسحوبة تحمل نفس اللون "

C : " الكريات المسحوبة أرقامها مختلفة مثنى مثنى "

① أ - احسب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$ احتمال الاحداث A ، B و C على الترتيب

ب - يبين أن $P(B \cap C) = \frac{1}{28}$ ثم استنتج $P_B(C)$ و $P(B \cup C)$

ج - هل الحدثين B و C مستقلين ؟ برر إجابتك

② ليكن X المتغير العشوائي الذي يُرفق بكل عملية سحب عدد الكريات التي تحمل الرقم 1

أ - عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$

ب - استنتج $E(2024X + 1445)$

ج - احسب $P(e^{2X} - (e + 1)e^X + e = 0)$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I _ g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - (2x + 1)e^{2x}$

① ادرس تغيرات الدالة g

② احسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II _ f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + 3 - xe^{2x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

① احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

② أ - يبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$

ب - استنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها

③ أ - أثبت أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة ديكارتية له

ب - ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

④ أثبت أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω يطلب تعيين إحداثيها

⑤ أ - يبين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β حيث : $-3.1 < \alpha < -3$ و $0.7 < \beta < 0.8$

ب - احسب $f(1)$ ثم ارسم (Δ) و (C_f)

ج - ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = f(m)$

⑥ أ - باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto xe^{2x}$ التي تنعدم من أجل $x = 0$

ب - احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = 1$

انتهى الموضوع الأول

اختبار في مادة : الرياضيات / الشعبة : علوم تجريبية / بكالوريا تجريبية 2024

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (05 نكلاء)

✎ (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ ، $u_1 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

① احسب u_2 ثم تحقق أن المتتالية (u_n) ليست حسابية ولا هندسية

② نعتبر المتتاليتان (v_n) و (w_n) المعرفتان على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_{n+1} - u_n$ و $w_n = \ln(v_n)$

أ - يبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب تعيين حدها الأول ثم اكتب v_n بدلالة n

ب - يبين أن (w_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ثم اكتب w_n بدلالة n

③ عيّن اصغر عدد طبيعي n يحقق $v_n < 10^{-5}$

④ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

أ - عبّر عن S_n بدلالة n

ب - استنتج أن $u_n = 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

⑤ نعتبر المجموع S'_n حيث : $S'_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

* حدد قيمة العدد الطبيعي التي من أجلها يكون $S'_n = -55 \ln 2$

التمرين الثاني : (04 نكلاء)

I - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z التالية : $(Z^2 + 4)(Z^2 - 6Z + 10) = 0$

II - المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

لتكن النقط A ، B ، C ، D و E التي لواحقها على الترتيب :

$$Z_E = 2 + 3i \text{ و } Z_D = 3 + i , Z_C = 3 - i , Z_B = -2i , Z_A = 2i$$

① اكتب Z_A على الشكل المثلثي ثم يبين أن $Z_A^{2024} + Z_B^{2024} = 2^{2025}$

② أ - اكتب العدد المركب $\frac{Z_A - Z_E}{Z_D - Z_E}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي واستنتج طبيعة المثلث ADE

ب - استنتج أن A صورة D بتحويل نقطي يطلب ذكره مع تعيين عناصره المميزة

ج - اكتب معادلة ديكارتية للدائرة المحيطة بالمثلث ADE

③ نسبي (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z حيث : $\arg(iZ - 1 - 3i) = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$: $(k \in \mathbb{Z})$

* تحقق أن $A \in (\gamma)$ ثم عيّن المجموعة (γ)

اختبار في مادة : الرياضيات / الشعبة : علوم تجريبية / بكالوريا تجريبية 2024

التمرين الثالث : (04 نقاط)

يحتوي كيس على 8 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس منها أربع كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، وثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 2 وكرية واحدة خضراء تحمل الرقم 1
◀ نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات على التوالي دون ارجاع

① احسب احتمال كل من الاحداث A ، B و C حيث :

A " الكريات المسحوبة من نفس اللون "

B " من بين الكريات المسحوبة كرية واحدة تحمل الرقم 1 "

C " ظهور كرية بيضاء في السحبة الأولى "

② بين أن $P(B \cap C) = \frac{23}{168}$ ثم استنتج $P_C(B)$

③ نعيد الكيس إلى وضعيته السابقة، ثم نسحب منه عشوائيا أربع كريات في آن واحد

وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الألوان المتحصل عليها

* عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب الامل الرياضي $E(X)$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I _ نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 3 - 2 \ln x$

① ادرس تغيرات الدالة g

② أ _ عيّن إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

ب _ استنتج أنه من أجل كل x من $] -1; +\infty[$: $g(x+1) > 0$

II _ نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $] -1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - \frac{1 - 2 \ln(x+1)}{x+1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 2cm)

① احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسر هندسيا النتيجة الأخيرة

② أ _ بين أنه من أجل كل x من $] -1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x+1)}{(x+1)^2}$

ب _ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

③ أ _ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f)

ب _ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

④ بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0.3 < \alpha < 0.4$

⑤ ارسم بعناية المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f)

⑥ احسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهم $x = 1$ و $x = e - 1$

انتهى الموضوع الثاني



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = \frac{1}{3}$ و لكل عدد طبيعي n لدينا $u_{n+1} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{1+2u_n}\right)$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $0 < u_n < 1$

(2) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(3) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها

(4) المتتالية العددية (v_n) معرفة كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n}$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحددها الأول

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج- أحسب المجموع التالي: $S = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

صندوقان U_1 و U_2 يحتوي الصندوق U_1 على كرتين سوداوين و 3 كريات بيضاء و يحتوي الصندوق U_2 على 4 كريات سوداء و 3 بيضاء كلها متشابهة الملمس . نسحب عشوائيا كرية من الصندوق U_1 و نضعها في الصندوق U_2 ثم نسحب من هذا الأخير كرتين في آن واحد .

نعتبر الحادثتين: A "الكرية المسحوبة من الصندوق U_1 سوداء" و B "سحب كرتين بيضاوين من الصندوق U_2 "

(1) أحسب $P(A)$ ثم بين أن $P_A(B) = \frac{3}{28}$

(2) شكل شجرة الاحتمالات المنمذجة لهذه التجربة العشوائية

(3) أحسب $P(B)$ ثم استنتج احتمال سحب كرية سوداء على الأقل من الصندوق U_2

(4) نكرر هذه التجربة أربع مرات متتالية (بمعنى نعيد الصندوقين إلى وضعهما الأول قبل إعادة التجربة في كل مرة)

ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين من الصندوق U_2 مرة على الأقل؟

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول Z التالية : $Z^2 - 4\sqrt{3}Z + 16 = 0$

ب- أكتب الحلول على الشكل الأسّي

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B ذات اللاحقتين

$$Z_B = 2\sqrt{3} + 2i, \quad Z_A = 2\sqrt{3} - 2i$$

علم النقطتين A, B ثم بين أن المثلث OAB متقايس الأضلاع

(3) نقطة لاحقتها $Z_C = -8i$ و D صورتها بواسطة الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

أ- علم النقطتين C و D ثم بين أن $D = 4\sqrt{3} + 4i$

ب- بين أن D هي صورة B بالتحاكي الذي مركزه O يطلب تحديد نسبته

ج- بين أن المثلث OAD قائم

(4) بين أن المجموعة (Γ) للنقط M ذات اللاحقة Z التي تحقق : $|Z - Z_B| = |Z_A|$ هي الدائرة المحيطة بالمثلث OAB

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = 1 - x(\ln x)^2$

(C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ كما في الشكل :

(1) بين أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ فإن : $g'(x) = -(2 - \ln x)\ln x$

(2) استنتج اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$ وشكل جدول تغيراتها

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2 < \alpha < 2.1$

ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]1; +\infty[$

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = -x + e - \frac{1 - \ln x}{\ln x}$. (C_f) تمثيلها البياني في معلم م م $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسر الثانية هندسيا

(2) بين أنه من أجل كل $x \in]1; +\infty[$ فإن $f'(x) = \frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$ ثم استنتج اتجاه الدالة f وشكل جدول تغيراتها

(3) بين أنه من أجل كل $x \in]1; +\infty[$ فإن $f(x) = \frac{-1}{\ln x} - x + e + 1$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (D)

يطلب تعيين معادلة له ثم أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم (D)

(4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة e

(5) أرسم المماس (T) و المنحني (C_f) .

(6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = \frac{1-e}{e}x + m$

الموضوع الثاني

التمرين الاول: (04 نقاط)

1) نعتبر العدد المركب $\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

أ- بين أن : $\alpha^4 = 16i$

ب- أكتب α على الشكل المثلثي ثم استنتج القيم المضبوطة لكل من $\cos\left(\frac{13\pi}{8}\right)$ و $\sin\left(\frac{13\pi}{8}\right)$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط B, A و C ذات اللاحقات

$Z_A = 2$ ، $Z_B = i$ و $Z_C = 16 + 33i$ على الترتيب

3) أ- عين العبارة المركبة والعناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي مركزه B والذي يحول A إلى C

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC

ج- أحسب مساحة المثلث CBC' علما أن $S(C) = C'$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

وحدة إنتاجية يسيرها 12 عاملا منهم 5 نساء و 7 رجال من بينهم العامل "أحمد"

1) يريد العمال تشكيل لجنة مؤلفة من ثلاثة أعضاء لهم نفس المهام . أ- ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بهذه الكيفية؟

ب- أحسب احتمال الحوادث التالية "

A "أعضاء اللجنة نساء" ، B "اللجنة تضم على الأكثر امرأة" ، C "اللجنة تضم على الأقل رجل"

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل لجنة مشكلة عدد الرجال الموجودين بها

أ- عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$

ب- أحسب $P(e^{2X} - 4e^X + 3 \leq 0)$

3) يريد العمال تشكيل لجنة مؤلفة من رئيس و نائب له و كاتب . أ- ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بهذه الكيفية؟

ب- أحسب احتمال الحادثة D "أحمد عضو باللجنة"

التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي:
$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} \end{cases}$$
 حيث α عدد حقيقي

1) عين قيم العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة

2) نضع في كل ما يأتي : $\alpha = 1$

أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$. (لاحظ أن $u_{n+1} = \sqrt{4 - \frac{4}{u_n^2 + 1}}$)

ب- بين أن المتتالية (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة

3) لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $v_n = \frac{(u_n)^2}{3-(u_n)^2}$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n^2 = \frac{3 \times 4^n}{2+4^n}$

ج- أحسب المجموع التالي $S = \frac{1}{(u_0)^2} + \frac{1}{(u_1)^2} + \dots + \frac{1}{(u_n)^2}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f(x) + f(-x) = 2$. ماذا تستنتج؟

2) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

ب- بين أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها

3) أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة A ذات الفاصلة 0

4) نعتبر الدالة g المعرفة على R كما يلي: $g(x) = f(x) - (x + 1)$

أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $g'(x) = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g

ب- أحسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x

ج- استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T) . ما ذا يمكن القول عن النقطة A ؟

5) أرسم كلا من (T) و (C_f)

6) أ- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون $f(x) = a + \frac{be^x}{e^x + 1}$

ب- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمت ذات المعادلات

$$x = -2 \text{ و } x = 2, \quad y = x + 1$$

نتمنى لكم التوفيق و النجاح في شهادة البكالوريا 2024

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول (04 نقاط) :

عَيِّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاث في كل حالة من الحالات التالية ، مع التبرير :

الاقتراح (ج)	الاقتراح (ب)	الاقتراح (أ)	
$\left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$	$\ln 2; \ln 4[$	$\ln 2$	نعرف المتتالية (u_n) من أجل كل عدد طبيعي n $u_n = (4^{2n} + 4^n - 5)^n + 3$ قيم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ هي
$S = 2023$	$S = 1012$	$S = 2024$	$u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{2}{x} (1 + \ln x) dx$: $\mathbb{N}$ على معرفة قيمة المجموع : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{43}$ هي
$S = 448$	$S = -448i$	$S = 1792i$	z عدد مركب ، معامل z في منشور العدد $(z + 2i)^5$ هو
$-\frac{\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	إذا كان $\frac{\pi}{12}$ عمدة للعدد المركب z فإن عمدة العدد $\frac{1}{z^2}$ هي
$e^{i\frac{\pi}{6}}$	$e^{-i\frac{\pi}{3}}$	$e^{-i\frac{\pi}{6}}$	إذا كان $z = -i\sqrt{3} + e^{i\frac{\pi}{3}}$ فإن الشكل الأسّي للعدد z هو

التمرين الثاني (05 نقاط) :

I. (w_n) متتالية حسابية متزايدة تماما معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول w_0 واساسها r :

$$\begin{cases} 2w_1 + 3w_2 + 2w_3 = 35 \\ w_1^2 + 10w_2 - w_4^2 = -22 \end{cases} \quad \text{(أ) أحسب } w_2 \text{ والأساس } r \text{ علما أن :}$$

(ب) اكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n

(ج) بَيِّن أن العدد 4049 حد من حدود هذه المتتالية ثم عين رتبته وأحسب المجموع S حيث : $S = w_0 + w_1 + \dots + w_{2024}$

II. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 3u_n + 2n + 1$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 3^n - n - 1$

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = u_n + n + 1$

(أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 3 ، يطلب حساب حدها الأول v_0

(ب) اكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n وأحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(ت) احسب بدلالة n المجموعين S_n و T_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

(ث) عين قيمة n حتى يكون : $S_n - T_n = 1830$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

يحتوي صندوق U على (12) كرية متماثلة لا تفرق بينها عند اللمس منها (5) كريات بيضاء مرقمة كما يلي :
 $0, 2, 4, 4, 2$ واربع كريات سوداء مرقمة كما يلي : $1, 1, 2, 2$ وثلاث كريات حمراء مرقمة كما يلي : $1, 2, 0$
 I. نقوم بسحب أربع كريات في آن واحد وبطريقة عشوائية

✓ أحسب احتمال الأحداث التالية : A : " الكريات المسحوبة من نفس اللون "
 B : " الحصول على أربع كريات تحمل أرقاماً تشكل العدد 2024 "
 C : " الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها 8 "
 D : " الحصول على كرية بيضاء على الأقل "

$$(1) \text{ بَيِّنْ أَنْ : } P(A \cap B) = \frac{2}{495} \text{ ثم استنتج } P(\overline{A \cup B})$$

II. نقوم الآن باستبدال الكريات البيضاء بـ n كرية سوداء تحمل الرقم 2 ونسحب من الصندوق عشوائياً كرتين على التوالي وبدون ارجاع ، ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب مجموع الرقمين المسجلين على الكرتين .
 (أ) عين القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X و عرف قانون احتماله .
 (ب) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I. لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (4 - 2x)c^x - 4$

$$(1) \text{ احسب } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) .$$

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) بَيِّنْ أَنْ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 0 والآخر α حيث : $1.59 < \alpha < 1.6$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً

(4) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x-2}{c^x - 2x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

(1) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانياً

ج- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{(c^x - 2x)^2}$

د- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

(2) بين أن : $f(\alpha) = \frac{2-\alpha}{\alpha-1}$ ، واستنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$

(3) أنشئ المنحنى (C_f)

(4) لتكن الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x) = -x + \ln(c^x - 2x)$

أ- بَيِّنْ أَنْ F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

ب- أحسب بالسنتيمتر مربع مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات

$$y = 0 , \quad x = 2 , \quad x = 0$$

التصحيح النموذجي و سلم التقيد لمتحان البكالوريا التجريبية في مادة الرياضيات

سليم الشيب

المخرج الأول = 1

حل التمرين الأول = 1

1. نعرف المتسلسلة (u_n) (n) من أجل كل عدد طبيعي n =

$$u_n = (4^{2n} + 4^n - 5)^n + 3$$

$$u_n = +\infty \text{ حيث } n \rightarrow +\infty$$

الإيضاح الصحيح هو: [1, +∞[

التعليل =

$$u_n = +\infty \text{ حيث } n \rightarrow +\infty \text{ يكافئ: } 4^{2n} + 4^n - 5 > 1$$

$$4^{2n} + 4^n - 6 = 0 \text{ حيث } 4^{2n} + 4^n - 6 > 0$$

$$y^2 + y - 6 = 0 \text{ حيث } y = 4^n$$

معادلة من الدرجة الثانية نؤول حلها إلى حساب المميز Δ =

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(-6) = 25 > 0$$

$$y_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 5}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$

$$y_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$4^\alpha = 2 \text{ يكافئ: } \alpha \ln 4 = \ln 2$$

$$\alpha = \frac{\ln 2}{\ln 4} = \frac{1}{2} \text{ حيث } \alpha = \frac{\ln 2}{\ln 4}$$

n	-∞	1/2	+∞
4^n - 2	-	0	+
4^{2n} + 4^n - 6	-	0	+

$$\alpha \in]\frac{1}{2}, +\infty[\text{ حيث } 4^{2\alpha} + 4^\alpha - 5 > 1$$

$$u_n = \int_0^{e^{n+1}} \frac{2}{n} (1 + \ln x) dx = \frac{1}{n} \int_0^{e^{n+1}} (1 + \ln x) dx$$

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$S = 2024$$

$$S' = \int_0^{e^{n+1}} \frac{2}{n} (1 + \ln x) dx + \int_0^{e^{n+1}} \frac{2}{n} (1 + \ln x) dx + \dots + \int_0^{e^{n+1}} \frac{2}{n} (1 + \ln x) dx$$

$$S = \int_0^{e^{n+1}} \frac{2}{n} (1 + \ln x) dx = 2 \left[\ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C \right]_0^{e^{n+1}}$$

$$= 2 \left[44 + \frac{1}{2} (44)^2 \right]$$

$$S = 2024$$

ملاحظة 1

Q26 $z = -i\sqrt{3} + e^{\frac{\pi}{3}} = e^{\frac{\pi}{3}} i$ $\angle(z) = \frac{\pi}{3}$ $\cos 0 = \frac{1}{2}$ $\sin 0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

5 لغات حل التمرين الثاني = I / (w) متتالية حسابية من ايد 0 لما ما معرفة حتى w اسدا
الاسل w واساسها 2 .
أ- حساب w و r = 2

لدينا :
$$\begin{cases} 2w_1 + 3w_2 + 2w_3 = 35 \\ w_1^2 + 10w_2 - w_3^2 = -22 \end{cases}$$

من الرسم الحسابي نجد : $2(w_1 + w_3) = 4w_2$
بالتعويض نجد : $4w_2 + 3w_2 = 35$ و $4w_2 = 35$
إذن : $w_2 = \frac{35}{7} = 5$

كتابة عبارة الحد العام بدلالة w :
 $w_n = w_p + (n-p)r$
 $w_n = 5 + (n-2)r$

إذن :
$$\begin{cases} w_1 = 5 - r \\ w_4 = 5 + 2r \end{cases}$$

بالتعويض في المعادلة (2) نجد :
 $(5-r)^2 + 50 - (5+2r)^2 = -22$

حساب المميز : $25 - 10r + r^2 + 50 - 25 - 4r^2 - 20r + 22 = 0$
 $-3r^2 - 30r + 72 = 0$
للمعادلة حلين :
 $\Delta = b^2 - 4ac = 1764 > 0$
 $r_1 = 2$

مرفوضا لان (w) متتالية لما عا) : $r_2 = -12$
إذن : $r = 2$ $w_2 = 5$
ب- كتابة عبارة الحد العام :

$w_n = w_2 + (n-2)r$
 $= 5 + (n-2)2$
 $= 5 + 2n - 4$
 $w_n = 1 + 2n$

إذن : $w_n = 1 + 2n$

13 z عدد مركب ، معامل z في متشور
العدد $(z+2i)^8$ هو :
الاختيار الصحيح هو : ب) $-448i$

Q26
$$(z+2i)^8 = C_8^0 z^8 (2i)^0 + C_8^1 z^7 (2i)^1 + C_8^2 z^6 (2i)^2 + C_8^3 z^5 (2i)^3 + C_8^4 z^4 (2i)^4 + C_8^5 z^3 (2i)^5 + C_8^6 z^2 (2i)^6 + C_8^7 z (2i)^7 + C_8^8 (2i)^8$$

إذن : $C_8^3 z^5 (2i)^3 = -448i z^5$
وهو معامل z^5 هو : $-448i$

14 إذا كان $\frac{\pi}{12}$ عدة للعدد المركب z فإن :
عدة العدد $\frac{1}{z^2}$ هي :
الاختيار الصحيح هو : (2) $\frac{\pi}{6}$

لدينا : $\arg(z) = -\arg(\bar{z})$
 $-\arg(\bar{z}) = -\frac{1}{2} \arg(\frac{1}{z^2}) = -\frac{1}{2} \cdot (-\arg(\frac{1}{z^2}))$
 $= \frac{1}{2} \arg(\frac{1}{z^2})$

إذن : عدة $\frac{1}{z^2} = \frac{1}{2} \arg(\frac{1}{z^2}) = \frac{\pi}{6}$

15 إذا كان : $e^{\frac{\pi}{3}} i \sqrt{3} = z$ فإن الشكل الأسّي
للعدد z هو :
الاختيار الصحيح هو : (2) $e^{\frac{\pi}{3}}$

لدينا : $z = -i\sqrt{3} + \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$
كتابة z على الشكل الجبري : $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

كتابة z على الشكل الأسّي : $1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}} = 1$

إذن : $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

ج 1. نبيأ أن: 4049 حد من حدود المتتالية:

$w_n = 4049$ يكافئ: $1 + 2n = 4049$

$n = 2024$ إذن: $2n = 4048$

وقتها: 4049 حد من حدود المتتالية حيث:

$\mu_{2024} = 2049$

حساب رتبة:

$X = n - n_0 + 1$

$= 2024 - 0 + 1$

$X = 2025$ إذن رتبة الـ 4049 هي:

2025

حساب S :

$S = w_0 + w_1 + \dots + w_{2024}$

$S = \frac{2025}{2} [w_0 + w_{2024}] = \frac{2025}{2} [1 + 4049]$

$S = 4100625$

$\mu = 3\mu_n + 2n + 1$ و $\mu_0 = 0$

1. البرهان بالتراجع:

نحج $p(n) = 3^n - n - 1$

$n=0$: $\mu_0 = 3^0 - 0 - 1$

$= 1 - 1 = 0$

وقتها: $\mu = 0$ إذن: $p(0)$ محققة

نفرض أن $p(n)$ صحيحة أي أنه عند أجل الـ عدد

طبيعي n فإن: $\mu_n = 3^n - n - 1$ ونبرصا صحة $p(n+1)$

أي أنه عند أجل الـ عدد طبيعي n فإن: $\mu_{n+1} = 3^{n+1} - n - 2$

لدينا: $\mu_n = 3^n - n - 1$

بالمضرب في (3): $3\mu_n = 3(3^n - n - 1)$

$= 3^{n+1} - 3n - 3$

بالتحقيق: $3\mu_n + 2n + 1 = 3^{n+1} - 3n - 3 + 2n + 1 = 2n + 1$

$= 3^{n+1} - n - 2$

وقتها:

Q25

$\mu_{n+1} = 3^{n+1} - n - 2$ وقها: $p(n+1)$ صحيحة

إذن: حسابا جبريا الاستدلال بالتراجع فإن:

$p(n)$ صحيحة

$v_n = \mu_n + n + 1$

نبيأ أن (0) حد من حدود

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 3 = q$ يكافئ: $q = 3$ أساسها

$v_{n+1} = \mu_{n+1} + n + 1 + 1 = 3^{n+1} - n - 2 + n + 1 + 1 = 3^{n+1}$

$v_n = \mu_n + n + 1 = 3^n - n - 1 + n + 1 = 3^n$

إذن:

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = \frac{3^n \times 3^1}{3^n} = 3^1 = 3$

وقتها: (0) متتالية هندسية أساسها: $q = 3$

$v_0 = \mu_0 + 0 + 1 = 0 + 1 = 1$ حساب v_0

$v_n = v_0 \times q^n = (3)^n$ 3/ عبارة v_n

$v_n = \mu_n + n + 1$ عبارة μ_n لدنيا:

وقتها: $\mu_n = v_n - n - 1$ إذن:

$\mu_n = 3^n - n - 1$ حساب النهاية:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n - n - 1 = +\infty - \infty$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \left(1 - \frac{n}{3^n} - \frac{1}{3^n}\right) = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^{n \ln 3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln 3} \frac{n}{e^{n \ln 3}}$

$= \frac{1}{\ln 3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = 0$

بوضع: $x = n \ln 3$

لما: $x \rightarrow +\infty$ فإن: $n \rightarrow +\infty$

صفحة 3

طريقة رقم: إثبات أن (v_n) هندسية

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + (n+1) + 1 = 3u_n + 2n + 1 + n + 1 + 1 \\ &= 3u_n + 3n + 3 = 3u_n + 3(n+1) = 3(u_n + n + 1) \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3v_n}{v_n} = 3$$

وهذا

إذن (v_n) هندسية أساسها $q=3$

$$P(ANB) = \frac{2}{495} = \frac{1}{247.5}$$

ANB = سحب 4 كرات ارقامها تشكل العدد 2024

وتنقل نفس اللون

$$P(ANB) = \frac{C_2^2 \times C_1^1 \times C_1^1}{C_{12}^4} = \frac{2}{495}$$

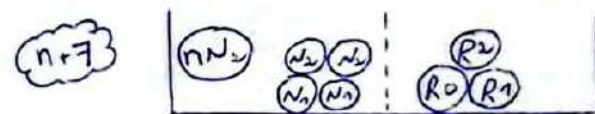
استنتاج $P(\overline{A \cup B})$

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

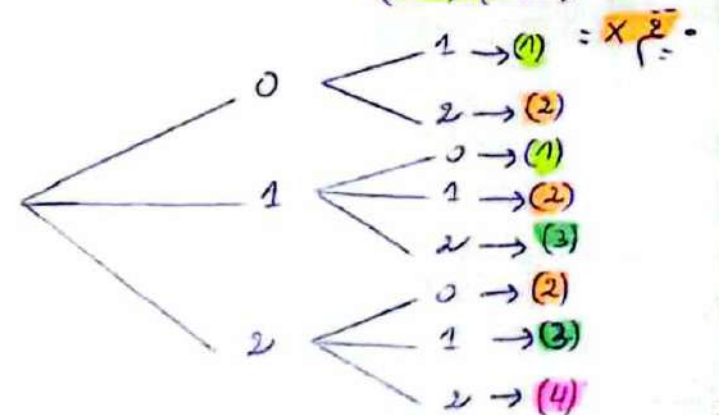
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(ANB)$$

$$= \frac{2}{165} + \frac{8}{99} - \frac{2}{495} = \frac{4}{45}$$

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{4}{45} = \frac{41}{45}$$



$$n = A_{n+7}^2 = \frac{(n+7)!}{(n+5)!} = \frac{(n+7)(n+6)(n+5)!}{(n+5)!} = (n+7)(n+6)$$



$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$

$x=1$: سحب كرتية تحمل الرقم (1) وكرتية تحمل الرقم (0).

$$P(x=1) = \frac{2(A_3^1 \times A_{n+1}^0)}{A_{n+7}^2} = \frac{6}{(n+7)(n+6)}$$

$x=2$: سحب كرتين تحملان الرقم (1) وسحب كرتية تحمل الرقم (0).

$$P(x=2) = \frac{A_3^2 + 2(A_1^1 \times A_{n+3}^1)}{A_{n+7}^2}$$

$$A_{n+7}^2 = \frac{(n+7)!}{(n+5)!} = \frac{(n+7)(n+6)!}{(n+5)!} = (n+7)(n+6)$$

$$P(x=2) = \frac{6 + 2(n+3)}{(n+7)(n+6)} = \frac{6 + 2n + 6}{(n+7)(n+6)} = \frac{2n + 12}{(n+7)(n+6)}$$

$x=3$: سحب كرتية تحمل الرقم (2) وكرتية تحمل الرقم (1).

$$P(x=3) = \frac{2(A_3^1 \times A_{n+3}^1)}{A_{n+7}^2} = \frac{6(n+3)}{(n+7)(n+6)}$$

$$P(x=4) = \frac{A_{n+3}^2}{A_{n+7}^2} = \frac{\frac{(n+3)!}{(n+1)!}}{\frac{(n+7)!}{(n+5)!}} = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)!}{(n+7)(n+6)(n+5)!} = \frac{(n+3)(n+2)}{(n+7)(n+6)}$$

$$P(x=4) = \frac{(n+3)(n+2)}{(n+7)(n+6)}$$

$n_i = x$	1	2	3	4
$P(n_i = x)$	$\frac{6}{(n+7)(n+6)}$	$\frac{2n+12}{(n+6)(n+7)}$	$\frac{6(n+3)}{(n+7)(n+6)}$	$\frac{(n+3)(n+2)}{(n+7)(n+6)}$

$$E(x) = \sum_{i=1}^4 n_i \cdot P_i$$

$$= \frac{6}{(n+7)(n+6)} + \frac{4n+24}{(n+6)(n+7)} + \frac{18n+54}{(n+7)(n+6)} + \frac{4n^2+20n+24}{(n+7)(n+6)}$$

$$= \frac{4n^2 + 42n + 108}{(n+7)(n+6)}$$

طريق الحل الرابع =

$$g(x) = (4 - 2x)e^x - 4$$

1/ حساب النهايات

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - 2x)e^x - 4 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4 - 2x)e^x - 4 = 4$$

2/ دراسة تغيران $g(x)$

$$g'(x) = -2e^x + e^x(4 - 2x) = e^x(-2 + 4 - 2x) = e^x(2 - 2x)$$

حساب المشتقة: g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$g'(x) = -2e^x + e^x(4 - 2x) = e^x(-2 + 4 - 2x) = e^x(2 - 2x)$$

إشارة المشتقة: إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2n + 2$ لأن $e^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $n = 1$ يكتفي:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$-2x + 2$		$\circ$	
$g'(x)$		$\circ$	

لما $x \in]1, +\infty[$ فإن $g'(x) < 0$ و g متزايدة كلما.

لما $x \in]-\infty, 1[$ فإن $g'(x) > 0$ و g متناقصه كلما.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$		$\circ$	
$g(x)$	-4	$g(1)$	$-\infty$

مقام

3/ بينا أن $g(x) = 0$ تقبل حليتين α وآخر β

026 $g(0) = (4 - 0)e^0 - 4 = 4 - 4 = 0$

نحتاج حل التغيران نلاحظ أن الدالة g مستمرة ورتيبة على $[1, +\infty[$ فهي مستمرة ورتيبة على $[1, 1.59, 1.6]$ ولدينا:

$$\begin{cases} g(1.59) = 0.02 > 0 \\ g(1.6) = -0.03 < 0 \end{cases}$$

026 ومنه: $g(1.59) \times g(1.6) < 0$

026 إذن: حسب مبرهنة القيمة المتوسطة فإن $g(x) = 0$ تقبل حل β على المجال $[1.59, 1.6]$ $\beta \in]1.59, 1.6[$ (ي) تقطع حامل محور التوكل في نقطة خاطئة

026 ومنه: $g(x) = 0$ تقبل حليتين أحدهما 0 والآخر α .

4/ إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g(x)$		$-$	$+$	$-$

1/ حساب النهايات

$$f(x) = \frac{2x - 2}{e^x - 2x}, \mathbb{R}$$

026 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2}{e^x - 2x} \stackrel{\infty/\infty}{=} 0$

026 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x(1 - \frac{2}{x})}{e^x(1 - \frac{2}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = 0$

026 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2}{e^x - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(2 - \frac{2}{x})}{-x(-\frac{e^x}{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x}{n} = -1$

التحسين

026 يكتفي $y = 0$ مستقيم مقارب أفقي

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \end{cases}$$

026 يكتفي $y = -1$ مستقيم مقارب أفقي

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \end{cases}$$

نقطة 6

$$\begin{cases} g(x) = (4-2x)e^x - 4 \\ f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x} \end{cases}$$

$$e^x = \frac{4}{4-2x}$$

$$f(x) = \frac{2x-2}{\frac{4}{4-2x} - 2x} = \frac{2x-2}{4-8x+4x^2}$$

$$= \frac{(2x-2)}{(2x-2)^2} = \frac{4-2x}{2x-2} = \frac{2(2-x)}{2(x-1)} = \frac{2-x}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{2-x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

لكن: من مبرهنة القيمة المتوسطة $g(x) = 0$
يكافئ $(4-2x)e^x - 4 = 0$ وحده:
بالتعويض في $f(x)$:

حصر $f(x)$:

$$1,59 < x < 1,6 \quad \text{لدينا:}$$

$$0,59 < x-1 < 0,6 \quad \text{بإضافة } (-1):$$

$$1,66 < \frac{1}{x-1} < 1,69 \quad (1) \quad \text{بالمقلوب:}$$

$$1,59 < x < 1,6 \quad \text{لدينا:}$$

$$-1,6 < -x < -1,59 \quad \text{بالتعويض في } (-1):$$

$$0,4 < 2-x < 0,42 \quad (2) \quad \text{بإضافة } (-2):$$

بحصر (1) و (2) نجد:

$$0,664 < \frac{2-x}{x-1} < 0,692$$

وذلك!

$$0,664 < f(x) < 0,692$$

ملاحظة 7

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$$

فقابلية $f(x)$ لتتغير على R هي:

$$f'(x) = \frac{2(e^x-2x) - (e^x-2)(2x-2)}{(e^x-2x)^2}$$

$$= \frac{2e^x - 4x - 2xe^x + 2e^x + 4x - 4}{(e^x-2x)^2}$$

$$= \frac{e^x(4-2x)-4}{(e^x-2x)^2} = \frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$$

دالاتنا العنصر:

تتزايد $f(x)$ من ابتدائية $g(x)$ لأن $g(x) > 0$ و $e^x - 2x > 0$ و $x \in R$

x	$-\infty$	0	x	$+\infty$
g(x)	-	0	+	-
f'(x)	-	0	+	-

لذا: $x \in]-\infty, 0[$ و $x \in]x, +\infty[$ فإن $f'(x) < 0$ و $f(x)$ متناقصة تماماً.

لذا: $x \in]0, x[$ فإن $f'(x) > 0$ و $f(x)$ متزايدة تماماً.

x	$-\infty$	0	x	$+\infty$
f'(x)	-	0	+	-
f(x)	-2	f(0)	f(x)	0

ن/ حساب المساحة =

$$S' = \int_0^2 0 \cdot f(x) \cdot dx = - \int_0^2 f(x) dx$$

$$= - \left[-x + \ln(e^x - 2x) + C \right]_0^2$$

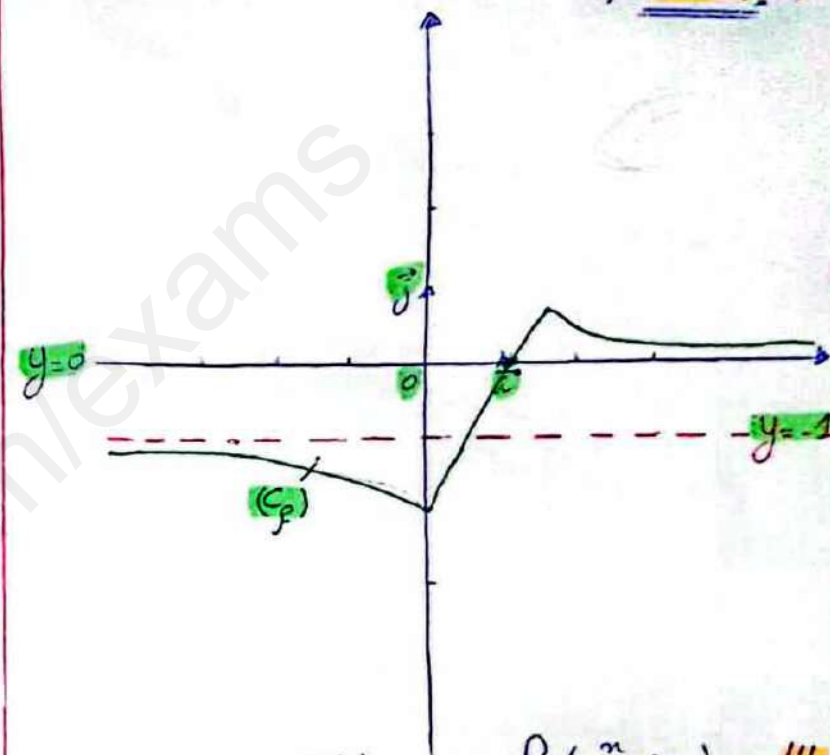
$$= - (F(2) - F(0)) = -4(-2 + \ln(e^2 - 4)) \text{ cm}^2$$

$$S' = 8 - 4 \ln(e^2 - 4) \text{ cm}^2$$

- انتهى المخرج الخاطئ

خطأ 4 8

13 الاستنتاج =



$$F(x) = -x + \ln(e^x - 2x) \quad 14$$

$$F'(x) = f(x) = -1 + \frac{e^x - 2}{e^x - 2x} = \frac{e^x - 2 - e^x + 2x}{e^x - 2x} = \frac{2x - 2}{e^x - 2x} = f(x)$$

$$F(x) = -x + \ln(e^x - 2x) = f(x)$$

$$F'(x) = f(x) = -1 + \frac{e^x - 2}{e^x - 2x} = \frac{e^x - 2 - e^x + 2x}{e^x - 2x} = \frac{2x - 2}{e^x - 2x} = f(x)$$

$$F(x) = -x + \ln(e^x - 2x) = f(x)$$

$$F'(x) = f(x) = -1 + \frac{e^x - 2}{e^x - 2x} = \frac{e^x - 2 - e^x + 2x}{e^x - 2x} = \frac{2x - 2}{e^x - 2x} = f(x)$$

$$F(x) = -x + \ln(e^x - 2x) = f(x)$$



دورة ماي 2024

امتحان بكالوريا تجريبي

الشعبة: علوم تجريبية

المدة: 03 ساو 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 2$, و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - n) - 1$.

1- أحسب كلا من u_1 و u_2 .

2- أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n + n > 0$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

3- المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = u_n + n$.

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4- من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = \ln u_0 + \ln(u_1 + 1) + \ln(u_2 + 2) + \dots + \ln(u_n + n)$.

• بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = (n+1)(2-n) \ln \sqrt{2}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس U_1 على: ثلاث كريات تحمل الرقم 1 و أربع كريات تحمل الرقم 2 , و يحتوي كيس U_2 على: ست كريات بيضاء و أربع كريات حمراء , كل الكريات متماثلة و لا يمكن التمييز بينها عند اللمس .

1- نسحب عشوائيا من U_2 كرتين على التوالي وإرجاع, أحسب احتمال كل من الحدثين الآتيين :

• الحدث A : "الحصول على كرتين من نفس اللون" . • الحدث B : "الحصول على كرية حمراء على الأكثر" .

2- نسحب عشوائيا كرية من U_1 , إذا كانت تحمل الرقم 1 نسحب عشوائيا من U_2 كرتين على التوالي بدون إرجاع, و إذا كانت تحمل الرقم 2 نسحب عشوائيا من U_2 : ثلاث كريات في آن واحد .

نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب من U_2 عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

ب) بين أن $P(X=1) = \frac{2}{5}$ و $P(X=2) = \frac{3}{7}$.

(ج) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z-2i)(z^2+2z+4)=0$.

(II) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C و D التي لاحقاً z_A, z_B, z_C, z_D على الترتيب حيث: $z_A = -1+i\sqrt{3}$, $z_B = \overline{z_A}$, $z_C = 2i$ و $z_D = 2$.

1- أ) أكتب كلا من z_A, z_B, z_C على الشكل الأسّي.

ب) بين استنتاج أن النقط A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها نصف قطرها.

2- أ) أكتب العدد المركب $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي.

ب) استنتج طبيعة المثلث ABD .

3- لتكن نقطة من المستوي لاحقاً z

أ) عين (Γ_1) مجموعة النقط M حيث: $z = 2i + e^{i\theta}$ و θ يسمح $\mathbb{R}$.

ب) عين (Γ_2) مجموعة النقط M حيث: $|\bar{z} + 2i| = |iz + \sqrt{3} + i|$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالة العددية g معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^3 - 1 + 2 \ln x$

1- أدرس اتجاه تغير الدالة g على $]0; +\infty[$

2- أحسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

(II) الدالة العددية f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب

إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1- أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب) - بين أنه أجل كل عدد x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

2- أ) بين أن للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) - ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) .

3- أنشئ كلا من (C_f) و (Δ) .

4- أ) باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$.

ب) - أحسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات $x = 1, y = x - 1$ و $x = e$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ النقط A, B, C التي لواحقتها: $z_A = -\sqrt{3}i$, $z_B = 1 + \sqrt{3}i$, و $z_C = \overline{z_B}$ على الترتيب .

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z - \sqrt{3}i)(z^2 - 2z + 4) = 0$.

2- أ) أكتب العدد المركب $\frac{z_B}{z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي .

ب) استنتج القيمة المضبوطة لـ $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

3- أكتب العدد $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ على الشكل المثلثي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

4- بين أن: $\left(\frac{z_B}{z_C}\right)^{2023} = \left(\frac{z_B}{z_C}\right)^{1444} = \frac{z_B}{z_C}$.

5- عين (E) مجموعة النقط M من المستوى ذات اللاحقة z التي من أجلها يكون: $\frac{z - z_A}{z - z_B}$ عددا تخيليا صرفا .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4}{\alpha}u_n + 1$ حيث α عدد حقيقي غير معدوم.

1- عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية.

⊗ فيما يلي نأخذ $\alpha = 9$.

2- أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < \frac{9}{5}$.

3- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

4- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \sqrt{u_{n+1} - u_n}$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول v_0 .

ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n .

5- أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2$.

ب) استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

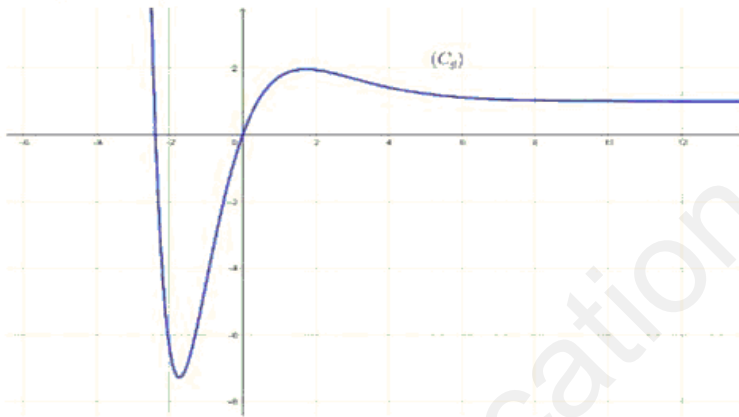
التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على n كرة حمراء و 3 كرات بيضاء و كرتين سوداويتين (الكرات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس) و n عدد طبيعي .

- 1- نسحب من الصندوق كرتين على التوالي مع إرجاع الكرة المسحوبة .
 - عين قيمة n حتى يكون احتمال الحصول على كرتين حمراوتين يساوي $\frac{1}{4}$.
- 2- نضع $n = 5$ و نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التوالي بدون إرجاع الكرة المسحوبة .
 - علما أن الكرة الأولى المسحوبة حمراء أحسب احتمال الحصول على آخر كرتين من نفس اللون.
- 3- نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات البيضاء المتبقية في الصندوق.
 - عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الشكل المقابل هو (C_g) المنحنى الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = a + (x^2 + 2x - b)e^{-x}$ في المستوي



المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) عين a و b حتى يقبل (C_g) مستقيم مقارب
معادلته $y = 1$ بجوار $(+\infty)$ و يقبل مماسا معامل
توجيهه 3 عند المبدأ.
فيما يلي نضع $a = b = 1$

- (2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما
معدوم و الثاني α حيث: $-2.5 < \alpha < -2$.
- (3) بقراءة بيانية عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - \frac{x^2 + 4x + 3}{e^x}$ و ليكن (C_f) منحنىها البياني.

- (1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$.
ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
- (3) بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في ثلاث نقاط فواصلها x_0 و x_1 و x_2 بحيث: $-3 < x_0 < -2.9$.
 $-1.1 < x_1 < -1.3$ و $2 < x_2 < 2.1$

- (4) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) معادلته $y = x$.
ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

- (5) أنشئ كلا من (Δ) و (C_f) . نأخذ $f(\alpha) = 6$

- (6) احسب مساحة الحيز المحدد بـ (C_g) و (Δ) و المستقيمات ذات المعادلات التالية: $x = -2$ ، $x = 2$.

انتهى الموضوع الثاني.



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين:
الموضوع الأول:

التمرين الأول: (04 نقاط)

تكن المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $U_n = 3^n + n - 1$. نضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$$W_n = \ln\left(\frac{-1+V_n}{2}\right) \quad , \quad V_n = U_{n+1} - U_n$$

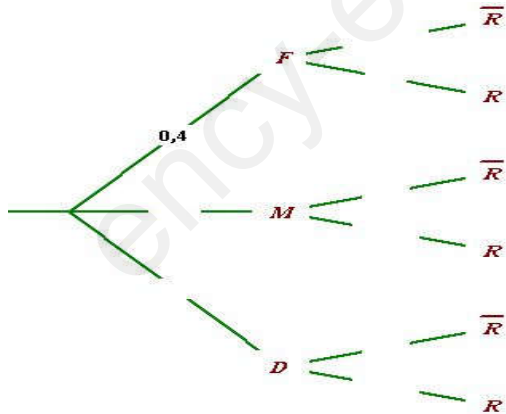
لكل سؤال ثلاث إجابات، إجابة واحدة منها صحيحة، المطلوب: تحديد الإجابة الصحيحة مع التبرير

الرقم	السؤال	الإجابة أ	الإجابة ب	الإجابة ج
01	المتتالية (U_n) هي متتالية : إذا كان :	حسابية	هندسية	لا حسابية ولا هندسية
02	إذا كان : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ إذا عبارة S_n هي :	$\frac{3^{n+1} - 1}{2} + \frac{(n+1)(n-2)}{2}$	$\frac{1 - 3^{n+1}}{-2} + \frac{(n-1)(n+1)}{2}$	$\frac{1 - 3^{n+1}}{2} + \frac{(n+1)(n-2)}{2}$
03	عبارة الحد العام للمتتالية (V_n) هي :	$V_n = 2 \times 3^n + 1$	$V_n = 2 \times 3^n + 2n + 1$	$V_n = 3^n + 1$
04	إذا كان : $S'_n = W_0 + W_1 + \dots + W_n$ إذا عبارة S'_n هي :	$\frac{(n+1)^2}{2} \ln(3)$	$\ln\left(\frac{3^{n+1} - 1}{2}\right)$	$\frac{n^2 + n}{2} \ln(3)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يشارك اللاعب في لعبة تتكون من ثلاث أسئلة ، سؤال سهل ، سؤال متوسط و سؤال صعب . حيث احتمال أن يكون السؤال سهلا 40% ، واحتمال أن يكون السؤال متوسطا 30% . يختار اللاعب عشوائيا سؤالا واحدا ، احتمال أن يوفق اللاعب في الإجابة عن السؤال السهل 95% و احتمال أن يوفق اللاعب في الإجابة عن السؤال المتوسط 60% و احتمال أن يوفق في الإجابة عن السؤال الصعب هو 40% . نعتبر الحوادث :

F : السؤال المختار سهل ، M : السؤال المختار متوسط ، D : السؤال المختار صعب
R : اللاعب يوفق في الإجابة عن السؤال المختار



(1) أنقل ثم أكمل شجرة الاحتمالات الآتية :

(2) أ) أحسب $P(D \cap R)$.

ب) أحسب احتمال أن يوفق اللاعب في الإجابة عن السؤال المختار .

(3) علماً أن اللاعب وفق في الإجابة ، أحسب احتمال أن يكون السؤال سهلا .

(4) نقترح اللعبة الآتية : يدفع اللاعب 25 دج للمشاركة في اللعبة ويربح اللاعب 35 دج اذا وفق في الإجابة . هل اللعبة في صالح اللاعب ؟ علل .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية : $(z - 2i)(z^2 - 6z + 10) = 0$.

(2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{u}, \vec{v})$ النقاط A ، B ، C التي لواحقها على

الترتيب : $z_A = 2i$ ، $z_B = 3 + i$ ، $z_C = -1 - i$.



(أ) أكتب العدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي . استنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) من أجل كل عدد مركب z يختلف عن $3+i$ نضع : $f(z) = \frac{(1-i)z + 2}{z - 3 - i}$.

(أ) بين أن من أجل كل $z \neq 3+i$ لدينا : $f(z) = (1-i) \frac{z + 1 + i}{z - 3 - i}$.

(ب) 1- عين المجموعة (E) للنقط M ذات اللاحقة z حيث : $|f(z)| = \sqrt{2}$.

2- عين المجموعة (F) للنقط M ذات اللاحقة z حيث : $\arg(f(z)) = \frac{\pi}{4} + k\pi$: $(k \in \mathbb{Z})$.

(4) (أ) عين اللاحقة z_G للنقطة G مركز ثقل المثلث ABC .

(ب) أكتب z_G على الشكل الأسّي ثم عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} z_G\right)^n$ تخيلياً صرفاً .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = x^2 - 3 + 2(1-x)e^{1+x}$

(Cf) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ الوحدة البيانية 2cm .

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

(2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x) = 2x(1 - e^{1+x})$.

(ب) أدرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f .

(ج) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً a على المجال $]0.8; 0.9[$.

(4) h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب : $h(x) = x^2 - 3$ (Ch) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

(أ) أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - h(x))$ و فسر النتيجة بيانياً .

(ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنيين : (Ch) و (Cf) .

(5) أنشئ (Ch) و (Cf) .

(6) k دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب : $k(x) = (1-x)e^{1+x}$.

(أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين الدالة الأصلية للدالة k و التي تنعدم من أجل القيمة 2 .

(ب) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد ب : المنحنيين (Ch) و (Cf) و المستقيمان اللذان معادلتهما : $x = -1$; $x = -2$.

(7) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x) = x^2 - 3 + 2(1+|x|)e^{1-|x|}$. (Cg) تمثيلها البياني في نفس المعلم (

(أ) بين أن الدالة g زوجية .

(ب) من أجل $x \leq 0$ أحسب $g(x) - f(x)$ ثم اشرح كيفية إنشاء (Cg) انطلاقاً من (Cf) . (لا يطلب إنشاء (Cg)) .



الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

(U_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ ب : $U_1 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا : $U_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)U_n$

(1) أ) برهن بالتراجع أن المتتالية (U_n) موجبة تماما .

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) و برر تقاربها .

(3) نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ ب : $V_n = \frac{U_n}{n}$.

(أ) بين أن (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول ثم بين أن : $U_n = \frac{n}{2^n}$.

(ب) أحسب نهاية المتتالية (U_n) .

(4) نعتبر : $S_n = \frac{U_1}{1} + \frac{U_2}{2} + \dots + \frac{U_n}{n}$ و $S'_n = \ln V_1 + \ln V_2 + \dots + \ln V_n$

- أكتب S_n و S'_n بدلالة n .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي وعاء U_1 على خمس كرات 3 كرات تحمل الرقم 2 و كرتين تحملان الرقم 3 . و يحتوي وعاء آخر U_2 على خمس كرات 3 بيضاء و كرتين حمراوين . نسحب عشوائيا كرة واحدة من U_1 و نسجل رقمها ثم نسحب في آن واحد كرة من الصندوق U_2 حيث n هو رقم الكرة المسحوبة من U_1 .

(1) أحسب احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء

(2) أحسب احتمال الحصول على كرتين حمراوين علماً أن رقم الكرة المسحوبة من U_1 هو 3 .

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X ؟

(ب) بين أن : $P(X=0) = \frac{11}{50}$ ، ثم عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

(4) (أ) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

(ب) أحسب احتمال الحدث $P(\log(X^2 - X + 10) \leq 1)$. ($\log$ دالة اللوغاريتم العشري)

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$

عين الاقتراح الوحيد الصحيح من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير .

(1) حلا المعادلة $(\bar{z} - i)^2 - 2(\bar{z} - i) + 2 = 0$ ذات المجهول z في $\mathbb{C}$ هما :

أ- $z_1 = 1$; $z_2 = 1 - 2i$ ب- $z_1 = 1 - i$; $z_2 = 1 + i$ ج- $z_1 = -1$; $z_2 = 1 - 2i$



(2) الشكل الأسّي للعدد المركب $z = -\sqrt{3} + e^{i\frac{\pi}{6}}$ هو :

أ- $z = e^{i\frac{5\pi}{6}}$ ب- $z = e^{i\frac{7\pi}{6}}$ ج- $z = e^{-i\frac{\pi}{6}}$

(3) n عدد طبيعي ، العدد المركب $(1 + i\sqrt{3})^n$ حقيقي إذا و فقط إذا كان :

أ- $n = 3k + 1$ ب- $n = 3k + 2$ ج- $n = 3k$ (حيث $k \in \mathbb{N}$)

(4) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $z = -1 + 3e^{i\theta}$ (θ تمشح $\mathbb{R}$) هي :

أ- نصف مستقيم ب- دائرة ج- مجموعة خالية .

(5) A و B نقطتان لاحتقائهما : $Z_A = i$ و $Z_B = 1 + 2i$. العبارة المركبة للتشابه المباشر الذي يحول A الى B و يحول O الى A هي :

أ- $z' = 2z + i$ ب- $z' = (1 - i)z + i$ ج- $z' = (1 + i)z + i - 1$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ ب : $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln(x)$

(1) أحسب $g'(x)$ ، ثم أدرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) استنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}_+^*$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ ب : $f(x) = x - 2 + 2\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$

(Cf) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ الوحدة البيانية 2cm .

(1) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و فسر النتيجة الثانية بيانيا .

ب) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل للمنحنى (Cf) .

ج) أدرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) و المنحنى (Cf) .

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

(3) بين أن المنحنى (Cf) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها β حيث : $1.47 < \beta < 1.48$.

(4) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (Cf) عند النقطة ذات الفاصلة e .

(5) أنشئ (Δ) ، (T) و المنحنى (Cf) .

(6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $(m + 2)x = 2\ln(x)$.

(7) لتكن مساحة الحيز S المحدد ب : المستقيم (Δ) و المنحنى (Cf) و المستقيمت ذات المعادلة : $x = 1$; $x = \beta$.

أ) بين أن : $S = (\beta(2 - \beta))^2 \text{ cm}^2$.

ب) جد حصرا للمساحة S .



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط):

حجر نرد مكعب متوازن يحمل الأرقام 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، -2 ، -1 وصندوق يحتوي على بطاقتين خضراوين وثلاث بطاقات حمراء لا يمكن التمييز بينها باللمس

نقوم برمي حجر النرد مرتين متتاليتين على التوالي ونهتم بجداء رقمي الوجهين المتحصل عليهما .

- إذا كان جداء الرقمين موجبا نسحب ثلاث بطاقات من الصندوق في آن واحد .

- إذا كان جداء الرقمين سالبا نسحب بطاقتين من الصندوق في آن واحد .

نعتبر الأحداث التالية : A " جداء الرقمين المتحصل عليهما موجب " .

V_0 " لا توجد أي بطاقة خضراء من البطاقات المسحوبة " .

V_1 " توجد بطاقة واحدة فقط خضراء من البطاقات المسحوبة " .

V_2 " توجد بطاقتين خضراوين من البطاقات المسحوبة " .

1- بين أن : $P(A) = \frac{5}{9}$ ثم أنجز شجرة الاحتمالات التي تتمزج هذه التجربة

2- بين أن : $P(V_2) = \frac{19}{90}$ ثم احسب $P_{V_2}(A)$

3- يقترح أحد المتاجر على زبائنه تخفيضا من خلال التجربة السابقة ، يستفيد الزبون من تخفيض 10% على كل بطاقة

خضراء يتم سحبها ولا تخفيض على البطاقات الحمراء ، وليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي نسبة التخفيض الذي يتحصل عليه الزبون .

- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي.

التمرين الثاني (4 نقاط):

1- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(z - 2)(z^2 + 6z + 34) = 0$

2- نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ النقط A ، B و C التي لواحقها على

الترتيب $z_A = 2$ ، $z_B = -3 + 5i$ ، $z_C = \overline{z_B}$.

أ- اكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ ثم على الشكل الأسّي .

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC .

ج- عين لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع ثم حدد بدقة طبيعته .

3- عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $|z - 2| = |\bar{z} - z_B|$.

التمرين الثالث (5 نقاط):

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n-1}{u_n}$

(1) أ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم بين انها متقاربة .

(2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{1}{u_n-1}$

أ) بين أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين اساسها وحددها الأول .

ب) اكتب v_n بدلالة n .

ج) استنتج انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{n+2}{n+1}$ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_n)$

أ- تحقق أن $S_1 = \ln 3$

ب- بين انه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \ln(n+2)$

ج- عين أصغر عدد طبيعي n بحيث : $S_n > 8$.

التمرين الرابع (7 نقاط):

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (2x+1)e^x - 1$.

(1) أدرس تغيرات الدالة g .

(2) احسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x(1 - e^{-x})^2$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(\vec{O}; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

(2) أ- بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) حيث : $y = x$ معادلة له .

ب- ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) .

(3) أ- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = (e^{-x} - 1)g(-x)$ ،

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(4) أ- اكتب معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 .

ب- ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (T) .

ج- استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف A يطلب تعيين إحداثيها .

(5) أنشئ (Δ) ، (T) و (C_f) .

(6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x) = mx$

(7) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمتان التي معادلاتها : $y = x$ ، $x = 0$ و $x = 1$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4 نقاط):

كيس يحتوي على تسعة كريات لا نفرق بينها باللمس موزعة كما يلي

أربع كريات بيضاء مرقمة بـ 0 ، 0 ، 1 ، 1 وثلاثة كريات حمراء مرقمة بـ -1 ، 1 ، 1 و كرتان خضراوان مرقمة بـ 1 ، -1 .
نسحب عشوائيا ثلاث كريات في آن واحد .

(1) احسب احتمال الأحداث التالية :

A " الحصول على ثلاث كريات تحمل الألوان الثلاثة " .

B " الحصول على كرية حمراء على الأكثر " .

C " الحصول على ثلاث كريات جداء أرقامها معدوم " .

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع أرقام الكريات المسحوبة .

أ) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي .

ب) استنتج قيمة $V(-2X + 2024)$.

التمرين الثاني (4 نقاط):

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{e}{2} \quad -1$$

-2 المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{3\}$

ب : $f(x) = x^2 - 6x + 8 - \ln(x - 3)^2$ يقبل محور تناظر معادلته : $x = 3$.

-3 المعادلة $2^{2x} + 2^x - 2 = 0$ تقبل حلين مختلفين في $\mathbb{R}$.

-4 الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ هي دالة فردية .

التمرين الثالث (5 نقاط):

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بعدها الأول $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{3}(u_n - 1)^2$

(1) أ) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n \leq 4$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم بين انها متقاربة .

(2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب : $v_n = \ln\left(\frac{u_n - 1}{3}\right)$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حدها الأول .

ب) اكتب v_n و u_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $P_n = (u_0 - 1)(u_1 - 1) \times \dots (u_{n-1} - 1)$

- احسب P_n بدلالة n .

التمرين الرابع (7 نقاط):

I. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = (x - 1)^2 - 2 \ln(x - 1)$

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) حدد إشارة $g(x)$ على المجال $]1; +\infty[$.

II. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{x-1}{2} + \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 2cm)

(1 أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2 أ) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x من $]1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{2(x-1)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(3 أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(4) بين أنه توجد نقطة وحيدة B يقبل فيها المنحنى (C_f) مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) ثم أكتب معادلة للمماس (T) .

(5) بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $1.34 < \alpha < 1.35$.

(6) أرسم (Δ) ، (T) و (C_f) .

(7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{m}{2}$

(8) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ، $x = 2$ و $x = e^{-1} + 1$

انتهى الموضوع الأول



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية



ثانوية زاغز جلول – أورلال

الديوان الوطني للامتحانات و المسابقات
امتحان بكالوريا تجريبي للتعليم الثانوي
الشعبة : علوم تجريبية

دورة ماي 2024

المدة: 03 سا و 30 د

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :
الموضوع الأول :

التمرين الأول : (04 نقاط)

اختر الاجابة الصحيحة في كل حالة مما يلي مع التبرير :

(مع $C \in \mathbb{R}$)

1 حلل للمعادلة التفاضلية $-y' + xe^{-x} - 1 = 0$ هي الدوال y حيث:

أ/ $y = -e^{-x}(x+1) - x + c$ ب/ $y = e^{-x}(x+1) - x + c$ ج/ $y = e^{-x}(x+1) + x + c$

2 نعتبر العدد المركب W بحيث : $W = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n المجموع $S_n = |w| + |w^2| + \dots + |w^n|$ يساوي :

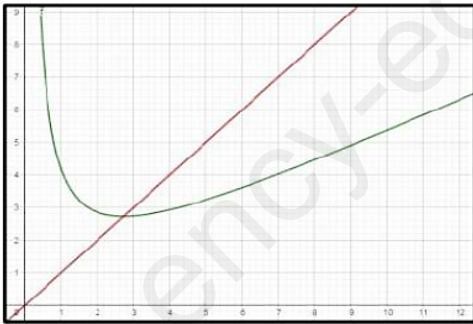
أ/ $S_n = 1 - 2^{-n}$ ب/ $S_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}$ ج/ $S_n = 1 - 2^n$

3 يحتوي كيس على 5 كريات بيضاء و n كرية سوداء حيث $n \in \mathbb{N}^*$ ، جميع الكريات لا نفرق بينها باللمس، نسحب كرتين في آن واحد لتكن الحادثة A "سحب كرتين مختلفتين في اللون"، احتمال الحادثة A يساوي :

أ/ $P(A) = \frac{10n}{(n+5)(n+4)}$ ب/ $P(A) = \frac{5n}{(n+1)(n+4)}$ ج/ $P(A) = \frac{2n}{(n+5)(n+2)}$

4 معامل x^6 في المنشور $(x+2)^9$ هو :

أ/ 672 ب/ 627 ج/ C_9^3



التمرين الثاني : (04.5 نقط)

لتكن f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{x^2 + e^2}{2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ المستقيم ذي المعادلة $y = x$ في نفس المعلم السابق كما هو موضح في الشكل المرفق في الملحق نعتبر (U_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $U_0 = 2e$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

(1) مثل على محور الفواصل الحدود U_2, U_1, U_0 ثم أعط تخمينا حول رتبة (U_n) و تقاربها.

(2) أثبت أن f متزايدة تماما على المجال $]e; +\infty[$ ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $e < U_n$

(3) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} - U_n = \frac{(e - U_n)(e + U_n)}{2U_n}$ ثم أدرس رتبة (U_n) .
ب- استنتج أن (U_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها

(4) أ- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} - e \leq \frac{1}{4}(U_n - e)$

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < U_n - e \leq e\left(\frac{1}{4}\right)^n$

ج- أحسب نهاية المتتالية (U_n) بطريقة ثانية.



التمرين الثالث : (04.5 نقاط)

من أجل تحضير إختبار إستدراكي لمادة الرياضيات أراد مدير الثانوية إختيار لجنة تضم 3 أعضاء من هيئة التدريس التي تتكون من 3 أستاذات و 4 أساتذة.

(1) احسب احتمال الأحداث التالية : A "الأعضاء الثلاثة المختارون أستاذات"

B "من بين الأعضاء توجد أستاذة واحدة" ، C " من بين الأعضاء المختارون يوجد على الأقل أستاذان " .

(2) يوجد في هيئة التدريس الأستاذ محمد والأستاذة خديجة ،نسمي الحادثة : D " ألا يكون محمد وخديجة معا في نفس اللجنة المختارة " . والحادثة : E " ألا تكون خديجة في اللجنة المختارة "

(أ) بين أن : $P(D) = \frac{6}{7}$ ، ثم احسب $P(E)$.

(ب) احسب احتمال ألا يكون محمد في اللجنة علما أن خديجة ليست من ضمنها

(3) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل لجنة مختارة عدد الأستاذات اللواتي لم يشاركن فيها.

- عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X واحسب الأمل الرياضي $E(X)$

- ثم عين قيمة العدد الحقيقي α حيث : $E(2006X + \alpha) = 2024$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

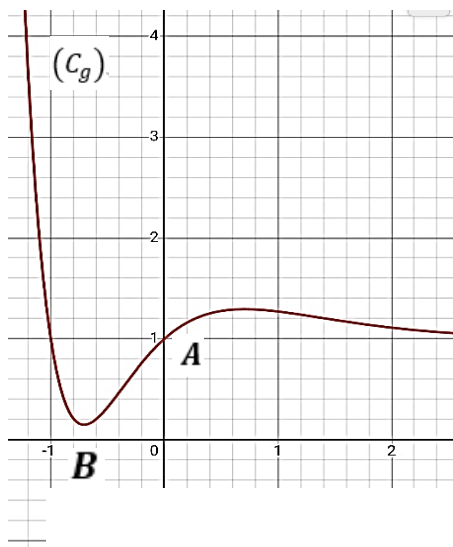
(I) لتكن الدالة g المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = a + (bx^2 + x)e^{-2x}$ ،

حيث a و b عدنان حقيقيان و (C_g) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل المقابل :

1- عين العددين a و b بحيث المنحنى (C_g) يشمل النقطة $A(0; 1)$

و يقبل عند النقطة B ذات الفاصلة $\frac{\sqrt{2}}{2}$ مماسا موازي لحامل محور الفواصل .

2- استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ - نضع فيما يلي : $a = 1$ و $b = 1$:



II. لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - \frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{e^x} \right)^2$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(2) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ، ثمّ حدد وضعية بالنسبة (C_f) إلى (Δ) .

(3) (أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$ (f' هي الدالة المشتقة للدالة f)

(ب) استنتج اتجاه تغيّر f ، ثمّ شكّل جدول تغيّرتها.

(4) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسين معامل توجيه كلا منهما هو 1 ، ثمّ عين معادلة لكل منهما.

(5) بيّن أنّ المنحنى (C_f) نقطتي انعطاف يطلب تعيين احداثياتيهما.

(6) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α . حيث : $0.43 < \alpha < 0.44$

(7) أنشئ كلا من (C_f) و (Δ) .

III. ليكن λ عدد حقيقي موجب تماما.

(1) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c حتى تكون الدالة $x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x+1)^2 e^{-2x}$ على $\mathbb{R}$.

(2) (أ) أحسب بدلالة λ المساحة للحيز من المستوي $A(\lambda)$ المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $x = \lambda$ ، $x = 0$ و $y = x$

(ب) أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$



الموضوع الثاني

التمرين الأول : (04 نقاط)

(I) عين العددين المركبين α و β حيث :
$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = -3 \\ 2\bar{\alpha} + \bar{\beta} = -3 - 2i\sqrt{3} \end{cases}$$
 مع $\bar{\alpha}$ مرافق α و $\bar{\beta}$ مرافق β .

(II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A, B, C والنقط التي لواحقها على الترتيب :

$$z_A = z_C e^{i\frac{\pi}{3}} \quad , \quad z_B = \bar{z}_A \quad , \quad z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(1) أـ أكتب z_C و z_A على الشكل الأسّي ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقيا سالبا .

بـ تحقق أن العدد المركب $2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2024} - \left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}$ تخيلي صرف موجب

جـ احسب $|z_B - z_A|$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB .

(2) D النقطة ذات اللاحقة $z_D = 1 + i$.

أـ حدد النسبة وزاوية للتشابه S الذي مركزه O ويحول D إلى A .

بـ أكتب $\frac{z_A}{z_D}$ على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

(3) عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z و التي تحقق : $z = \sqrt{3}e^{i\theta}$ عندما يتغير θ على

R ، ثم تحقق أن $A \in (E)$.

التمرين الثاني (04.5 نقاط) :

يحتوي صندوق U_1 على 7 كريات منها خمس كريات بيضاء و كريتين سوداوين، و يحتوي صندوق U_2 على

8 كريات منها خمس كريات مرقمة بـ : 1 و ثلاث كريات مرقمة بـ : 2 ، جميع الكريات لا نفرق بينها باللمس.

الجزء 01) نسحب عشوائيا من الصندوق U_1 ثلاث كريات في آن واحد.

- ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات السوداء المتبقية في الصندوق .

(1) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

(2) احسب $P(|X| \leq \sqrt[4]{10})$

الجزء 02)

- نسحب الآن عشوائيا كرية من الصندوق U_1 ، إذا كانت سوداء نسحب عشوائيا كريتين على التوالي دون إرجاع

من الصندوق U_2 ، أما إذا كانت بيضاء فنسحب عشوائيا كريتين على التوالي بإرجاع من نفس الصندوق U_2 نسمي الأحداث التالية :

" A_1 " الكرية المسحوبة من الصندوق U_1 سوداء "

" A_2 " الكرية المسحوبة من الصندوق U_1 بيضاء "

" B " الحصول على كريتين من نفس الرقم "

(3) احسب $P(B)$ ، ثم استنتج $P_B(A_1)$. (يمكن الاستعانة بشجرة الاحتمالات)

التمرين الثالث : (04.5 نقاط)

نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n , $3u_{n+1} = 2u_n - 4$, (v_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : من أجل كل عدد طبيعي n , $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي .
 (I) عين قيمة α التي من أجلها تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\left(\frac{2}{3}\right)$ يطلب تعيين حدها الأول .
 (II) نضع فيما يلي $\alpha = 4$

(1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4$

(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$, ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) لتكن (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $w_n = \frac{5}{v_n + 5} - 5$

(أ) بين أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

(ب) بين أن المتتاليتين (u_n) و (w_n) متجاورتين. ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$

(ج) أحسب بدلالة n المجموع S'_n حيث : $S'_n = \frac{1}{w_0 + 5} + \frac{1}{w_1 + 5} + \dots + \frac{1}{w_n + 5}$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

(4) (Γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln(x+1)$ على المجال $]0; +\infty[$

(I) g الدالة المعرفة و المتزايدة تماما على $]0; +\infty[$ ب :

(أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln(x+1))$ ثم فسر النتيجة بيانيا.

$g(x) = (x+1)(x+e) - e(x \ln x)$

(ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنين (C_f) و (Γ)

احسب $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

(ج) ارسم المماس (T) و (Γ) ثم (C_f)

(II) f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $f(x) = \ln(x+1) + \frac{e \ln x}{x+1}$

(5) m وسيط حقيقي، عين قيم m بحيث تقبل المعادلة $f(x) = \frac{1+e}{2}x - m$ حلين متميزين.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

(6) نقبل انه من اجل كل x من المجال $]1; +\infty[$: $\ln x < x+1$

(1) (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، ثم بين ان $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

(أ) بين انه من اجل كل x من المجال $]1; +\infty[$:

(ب) بين انه من اجل كل x من $]0; +\infty[$:

$\ln 2 < f(x) < e + \ln(x+1)$

$f'(x) = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$

(ب) تحقق انه من اجل كل x من المجال $]1; +\infty[$ الدالة :

(ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

$x \mapsto (x+1) \ln(x+1) - x$ هي دالة اصلية

(2) اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

(ج) S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل

(B) بين ان المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة A فاصلتها α

محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتهما :

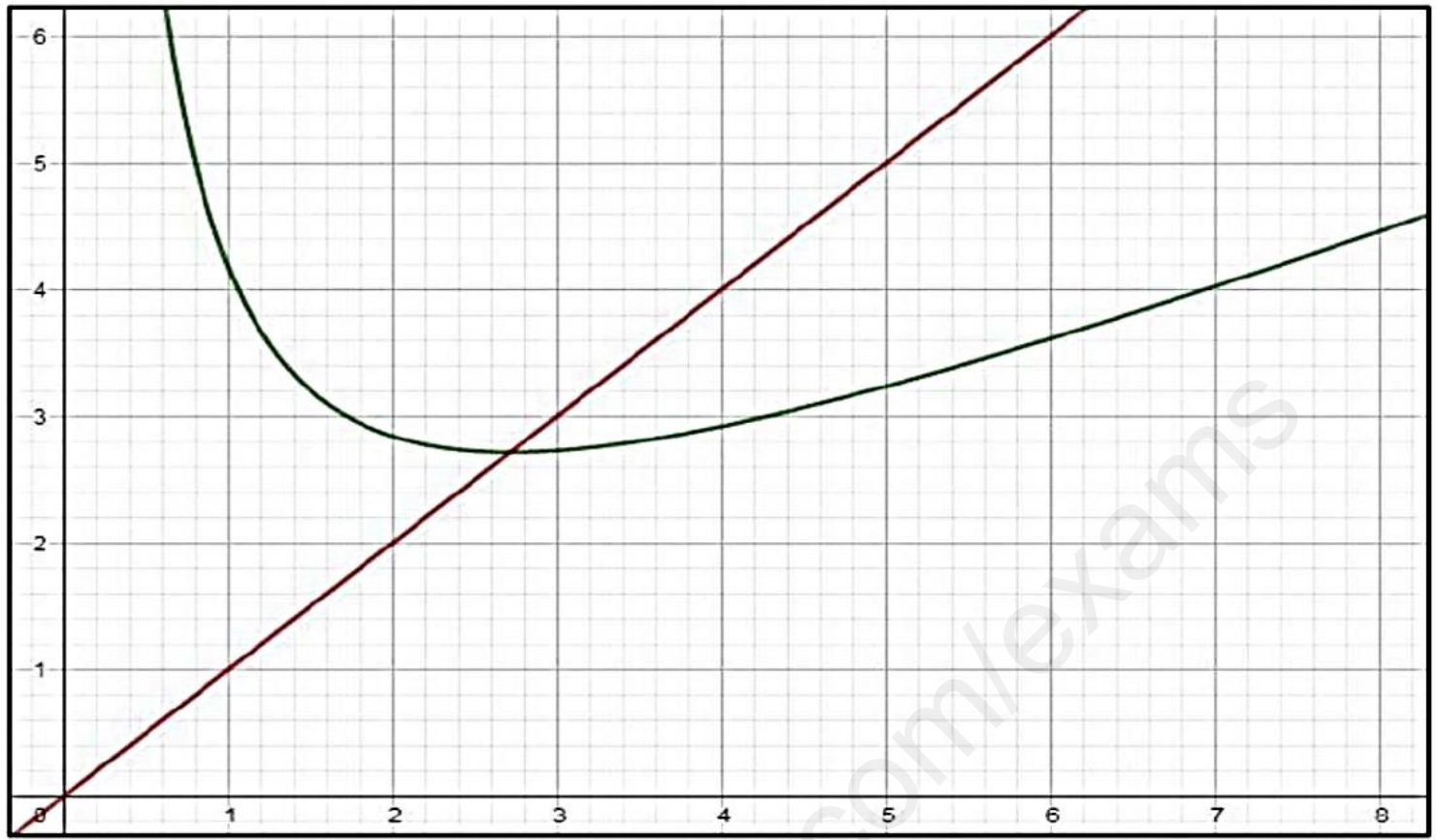
$x = e^2 - 1$ $x = e - 1$

- باستخدام جواب السؤال (6-أ)، بين ان :

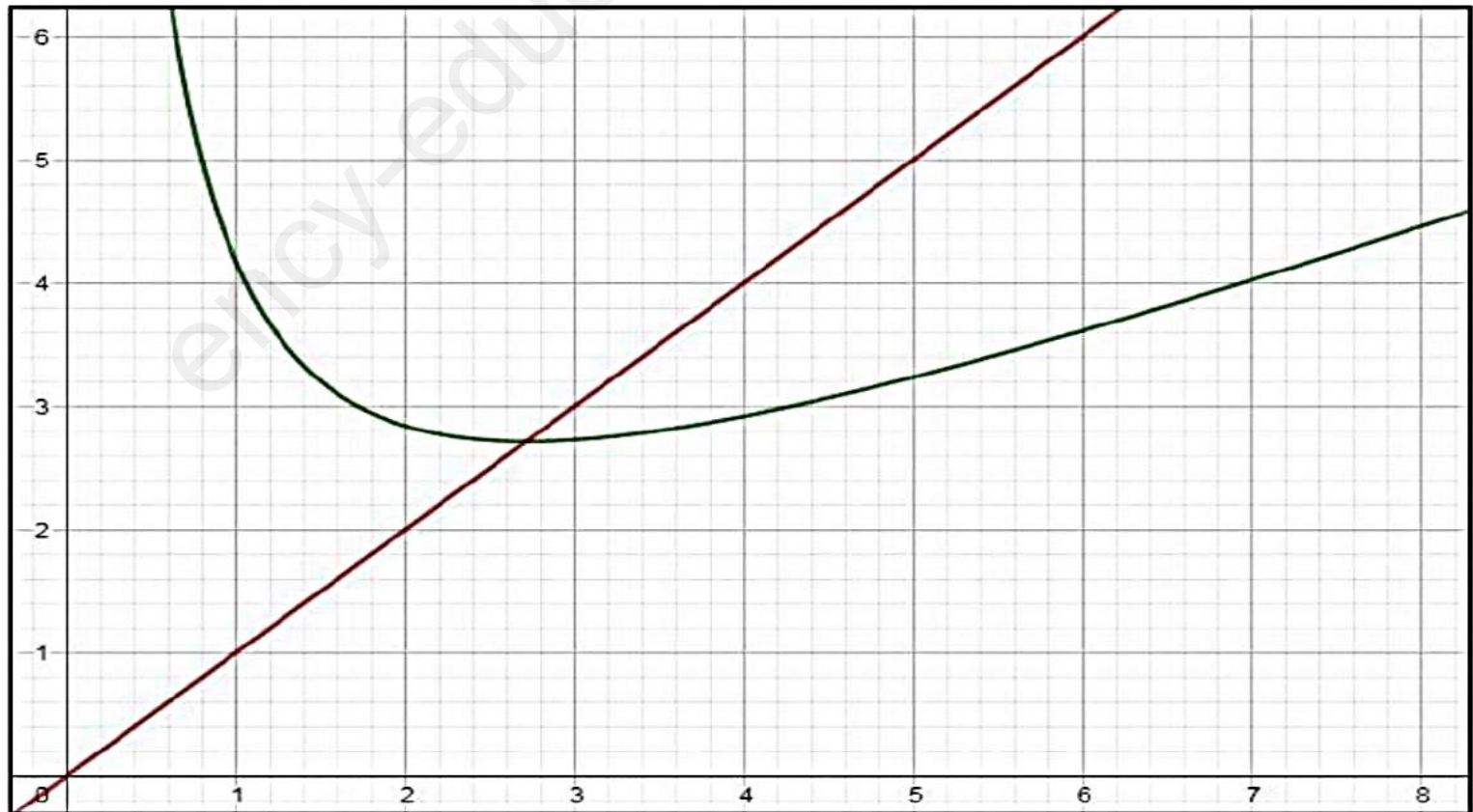
(ب) تحقق ان : $0.7 < \alpha < 0.8$

$(e^2 - e) \ln 2 < S < e^3$

ملحق التمرين الثاني الموضوع الأول : الإسم: اللقب: القسم:



ملحق التمرين الثاني الموضوع الأول : الإسم: اللقب: القسم:



الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

(I) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة ذات المجهول z الآتية : $(z^2 + 2z + 4) = 0$.

(II) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لاحتقاتها : $z_A = -1 + \sqrt{3}$ ، $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ و $z_C = \bar{z}_B$.

① بين أن $z_B - z_A = i(z_C - z_A)$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

② أ) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب L حيث : $L = \left(\frac{z_C - z_A}{z_C} \right)$.

ب) أكتب على الشكل الأسّي العدد $z_C - z_A$

ثم بين أن : $L = \frac{\sqrt{6}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$ ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ $\tan \frac{\pi}{12}$.

③ عين (Δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_A - z}{z_B - z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما .

التمرين الثاني : (04 نقاط)

كيس غير شفاف به 9 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس ، منها 4 كريات سوداء تحمل الرقم λ

و 3 كريات صفراء تحمل الرقم $(\lambda - 1)$ ، وكرتين بيضاوين تحملان الرقم 1 . (حيث λ عدد طبيعي غير معدوم)
(I) نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الكيس ، ونعتبر الحوادث التالية :

A : " سحب كرية بيضاء على الأكثر " .

B : " سحب ثلاث كريات تحمل نفس الرقم " .

C : " سحب كرتين بالضبط تحمل الرقم $(\lambda - 1)$ " .

① أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ ثم بين أن $P(C) = \frac{9}{42}$

(II) نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الأرقام المسجلة على الكريات السوداء المسحوبة

والذي يأخذ القيمة 0 إذا كانت كل الكريات ليست سوداء .

① عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X .

② عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

③ أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X بدلالة λ ، ثم حدد قيم λ من أجل $|E(X) - 1| \leq 2$.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

(I) نعتبر (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = \alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} = (u_n - 1)^2 + 1$

① عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة .

② نفرض فيما يلي : $\alpha = \frac{3}{2}$

أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 1 < u_n < 2$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ، واستنتج أنها متقاربة .

(II) لتكن (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : ب : $v_n = \ln(u_n - 1)$

① برهن أن المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

② أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

③ نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = \frac{v_0}{2^0} + \frac{v_1}{2^1} + \dots + \frac{v_n}{2^n}$ ، بين أن : $S_n = (-n - 1) \ln 2$.

④ نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S'_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2$. أحسب S'_n بدلالة n .

التمرين الرابع : (08 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ، ب : $g(x) = (x + 1)e^x - e$.

① أدرس تغيرات الدالة g .

② برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,5 < \alpha < 0,6$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

(II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = xe^x - ex + e - 2$: ب : (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد (الوحدة : $\|\vec{i}\| = 4cm$ ، $\|\vec{j}\| = 2cm$)

① أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

② أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x : f'(x) = g(x)$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها .

③ أ) أثبت أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y = -ex + e - 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) .

ج) بين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (D) ، يطلب كتابة معادلة له .

④ أ) أنشئ المماس (T) ، ثم المنحنى (C_f) (تعطى $f(\alpha) \simeq 0.2$ ، و $f(1,5) \simeq 3,36$) .

ب) ناقش بياناً ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m + 2 - e)e^{-x} = x$.

⑤ أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة ، احسب $\int_{\lambda}^0 xe^x dx$ ؛ حيث $\lambda < 0$.

ب) احسب بالسنتيمتر المربع $A(\lambda)$: مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، والمستقيم (D) والمستقيمين اللذين

معادليهما $x = 0$ ، و $x = \lambda$ ؛ حيث $\lambda < 0$ ، ثم تحقق أن $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda) = 8$.

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة ، عينه مع التعليل .

① عدد مركب شكله الجبري $z = x + iy$. مجموعة حلول المعادلة : $z^2 - z\bar{z} + 2 = 0$ في $\mathbb{C}$ هي :

أ) $S = \{-1; 1\}$ ب) $S = \{-1 + i; 1 + i\}$ ج) $S = \{-i; i\}$

② ليكن المجموع S حيث : $S = 1 + i^2 + i^4 + i^6 + \dots + i^{2024}$ ، i هو العدد المركب الذي طويلته 1 و $\frac{\pi}{2}$ عمدة له

أ) $S = 0$ ب) $S = 1$ ج) $S = 2024$

③ نعتبر العدد المركب A حيث : $A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2024} + i(i)^{1445}$

أ) A حقيقي سالب ب) A حقيقي موجب ج) A تخيلي

④ في المستوى المركب $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقطة B ذات اللاحقة : $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

المجموعة (γ) للنقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق : $|2z + 1 - i| = |1 + i|$ هي :

أ) دائرة مركزها B ونصف قطرها $\sqrt{2}$ ب) دائرة مركزها B ونصف قطرها $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ج) مجموعة خالية

التمرين الثاني : (04 نقاط)

I) لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$

① برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n \leq 2$.

② حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، واستنتج أنها متقاربة ، ثم أحسب نهايتها .

II) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3 + \frac{1}{u_n - 1}$

① بين أن المتتالية (v_n) حسابية ، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

② أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{n+2}{n+1}$

③ أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $S_n = \frac{u_1}{3} + \frac{u_2}{8} + \frac{u_3}{15} + \dots + \frac{u_n}{n(n+2)}$

بين أن : $S_n = \frac{n}{n+1}$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

كيس غير شفاف به 9 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس ، منها 3 كريات حمراء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 2

و 3 كريات خضراء تحمل الأرقام 2 ، 2 ، 3 و كرتين بيضاوين تحملان الرقمين 1 و 3 و كرية سوداء تحمل الرقم 3 .

I) نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من هذا الكيس ، ونعتبر الحوادث التالية :

A : " سحب ثلاث كريات من نفس اللون " .

B : " سحب ثلاث كريات تحمل ألوان العلم الوطني " .

C : " سحب ثلاث كريات تحمل أرقام شعارنا المألوف one ، two ، three " .

① أحسب $P_C(B) = \frac{3}{18}$ ثم بين أن $P(C)$ ، $P(B)$ ، $P(A)$

II) نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب ، عدد الألوان الممكن إيجادها في العلم الفلسطيني .

① برر أن قيم المتغير العشوائي X هي $\{1, 2, 3\}$

② عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

③ أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

(للتذكير : علم دولة فلسطين يتكون من اللون الأبيض والأحمر والأخضر والأسود)

التمرين الرابع : (08 نقاط)

I) لتكن g دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = a(\ln x)^2 + b \ln x$ حيث a و b عددين حقيقيين ثابتين .

(C_g) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) مستقيم معادلته : $y = -3x$

β فاصلة نقطة تقاطع (Δ) و (C_g) كما هو موضح في الشكل .

• نقطة حدية (ذروة) لـ (C_g) .

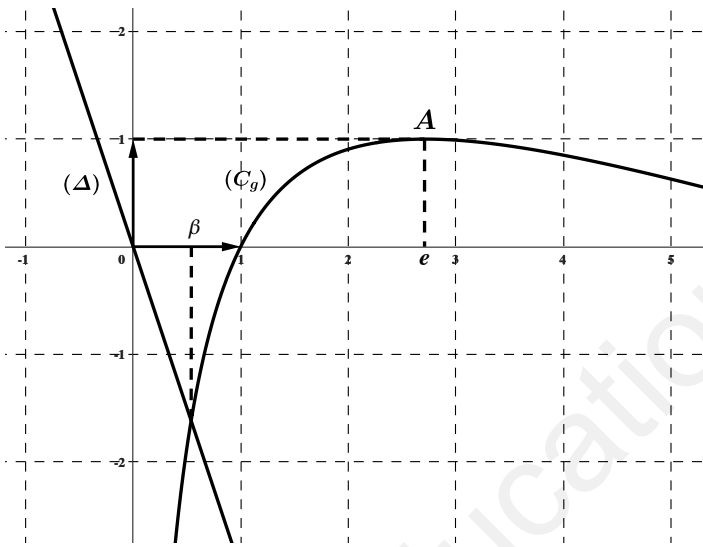
① أ) عين $g'(x)$ بدلالة a و b .

ب) مما سبق بين أن : $a = -1$ و $b = 2$.

② بقراءة بيانية حدد وضعية (C_g) بالنسبة إلى (Δ) ،

ثم استنتج إشارة $h(x)$ حيث : $h(x) = g(x) + 3x$

على المجال $]0; +\infty[$



II) f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 3 \ln x + \frac{(\ln x)^2}{x}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

① بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و فسر النتيجة هندسيا ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

② أ) بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$. $f'(x)$ (الدالة المشتقة للدالة f)

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

③ أ) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما 1 والآخر α حيث : $0,3 < \alpha < 0,4$

ب) تأكد أن : $\ln(\alpha) = -3\alpha$.

④ أنشئ (C_f) على المجال $]0; 5]$ (نأخذ $\beta = 0,5$ و $f(\beta) = -1,2$ و $f(5) = 5,3$)

⑤ أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين دالة أصلية للدالة $\ln x \rightarrow x$ والتي تنعدم من أجل $x = e$.

ب) بين أن مساحة حيز المستوي A_α المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $y = 0$ ، $x = \alpha$ ، و $x = 1$.

هي : $A_\alpha = (-9\alpha^3 - 9\alpha^2 - 3\alpha + 3)u.a$

مديرية التربية لولاية سطيف
ثانوية الشيخ نصر الدين ناصر ذراع قبيلة
دورة: ماي 2024



وزارة التربية الوطنية
امتحان البكالوريا التجريبي
الشعبة : علوم تجريبية

المدة : 03 س و 30 د

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدّها الأول $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = (\ln 2)u_n + \ln\left(\frac{e^2}{4}\right)$.

• عيّن قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

(2) من أجل: $\alpha = 3$

أ) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_n \leq 3$

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = (\ln 2 - 1)(u_n - 2)$

ت) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\square$ ، وبرّر تقاربها. ثمّ أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\square$ بـ : $v_n = 2u_n - 4$

أ. بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \ln 2$ ، يطلب تعيين حدّها الأول v_0 .

ب. أكتب v_n بدلالة n . ثمّ استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = (\ln 2)^n + 2$. ثمّ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ مرة أخرى.

(4) تحقق أنّ $2^n = \frac{(\ln 4)^n}{u_n - 2}$: ثمّ أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = \frac{1}{u_0 - 2} + \frac{\ln 4}{u_1 - 2} + \frac{(\ln 4)^2}{u_2 - 2} + \dots + \frac{(\ln 4)^n}{u_n - 2}$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

يحتوي وعاء U على 5 كريات حمراء و 3 كريات صفراء و كريتين خضراوين. الكريات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس. نسحب عشوائيا في آن واحد ثلاث كريات من الوعاء U .

A ، B و C ثلاث أحداث حيث:

A : "الحصول على ثلاث كريات حمراء" ، B : "الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون"

C : "الحصول على ثلاث كريات مختلفة اللون مثنى مثنى".

1. أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$ احتمال الأحداث A ، B و C على الترتيب.

2. X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد ألوان الكريات المسحوبة.

• عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثمّ أحسب أمله الرياضياتي.

3. نضيف $(n-5)$ كرية حمراء إلى الوعاء U حيث $n \geq 5$ ، ثمّ نسحب عشوائيا كريتين على التوالي دون إرجاع.

D ، E حدثين حيث: D : "الحصول على كريتين حمراوين" ، E : "الحصول على كريتين من نفس اللون"

أ) بيّن أنّ: $P(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

ب) أحسب بدلالة n العدد $P(E)$ احتمال الحدث E ، ثمّ عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P(E) \geq \frac{1}{2}$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$.
2. في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. A و B نقطتان لواحقهما على الترتيب $z_B = \overline{z_A}$ و $z_A = 2\sqrt{3} - 2i$.
 أ) أكتب كلا من z_B و z_A على الشكل الأسّي.
 ب) أنشئ بدقة النقطتين A و B في المعلم السابق.
 ت) بين أن المثلث OAB متقايس الأضلاع.
3. C نقطة لاحقها $z_C = -8i$ و D صورتها بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.
 أ) أحسب z_D لاحقة النقطة D .
 4. بين أن النقطة D هي صورة النقطة B بتحاك مركزه O يطلب تعيين نسبته.
5. ما طبيعة المثلث OAD ؟ برّر جوابك

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1. في الشكل المقابل (Δ) مستقيم معادلته $y = x + 1$ و (Γ) منحنى الدالة $x \mapsto e^x$
 1. بقراءة بيانية برّر لماذا من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x - (x + 1) \geq 0$
2. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - e^x$

- أدرس اتجاه تغير الدالة g .
- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث :
 $-2,2p \leq \alpha \leq -2,1$

- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

- II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $f(x) = e^{2x} - x^2 e^x$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ثم فسّر النتيجة بيانيا ، ثم بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -2e^x g(x)$
3. استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها .
4. أكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.
5. أحسب $f(1)$ ، ثم أنشئ (T) و (C_f) . (نقبل أن المنحنى يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث $-0,8 < \beta < -0,7$ ونأخذ $f(\alpha) = -0,53$)
6. m وسيط حقيقي. ناقش حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = 2x + |m|$ في $\mathbb{R}$.
7. نعتبر الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $H(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$.
 • بين أن H دالة أصلية للدالة $x^2 e^x$ على $\mathbb{R}$.
 • أحسب بدلالة α مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x = -4$ و $x = \alpha$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بحددها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$

(1) بيّن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{4}{u_n + 3}$.

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 \leq u_n \leq 0$

(3) حدّد اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$

(1) بيّن أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها وحددها الأول.

(2) عبّر عن v_n بدلالة n . ثم استنتج u_n بدلالة n .

(3) أحسب بدلالة n المجموع S حيث : $S_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

يحتوي كيس U على 5 كريات بيضاء و 3 كريات حمراء وكريتينين خضراوين. الكريات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس.

نسحب عشوائيا في آن واحد ثلاث كريات من هذا الكيس.

(1) أحسب احتمال الحدثين التاليين:

A : "الكرات الثلاثة المسحوبة من نفس اللون"

B : "من بين الكرات الثلاثة المسحوبة توجد كرة واحدة فقط خضراء"

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الألوان الظاهرة.

• عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

• أحسب الأمل الرياضي والتباين للمتغير العشوائي X .

(3) في تجربة مستقلة نعتبر الكيس U وكيس آخر V به كرتين بيضاوين وكريتين حمراوين وكرة خضراء .

نرمي حجر نرد غير مزيف مرقم من 1 إلى 6 ، إذا ظهر الرقم 6 نسحب كرة من الكيس U وإلا نسحب كرة من

الكيس V .

أ. بيّن أن احتمال سحب كرة بيضاء هو $\frac{5}{12}$.

ب. علما أن الكرة المسحوبة بيضاء فما احتمال أن تكون من الكيس V .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

- ❖ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(\bar{z}-1+3i)(z^2-10z+50)=0$.
- ❖ في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C لواحقهما على الترتيب $z_C=1+3i$ و $z_B=\bar{z}_A$ ، $z_A=5+5i$.
1. أكتب كلا من z_B و z_A على الشكل الأسّي.
 2. عَلم النقط A ، B و C .
 3. أحسب طوليلة وعمدة العدد المركب: $\frac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$.
 4. استنتج طبيعة المثلث ABC ثم أحسب مساحته.
 5. أكتب على الشكل الجبري العدد a حيث $a = \left(\frac{z_B}{5\sqrt{2}}\right)^{2025} - \left(\frac{z_A}{5\sqrt{2}}\right)^{2023}$.
 6. عَيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون a^n تخيليا صرفا موجبا.
 7. عَيّن طبيعة (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق $|z-5-5i|=|-iz+i-3|$ ، ثم أنشئها.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $I =]-1; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)$.
- (1) أحسب $g'(x)$. ثم حدّد اتجاه تغير الدالة g واستنتج جدول تغيراتها.
- (2) أحسب $g(0)$ ثم بيّن أن المعادلة $g(x)$ تقبل حلين أحدهما α من المجال $[-0,72; -0,71]$.
- (3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال I .
- II. الدالة العددية المعرفة على المجال $] -1; 0[\cup] 0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$.
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (الوحدة $2cm$)
- (1) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
- (2) أحسب: $f'(x)$ ، ثم استنتج إشارتها.
- (3) بيّن أن $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$ ، ثم عَيّن قيمة مقربة لـ $f(\alpha)$ من أجل $\alpha = -0,715$.
- (4) شكّل جدول تغيرات الدالة f .
- (5) أنشئ (C_f) .
- (6) نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $F(x) = \ln x - \left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln(x+1)$.
- بيّن أن F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$.
- (7) λ عدد حقيقي موجب تماما. أحسب التكامل $I(\lambda) = \int_1^\lambda f(x) dx$ ، ثم حدّد حسب قيم λ التفسير الهندسي للعدد $I(\lambda)$.

انتهى الموضوع الثاني



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

(1) (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام v_n حيث: $v_n = 2e^{\alpha n}$ (α عدد حقيقي غير معدوم)

قيم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها المتتالية (v_n) متقاربة هي:

(أ) $]-1; +1[$ (ب) $]0; +\infty[$ (ج) $]0; +\infty[$

(2) β عدد حقيقي. تكون الأعداد الحقيقية $e^{\beta} + 1$ ، $e^{\beta} - 2$ و e^{β} حدود متتابعة من متتالية هندسية من أجل:

(أ) $\beta = \ln\left(\frac{4}{5}\right)$ (ب) $\beta = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$ (ج) $\beta = \ln\left(\frac{5}{4}\right)$

(3) (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام: $w_n = \ln(n+4) + \ln\left(\frac{1}{n+3}\right) - n$

نضع: من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = w_0 + w_1 + w_2 + \dots + w_n$. S_n يساوي:

(أ) $\ln(n+4) - n$ (ب) $\ln\left(\frac{3}{n+4}\right) - n(n+1)$ (ج) $\ln\left(\frac{n+4}{3}\right) - \frac{n(n+1)}{2}$

(4) الدالة العرقة على $]-3; +\infty[$ يـ: $f(x) = \ln(2x+6) - 3$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى

المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (Γ) التمثيل البياني للدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ يـ: $h(x) = \ln x$

المنحنى (C_f) هو صورة المنحنى (Γ) بالانسحاب الذي شعاعه:

(أ) $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 + \ln 2 \end{pmatrix}$ (ب) $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 3 - \ln 2 \end{pmatrix}$ (ج) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 - \ln 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(I) يحتوي صندوق على ثمان كريات، منها أربعة حمراء تحمل الأرقام 1، 1، 1، 2 و ثلاث كريات بيضاء تحمل الأرقام 0، 1، 2 و كرية واحدة سوداء تحمل الرقم 1. الكريات الثمانية متماثلة، لانفرق بينها باللمس.

نسحب من الصندوق عشوائيا ثلاث كريات على التوالي بدون إرجاع .

نعتبر الحوادث التالية: A : " الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون "

B : " الحصول على كرية واحدة فقط تحمل الرقم 1 " C : " الكرية الأولى المسحوبة بيضاء "

E : " الحصول على ثلاث كريات جداء الأرقام التي تحملها معدوم "

$$(1) \text{ أحسب } P(A), P(B), \text{ وبيّن أن: } P(C) = \frac{3}{8} \text{ و } P(E) = \frac{3}{8}$$

$$(2) \text{ أحسب } P(B \cap E) \text{ ثم استنتج: } P_B(E).$$

(II) نسحب الآن من نفس الصندوق عشوائيا أربع كريات في آن واحد.

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب لأربع كريات مجموع الأرقام المتحصل عليها.

$$(1) \text{ عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي } X \text{ ثم احسب أمله الرياضياني } E(X).$$

$$(2) \text{ احسب احتمال الحادثة: } " e^{X+4} < 2024 "$$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(I) نعتبر في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود: $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$

$$(1) \text{ احسب } P(6), \text{ ثم بيّن أنه من أجل كل عدد مركب } z: P(z) = (z - 6)(z^2 + az + b)$$

حيث a و b عدنان حقيقيان يطلب تعيينهما.

$$(2) \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة } P(z) = 0.$$

(II) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A, B و C التي لاحقاتها

$$\text{على الترتيب: } z_A = 3 + i\sqrt{3}, z_B = 3 - i\sqrt{3} \text{ و } z_C = 6$$

$$(1) \text{ أ) أكتب } z_A \text{ و } z_B \text{ على الشكل الأسّي.}$$

$$\text{ب) بيّن أن: } \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2024} + \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{1445} = 0$$

$$\text{ج) عيّن قيم العدد الطبيعي } n \text{ حتى يكون العدد } \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n \text{ حقيقي موجب تماما.}$$

$$(2) \text{ أ) أكتب على الشكل الأسّي العدد المركب } \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$$

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC .

$$(3) \text{ عيّن طبيعة المجموعة } (\Gamma) \text{ للنقط } M \text{ ذات اللاحقة } z \text{ بحيث: } |\bar{z} - 6| = |iz + \sqrt{3} - 3i|$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

$$(I) \text{ الدالة العددية المعرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ: } g(x) = x - e^{-\frac{1}{2}x}.$$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g .

$$(2) \text{ أ) بيّن أن المعادلة } g(x) = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا } \alpha \text{ حيث: } 0,70 < \alpha < 0,71.$$

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

$$(II) \text{ الدالة العددية المعرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ: } f(x) = (2x - 4)e^{\frac{1}{2}x} + 2 - x.$$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول: 1cm).

$$(1) \text{ أ) أحسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

ب) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^{\frac{1}{2}x} g(x)$.

ج) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

(2) بيّن أنّ: $f(\alpha) = 4 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$ ثمّ عيّن حصاراً لـ $f(\alpha)$.

(3) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 2 - x$ مقارب للمنحنى (C_f) .

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

(4) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماساً وحيداً (T) موازياً لـ (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

(5) لتكن في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية $y' + \frac{1}{2}y = \frac{x}{2} + 1$ (E)

أ) تحقّق أنّ الدالة g حلاً لـ (E) ثمّ استنتج أنّ: $e^{-\frac{1}{2}x} \times f''(x) = \frac{x}{2} + 1$.

ب) بيّن أنّ (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

(6) احسب $f(2)$ و $f\left(2\ln\frac{1}{2}\right)$ ثمّ ارسم المستقيم (Δ) ، المماس (T) والمنحنى (C_f) .

(7) ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $2e^{\frac{1}{2}x} = \frac{m-2}{x-2}$

(8) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عيّن دالة أصلية للدالة $(x-2)e^{\frac{1}{2}x}$ على المجال $[0; +\infty[$.

ب) استنتج بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدّد بـ (C_f) و (Δ) والمستقيمين ذوي المعادلتين: $x = 2$ ، $x = \alpha$

الموضوع الثاني (شعبة علوم تجريبية)

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على خمس كريات حمراء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 1 ، 1 ، 2 وثلاث كريات خضراء تحمل الأرقام 0 ، 1 ، 1 . ويحتوي الصندوق U_2 على ثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 وكريتين خضراوين تحملان الرقمين 0 ، 1 . (الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس)

نرمي قطعة نقود متوازنة 3 مرات على التوالي. إذا حصلنا عن وجهين وظهر نسحب من الصندوق U_1 كرتين في آن واحد وفي باقي الحالات نسحب من الصندوق U_2 كرتين على التوالي دون إرجاع.

نعتبر الحوادث التالية: E الحادثة الحصول على وجهين وظهر. A : " الحصول على كرتين من نفس اللون " .
 B : " الحصول على كرتين تحملان نفس الرقم " . C : " الحصول على الأقل على كرية حمراء "

$$(1) \text{ بين أن: } P(E) = \frac{3}{8} .$$

$$(2) \text{ أحسب } P(A), P(B), \text{ ثم بين أن: } P(C) = \frac{201}{224} .$$

(3) علماً أنّ الكريتين المسحوبتين من لونين مختلفين، ما احتمال أن تكونا من الصندوق U_1 .

(4) نفرغ محتوى الصندوقين U_1 و U_2 في صندوق جديد U_3 ثم نسحب منه ثلاث كريات في آن واحد.

نعتبر المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لثلاث كريات عدد الكريات الحمراء المتبقية في الصندوق.

(أ) عيّن قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

(ب) احسب احتمال الحادثة: " $2^X < 81$ "

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z - \sqrt{3})(z^2 - \sqrt{3}z + 1) = 0$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A, B, C التي لاحقاتها على

الترتيب z_A, z_B, z_C حيث: $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ، $z_B = \sqrt{3}$ ، و $z_C = \overline{z_A}$.

$$(أ) \text{ أثبت أن: } z_A^{1962} + z_C^{1440} = 0$$

(ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون العدد المركب $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقي موجب تماماً.

(3) أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(4) (أ) عيّن z_E لاحقة النقطة E صورة النقطة B بالتشابه المباشر الذي مركزه A نسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

(ب) بين أنّ النقط A, C, E في استقامية.

(ج) عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z بحيث يكون: $\frac{z - z_A}{z - z_C}$ تخيلياً صرفاً. ($z \neq z_C$)

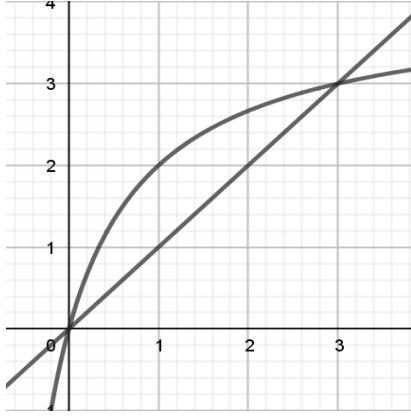
التمرين الثالث: (05 نقاط)

في الشكل المقابل، (C_f) هو التمثيل البياني للدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{4x}{x+1}$ والمستقيم $y = x$ معادلة له.

(1) تحقق أن f متزايدة تماما على المجال $[0; 3]$.

(2) لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 1}$.

(أ) أعد رسم الشكل ثم مثل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على حامل محور الفواصل مبرزاً خطوط التمثيل.



(ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(3) (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$.

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها مقاربة.

(4) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$.

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0 .

(ب) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n}$.

(5) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$ و $T_n = \frac{3}{u_0} + \frac{3}{u_1} + \frac{3}{u_2} + \dots + \frac{3}{u_n}$.

- أحسب S_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $T_n = \frac{8}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + n + 1$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln x$.

(1) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}$.

(2) (أ) أدرس اتجاه تغير الدالة g .

(ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 1 + \frac{x-1+\ln x}{x^2}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

(ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

(ج) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلة له: $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) بيّن أنّه: من أجل كل x من $]0;1[$ ، $x - 1 + \ln x < 0$ ومن أجل كل x من $]1;+\infty[$ ، $x - 1 + \ln x > 0$.

ج) استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ)

(3) h الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x) = -x + 3 - 2\ln x$.

أ) أدرس اتجاه تغير الدالة h .

ب) بيّن أنّ: المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث، $1,81 < \alpha < 1,85$.

ج) بيّن أنّ: (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) ثمّ تحقّق أنّ: $y = x - 1 + \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2}$ معادلة لـ (T)

(4) أرسم (Δ) ، (T) و (C_f) . نأخذ: $\left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2} = 0,42\right)$.

(5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $x^2(1+m) - x + 1 - \ln x = 0$

(6) F الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $F(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x}$

و $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدّد بـ (C_f) و (Δ) والمستقيمين ذي المعادلتين، $x = \alpha$ و $x = 1$

أ) بيّن أنّ F دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{x-1+\ln x}{x^2}$ على المجال $]0;+\infty[$.

ب) بيّن أنّ: $A(\alpha) = \left(\frac{(3-\alpha)(\alpha-1)}{2\alpha}\right)u_a$ ثمّ استنتج حصرا لـ $A(\alpha)$.



التمرين الأول (4 نقاط):

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$

(1) عين العددين الحقيقيين a ، b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 4}$. ثم برهن

بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < u_n < 1$.

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة .

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$.

• بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أكتب v_n و u_n بدلالة n .

• احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) احسب المجموع : $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{5}{v_1} + \frac{5^2}{v_2} + \dots + \frac{5^n}{v_n}$

التمرين الثاني (5 نقاط):

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C : $(z - \sqrt{3})(z^2 - \sqrt{3}z + 1) = 0$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى معلم $(0; \bar{1}; \infty)$ ، لتكن A ، B و C نقط لواحقها على

الترتيب: $z_C = \bar{z}_A$ ، $z_B = \sqrt{3}$ ، $z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

• أثبت أن $z_A^{1954} + z_C^{2024} = 0$ ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$

حقيقي موجب .

(3) أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(4) عين z_E لاحقة النقطة E صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ؛

ثم بين أن النقط A ؛ C و E في استقامة .

(5) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{z - z_A}{z - z_C}$ تخيليا صرفا ؛ $(z \neq z_C)$.

التمرين الثالث (4 نقاط):

(I) يحتوي وعاء على n كرة بيضاء (n عدد طبيعي) ، و 5 كرات حمراء و 3 كرات خضراء ، ن سحب منه عشوائيا كرتين في آن واحد .

1. ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين ؟

2. نرمز بـ $P(n)$ الى احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون .

(أ) بين أن : $P(n) = \frac{n^2-n+26}{(n+8)(n+7)}$ (ب) احسب $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n)$ ، فسر النتيجة .

(II) نضع $n = 4$ ، احسب $P(4)$.

نسمي سحبا كل سحب عشوائي لكرتين في آن واحد من هذا الوعاء . يقوم لاعب بإنجاز سحبين مستقلين عن بعضهما بحيث يعيد إلى الوعاء الكرتين المسحوبتين منه في السحب الأول. مقابل إجراء هذين السحبين يدفع اللاعب مقدما مبلغا قدره 30 دينارا، ومن أجل كل سحب يتحصل على 40 دينار إن كانت الكرتان من نفس اللون، ويتحصل على 5 دنانير فقط إن كانتا من لونين مختلفين. نسمي ربحا لهذا اللاعب الفرق بين مجموع ما يتحصل عليه من السحبين والمبلغ الذي دفعه مقدما (يمكن أن يكون الربح موجبا أو سالبا). نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبين مستقلين ربح هذا اللاعب .

• ماهي قيم X الممكنة ، عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ، واحسب امله الرياضياني .

التمرين الرابع (7 نقاط): المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$ ،

1- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g .

2- ادرس إشارة $g(x)$. (لاحظ أن $g(1) = 0$)

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$ وليكن (C) منحنىها البياني .

1- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

• تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$: $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا .

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3- أنشئ المنحنى (C) .

4- بين أن الدالة $h: x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x)$ على $]0, +\infty[$: ثم باستعمال التكامل

بالتجزئة بين أن $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$ ثم احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور

الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = e$.

الموضوع الثاني:

التمرين الأول (5 نقاط):

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة : $z^2 - 6z + 10 = 0$.

• استنتج في C حلول المعادلة ذات المجهول z حيث: $(\bar{z} + 2)^2 - 6(\bar{z} + 2) + 10 = 0$

(2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{u}, \bar{v})$ ، النقط A, B, C, D لاحقاتها على الترتيب :

$$z_D = 1 - i \text{ و } z_C = 1 + i \text{ و } z_B = 3 + i \text{ و } z_A = 3 - i$$

• عين الكتابة المركبة للدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$

(3) النقطة E التي لاحقتها $z_B = 7 - 3i$ و F صورتها بالدوران r ؛ تحقق أن لاحقة F هي $z_F = 5 + 3i$

- عين لاحقة النقطة H صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overline{AE}$

(4) مثل النقط A, B, E, F, H و عين بدقة طبيعة الرباعي $AEHF$.

(5) عين المجموعة (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z = 1 - i + ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ وذلك عندما k يمسح $\mathbb{R}^*$.

• عين المجموعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z - 1 - i| = |z - 1 + i|$.

التمرين الثاني (4 نقاط):

- أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل حالة من الحالات الآتية :

(1) - حجم المجسم المولد بالدوران حول محور الفواصل للتمثيل البياني للدالة f المعرفة على

$$\text{المجال } [1, e] \text{ — : } f(x) = \frac{2(\ln x)^2}{\sqrt{x}} \text{ هو : } V = \frac{4\pi}{5} uv \text{ ؟}$$

$$(2) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2023}{x}\right)^x = \frac{1}{2023}$$

$$(3) - \text{من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} : 1 + 3^{\frac{1}{2}} + 3 + 3^{\frac{3}{2}} + \dots + 3^{\frac{n}{2}} = \frac{(1 + \sqrt{3}) \left(3^{\frac{n+1}{2}} - 1\right)}{2}$$

$$(4) - (U_n) \text{ و } (V_n) \text{ متاليتان عدديتان معرفتان على } \mathbb{N}^* \text{ بـ : } U_n = \frac{1}{2} - \frac{e}{n} \text{ ، } V_n = \ln \sqrt{\frac{3}{n}} + e$$

المتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتان ؟

التمرين الثالث (4 نقاط):

تتكون مجموعة اشخاص من 8 رجال و 4 نساء من بينهم رجل واحد اسمه إبراهيم وامرأة واحدة اسمها فاطمة. نريد تكوين لجنة مكونة من 3 أعضاء، نعتبر الاحداث التالية:

A "اللجنة تضم 3 رجال" B "اللجنة من جنسين مختلفين" C "اللجنة تضم اما إبراهيم او فاطمة"

1. بين ان $P(A) = \frac{14}{55}$ ثم احسب $P(B)$ و $P(C)$.
2. علما ان اللجنة من جنسين مختلفين ما احتمال ان تكون تضم إبراهيم.
3. ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل اختيار عدد الرجال في اللجنة المكونة.
 (أ) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X .
 (ب) احسب امله الرياضيائي $E(X)$.
 (ج) احسب $P(|X| > \ln C_e^1)$.
4. نختار الان لجنة من نفس الأشخاص مكونة من رئيس و نائب و مساعدين.
 • ما احتمال ان تكون اللجنة من جنسين مختلفين؟

التمرين الرابع (7 نقاط):

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$. حيث a, b, c أعداد حقيقية و (C_r) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- عين الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث يقبل (C_r) عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معامل

توجيهه 3 و العدد $\sqrt{3}$ حل للمعادلة $f(x) = 0$.

2- نضع $a = 1, b = 0, c = -3$

• احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

3- أكتب معادلة L (T) مماس المنحنى (C_r) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$ ثم عين إحداثيات نقط

تقاطع (C_r) مع حامل محور الفواصل.

4- أرسم (T) و (C_r) .

5- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن $f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$ ثم استنتج

دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

6- احسب بوحدة المساحات، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_r) ومحور الفواصل

والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 3$.

7- m وسيط حقيقي؛ ناقش بيانها وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$.

إنتهى الموضوع الثاني - تمنياتي لكم بالنجاح في البكالوريا

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$.

(1) تعيين العددين الحقيقيين a ، b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 4}$ بالقسمة الاقليدية نجد

$$b = -10 ، a = 3 \text{ و } u_{n+1} = \frac{3u_n + 12 - 10}{u_n + 4} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}$$

البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < u_n < 1$

$$\text{لدينا } u_0 = \frac{1}{4} \text{ و منه } -2 < u_0 < 1 \text{ محققة}$$

نفرض أن $-2 < u_n < 1$ و لنبرهن أن $-2 < u_{n+1} < 1$

الطريقة الأولى :

نبرهن أن $-2 < u_{n+1}$ أي $2 + u_{n+1} > 0$

$$2 + u_{n+1} = 2 + 3 - \frac{10}{u_n + 4} = \frac{5u_n + 12 - 10}{u_n + 4} = \frac{5u_n + 2}{u_n + 4}$$

نبرهن أن $u_{n+1} < 1$ أي $u_{n+1} - 1 < 0$

$$u_{n+1} - 1 = 3 - \frac{10}{u_n + 4} - 1 = \frac{2u_n + 8 - 10}{u_n + 4} = \frac{2u_n - 2}{u_n + 4} = 2 \left(\frac{u_n - 1}{u_n + 4} \right)$$

و منه $-2 < u_{n+1} < 1$ إذن من أجل عدد طبيعي n فإن $-2 < u_n < 1$

الطريقة الثانية :

لدينا الدالة المرفقة هي f حيث $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$ و دالتها المشتقة هي $f'(x) = \frac{10}{(x+4)^2}$

و منه f متزايدة على المجال $[-2; 1]$.

$-2 < u_n < 1$ و منه نجد $f(-2) < f(u_n) < f(1)$ كون أن f متزايدة أي ان $-2 < u_{n+1} < 1$

و منه من أجل عدد طبيعي n فإن $-2 < u_n < 1$

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4} - u_n = \frac{3u_n + 2 - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4} = -\frac{(u_n - 1)(u_n + 2)}{u_n + 4}$$

و منه المتتالية متزايدة .

استنتاج أن (u_n) متقاربة : بما ان المتتالية متزايدة و محدودة من الاسفل فهي متقاربة .

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$

تبين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول لدينا :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2}{1 - u_{n+1}} = \frac{\frac{3u_n + 2}{u_n + 4} + 2}{1 - \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}} = \frac{3u_n + 2 + 2u_n + 8}{u_n + 4 - 3u_n - 2} = \frac{5u_n + 10}{-2u_n + 2} = \frac{5}{2} \left(\frac{u_n + 2}{1 - u_n} \right) = \frac{5}{2} v_n$$

$$v_0 = \frac{u_0 + 2}{1 - u_0} = \frac{\frac{1}{4} + 2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{9}{3} = 3 \text{ و حدها الأول } \frac{5}{2} \text{ هندسية أساسها } (v_n) \text{ و منه المتتالية}$$

$$v_n = 3 \left(\frac{5}{2} \right)^n \text{ كتابة } v_n \text{ و } u_n \text{ بدلالة } n :$$

$$\text{لدينا } v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n} \text{ أي ان } v_n - u_n v_n = u_n + 2 \text{ و منه } u_n + u_n v_n = v_n - 2 \text{ أي ان } u_n(1 + v_n) = v_n - 2 \text{ و}$$

$$u_n = \frac{v_n - 2}{1 + v_n} = \frac{3 \left(\frac{5}{2} \right)^n - 2}{1 + 3 \left(\frac{5}{2} \right)^n} \text{ منه}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \left(\frac{5}{2} \right)^n - 2}{1 + 3 \left(\frac{5}{2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \left(\frac{5}{2} \right)^n}{3 \left(\frac{5}{2} \right)^n} = 1 \text{ حساب}$$

$$(4) \text{ حساب المجموع : } S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{5}{v_1} + \frac{5^2}{v_2} + \dots + \frac{5^n}{v_n} \text{ بوضع } t_n = \frac{5^n}{v_n} = \frac{5^n}{3 \left(\frac{5}{2} \right)^n} = \frac{2^n}{3} \text{ و منه } (t_n) \text{ متتالية هندسية}$$

$$S_n = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n = t_0 \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \right) = \frac{1}{3} (2^{n+1} - 1) \text{ و منه } t_0 = \frac{1}{v_0} = \frac{1}{3} \text{ أساسها 2 و حدها الأول}$$

التمرين الثاني (5 نقاط) :

$$(1) \text{ حل في مجموعة الأعداد المركبة } C : (z - \sqrt{3})(z^2 - \sqrt{3}z + 1) = 0 \text{ يكافئ } z - \sqrt{3} = 0 \text{ او}$$

$$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0 \text{ أي ان } z = \sqrt{3} \text{ و نحسب المميز للمعادلة الثانية } \Delta = -1 \text{ للمعادلة حلين هما}$$

$$S = \left\{ \sqrt{3} ; \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i ; \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right\} \text{ مجموعة الحلول هي } z'' = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \text{ و } z' = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$(2) \text{ المستوي المركب منسوب إلى معلم } (O ; \vec{i} ; \vec{j}) \text{ ، لتكن } A \text{ ، } B \text{ و } C \text{ نقط لواحقها على الترتيب:}$$

$$z_C = \bar{z}_A \text{ ، } z_B = \sqrt{3} \text{ ، } z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\text{اثبات أن } z_A^{1954} + z_C^{2024} = 0 \text{ نكتب العددين على الشكل الأسّي } z_A = e^{-i\frac{\pi}{6}} \text{ و } z_C = e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ و منه}$$

$$z_A^{1954} = e^{-(326\pi - \frac{2\pi}{6})i} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ و } z_A^{1954} = \left(e^{-i\frac{\pi}{6}}\right)^{1954}$$

$$\text{و } z_C^{2024} = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2024} \text{ و منه } z_C^{2024} = e^{(337\pi + \frac{\pi}{3})i} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{ومنه } -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$$

تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقي موجب

لدينا مما سبق و حسب دستور موفر

$$\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n = \left(e^{-\frac{\pi i}{3}}\right)^n = e^{-\frac{n\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{-n\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-n\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$$

يكون عددا حقيقيا موجب يعني ان $\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 1$ و $\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) = 0$ أي ان $\frac{n\pi}{3} = 2\pi k$ و k عدد طبيعي و منه نجد $n = 6k$ و k عدد طبيعي

(3) كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي لدينا

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{-\frac{\pi i}{3}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC بما أن $\left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}$ فإن المثلث ABC متقايس الأضلاع .

(4) تعيين z_E لاحقة النقطة E صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$

$$z_E = 2e^{\frac{\pi i}{3}} z_B + \left(1 - 2e^{\frac{\pi i}{3}}\right) z_A$$

$$z_E = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3}) + (1 - 1 - i\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

$$z_E = \sqrt{3} + 3i - i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

اثبات أن النقط A ؛ C و E في استقامية لدينا $z_E - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = 2i$ و

$$z_E - z_A = 2(z_C - z_A) \text{ و } z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = i$$

$$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC} \text{ و منه النقط } A ؛ C \text{ و } E \text{ في استقامية.}$$

(5) تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{z - z_A}{z - z_C}$ تخيليا صرفا ($z \neq z_C$)

يعني أن $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}$ و هذا يعني أن $(\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} + \pi k$ و منه

$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = 0 \text{ و منه مجموعة النقط } M \text{ هي الدائرة ذات القطر } [AC] \text{ ما عدا } A \text{ و } C.$$

(I) 1- احتمال الحصول على كرتين بيضاوين :

مجموعة الإمكانات هي توفيقات ذات كرتين من بين $n + 8$ كرة، منه عدد الحالات الممكنة هو :

$$C_{n+8}^2 = \frac{(n+8)(n+7)}{2}$$

نعرف الحادثة B : « سحب كرتين من لون أبيض » ، عدد الحالات المناسبة هو عدد التوفيقات ذات كرتين

$$P(B) = \frac{C_n^2}{C_{n+8}^2} = \frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)} \text{ ومنه : } C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} \text{ كرة بيضاء أي هو : } C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$2- \text{ أ- تبين أن } P(n) = \frac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$$

نعرف الحادثتين R : « سحب كرتين حمراوتين » و V : « سحب كرتين خضراوتين » إذن لدينا :

$$P(V) = \frac{C_3^2}{C_{n+8}^2} = \frac{6}{(n+8)(n+7)} \text{ و } P(R) = \frac{C_5^2}{C_{n+8}^2} = \frac{20}{(n+8)(n+7)}$$

بما أن الاحداث R و V منفصلة مثنى مثنى فإن :

$$P(n) = P(B) + P(R) + P(V)$$

$$= \frac{n(n-1)}{(n+8)(n+7)} + \frac{20}{(n+8)(n+7)} + \frac{6}{(n+8)(n+7)} = \frac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$$

ب- حساب $\lim_n P(n)$: بالحساب المباشر نجد أن $\lim_n P(n) = 1$

تفسر هذه النتيجة على أنه إذا كان عدد الكرات البيضاء كبير بما فيه كفاية، فإن نتيجة سحب كرتين من نفس اللون شبه مؤكدة .

$$(II) \text{ حساب } P(4) : \text{ بتعويض قيمة } n \text{ بـ } 4 \text{ في عبارة } P(n) \text{ نجد : } P(4) = \frac{19}{66}$$

(أ) قيم المتغير العشوائي X الممكنة :

- "إذا تحصل اللاعب على كرتين من نفس اللون في كلا السحبين $X = -30 + 40 + 40 = 50$ "
- "إذا تحصل اللاعب مرة واحدة على كرتين من نفس اللون $X = -30 + 40 + 5 = 15$ "
- "إذا تحصل اللاعب على كرتين من لونين مختلفين في كلا السحبين $X = -30 + 5 + 5 = -20$ "

(ب) تعيين قانون احتمال المتغير العشوائي X :

لدينا فرضاً أن السحبين مستقلين عن بعضهما البعض إذن ينتج :

$$P(X = 50) = P(4) \times P(4) = \left(\frac{19}{66}\right)^2 = \frac{361}{4356}$$

$$P(X = 15) = P(4) \times (1 - P(4)) \times \frac{2!}{1!1!} = \frac{19}{66} \times \frac{47}{66} \times 2 = \frac{1786}{4356}$$

$$P(X = -20) = (1 - P(4)) \times (1 - P(4)) = \left(\frac{47}{66}\right)^2 = \frac{2209}{4356}$$

(ج) حساب الامل الرياضياتي للمتغير العشوائي X :

$$E(X) = 50 \times \frac{361}{4356} + 15 \times \frac{1786}{4356} - 20 \times \frac{2209}{4356} = \frac{5}{33}$$

التمرين الرابع (7 نقاط):

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$

1- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2} \quad \text{و} \quad g(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln(x)$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة g مما سبق نجد أن $g'(x) \geq 0$ و منه الدالة g متزايدة على $]0, +\infty[$.

2- دراسة إشارة $g(x)$ بما أن $g(1) = 0$ و الدالة g متزايدة على $]0, +\infty[$ نتلخص الإشارة في الجدول الموالي

x	0	1	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	—	0	+

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$. وليكن (C) منحنىها البياني في المستوي السابق .

1- اثبات أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ نضع $t = \sqrt{x}$ و منه $\lim_{x \rightarrow +\infty} (t) = +\infty$ و منه

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(t)}{t} \right] = 0 \quad \text{لان} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(x)]^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(t^2)]^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 \ln(t)}{t} \right]^2 = 0$$

$$\text{حساب} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 + \frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x} \right] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x} \right] = 0$$

التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ ؛ لدينا

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + x - \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 - 2 = x + \frac{1}{x} - (-\ln x)^2 - 2 = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2 = f(x)$$

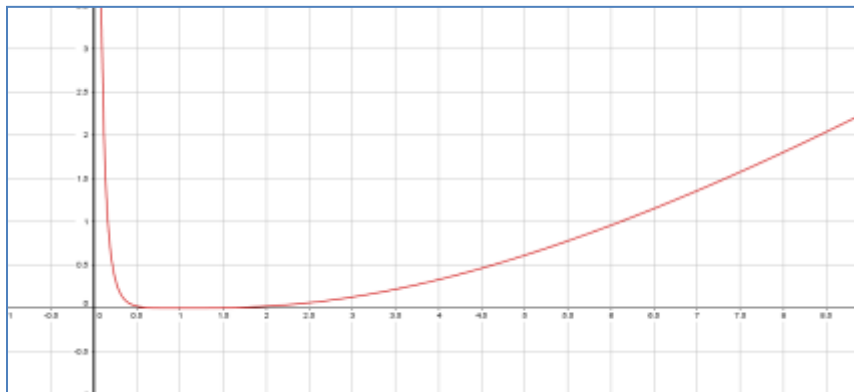
حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: و منه المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقارب عموديا معادلته $x = 0$.

2- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ بالحساب $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$ و منه

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - 2 \frac{1}{x} (\ln x) = \frac{x^2 - 1 - 2x \ln x}{x^2} = \frac{x - \frac{1}{x} - 2 \ln x}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow 0 \nearrow$	$+\infty$



3- رسم المنحنى (C) :

4- بين أن الدالة $h : x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x)$ على $]0, +\infty[$

h تقبل الاشتقاق على $]0, +\infty[$ حيث :

$$h'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$$

باستعمال التكامل بالتجزئة

تبين أن $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$ بوضع $u'(x) = 1$ و $v(x) = (\ln x)^2$ و منه $u(x) = x$ و $v'(x) = \frac{2}{x} (\ln x)$

$$\int_1^e u'(x) v(x) dx = \left[x (\ln(x))^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln(x) dx = e - 2 \left[x \ln x - x \right]_1^e = e - 2$$
 و منه $u'(x) = 1$

5- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = e$ و $x = 1$

$$\int_1^e f(x) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 + \ln(x) - 2x \right]_1^e - e + 2$$
 و منه $\int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left[x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2 \right] dx$

$$\int_1^e f(x) dx = \frac{e^2}{2} + 1 - 2e + \frac{3}{2} - e + 2 = \left(\frac{e^2}{2} - 3e + \frac{9}{2} \right) u.a$$

انتهى الموضوع الأول

التمرين الاول (5 نقاط) :

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 10 = 0$ نحسب المميز $\Delta = -4$ للمعادلة حلين هما $z' = 3+i$ و $z'' = 3-i$

استنتاج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z حيث: $(\bar{z} + 2)^2 - 6(\bar{z} + 2) + 10 = 0$ مما سبق نجد أن للمعادلة تكافئ الأخيرة $\bar{z} + 2 = 3+i$ أو $\bar{z} + 2 = 3-i$ أي أن $\bar{z} = 1+i$ أو $\bar{z} = 1-i$ ومنه $z = 1+i$ أو $z = 1-i$ هما حل للمعادلة

(2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B, C, D لاحقاتها

$$z_D = 1-i \text{ و } z_C = 1+i \text{ و } z_B = 3+i \text{ و } z_A = 3-i$$

تعيين الكتابة المركبة للدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$: هي $z' - z_A = i(z - z_A)$ أي $z' - 3+i = i(z - 3+i)$ و منه $z' = iz + 2 - 4i$

(3) النقطة E التي لاحقتها $z_E = 7 - 3i$ و صورتها بالدوران r

التحقق أن لاحقة F هي $z_F = 5 + 3i$ لدينا

$$z_F = iz_E + 2 - 4i = i(7 - 3i) + 2 - 4i = 7i + 3 + 2 - 4i = 5 + 3i \text{ محققة}$$

تعيين لاحقة النقطة H صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{AE}$ أي $\vec{AH} = \vec{FE}$ و منه $z_H - z_F = z_E - z_A$ أي $z_H = z_F + z_E - z_A = 5 + 3i + 7 - 3i - 3 + i = 9 + i$

(4) تمثيل النقط A, B, E, F, H

تعيين بدقة طبيعة الرباعي $AEHF$

$$\frac{z_F - z_E}{z_A - z_H} = -i = e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة وفيه ضلعان متجاورتان متقايسان فهو مربع .

(5) تعيين المجموعة (Γ) مجموعة النقط M ذات

اللاحقة z حيث : $z = 1 - i + ke^{-\frac{\pi}{4}i}$ وذلك عندما

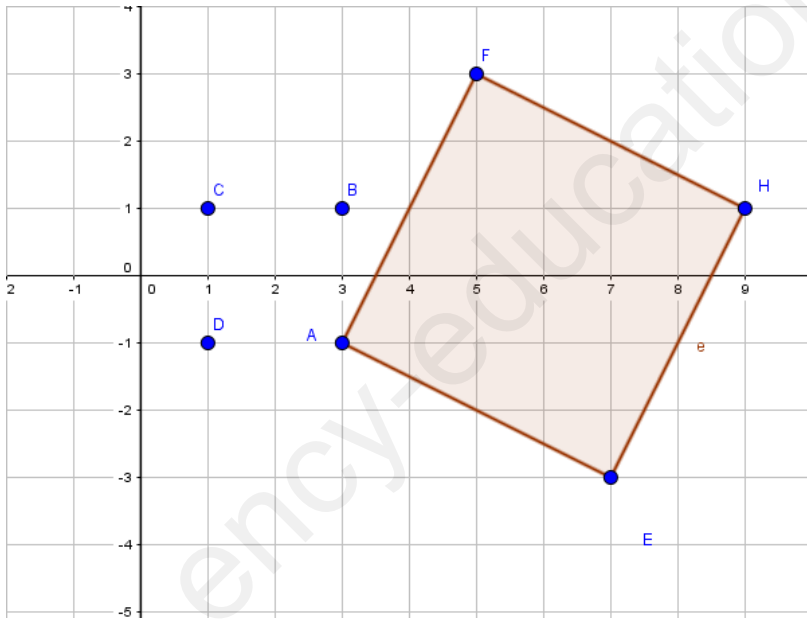
k يمسح $\mathbb{R}^*$ لدينا $z = 1 - i + ke^{-\frac{\pi}{4}i}$ يعني أن

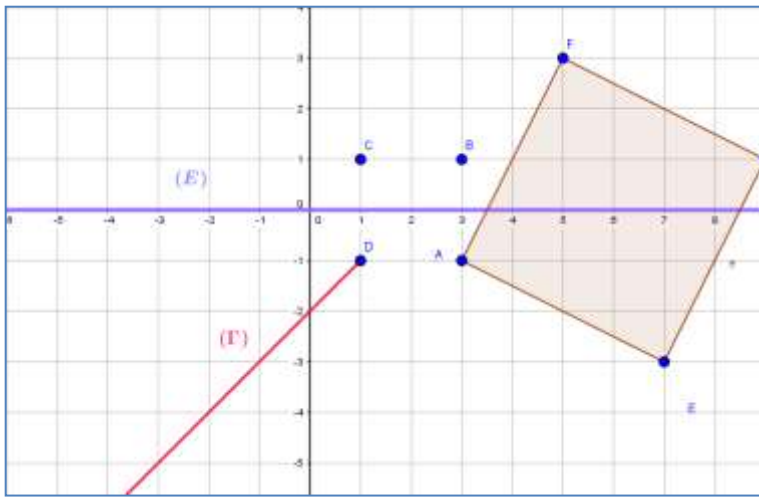
$$z - (1 - i) = ke^{-\frac{\pi}{4}i}$$

$$\arg[z - (1 - i)] = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \text{ و هذا يعني}$$

$$\left(\vec{OI}; \vec{DM} \right) = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \text{ و } k \text{ عدد صحيح مجموعة النقط هي نصف مستقيم } [DM) \setminus \{D\} \text{ و الذي معامل توجيهه } -1$$

(أي موازي للمنصف الثاني ذي المعادلة $y = -x$)





تعيين المجموعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة
 z حيث : $|z-1-i| = |z-1+i|$ تكافئ $CM = DM$
 مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة [CD]
 أي المستقيم ذي المعادلة $y = 0$.

التمرين الثاني (4 نقاط) :

$$V = \pi \int_1^e (f(x))^2 dx \quad uv = \pi \int_1^e \frac{4(\ln x)^4}{x} dx \quad (1) \quad \text{هو } V = \frac{4\pi}{5} uv \quad ?$$

الإجابة صحيحة

$$V = 4\pi \left[\frac{(\ln x)^5}{5} \right]_1^e uv = \frac{4\pi}{5} uv$$

$$(2) \text{ - من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما } x \text{ لدينا : } \left(1 + \frac{2023}{x} \right)^x = e^{x \ln \left(1 + \frac{2023}{x} \right)}$$

نضع : $t = \frac{1}{x}$ ، $x \rightarrow +\infty$ ، $t \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2023}{x} \right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+2023t)}{t}} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{2023 \times \frac{\ln(1+2023t)}{2023t}}$$

بما أن : $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$ و منه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2023}{x} \right)^x = e^{2023}$ و منه : الإجابة خاطئة

$$(3) \text{ - نضع من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N} : U_n = (\sqrt{3})^n \text{ متتالية هندسية أساها } q = \sqrt{3} \text{ و حدها الأول } U_0 = 1.$$

$$S_n = U_0 + U_1 + U_1 + \dots + U_n = \frac{1}{1-\sqrt{3}} \left[1 - (\sqrt{3})^{n+1} \right]$$

الإجابة صحيحة

$$S_n = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{1-3} \right) \left[1 - 3^{\frac{n+1}{2}} \right] = \frac{(1+\sqrt{3}) \left(3^{\frac{n+1}{2}} - 1 \right)}{2}$$

(4) - من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $U_{n+1} - U_n = \frac{e}{n(n+1)} > 0$ و منه : (U_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}^*$.

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $n+1 > n$ ، $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ ، $\frac{3}{n+1} + e < \frac{3}{n} + e$ ، $\sqrt{\frac{3}{n+1} + e} < \sqrt{\frac{3}{n} + e}$

و منه : $V_{n+1} < V_n$ ، أي أن (V_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0 \text{ و } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n \sqrt{\frac{3}{n} + e} = L_n \sqrt{e} = \frac{1}{2} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} L_n \left(\frac{1}{2} - \frac{e}{n} \right) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

و منه : المتتاليتان (U_n) و (V_n) متجاورتان الإجابة صحيحة

التمرين الثالث (4 نقاط) :

عدد اللجان الممكن تشكيلها هي توفيقات 3 أعضاء من 12 عضو و منه : $C_{12}^3 = 220$

(1) تبين أن $P(A) = \frac{14}{55}$: عدد اللجان الممكن تشكيلها حيث تضم 3 رجال هو : $C_8^3 = 56$

ومنه : $P(A) = \frac{C_8^3}{C_{12}^3} = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}$

• عدد اللجان الممكن تشكيلها حيث تضم جنسين مختلفين أي تضم رجل و امرأتين أو رجلين وامرأة واحدة

هو : $C_8^1 \times C_4^2 + C_8^2 \times C_4^1 = 48 + 112 = 160$

$$P(B) = \frac{C_8^1 \times C_4^2 + C_8^2 \times C_4^1}{C_{12}^3} = \frac{8}{11}$$

• عدد اللجان الممكن تشكيلها حيث تضم اما إبراهيم او فاطمة هنا نميز ثلاث حالات :

(اللجنة تضم إبراهيم ولا تضم فاطمة) او (اللجنة تضم فاطمة ولا تضم إبراهيم) او (اللجنة تضم إبراهيم و تضم فاطمة)

أي عدد الحالات الممكنة : $C_1^1 \times C_{10}^2 + C_1^1 \times C_{10}^2 + C_1^1 \times C_1^1 \times C_{10}^1 = 45 + 45 + 10 = 100$

ومنه : $P(C) = \frac{100}{220} = \frac{5}{11}$

(2) نضع حادثة D " اللجنة تضم إبراهيم "

علما ان اللجنة من جنسين مختلفين ما احتمال ان تكون تضم إبراهيم أي حساب الاحتمال $P_B(D)$

$$P_B(D) = \frac{P(B \cap D)}{P(B)}$$

الحادثة $B \cap D$ " اللجنة تضم إبراهيم ومن جنسين مختلفين " أي نميز حالتين اللجنة تضم إبراهيم وامرأتين او اللجنة تضم

إبراهيم ورجل وامرأة ومنه عدد الحالات الممكنة هو : $C_1^1 \times C_4^2 + C_1^1 \times C_7^1 \times C_4^1 = 6 + 28 = 34$

$$P(B \cap D) = \frac{34}{220} = \frac{17}{110}$$

اذن :

$$P_B(D) = \frac{P(B \cap D)}{P(B)} = \frac{34}{160} = \frac{17}{80}$$

(3) المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل اختيار عدد الرجال في اللجنة المكونة :

اللجنة اما ان تضم رجل او رجلان او ثلاث رجال او لا تضم أي رجل ومنه قيم المتغير العشوائي X

الممكنة هي : 0 ، 1 ، 2 ، 3 .

أ) قانون احتمال المتغير العشوائي X :

$$P(X = 0) = \frac{C_4^3}{C_{12}^3} = \frac{1}{55} \bullet$$

$$P(X = 1) = \frac{C_8^1 \times C_4^2}{C_{12}^3} = \frac{12}{55} \bullet$$

$$P(X = 2) = \frac{C_8^2 \times C_4^1}{C_{12}^3} = \frac{28}{55} \bullet$$

$$P(X = 3) = P(A) = \frac{14}{55} \bullet$$

ب) حساب الامل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{55} + 1 \times \frac{12}{55} + 2 \times \frac{28}{55} + 3 \times \frac{14}{55} = \frac{110}{55} = 2$$

ج) $P(|X| > \ln C_e^1)$:

$|X| > \ln C_e^1$ تكافئ $|X| > \ln e$ تكافئ $|X| > 1$ تكافئ $X \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

تكافئ $X \in \{2; 3\}$ ومنه : $P(|X| > \ln C_e^1) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{28}{55} + \frac{14}{55} = \frac{42}{55}$

(4) لجنة من نفس الأشخاص مكونة من رئيس و نائب و مساعدين هي ترتيبية عضوين و توفيقه عضوين أي

$$A_{12}^2 \times C_{10}^2 = 5940 \text{ هو : عدد اللجان الممكن تشكيلها}$$

نضع H "احتمال ان تكون اللجنة من جنسين مختلفين " هو الاحتمال العكسي ان تكون اللجنة من نفس الجنس ومنه :

$$P(H) = 1 - \left(\frac{A_4^2 \times C_2^2}{5940} + \frac{A_8^2 \times C_6^2}{5940} \right) = 1 - \left(\frac{12}{5940} + \frac{840}{5940} \right) = 1 - \frac{852}{5940} = \frac{5088}{5940} = \frac{425}{495}$$

التمرين الرابع (7 نقاط) :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1- تعيين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد

$$\sqrt{3} \text{ حل للمعادلة } f(x) = 0 .$$

$$f(0) = -3 \text{ و هذا يعني } c = -3$$

$$\text{و لدينا } f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}$$

$$f'(0) = 3 \text{ يعني أن } b - c = 3 ; \text{ و منه } b = 0$$

$$f(\sqrt{3}) = 0 \text{ يعني أن } f(\sqrt{3}) = (3a - 3)e^{-\sqrt{3}} = 0 \text{ و منه } a = 1$$

$$2- \text{ نضع } a = 1, b = 0, c = -3 \text{ تصبح } f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

$$\text{حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \text{ لأنه بوضع } x = 2t \text{ نجد}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4t^2}{e^{2t}} \right] = 4 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{e^t} \right)^2 = 0$$

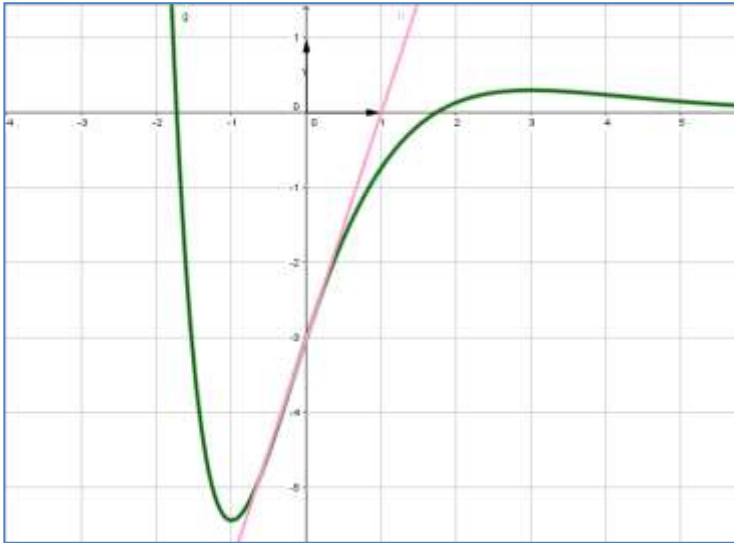
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)e^{-x} = +\infty$$

دراسة اتجاه تغير الدالة f : المشتقة : $f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ إشارتها من إشارة $(-x^2 + 2x + 3)$ تنعدم عند العددين 3 و -1 و منه f متناقصة على المجالين $]-\infty; -1]$ و $[3; +\infty[$ متزايدة على المجال $[-1; 3]$

و شكل جدول تغيراتها :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$-2e$	$\frac{6}{e^3}$	0

- 3- كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ معادلة المماس هي $y=3x-3$ تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل $f(x)=0$ يكافئ $x^2-3=0$ أي ان $x=\sqrt{3}$ او $x=-\sqrt{3}$ نقطتي التقاطع هما $B(\sqrt{3};0)$ و $C(-\sqrt{3};0)$



- 4- رسم (T) و (C_f)
5- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$$

$$f(x) = (x^2 - 3)e^{-x} \text{ و } f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$$

$$f''(x) = (x^2 - 4x - 1)e^{-x} \text{ أي } f''(x) = (-2x + 2)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x}$$

$$\text{و منه } f(x) + 2f'(x) + f''(x) = (x^2 - 3 - 2x^2 + 4x + 6 + x^2 - 4x - 1)e^{-x} = 2e^{-x}$$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x} \text{ يكافئ } f(x) = -2f'(x) - f''(x) + 2e^{-x}$$

$$\text{حيث } F(x) = -2f(x) - f'(x) - 2e^{-x} \text{ أي } F(x) = -2(x^2 - 3)e^{-x} - (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} - 2e^{-x}$$

$$\text{أي } F(x) = (-x^2 - 2x + 1)e^{-x} \text{ و } F(x) = (-2x^2 + 6)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x} - 2e^{-x}$$

- 6- حساب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=1$ و $x=3$ هي

$$A = \int_1^{\sqrt{3}} -f(x)dx + \int_{\sqrt{3}}^3 f(x)dx = [-F(x)]_1^{\sqrt{3}} + [F(x)]_{\sqrt{3}}^3 = (4 + 4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} + 2e^{-1} + (-14)e^{-3}$$

$$A = [(4 + 4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} + 2e^{-1} + (-14)e^{-3}]u.a$$

- 7- m وسيط حقيقي ناقش بيانها وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$

$$\text{المعادلة تكافئ } me^x = -(x^2 - 3) \text{ أي ان } -m = (x^2 - 3)e^{-x} \text{ يكافئ } -m = f(x)$$

$$\text{حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى } (C_f) \text{ المستقيم } (\Delta_m) \text{ ذو المعادلة } y = -m$$

المناقشة

- لما $-m < -2e$ أي ان $m > 2e$ نلاحظ ان (Δ_m) و (C_f) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول .
- لما $-m = -2e$ أي ان $m = 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب.

- لما $-2e > -m > -3$ أي ان $3 < m < 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما سالبان ومنه للمعادلة حلين ساليين
- لما $-3 = -m$ أي ان $m = 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين إحداهما فاصلتها معدومة و الأخرى فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين إحداهما معدوم و الآخر سالب .
- لما $-3 > -m \geq 0$ أي ان $0 \leq m < 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة .
- لما $0 > -m > \frac{6}{e^3}$ أي ان $-\frac{6}{e^3} < m < 0$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلتهما موجبتان و نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب .
- لما $\frac{6}{e^3} = -m$ أي أن $m = -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة
- لما $\frac{6}{e^3} > -m$ أي ان $m < -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة فاصلتهما سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب .

انتهى الموضوع الثاني



على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 3$ ، $u_1 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

ولتكن المتتاليتين (v_n) و (w_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$ و $w_n = u_n - 7$

1. برهن أن المتتالية (v_n) ثابتة، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 21)$

2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < u_{n+1} < 7$.

3. بين أن المتتالية (u_n) مقاربة .

4. أ- أثبت أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

5. نضع : $S_n = \sqrt{7-u_0} + \sqrt{7-u_1} + \dots + \sqrt{7-u_n}$

- عبر عن المجموع S_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة :

1. f الدالة العددية المعرفة على المجال $[1;3]$ بـ : $f(x) = \ln(x+1)$

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;3]$ هي $2 + \ln 64$.

2. حلول المعادلة التفاضلية $y' + \sin(ex) = 0$ في $\mathbb{R}$ هي الدوال : $y = e \sin(ex) + c$ مع $c \in \mathbb{R}$.

3. الشكل الجبري للعدد المركب $\left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{4048}$ هو : 2^{2024} .

4. الشكل الأسّي للعدد المركب $\frac{1+i}{-1-\sqrt{3}i}$ هو $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i \frac{13\pi}{12}}$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كريات سوداء تحمل الرقم α و ثلاث كريات صفراء تحمل الرقم $\alpha - 1$ و كرتين بيضاوين تحملان الرقم 1، حيث α عدد طبيعي غير معدوم ، كل الكريات متماثلة لا تفرق بينها عند اللمس. نسحب عشوائيا من هذا الكيس ثلاث كريات في أن واحد .

1. أحسب احتمال الأحداث التالية :

A : " الحصول على كرية بيضاء على الأكثر " . B : " الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس الرقم " .

C : " الحصول على كرتين من بين الكريات الثلاث تحملان الرقم $\alpha - 1$ " .

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الأرقام المسجلة على الكريات السوداء المسحوبة و الذي يأخذ القيمة 0 اذا كانت كل الكريات ليست سوداء .

أ- برر أن القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي : 0 ، α ، 2α ، 3α ، ثم عرف قانون احتماله.

ج- بين أن الأمل الرياضي : $E(X) = \frac{4}{3}\alpha$ ، ثم حدد قيم α التي من أجلها يكون : $|E(x) - 1| \leq 2$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = -2x^3 + x^2 - 1$

1) أدرس تغيرات الدالة g .

2) برهن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن $-0.7 < \alpha < -0.6$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)e^{-2x+1}$ و ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة

f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة : $\|\vec{i}\| = 2cm$ ، $\|\vec{j}\| = 1cm$)

1. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$ فان : $1 < x < x^2 < x^3$.

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$ فان : $0 < f(x) < 4x^3 e^{-2x+1}$.

ج- بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$ و استنتج من السؤال 1. ب- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم فسرهما هندسيا .

2. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)e^{-2x+1}$

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. أحسب $f(-1.1)$ ، $f(-1)$ و $f(0)$ ، ثم أنشئ (C_f) . (نأخذ $f(\alpha) = 5$) .

4. لتكن الدالة العددية F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $F(x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^{-2x+1}$

أ- عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c و d حتى تكون F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

ب- λ عدد حقيقي موجب تماما ، أحسب بالسنتيمتر المربع $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى

(C_f) و المستقيمت التي معادلاتها $y = 0$ ، $x = 0$ و $x = \lambda$ ، ثم تحقق أن : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \frac{11}{4}e \text{ cm}^2$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني:التمرين الأول: (05 نقاط)

(I) المتتالية العددية (u_n) معرفة بحددها الأول : $u_0 = 4e^3$ ، و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2\sqrt{u_n}$

1/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 4$.

2/ بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنها مقاربة .

(II) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = \ln(u_n) - 2\ln 2$

1) أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، ثم أحسب حدها الأول .

ب- أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n ، ثم استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n و أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

2) أوجد قيمة العدد الطبيعي n حيث : $v_0 + v_1 + \dots + v_n = 6(1 - e^{-2025 \ln 2})$.

3) أحسب بدلالة n الجداء : $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

زهر نرد مغشوش و مكعب الشكل حيث كل وجه من الوجوه مسجل عليه أحد الأرقام : 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 و 6 .

نسمي p_i احتمال ظهور الرقم i مع $i \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ و الأعداد $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ و P_6 تشكل بهذا

الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{30}$.

1. نرمي هذا الزهر مرة واحدة :

أ- بين أن : $P_1 = \frac{1}{12}$ ثم استنتج : P_2, P_3, P_4, P_5 و P_6 .

ب- أحسب احتمال ظهور رقم زوجي .

2. نرمي هذا الزهر ثلاث مرات على التوالي و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بعدد مرات ظهور رقم زوجي .

أ- ماهي قيم X الممكنة ؟ (يمكن الاستعانة بشجرة الاحتمالات)

ب- عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ، و أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

3. نرمي الان هذا الزهر n مرة على التوالي وليكن P_n هو احتمال ظهور رقم زوجي مرة واحدة على الأقل .

أ- أحسب P_n بدلالة n .

ب- عين العدد الأدنى من الرميات حتى يكون $P_n \geq 0.99$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + 2z + 2 = 0$.

2. المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، نعتبر النقط A, B, C و D لواحقها :

$z_A = -1 + i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $z_D = -z_A$ على الترتيب .

أقلب الورقة

- (أ) أكتب z_A على الشكل الأسّي ثم استنتج الشكل الأسّي لكل من : z_B و $z_C \times z_A$.
- (ب) أكتب كل من : z_C و $z_C \times z_A$ على الشكل الجبري، ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ $\tan \frac{13\pi}{12}$.
- (ج) أكتب العدد المركب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري و الأسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB .
3. عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ تخيلي صرف .
4. عين (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|z + 1 - i| = |iz - 1 - i|$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{\ln x}{x} + e$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) أحسب $g(e^{-1})$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + ex - e$ ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة

f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة : $\|\vec{i}\| = 4cm$ ، $\|\vec{j}\| = 2cm$)

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ مع تفسير النتيجة بيانيا، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(أ) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = g(x)$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) أحسب $f(1)$ ، ثم بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يحقق $0.1 < \alpha < 0.2$.

(4) أ- أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

ب- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المماس (T) .

(5) أنشئ المماس (T) و المنحنى (C_f) .

(6) أ- بين أن الدالة : $x \rightarrow x \ln(x) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \rightarrow \ln(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $\int_{e^{-1}}^1 (\ln x)^2 dx = 2 - \frac{5}{e}$.

(7) أحسب بـ cm^2 العدد S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المماس (T) و المستقيمان اللذان

معادلاتهما : $x = 1$ و $x = e^{-1}$.

انتهى الموضوع الثاني

نتمنى لكم النجاح و التوفيق في امتحان شهادة البكالوريا

التمرين الأول: (05 نقاط)

(I) في الشكل المقابل، (C_f) التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ: $f(x) = \frac{2x}{2x+1}$ و (d) المستقيم

ذو المعادلة $y = x$

• بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

(II) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي: $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد

طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) أ) مثل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 على حامل محور الفواصل، دون حسابها مبرزا خطوط الرسم (التمثيل يكون على الوثيقة المرفقة رقم 1)
ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < \frac{1}{2}$

(3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، واستنتج أنها متقاربة.

(III) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = 3^n \times \frac{u_n}{2u_n - 1}$

(1) بين أن: $v_{n+1} - 6v_n = 0$ ، ثم استنتج أن المتتالية (v_n) هندسية، مع تعيين أساسها وحدها الأول.

(2) أ) اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .

ب) بين أن: $u_n = \frac{v_n}{2v_n - 3^n}$ ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$.

ج) أحسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{(2u_0 - 1)v_0}{u_0} + \frac{(2u_1 - 1)v_1}{u_1} + \dots + \frac{(2u_n - 1)v_n}{u_n}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $(z - 4)(z^2 + 4z + 16) = 0$.

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C التي لواحقها على

الترتيب: $z_A = 4$ ، $z_B = -2 + 2i\sqrt{3}$ و $z_C = \overline{z_B}$.

• أكتب الأعداد المركبة z_A, z_B, z_C على الشكل الأسّي ثم بين أن النقط A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تعيين عناصرها المميزة.

(3) نعتبر العدد المركب L حيث $L = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.

أ) أكتب العدد L على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب L^n حقيقي.

ج) ما طبيعة التحويل r الذي مركزه A ويحول B إلى C ؟ أوجد عبارته المركبة.

د) عين لاحقة النقطة E صورة C بالتحويل r .

هـ) ما طبيعة الرباعي $ABCE$ ؟ علل اجابتك.

(4) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث: $|iz + 2i - 2\sqrt{3}| = |z - 4|$

أ) بين أن كلا من النقطتين E و B تنتميان إلى (γ)

ب) عين طبيعة المجموعة (γ) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي كيس على خمس كريات بيضاء مرقمة بـ: 1, 0, 1, 1, 1 - وخمس كريات سوداء مرقمة بـ: 1, 1, 0, 0, 1 - كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس. نسحب عشوائيا من هذا الكيس ثلاث كريات في آن واحد

(I) نعتبر الحوادث C, B, A

A "الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون" ، B "مجموع أرقام الكريات المسحوبة يساوي 0"

C "الحصول على كرتين مختلفتين في اللون"

(1) احسب $P(A), P(B), P(C)$.

(2) بين أن: $P(A \cap B) = \frac{7}{120}$. هل الحدثان A و B مستقلان؟ مع التبرير.

(3) علما أن مجموع أرقام الكريات المسحوبة يساوي 0 ، ما احتمال أن تكون الكريات الثلاث من نفس اللون؟

(II) نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع أرقام الكريات الثلاث المسحوبة.

(1) ما هي القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ؟

(2) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$.

(3) أحسب احتمال الحدث " $e^{X+6} < 2024$ "

التمرين الرابع: (07 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(I) (δ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$ و (Γ) التمثيل البياني للدالة $y = -x^2 + 2$

α هي فاصلة نقطة تقاطع (Γ) و (δ)

(1) بقراءة بيانية حدد وضعية (δ) بالنسبة لـ (Γ) على $]0; +\infty[$.

(2) g الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$

(أ) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

(ب) تحقق أن $1,3 < \alpha < 1,4$

(II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 1 + \frac{1 - \ln x}{x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 2cm)

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا ، ثم بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(2) أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن: $f(\alpha) = 2\alpha - 1 - \frac{1}{\alpha}$ ثم جد حصر α : $f(\alpha)$.

(4) أ/ بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل (Δ) لـ (C_f) عند $+\infty$

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

(5) بين أنه يوجد مماس (T) للمنحنى (C_f) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

(6) أرسم كلا من (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f) (نأخذ $f(1) = 1$ و $f(\alpha) \approx 0.9$)

(7) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $x \times e^{mx} - e = 0$

(III) F الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $F(x) = \ln x - \frac{1}{2}(\ln x)^2$

(1) تحقق أن F دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1 - \ln x}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$

(2) استنتج بالسنتر المربع المساحة A للحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و المستقيمت التي معادلاتها $y = x + 1$ ،

$x = e$ و $x = 1$

بالتوفيق

انتهى الموضوع الأول

$$(I) \quad (u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة بـ } u_0 = \frac{1}{2} \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n: u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}$$

$$(1) \text{ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي } n: u_{n+1} = 3 - \frac{4}{u_n + 2}$$

$$(2) \text{ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n: -1 \leq u_n \leq 2$$

$$(3) \text{ بين أن المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة}$$

$$(II) \text{ نضع من أجل كل عدد طبيعي } n: v_n = \frac{u_n + \alpha}{u_n + 1} \text{ حيث } \alpha \in \mathbb{R}^*$$

$$(1) \text{ عين قيمة } \alpha \text{ حتى تكون } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = \frac{1}{4} \text{ يطلب تعيين حدها الأول}$$

$$(2) \text{ نفرض أن } \alpha = -2$$

$$(أ) \text{ أكتب } v_n \text{ بدلالة } n$$

$$(ب) \text{ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي } n: u_n = \frac{2 \times 4^n - 1}{4^n + 1}, \text{ ثم أحسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$(ج) \text{ أحسب بدلالة } n \text{ كلاً من } S_n, S'_n \text{ و } P_n \text{ حيث: } S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n, S'_n = \frac{3}{u_0 + 1} + \dots + \frac{3}{u_n + 1}, \text{ و } P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$$

$$(III) \text{ نعتبر المتتالية العددية } (w_n) \text{ المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ: } w_n = \ln(|v_n|)$$

$$(1) \text{ بين أن المتتالية } (w_n) \text{ حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول}$$

$$(2) \text{ اكتب } w_n \text{ بدلالة } n$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير

$$(1) \text{ الشكل الجبري للعدد المركب } \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \right)^{2024} \text{ هو: (أ) } -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \text{ (ب) } \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ (ج) } -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$(2) \text{ الشكل الأسّي للعدد المركب } -\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{10}\right) \text{ هو: (أ) } e^{i\frac{\pi}{10}} \text{ (ب) } e^{i\frac{2\pi}{3}} \text{ (ج) } e^{i\frac{3\pi}{5}}$$

$$(3) \text{ } A \text{ و } B \text{ نقطتان لاحقتيهما على الترتيب } z_A = 2 \text{ و } z_B = -2, \text{ مجموعة النقط } M \text{ ذات اللاحقة } Z \text{ بحيث } \left| \frac{2-Z}{-3iZ-6i} \right| = \frac{1}{3}$$

$$\text{هي: (أ) دائرة قطرها } [AB] \text{ (ب) نصف مستقيم } [AB] \text{ (ج) محور القطعة المستقيمة } [AB]$$

$$(4) \text{ } A \text{ و } B \text{ نقطتان لاحقتيهما على الترتيب: } z_A = 1+i, z_B = -2+i(\sqrt{3}+1), \text{ لاحقة النقطة } C \text{ من المستوي}$$

$$\text{بحيث يكون المثلث } ABC \text{ متقايس الأضلاع والزوايا الموجهة } (\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z} \text{ هي:}$$

$$(أ) z_C = -2+i(1-\sqrt{3}) \text{ (ب) } z_C = 1+i(1+2\sqrt{3}) \text{ (ج) } z_C = -1+i$$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

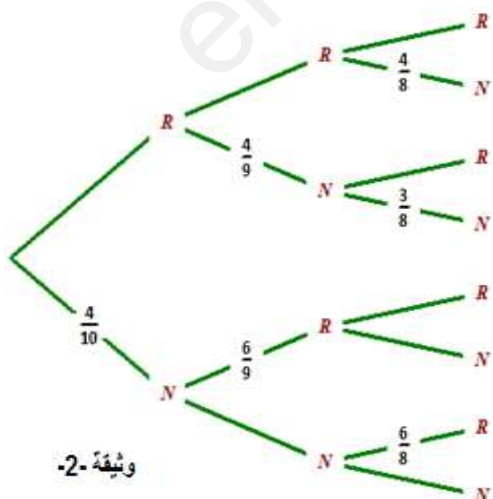
❖ يحتوي صندوق U على ستة كريات حمراء وأربع كريات سوداء ويحتوي صندوق V على ثلاث كريات حمراء وكريه سوداء وكريه بيضاء، نرمز للكرات بـ: R للحمراء، N للسوداء و B للبيضاء

(I) نسحب عشوائياً على التوالي ودون إرجاع 3 كريات من الصندوق U

(1) أكمل شجرة الاحتمالات على الوثيقة المرفقة (وثيقة رقم -2-)

(2) نعتبر الحوادث التالية: A "الحصول على 3 كرات حمراء"

و B "الحصول على كرية حمراء على الأقل"



• احسب $P(A)$ ثم بين أن $P(B) = \frac{29}{30}$

(II) نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد من الصندوق U وكرية واحدة من الصندوق V

(1) علما أن الكرية المسحوبة من V سوداء ما هو احتمال سحب كرية حمراء على الأقل

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة
أ) برر أن قيم المتغير العشوائي X هي $\{0,1\}$:

ب) عين قانون إحتمال المتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$ و استنتج $E(2024+1445X)$

ج) أحسب $P((\ln X)^2 - \ln X \leq 0)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (وحدة الطول 1cm)

(I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^x + 2 - x$

أ) أدرس تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$

(II) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم السابق

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(2) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^{-x} g(x)$

(3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

(4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

(5) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

(6) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

(7) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها

(8) اكتب معادلة المماس (Γ) للمنحنى (C_f) الذي يوازي المستقيم (Δ)

(9) أحسب $f(0)$ ثم ارسم (Δ) ، (Γ) و (C_f)

(10) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $\frac{x-1}{e^x} = m$

(III) لتكن A_λ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x = \lambda$ و $x = 1$

حيث λ عدد حقيقي اكبر تماما من 1

(1) باستعمال التكامل بالتجزئة احسب $\int_1^\lambda (x-1)e^{-x} dx$

(2) احسب بالسنتمتر المربع وبدلالة λ المساحة A_λ واستنتج $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A_\lambda$

(IV) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = f(x^2 e^x)$

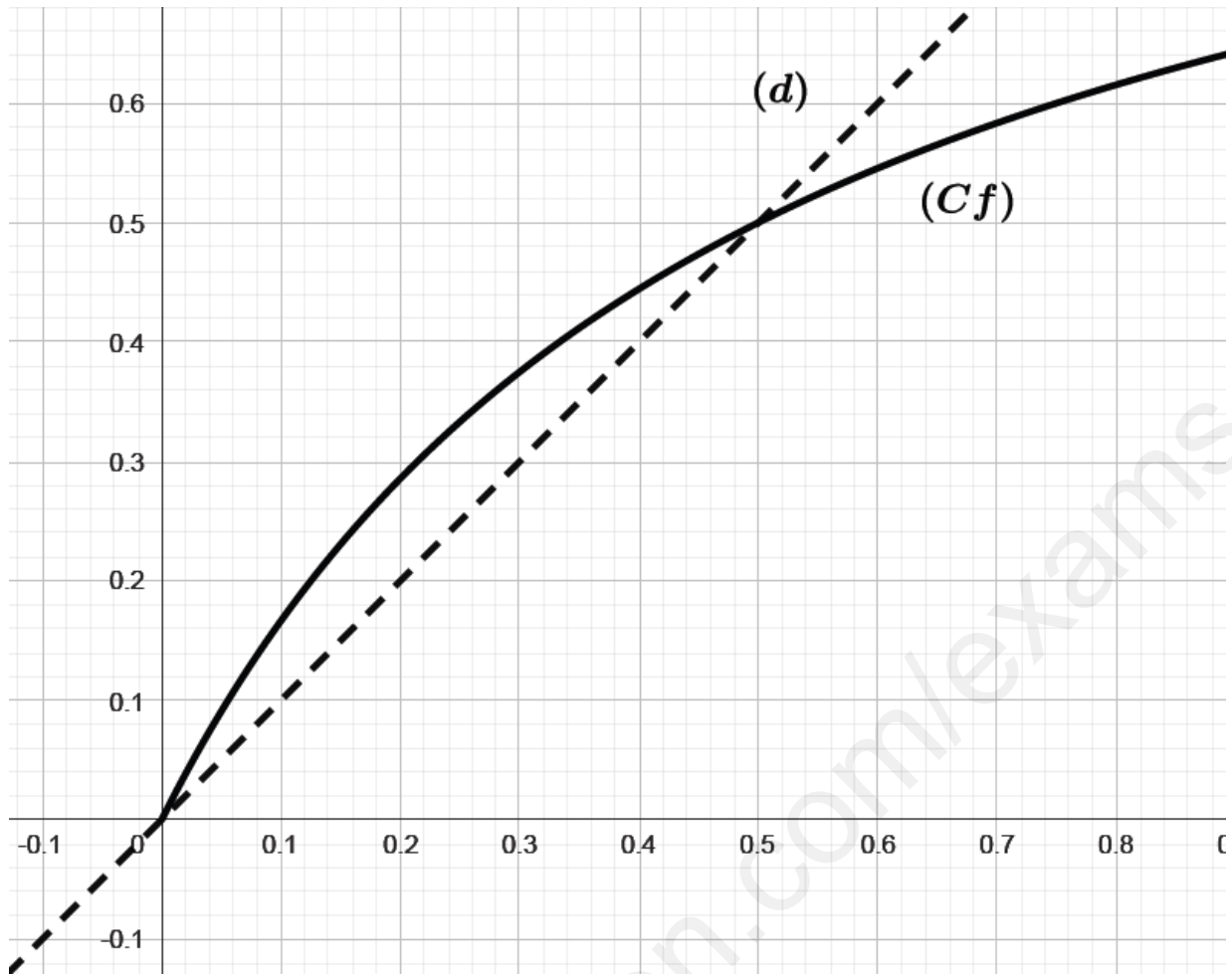
(1) ادرس اتجاه تغير الدالة h وشكل جدول تغيراتها

بالتوفيق

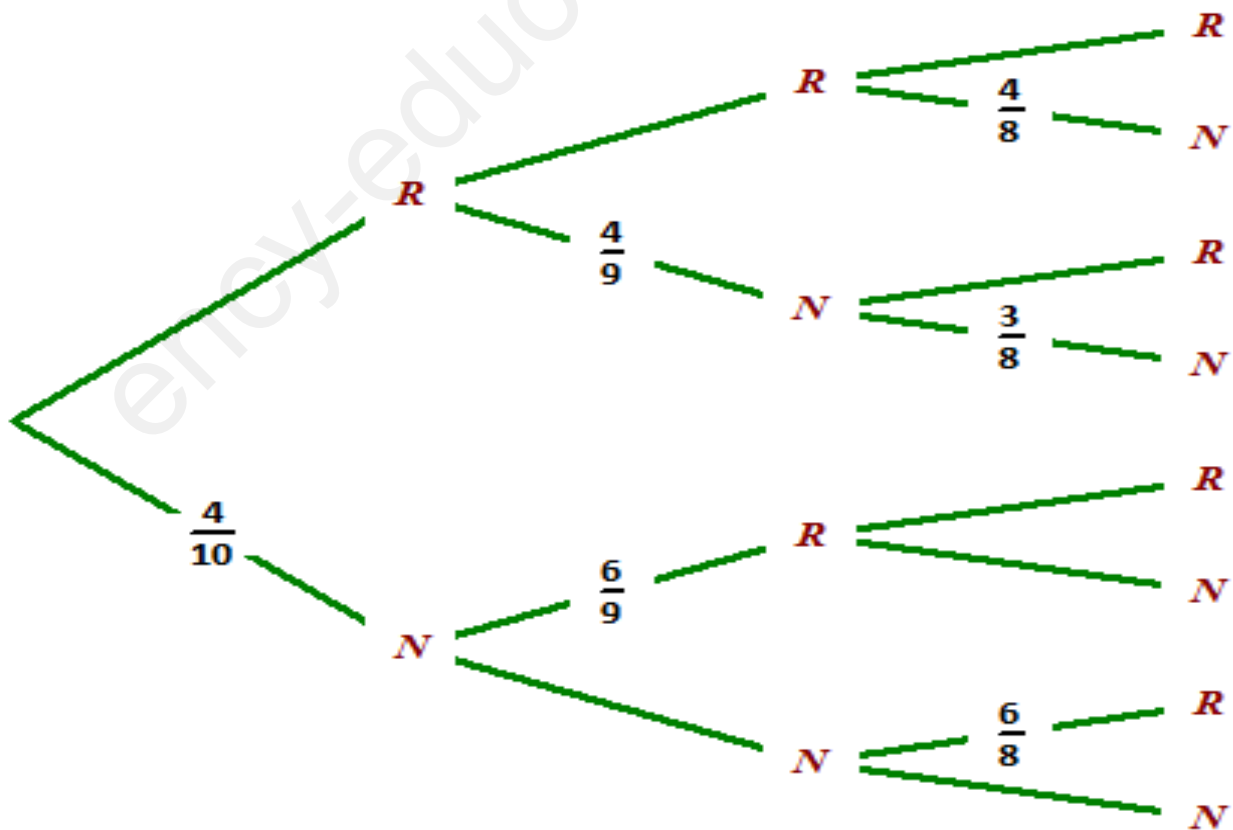
انتهى الموضوع الثاني

✪ مع تمنياتنا لكم بالتوفيق والنجاح في البكالوريا ✪

نجاحكم فخر لنا فاسعوا لتحقيق أفضل النتائج ☺



وثيقة رقم -1-



وثيقة رقم -2-

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين :

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

يحتوي صندوق على خمس كريات بيضاء تحمل الأرقام 3 ; 2 ; 1 ; 0- و ثلاث كريات حمراء تحمل الأرقام 3 ; 4- و 0 . وكريتين خضراء تحملان الرقمين 4 ; 0 . الكريات كلها متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس . نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الصندوق .

(1) أحسب احتمال كل حدث من الأحداث التالية :

A : " الحصول على ثلاث كريات مختلفة اللون " B : " الحصول على ثلاث كريات مجموع أرقامها معدوم " (2) أ. أحسب احتمال الحادثة : $\bar{A} \cap B$.
ب. استنتج أن احتمال الحادثة ، $\bar{A} \cup B$ هو $\frac{19}{120}$.

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب لثلاث كريات عدد الكريات المتبقية التي تحمل الرقم 0 .
أ. عيّن القيم الممكنة لـ X ثم عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X .
ب. أحسب احتمال الحادثة : " $2 - \ln X \geq 0$ "

التمرين الثاني : (04.5 ن)

(1) $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z المعروف كمايلي :

$$P(z) = z^3 + (2 - \sqrt{3})z^2 + (3 - 2\sqrt{3})z + 6$$

أ. أحسب $P(-2)$ ثم عيّن العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون : $P(z) = (z + 2)(z^2 + az + b)$
ب. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $P(z) = 0$.

(2) نعتبر في المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(0; \vec{u}; \vec{v})$.النقط A ، B و C لواحقتها:
 $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = \bar{z}_A$ و $z_C = -2$ على الترتيب .

أ. أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي ثم استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي الى نفس الدائرة .
ب. عين z_E و z_F لواحق النقطتين E و F حتى يكون المثلثين ABF و ACE قائمين في A و C على الترتيب .
ج. عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي .

(3) أ. أكتب العدد L على الشكل الأسّي حيث : $L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$.

ب. حدد مع التعليل طبيعة المثلث ABC .

ج. عيّن z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

(4) عيّن ثم أنشئ (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z = ke^{-i\frac{2\pi}{3}}$ عندما k يسمح $\mathbb{R}_+^*$.

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2^{1-n}(u_n)^2$

- (1) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq 2^{n-1}$.
- (2) بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة نحو عدد حقيقي يطلب تعيينه .
- (3) نعتبر المجموع S_n حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
- بيّن أنّ : $0 \leq S_n \leq 2^n - \frac{1}{2}$.

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = n - \frac{\ln(u_n)}{\ln 2}$.

- (1) برهن أنّ المتتالية (v_n) هندسية ، ثمّ أكتب v_n بدلالة n .
- (2) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^{n-2^n}$ ، ثمّ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (3) أكتب T_n بدلالة n حيث : $T_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[1; +\infty[$ بـ : $g(x) = (1-x)e^x + 1$.

- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ثمّ أدرس اتجاه تغيّرات الدالة g على المجال $[1; +\infty[$ و شكل جدول تغيّراتها .
- (2) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1,27 < \alpha < 1,28$.
- (3) استنتج إشارة $g(x)$ على $[1; +\infty[$.

II. لتكن الدالة f المعرفة على $[1; +\infty[$ بـ : $f(x) = e^x - \ln(x-1)$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب الى معلم متعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = 1cm$ و $\|\vec{j}\| = 0,5cm$

- (1) بين أنّ : $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha-1}$ ثمّ أعط حصرا لـ $f(\alpha)$.
- (2) أ. بيّن من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; +\infty[$ أنّ : $f(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - \frac{x-1}{x} \times \frac{\ln(x-1)}{x-1} \right)$.
ب. استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.
- (3) أحسب : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ثمّ فسر النتيجة بيانيا .
- (4) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x-1}$ ،
- (5) هل المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف ؟ علل .
- (6) شكل جدول تغيّرات الدالة f ثمّ أنشئ المنحنى (C_f) على المجال من $[1; e]$.
- (7) أ. تحقق أنّ الدالة $x \mapsto (x-1)\ln(x-1) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x-1)$ على المجال $[1; +\infty[$.

ب. أحسب بالسنتمتر المربع المساحة $\mathcal{A}$ للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين

الذين معادلتهم : $x = 1,5$ و $x = 2$.

انتهى الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

- نعتبر في المستوي المركب منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(0; \vec{u}; \vec{v})$. النقط A ، B و C لواحقها:
- (1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 2z + 4 = 0$.
- (2) أحسب كلا من $|z_A|$ ، $|z_B|$ و $|z_C|$ ثم استنتج أن النقط A ، B و C تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .
- (3) أ. أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي .
ب. أكتب $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث ABO .
- (4) عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$ حقيقي موجب تماماً ثم اكتب $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^{2024}$ على الشكل الجبري .
- (5) عيّن مجموعة النقط من المستوي ذات اللاهقة z حيث : $\left|\frac{iz - \sqrt{3} - i}{\bar{z}}\right| = 1$

التمرين الثاني : (04.5 نقاط)

- I. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$.
- أدرس اتجاه تغير الدالة f .
- II. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$
- (1) أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq 3$.
ب. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
ج. هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ برر اجابتك .
- (2) أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(3 - u_n)$.
ب. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 3 - u_n \leq 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$.
ج. أحسب نهاية المتتالية (u_n) .
- (3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$
- أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3(n+1) \leq S_n \leq 8\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - 1\right) + 3(n+1)$.
ب. أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

التمرين الثالث : (04.5 نقاط)

- يحتوي كيس U_1 على خمس كريات حمراء وأربع كريات بيضاء ، ويحتوي كيس U_2 على أربع كريات حمراء و ثلاث كريات بيضاء ، (الكرات كلها متماثلة و لانفرق بينها باللمس) .
نرمي زهر نرد غير مزيف ، اذا حصلنا على رقم مضاعف لـ 3 نسحب كرتين في آن واحد من الكيس U_1 ، وفي باقي الحالات نسحب كرتين على التوالي معارجاع الكرة المسحوبة من U_2 .

نسمي الحدث A : " الحصول على رقم مضاعف لـ 3 "

B : " الحصول على كرتين من نفس اللون "

(1) أنقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها .

(2) أحسب $P(B)$.

(3) علما أن الكرتين المسحوبتين من نفس اللون ماهو احتمال ان تكونا من الكيس U_2 .

(4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة العدد 2 في حال كانت الكرتان من نفس اللون و العدد 1- في حال كانت الكرتان مختلفتين في اللون .

أ. عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

ب. بيّن أن $E(X) = \frac{205}{441}$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (2 - x)e^x + 2$ و (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب

الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (كما في الشكل)

(1) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث :

$$2,21 < \alpha < 2,22$$

(2) بقراءة بيانية عيّّن إشارة $g(x)$ ثم استنتج إشارة $g(-x)$ على $\mathbb{R}$

II. الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{x^2}{1+e^{-x}}$

، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسر بيانيا نتيجة النهاية الأخيرة .

(2) أ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{x.g(-x)}{(1+e^{-x})^2}$.

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

ج. بيّن أن $f(-\alpha) = \alpha(\alpha - 2)$ ثم أعط حصرا للعدد $f(-\alpha)$

(3) أ. بيّن أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا β حيث : $1,1 < \beta < 1,2$.

ب. حل في المعادلة $E(f(x)) = 0$ حيث E هي دالة الجزء الصحيح .

(4) ليكن (Γ) المنحنى الممثل للدالة $x^2 \mapsto x$ على $\mathbb{R}$.

أ. بيّن أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2] = 0$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

ب. أدرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (Γ) .

(5) أنشئ (Γ) و (C_f) . (تعطى : $f(-\alpha) \approx 0.48$)

(6) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماما m عدد حلول المعادلة : $f(x) = x^2 + \ln(m)$.

(7) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $0 \leq f(x) \leq x^2$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $\mathcal{A}$ الذي يمثل مساحة الحيز

المستوي المحدد بـ (C_f) ، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = 0$ و $x = 1$.

انتهى الموضوع الثاني .

على المترشح اختيار أحد الموضوعين

الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط):

يحتوي صندوق U_1 على خمس كرات ثلاث منها تحمل الرقم 2 و كرتان تحملان الرقم 3 ويحتوي صندوق U_2 على خمس كرات منها ثلاثة بيضاء واثنان حمراوين. (الكرات لا تفرق بينها عند اللمس).

- نسحب عشوائيا كرة من الصندوق U_1 ونسجل رقمها ثم نسحب عشوائيا وفي أن واحد n كرة من الصندوق U_2 حيث n يمثل الرقم المسجل على الكرة المسحوبة من الصندوق U_1 .

(1) أ- أنجز شجرة الاحتمالات الموافقة لهذه التجربة العشوائية.

ب- بين أن احتمال الحصول على ثلاث كرات بيضاء هو $\frac{1}{25}$.

ج- ما هو احتمال الحصول على كرتان حمراوان علما أن الكرة المسحوبة من U_1 تحمل رقم 3.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد كرات الحمراء المسحوبة.

أ- بين أن: $P(X = 0) = \frac{11}{50}$.

ب- عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب الأمل الرياضي.

التمرين الثاني (4 نقاط):

(1) (u_n) متتالية حسابية متناقصة المعرفة على $\mathbb{N}$ بعدها الأول u_0 وأساسها r .

أ- عين r و u_0 علما أن:
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 24 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 210 \end{cases}$$

ب- اكتب u_n بدلالة العدد الطبيعي n . ثم احسب بدلالة المجموع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

(2) نعتبر المتتالية المتتالية الهندسية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = e^{1-3^n}$ حيث e أسس اللوغاريتم النيبيري.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية بطلب تعيين أساسها و بعدها الأول.

ب- احسب $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ ماذا تستنتج ؟

ج- احسب بدلالة n المجموع: $T_n = v_{n-1} + v_n + \dots + v_{2n-1}$ و الجداء: $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$.

د- احسب $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$.

التمرين الثالث (5 نقاط):

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 128$. $P(z)$ لا يحفظها

أ- بين أن العدد 8 هو جذر لـ $P(z)$.

ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلات المجهول المركب z التالية: $P(z) = 0$.

$$Z_A = 2 - 2i\sqrt{3}$$

$$Z_B = \overline{Z_A} ; Z_C = 8$$

ج- احسب العدد Z حيث: $Z = \frac{Z_A - Z_C}{Z_B - Z_C}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

د- عين إحداثيي النقطة G مرجع الجملة $\{(A; |Z_A|), (B; |Z_B|), (C; |Z_C|)\}$ ثم علمها في نفس المعلم السابق.

هـ- عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق: $\|\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC}\| = \|\overline{MA} + \overline{MB} - 2\overline{MC}\|$

التمرين الرابع (07 نقاط):

1. g الدالة المعرفة على $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$.

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) احسب $g(0)$ واستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. f دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{(x+1)}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$

(1) أ- بين أن: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x)$ وفسر هندسيا النتيجة.

بد- بين أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادلة له.

د- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذي المعادلة: $y = x - 1$.

(2) أ- بين أنه من أجل كل x من $]-1; +\infty[$ فإن: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$. (f' هي مشتقة الدالة f).

بد- استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ج- بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محاور الفواصل في نقطتين فاصلتهما x_1 و x_2 حيث: $-0.52 < x_1 < -0.51$ و

$$1.36 < x_2 < 1.37$$

(3) أ- ارسم المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

بد- عين الدوال الأصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$.

ج- احسب بالسنتيمتر المربع المساحة S للحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C_f) والمستقيمتين التي معادلاتها: $y = -\frac{1}{2}x$ و

$$x = 1$$

لنتهى الموضوع الاول.

- يحتوي صندوق 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها خمس كريات حمراء مرقمة: 1, 1, 0, 2, 2 وخمس كريات خضراء مرقمة: 2, 2, 1, 0, 0. نسحب عشوائياً وفي آن واحد أربع كريات من هذا الصندوق
- (1) أحسب احتمال كل من الأحداث التالية:
- A "الحصول على 4 كريات من نفس اللون"
- B "الحصول على 4 كريات مجموع أرقامها يساوي مجموع أرقام العدد 2024"
- C "الحصول على ثلاث كريات حمراء"
- (2) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب 4 كريات الرقم الأكبر بين الأرقام الأربعة
- أ. عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله
- ب. أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X
- ج. أحسب احتمال الحدث: " $X = -1$ " حيث n عند طبيعي.

التمرين الثاني (04 نقاط):

- (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = \int_n^{n+1} e^{2-x} dx$
- (1) أحسب u_0 ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$
- (2) أكتب u_n بدلالة العدد الطبيعي n ثم أثبت أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.
- (3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)
- (4) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم أحسب نهايتها.
- (5) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

التمرين الثالث (05 نقاط):

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية: $z^2 - 6z + 10 = 0$
- استنتج حلول المعادلة ذات المجهول المركب z التالية: $(\bar{z} + 2)^2 - 6(\bar{z} + 2) + 10 = 0$
2. في المستوى المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B, C, D التي لواحقتها على الترتيب:
- $$z_D = 1 - i; z_C = 1 + i; z_B = 3 + i; z_A = 3 - i$$
- أ. أكتب كلا من z_C و z_D على الشكل الأسّي. ثم عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون: $\left(\frac{z_C}{z_D}\right)^n = i$
- ب. عين العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$
- ج. لتكن النقطة E التي لاحتقتها $z_E = 7 - 3i$ و F صورتها بالدوران R
- تحقق أن لاحقة F هي: $z_F = 5 + 3i$
- استنتج طبيعة المثلث AFE مع التبرير.
- د. عين المجموعة (Γ) للنقط M ذات الاحقة z حيث: $z = 1 - i + ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ مع $K \in \mathbb{R}_+$
- هـ. عين المجموعة (E) للنقط M ذات الاحقة z حيث: $|z - 1 - i| = |z - 1 + i|$

- I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 1 + xe^x$.
 (1) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
 (2) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

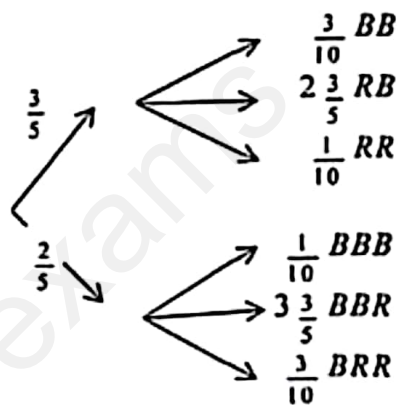
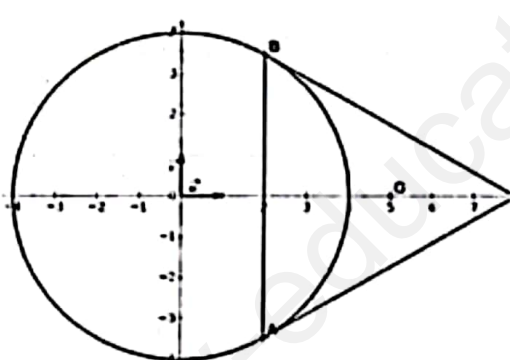
- II. لتكن الدالة f المحددة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x) = \frac{x+e^x}{e^x-1}$.
 (تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \bar{i}; \bar{j})$ (وحدة الطول هي 1cm)

- (1) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف ثم استنتج معدلات المستقيمات المقاربة لـ (C_f) .
 (2) بين انه من اجل كل $x \in \mathbb{R}^*$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x-1)^2}$.
 (3) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
 (4) بين ان (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين وحيدة فاصلتها α حيث: $-0.6 < \alpha < -0.5$.
 (5) بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.
 (6) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) .
 (7) ارسم (Δ) و (C_f) .
 (8) عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة ذات المجهول الحقيقي x : $f(x) = m$ حلان مختلفان في الاشارة.
 (9) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = \frac{|x|+e^{|x|}}{e^{|x|}-1}$.
 ا. بين ان الدالة h زوجية.
 ب. اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه في نفس المعلم السابق.

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح النموذجي للاختبار الثالث في مادة الرياضيات

الموضوع الأول

0.25	نستنتج أن (V_n) متتالية متقاربة.	1	التمرين الأول: (1) شجرة الاحتمال								
0.5	$T_n = V_{n-1} \frac{e^{-3(n+3)} - 1}{e^{-3} - 1} = e^{17} e^{-3n} \frac{e^{-3(n+3)} - 1}{e^{-3} - 1}$										
0.5	$P_n = e^{5n} = e^{\frac{1}{2}(n+1)(28-3n)}$		ب- $P(BBB) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$								
0.25	$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 0$		ج- $P = \frac{3}{5}$								
0.25	التمرين الثالث: (1) أ- $P(8) = 0$ إذن 8 جذرا لـ $P(z)$ بالقسمة الاقليدية نجد: $P(z) = (z-8)(z^2 - 4z + 16)$ $z^2 - 4z + 16 = 0$ أو $z - 8 = 0$ أي $z = 8$ أي $\Delta = -48 = (i4\sqrt{3})^2 = (-i4\sqrt{3})^2$ أو $z = 8$ أي $z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$ أو $z_2 = 2 - 2i\sqrt{3}$ إذن مجموعة حلول المعادلة هي: $S = \{8, 2 - 2i\sqrt{3}, 2 + 2i\sqrt{3}\}$	1	ب- $P(X=0) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{10} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{11}{50}$ (2)								
0.5	(2) أ- $Z_1 = 4(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3}))$	0.50	ب- <table border="1" data-bbox="877 1164 1516 1321"><tr><td>X_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>P_i</td><td>$\frac{11}{50}$</td><td>$\frac{15}{25}$</td><td>$\frac{9}{50}$</td></tr></table>	X_i	0	1	2	P_i	$\frac{11}{50}$	$\frac{15}{25}$	$\frac{9}{50}$
X_i	0	1	2								
P_i	$\frac{11}{50}$	$\frac{15}{25}$	$\frac{9}{50}$								
0.25		0.5	$E(X) = \sum_{i=0}^2 X_i P_i = \frac{24}{25}$								
0.5	ب- $(Z_n)^n = 4e^{\frac{n\pi}{3}}$ يكون عدد حقيقي موجب إذا كان:	0.5	التمرين الثاني: (1) من العلاقة الأولى نجد $U_2 = 8$ أي $U_0 = 8 - 2r$ نعوضها في العلاقة الثانية نجد $r^2 = 9$ إما $r = -3$ مقبولة أو $r = 3$ مرفوضة نعوض نجد $U_0 = 14$ ب- $U_n = 14 - 3n$								
0.25	أي $\frac{n\pi}{3} = 2k\pi$ أي $n = 6k$ حيث k عدد طبيعي.	0.25	$S_n = \frac{n+1}{2}(14 + 14 - 3n) = \frac{1}{2}(n+1)(28 - 3n)$								
0.25	ج- $Z = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$	0.5	(2) $V_{n+1} = e^{14-3(n+1)} = e^{-3} V_n$ أ-								
0.25	إذن (V_n) متتالية هندسية أسسها $q = e^{-3}$ وحدها الأول $V_0 = e^{14}$	0.25	ب- $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{14-3n}) = 0$								

ومنه الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]-1; 0[$ ومتزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$.

جدول تغيرات:

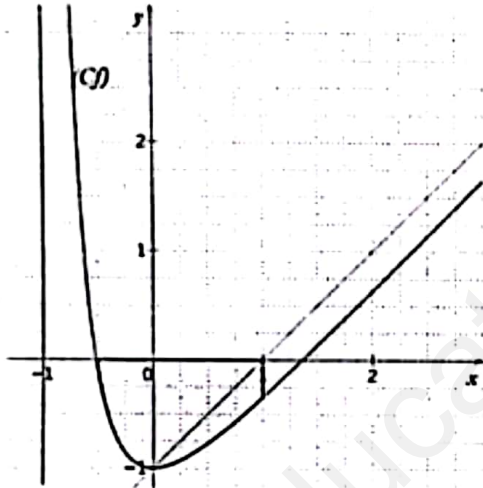
x	$-\infty -1 0 +\infty$
$f(x)$	$\nearrow$ -1 $\searrow$

ج- الدالة f مستمرة ومتناقصة تماماً على المجال $]-0.52; -0.51[$

و $f(-0.51) = -0.054$ و $f(-0.52) = 9.1 \times 10^{-3}$
إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً x_1 في المجال $]-0.52; -0.51[$.

- الدالة f مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $]1.36; 1.37[$
و $f(1.37) = 5.9 \times 10^{-3}$ و $f(1.36) = -3.8 \times 10^{-3}$
إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً x_2 في المجال $]1.36; 1.37[$.

أي المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما x_1 و x_2 .
(3) ا- الرسم:



ب- الدوال الأصلية للدالة f هي:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}[\ln(x+1)]^2 + C$$

حيث $C \in \mathbb{R}$

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} -f(x) dx = -[F(x)]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

$$S = \frac{9}{8} \times 4 = \frac{9}{2} \text{ cm}$$

$$Z_{II}(5; 0) = \frac{4Z_I + 4Z_{II} + 8Z_{III}}{16} = 5$$

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MC} - 2\vec{MC}\|$$

$$\text{أي } \|\vec{CA} + \vec{CB}\| = 4\|\vec{MG}\| \text{ أي } MG = 3$$

إذن مجموعة النقط Γ هي دائرة مركزها النقطة G ونصف قطرها 3.

التمرين الثالث:

أ. (1) الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-1; +\infty[$ ولدينا:

$$g'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)^2 + 1}{x+1}$$

$$g'(x) > 0 \text{ من أجل كل } x \text{ من }]-1; +\infty[$$

إذن: الدالة g متزايدة تماماً على $]-1; +\infty[$.

جدول تغيرات:

x	$-1 +\infty$
$g(x)$	$\nearrow$ $-\infty$

$$g(0) = 0$$

إشارة $g(x)$:

x	$-1 0 +\infty$
$g(x)$	$- 0 +$

إ. (1) لدينا: بوضع $X = x + 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ إذن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$$

المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $x = -1$.
ب- لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln(x-1)}{x-1}\right) = 0$$

ومنه المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مثل معادلته $y = x - 1$ بجوار $+\infty$.

د- دراسة الوضع النسبي:

$$f(x) - (x-1) = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

x	$0 -1 +\infty$
$x+1$	$+ +$
$\ln(x+1)$	$- 0 +$
$f(x) - y$	$+ 0 -$
الوضعية	(C_f) يقع أسفل (Δ) في $(0; -1)$ (C_f) يقع أعلى (Δ) يتقاطع (C_f) يقع

$$(2) \text{ أ- تبين أن: } f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ب- إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$ لأن المقام موجب

العلامة		عناصر الاجابة (الموضوع الثاني)
مجموعه	مجزاء	
		التمرين الأول: (4 نقاط)
		(1) حساب احتمالات الحوادث
01,5	0,5	A: الحصول على ا، كرات من اللون ا: $P(A) = \frac{c_1^1 + c_2^1}{c_{10}^1} = \frac{5+5}{210} = \frac{1}{21}$
	0,5	B: الحصول على ا، كرات مجموع ارقامها رمادي مجموع ارقام العدد 202: $P(B) = \frac{c_1^1}{c_{10}^1} = \frac{1}{210}$
	0,5	C: الحصول على ثلاث كرات حمراء: $P(C) = \frac{c_3^1 c_2^1 c_1^1}{c_{10}^3} = \frac{50}{210} = \frac{5}{21}$
0,25	0,25	(2) ارم المتغير العشوائي X هي: {1;2}
01	0,5	الكرات الأربع لا تحمل الرقم 2: $P(X=1) = \frac{c_4^1}{c_{10}^1} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14}$
	0,5	سحب على الأقل كرة تحمل الرقم 2: $P(X=2) = 1 - P(X=1) = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$
0,25	0,25	حساب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X: $E(X) = 1 \times \frac{1}{14} + 2 \times \frac{13}{14} = \frac{27}{14}$
01	0,5	حساب احتمال العائنة $ X-1 = 1$ ومنه: $ X-1 = 1$ أو $X-1 = -1$ أي: $X=2$ أو $X=0$
	0,5	$P(X-1 =1) = P(X=0) + P(X=2) = 0 + \frac{13}{14} = \frac{13}{14}$
		التمرين الثاني: (4 نقاط)
01	0,5	(1) حساب u_0 : لدينا $u_0 = \int_0^1 e^{2-x} dx = e^2 - e^1$ منه $u_0 = [-e^{2-x}]_0^1 = e^2 - e^1$
	0,5	من أجل كل عدد طبيعي n تكون: $0 < e^{2-n} < e^{2-n+1} < u_n < 0$
01	0,5	(2) إيجاد عبارة u_n $u_n = \int_n^{n+1} e^{2-x} dx = [-e^{2-x}]_n^{n+1} = e^{2-n} - e^{1-n} = e^{1-n}(e-1)$
	0,5	أثبت أن (u_n) متتالية هندسية بطلب ثمن أساسها لدينا $u_n = e^{1-n}(e-1)$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} = e^{-n}(e-1)$ أي $u_{n+1} = e^{-1} u_n$
0,5	0,5	(3) $u_{n+1} - u_n = \int_{n+1}^{n+2} e^{2-x} dx - \int_n^{n+1} e^{2-x} dx = e^{-n}(-1+2e^1-e^2) = -e^{-n}(1-e^1)^2$
		$u_{n+1} - u_n < 0$ من أجل كل عدد طبيعي n (u_n) متناقصة تماما
0,75	0,5 0,25	(4) بما أن (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل $u_n > 0$ فهي متقاربة $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

0.75	0.5	$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ $= [-e^{j\omega}]_0^1 + [-e^{j\omega}]_1^2 + [-e^{j\omega}]_2^3 + \dots + [-e^{j\omega}]_{n-1}^n$ $= e^j - e^{jn}$ $= e^j (1 - e^{jn})$ $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = e^j$
(تفصيل: 5 نقاط)		
0.75	0.25	1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 6z + 10 = 0$ $z_2 = 3 - i$ و $z_1 = 3 + i$ و $\Delta = -4 = 4i^2$ ومنه $\Delta = -4 = 4i^2$
	+0.25+0.25	
0.5	0.25	استنتج حلول المعادلة ذات المجهول z حيث: $(\bar{z} + 2)^2 - 6(\bar{z} + 2) + 10 = 0$ $z = 1$ ومنه $\bar{z} = 1 + i$ و $z + 2 = 3 + i$
	0.25	$z = 1 + i$ ومنه $\bar{z} = 1 - i$ و $z + 2 = 3 - i$
01	0.5	2. كتابة كلا من z_c و z_R على الشكل الأسّي:
	0.5	$z_c = 1 + i = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$ و $z_R = 1 - i = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}$
0.75	0.25	1. عن قيمة المند الطبيعي n بحيث يكون: $\left(\frac{z_c}{z_R}\right)^n = 1$
	0.25	$\left(\frac{z_c}{z_R}\right)^n = e^{j\frac{\pi}{2}}$ ومنه $\left(\frac{\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}}\right)^n = e^{j\frac{\pi}{2}}$
	0.25	ومنه $\frac{n\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ومنه $n = 1 + 4k$ حيث $k \in \mathbb{N}$
0.5	0.25	3. ثمن العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$
	0.25	$z' - z_A = e^{j\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$ ومنه $z' = i(z - z_A) + z_A$ ومنه $z' = i(z - 3 + i) + 3 - i$ ومنه
	0.25	$z' = iz - 4i + 2$ ومنه $z' = iz - 3i - 1 + 3 - i$
	0.25	4. التحقق أن لاحقة F هي: $z_F = 5 + 3i$
	0.25	$z' = i(7 - 3i) - 4i + 2 = 7i + 3 + 2 - 4i = 5 + 3i = z_F$
0.5	0.25	استنتج طبيعة المثلث AFE مع التبرير
	0.25	لدينا $\frac{z_F - z_A}{z_R - z_A} = e^{j\frac{\pi}{2}}$ بكافئ $z_F - z_A = e^{j\frac{\pi}{2}}(z_R - z_A)$
	0.25	لدينا $\left \frac{z_F - z_A}{z_R - z_A}\right = 1$ ومنه $EA = FA$ و $\arg\left(\frac{z_F - z_A}{z_R - z_A}\right) = i\frac{\pi}{2}$ أي $(\overline{AE}; \overline{AF}) = \frac{\pi}{2}$
	0.25	ومنه المثلث AFE قائم في A ومتساوي الساقين
01	0.5	5. ثمن المجموعة (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $z = 1 - i + ke^{-j\frac{\pi}{4}}$ مع
	0.5	$K \in \mathbb{R}_+^*$
	0.5	مجموعة النقط M هي نصف المستقيم $[DM)$ باستثناء المبدأ D وميله $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
	0.5	المجموعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $z - 1 - i = z - 1 + i$
	0.5	$z - 1 - i = z - 1 + i$ بكافئ $z - (1 + i) = z - (1 - i)$
	0.5	$CM = DM$
	0.5	مجموعة النقط M هي محور التسلع $[CD)$

		التحريين الرابع: (7) (نقاط)								
01	0.25 0.5 0.25	(1) الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي: $g'(x) = e^x(1+x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ تكون إشارة $g'(x)$ من إشارة $(1+x)$ وعليه <table border="1"> <tr> <td>$-\infty$</td> <td>-1</td> <td>$+\infty$</td> <td>x</td> </tr> <tr> <td>-</td> <td>○</td> <td>+</td> <td>$g'(x)$</td> </tr> </table> الدالة g متزايدة تماماً على المجال $[-1; +\infty[$ ومتناقصة تماماً على المجال $]-\infty; -1]$	$-\infty$	-1	$+\infty$	x	-	○	+	$g'(x)$
$-\infty$	-1	$+\infty$	x							
-	○	+	$g'(x)$							
0.5	0.25 0.25	(2) <table border="1"> <tr> <td>$-\infty$</td> <td>-1</td> <td>$+\infty$</td> <td>x</td> </tr> <tr> <td>$-\infty$</td> <td>$g(-1)$</td> <td>$+\infty$</td> <td>$g(x)$</td> </tr> </table> $g(-1) > 0$ ومنه $g(x) > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$	$-\infty$	-1	$+\infty$	x	$-\infty$	$g(-1)$	$+\infty$	$g(x)$
$-\infty$	-1	$+\infty$	x							
$-\infty$	$g(-1)$	$+\infty$	$g(x)$							
01.75	0.25+0.5 0.25+0.25 0.25+0.25	(3) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t \left(\frac{x}{e^t} + 1 \right)}{e^t \left(1 - \frac{1}{e^t} \right)} = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ $x=0$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_r) و $x=1$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_r) بجوار $+\infty$								
0.5	0.25 0.25	(4) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ ودالتها المشتقة هي: $f'(x) = \frac{(1+e^x)(e^x-1) - e^x(x+e^x)}{(e^x-1)^2}$ $= \frac{g(x)}{(e^x-1)^2}$								
0.5	0.25 0.25	إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$ وعليه $f'(x) < 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ الدالة f متناقصة تماماً على مجال تعريفها								
0.25	0.25	<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>0</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>$+\infty$</td> <td>$-\infty$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
x	$-\infty$	0	$+\infty$							
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$							
0.25	0.25	(5) نبيان أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ (C_r) بجوار $-\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+e^t}{e^t-1} + x \right)$ $= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{g(x)}{e^t-1} \right) : \text{من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R}^*$ $= 0$								

السنة الدراسية : 2023/2024
الدورة : 13 ماي 2024
الشعبة : علوم تجريبية
الأستاذ : الحسين رميلي



وزارة التربية الوطنية
مديرية التربية لولاية البرج
ثانوية 18 فيفري الحمادية

المدة : 3 ساعات ونصف

الإمتحان التجريبي في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار موضوعا واحدا

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد صحيح عينه مع التبرير في كل حالة :

(1) مجموعة حلول المتراجحة : $\ln(x^2 - 2x) \leq \ln(12 - x)$ في المجموعة الأعداد الحقيقية هي :

(أ) $S = [12; +\infty[$ (ب) $S = [-3; 0[\cup]2; 4]$ (ج) $S =]0; 2[$

(2) المتتالية I_n المعرفة على IN بـ : $I_n = \int_n^{n+1} 3e^{1-x} dx$ هي متتالية هندسية أساسها يساوي :

(أ) $\frac{1}{e}$ (ب) $3e^2$ (ج) $3\sqrt{e}$

(3) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $2 - y' + 2y = 0$ هو الدالة h التي تحقق : $h(0) = 2024$ والمعرفة بالعلاقة :

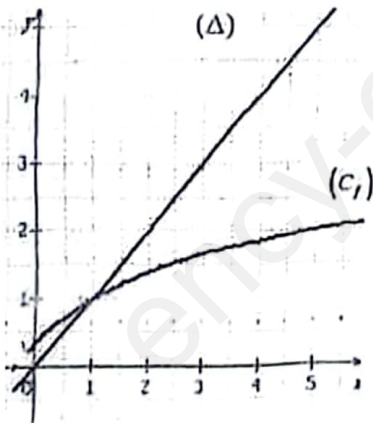
(أ) $h(x) = 2023e^{2x} + 1$ (ب) $h(x) = 2022e^{2x} + 2$ (ج) $h(x) = 2024e^{2x} - 1$

(4) حل المعادلة التفاضلية $y'' - e^{-x} - 2 = 0$ والتي تحقق $y(0) = 1$ و $y'(0) = 1$ هي الدوال :

(أ) $y = -e^{-x} + 2x$ (ب) $y = x^2 + e^{-x} + 2x - 1$ (ج) $y = x^2 + e^{-x} + 2x$

التمرين الثاني : (04.5 نقاط)

f دالة معرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني و (Δ) مستقيم معادلته $y = x$ أنظر الشكل



نعتبر متتالية عددية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 5$ ومن أجل كل $n \in IN$: $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) أعد الرسم ثم مثل الحدود u_0, u_1, u_2 على محور الفواصل مبرزاً خطوط الرسم .

(ب) أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول، ثم برر تقاربها ؟

(2) (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

(ب) تحقق أن : $1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$ ، ثم أكتب u_n بدلالة n ، و أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = \frac{4}{(u_0 + 1)^2} + \frac{4}{(u_1 + 1)^2} + \dots + \frac{4}{(u_n + 1)^2}$

(أ) أحسب المجموعين S_1 و S_2 حيث : $S_1 = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $S_2 = (v_0)^2 + (v_1)^2 + \dots + (v_n)^2$

(ب) استنتج حساب المجموع S_n

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

يحتوي صندوق u_1 على 4 كريات حمراء و 3 كريات خضراء وصندوق آخر u_2 يحتوي على 3 كريات حمراء و 2 كرية خضراء، لا يمكن التمييز بينها عند اللمس.

نقوم بسحب كرية واحدة من الصندوق u_1 ونضعها في الصندوق u_2 ثم نسحب كرتين في آن واحد من الصندوق u_2 .

نرمز للحدث A : سحب كرية حمراء من الصندوق u_1 ، و للحدث B : سحب كرتين حمراوين من الصندوق u_2 .

(1) احسب احتمال $p(A)$ و $p(A \cap B)$.

(2) نتحقق أن: $p(B) = \frac{11}{35}$ ، هل الحدثان A و B مستقلان؟ علل.

(3) علما أن الكرتين المسحوبتين من u_2 حمراوين، ما احتمال أن تكون الكرية المسحوبة من u_1 حمراء.

(4) نفرغ محتوى الصندوق u_1 والصندوق u_2 في صندوق آخر u_3 ثم نسحب عشوائيا 3 كريات في آن واحد من الصندوق u_3 بحيث يربح اللاعب $10DA$ عند كل سحبة لكزية خضراء، ويخسر $5DA$ لكل سحبة لكزية حمراء. ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي مجموع أرباح اللاعب.

(1) بين أن قيم المتغير العشوائي X هي: $\{-15; 0; 15; 30\}$.

(ب) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X . هل هذه اللعبة مربحة؟ علل.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

g الدالة العددية المعرفة على IR^* بـ: $g(x) = x^2 - \ln x^2$.

(1) بين أن الدالة g زوجية.

(2) أدرس تغيرات الدالة g على المجال $[0; +\infty[$ ، ثم استنتج اتجاه تغيرها على IR^* .

(ب) شكل جدول تغيرات الدالة g على IR^* .

(3) استنتج أنه من أجل كل x من IR^* فإن $g(x) \geq 1$.

لتكن الدالة f على المجال IR^* بـ: $f(x) = 1 + x + \frac{-1 + \ln x^2}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في M متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$.

(2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من IR^* فإن: $f'(x) = \frac{g(x) + 3}{x^2}$.

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 1 + x$ مقارب مائل لـ (C_f) ، ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) .

(4) احسب $f(x) + f(-x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

(5) بين أن (C_f) يقبل مماس (T) يمر بالنقطة $A(0;1)$ وبمسحة في نقطتين معادلتين: $y = ax + 1$ حيث a عدد حقيقي يطلب تعيينه.

(6) ارسم كل من (Δ) و (T) والمنحنى (C_f) .

(7) (أ) m وسيط حقيقي، بين أن المستقيمت (Δ_m) ذو المعادلة $y = mx + 1$ تمر من النقطة A .

(ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تكون للمعادلة $f(x) = mx + 1$ أربع حلول متميزة.

(8) (أ) بين أن: $x \mapsto (\ln x)^2$ دالة أصلية لدالة $x \mapsto \frac{\ln x^2}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$.

(ب) احسب I مساحة الحبر المسنوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمت التي معادلاتها: $x = e$ و $x = e^2$ و $y = 1 + x$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

التحق أحد الطلبة بثانوية خاصة فأراد مدرسه للمواد المتميزة اختبار مستواه الدراسي فقاموا بوضع 9 أسئلة في أطرفة متماثلة بصندوق غير شفاف ، 3 منها خاصة بمادة الرياضيات ، و 2 منها خاصة بمادة الفيزياء و 4 خاصة بمادة العلوم الطبيعية ، وعلى هذا الطالب أن يسحب عشوائيا ثلاثة أطرفه على التوالي دون إرجاع للإجابة على الأسئلة الموجودة داخلها ، نعتبر الحوادث الآتية:

A : الأطرفة المسحوبة تحتوي على أسئلة لنفس المادة ، C : الأطرفة المسحوبة تحتوي على أسئلة لمادتين فقط B : الأطرفة المسحوبة تحتوي على أسئلة لمواد مختلفة ،

$$(1) \text{ احسب : } p(A), p(B), \text{ ثم بين أن : } p(C) = \frac{55}{84}.$$

(2) احسب احتمال الحدث D : الطرف المسحوب الأول يحتوي على أسئلة لمادة الرياضيات .

(3) علما أن الأطرفة المسحوبة تحتوي على أسئلة لمواد مختلفة ، ما احتمال أن يكون الطرف المسحوب الأول لمادة للرياضيات

(4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد مواد الاختبار .

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

(ب) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

(ج) احسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X ، ثم استنتج قيمة (E(2024 X + 1962) .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

$$(u_n) \text{ متتالية عددية معرفة بدلا الأول } u_0 = \frac{7}{4} \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{3}{8}.$$

(1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{3}{4}$.

(ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، و برر أنها متقاربة ، ثم استنتج أن : $u_n \leq \frac{7}{4}$.

$$(2) (v_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } \mathbb{N} \text{ كمايلي : } v_n = \alpha \left(\frac{2}{3} \right)^n \left(u_n - \frac{\alpha}{4} \right).$$

- عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$.

فيما يلي نأخذ $\alpha = 3$

(1) أ) عبر عن v_n بدلالة n .

(ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n + \frac{3}{4}$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(2) أ) عبر عن P_n بدلالة n حيث : $P_n = \ln(v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n)$.

(ب) عين قيمة العدد الطبيعي n بحيث : $P_n = 4949 \ln\left(\frac{1}{3}\right)$.

$$(3) \text{ احسب } S_n \text{ بدلالة } n \text{ حيث : } S_n = \frac{v_0}{u_0 - \frac{3}{4}} + \frac{v_1}{u_1 - \frac{3}{4}} + \dots + \frac{v_n}{u_n - \frac{3}{4}}. \text{ ثم احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة: $(z+1-i)(z^2+2z+4)=0$.

نعتبر المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومجاور $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، ولتكن النقط A, B, C التي نلاحظها على الترتيب $z_A = -1+i$ ، $z_B = -1+i\sqrt{3}$ و $z_C = \overline{z_B}$.

(2) أكتب العدد $\frac{z_A}{z_B}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسّي، ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

(3) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $\left(\frac{2z_A}{\sqrt{2}z_B}\right)^n$ حقيقي سالب، وبين أن: $\left(\frac{z_B}{2}\right)^{2024} + \left(\frac{z_C}{2}\right)^{1441} = -1$.

(4) عين وانسئ (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z+1-i| = |iz + \sqrt{3} + i|$.

(5) عين وانسئ (δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث العدد: $\frac{z - z_B}{z - z_A}$ تخيلي صرف.

التمرين الرابع : (07 نقاط)

g الدالة العددية المعرفة على IR بـ: $g(x) = 2 + (2-x)e^x$.

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث: $\alpha \in]2.21; 2.23[$.

(ب) حدد من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(-x)$ على IR .

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بـ: $f(x) = \frac{x^2}{1+e^x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجاور $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسر النهاية الأخيرة بيانياً.

(2) بين أنه من أجل كل x من IR فإن: $f'(x) = \frac{xg(-x)}{(1+e^x)^2}$.

(ب) بين أن الدالة f متناقصة على المجال $]-\alpha; 0[$ و متزايدة على المجال $]-\infty; -\alpha[$ و $[0; +\infty[$ وشكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن: $f(-\alpha) = \alpha(\alpha-2)$ ، ثم جد حصر للعدد $f(-\alpha)$.

(4) بين أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حل وحيد β حيث: $\beta \in]1.1; 1.2[$.

(5) ليكن (Γ) المنحنى الممثل للدالة المعرفة على IR بـ: $x \mapsto x^2$.

(ب) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x^2) = 0$ ثم فسر النتيجة بيانياً، ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (Γ) .

(6) عين نقاط تقاطع (C_f) مع حاسلي محوري الإحداثيات ثم أرسم كل من (C_f) و (Γ) . (نأخذ $f(-\alpha) \approx 0.48$)

(ب) ناقش بيانياً وحسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماماً m عند حلول المعادلة $f(x) = x^2 + \ln(m)$.

(7) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من IR فإن: $0 \leq f(x) \leq x^2$.

(ب) استنتج حصر للعدد A الذي يمثل مساحة الحيز المنوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات $x=0$ و $x=1$.

انتهى الموضوع الثاني

* الأستاذ: الحسين رميلي * بالتوفيق في شهادة البكالوريا *



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول:

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

تضم جمعية سبع نساء وتسعة رجال، من بينهم امرأة واحدة وإسمها فاطمة، ورجل واحد إسمه عبد الله. أرادت الجمعية تشكيل لجنة تضم رئيسا ونائبا وكاتبا من أجل تمثيلها في إحدى المناسبات الوطنية.

- 1/ أحسب احتمال الأحداث التالية: A «اللجنة تضم عبد الله» B «فاطمة كاتبة للجنة»
C «اللجنة تضم إما فاطمة وإما عبد الله» D «اللجنة تتكون من رجال ونساء معا»

2/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل لجنة عدد الرجال فيها.

ا/ عرّف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

ب/ استنتج $E(2024X + 1445)$.

ج/ أحسب الإحتمال $P\left(\int_1^X \ln t \, dt < 1\right)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقطتين A و B لاحقتيهما على الترتيب: $Z_A = 1 - 2i$ و $Z_B = -i$.

في كل حالة من الحالات التالية، عيّن الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة مع التبرير:

1/ حل المعادلة: $(1 + 2i)\bar{Z} + 2 - i = 0$ ذات المجهول Z من $\mathbb{C}$ هو:

(أ) $Z = -i$	(ب) $Z = i$	(ج) $Z = 1 - 2i$
--------------	-------------	------------------

2/ عمدة للعدد المركب Z حيث: $Z = -3\left(-\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}\right)$ هي:

(أ) $\frac{\pi}{7}$	(ب) $-\frac{\pi}{7}$	(ج) $\pi - \frac{\pi}{7}$
---------------------	----------------------	---------------------------

3/ العدد المركب $L = \left(\frac{Z_A - Z_B}{\sqrt{2}}\right)^{1445}$ يساوي:

(أ) $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$	(ب) $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$	(ج) $-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$
---	--	---

4/ إذا كانت θ عمدة لعدد مركب Z و r طويلته، فإن العدد المركب $\frac{Z_B}{Z}$ يُكتب على الشكل الأسّي:

(أ) $r \cdot e^{-i(\theta + \frac{\pi}{2})}$	(ب) $\frac{1}{r} \cdot e^{i(-\theta + \frac{\pi}{2})}$	(ج) $\frac{1}{r} \cdot e^{-i(\theta + \frac{\pi}{2})}$
--	--	--

5/ مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z التي تحقق $\arg(iZ - 1) = \frac{\pi}{4} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ و A نقطة منها هي:

(أ) نصف المستقيم $[BA)$ ماعدا النقطة B.	(ب) المستقيم (BA) ماعدا النقطة B.	(ج) الدائرة التي $[BA]$ قطر لها ماعدا النقطة B.
---	-------------------------------------	---



التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1}$.

1/ ا/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 = \frac{(u_n - 1)^2}{2u_n - 1}$.

ب/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 1 > 0$.

2/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3/ لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln \left(1 - \frac{1}{u_n} \right)$.

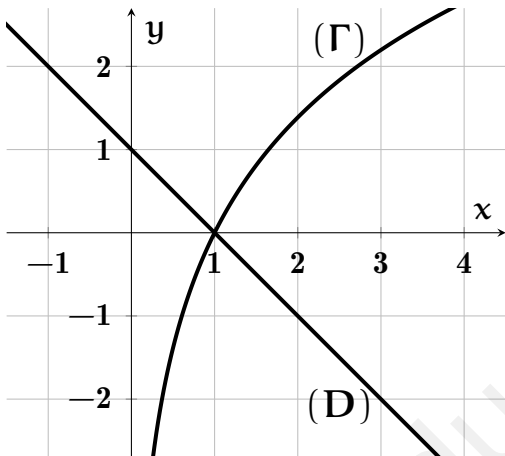
ا/ أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ثم أحسب حدها الأول v_0 .

ب/ أكتب v_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4/ أحسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = \left(1 - \frac{1}{u_0} \right) \times \left(1 - \frac{1}{u_1} \right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{u_n} \right)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



I/ الشكل المقابل يوضح (Γ) التمثيل البياني للدالة u المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $u(x) = 2 \ln x$ و (D) المستقيم ذو معادلة: $y = -x + 1$.

1/ بقراءة بيانية حدد وضعية (Γ) بالنسبة إلى (D) .

2/ استنتج حسب قيم x من $]0; +\infty[$ إشارة: $g(x) = x - 1 + 2 \ln x$.

II/ نعرّف الدالة f على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 2 + (\ln x)^2 - \ln x$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

2/ ا/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3/ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلّين α و β حيث: $0.4 < \alpha < 0.5$ و $2.1 < \beta < 2.2$.

4/ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلة له هي: $y = x$.

5/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) ، ثم أكتب معادلة المماس (T) .

6/ ا/ أنشئ (Δ) و (T) و (C_f) .

ب/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $f(x) = x - m$.

7/ الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = -x(\ln x)^2 + ax \ln x + bx$ حيث a و b عدنان حقيقيان.

ا/ عين العددين a و b حتى تكون الدالة h أصلية للدالة $2 - (\ln x)^2 + \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب/ أحسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = x$ و $x = \frac{1}{e}$.

و $x = e^2$.

انتهى الموضوع الأول.



الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

صندوقان U_1 و U_2 متماثلان غير شفافين يحتويان على كريات متماثلة لا يمكن التفريق بينها باللمس، حيث:
 يحتوي U_1 على خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 0، 1، 1، 1، 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 0، 1، 1.
 يحتوي U_2 على ثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 0، 1، 2 وكريتين خضراوين مرقمتين بـ: 0، 1.
 I/ نختار عشوائيا أحد الصندوقين: فإذا كان U_1 نسحب منه كريتين على التوالي دون إرجاع،
 وإذا كان U_2 نسحب منه كريتين على التوالي مع الإرجاع.

1/ أحسب احتمال الحدثين: A «الكريتين المسحوبتين من نفس اللون»
 B «الكريتين المسحوبتين تحملا من نفس الرقم»

2/ هل الحدثان A و B مستقلان؟ علّل.

3/ إذا علمت أن الكريتين المسحوبتين مختلفتين في اللون، ما احتمال أن تكونا من الصندوق U_1 ؟

II/ نضع كريات كل من الصندوقين U_1 و U_2 في صندوق آخر U_3 ، ثم نسحب من هذا الأخير عشوائيا كريتين في آن واحد. وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين المحصل عليهما.

1/ عين قيم المتغير العشوائي X .

2/ عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضيائي $E(X)$.

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

I/ حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب Z التالية: $(\bar{Z} + 3 + 2i)(Z^2 - 2Z + 5) = 0$

II/ المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B ، C و D لواحقتها على الترتيب: $Z_A = 1 - 2i$ ، $Z_B = \bar{Z}_A$ ، $Z_C = -3 + 2i$ و $Z_D = -1$.

1/ أ/ أحسب $|Z_A - Z_D|$ ، $|Z_B - Z_D|$ ، $|Z_C - Z_D|$.

ب/ استنتج أن النقط A و B و C تنتمي إلى نفس الدائرة، يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

2/ أ/ أكتب العدد المركب: $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_D}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

ب/ استنتج أن النقطة A هي صورة النقطة C بتحويل نقطي R يُطلب تعيين عناصره المميزة.

3/ أ/ عين Z_G لاحقة النقطة G مرجح الجملة المثقلة: $\{(A; 1), (B; -1), (C; 1)\}$.

ب/ بيّن أن الرباعي ABCG مربع.

4/ عين (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z بحيث: $|\bar{Z} + 1| = |iZ + 2 + 3i|$.

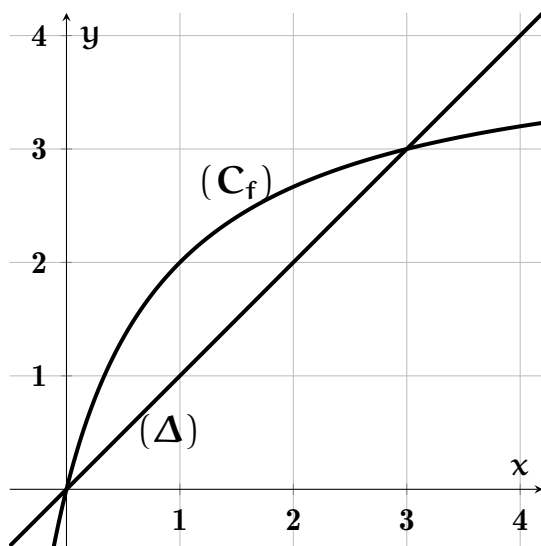
التمرين الثالث: (04 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 4 - \frac{4}{x+1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم

المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ كما هو موضح في الشكل أدناه؛ حيث (Δ) هو المستقيم ذو معادلة $y = x$.

ولتكن (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1/ بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$.



2/ أ/ أنقل الشكل المقابل، ثم مثل الحدود الأربعة الأولى للمتتالية (u_n) على حامل محور الفواصل موضحا خطوط الإنشاء.

ب/ ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3/ أ/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 0 \leq u_n \leq 3$

ب/ أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

4/ نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 1 - \frac{3}{u_n}$.

أ/ بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ثم أحسب v_0 .

ب/ أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n وأحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

5/ أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{u_n}{u_n - 3} + \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 3} + \dots + \frac{u_{n+2024}}{u_{n+2024} - 3}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I/ يمثل الجدول المقابل تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^{-x} - x - 2$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	—	
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$

1/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0.5 < \alpha < -0.4$.

2/ حدّد حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ ، ثم استنتج حسب قيم

العدد الحقيقي x إشارة $g(-x)$.

II/ لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 1 - x + \frac{x-1}{e^x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول: 2cm).

1/ أ/ أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب/ بين أن المستقيم (D) ذو معادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ج/ أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (D) .

2/ أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -\frac{g(-x)}{e^x}$.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3/ بين أن: $f(-\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha + 2}$ ثم استنتج حصرا لـ $f(-\alpha)$.

4/ أ/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = (1-x)(1-e^{-x})$.

ب/ عين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل، ثم أنشئ (D) و (C_f) بدقة.

5/ ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $x - 1 = (-1 + 2m + x)e^x$.

6/ أ/ باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن: $\int_0^1 x e^{-x} dx = 1 - \frac{2}{e}$.

ب/ أحسب بالـ cm^2 مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و (D) والمستقيمين ذي معادلتين $x = 0$ و $x = 1$.

انتهى الموضوع الثاني.

$$E(X) = \sum x_i p_i$$

$$= \frac{27}{80} + 2 \times \frac{9}{20} + 3 \times \frac{3}{20}$$

$$= 1,6375 = \frac{27}{16}$$

$$E(2024X + 1447) \text{ استنتاج}$$

$$E(2024X + 1447)$$

$$= 2024E(X) + 1447$$

$$= 4860,5$$

$$P\left(\int_1^x \ln t dt(1)\right) \text{ ج حساب احتمال}$$

$$\int_1^x \ln t dt = [t \ln t - t]_1^x$$

$$= x \ln x - x + 1$$

$$x \ln x - x + 1 < 1$$

$$x \ln x - x < 0$$

$$x > 0; x(\ln x - 1) < 0 \text{ يكافئ}$$

$$\ln x - 1 < 0$$

$$\ln x < 1$$

$$x < e$$

$$x \in \{1, 2\}$$

$$P\left(\int_1^x \ln t dt(2)\right) = P(x=1) + P(x=2) \text{ د حاليه}$$

$$= \frac{63}{80}$$

الجزء الثاني

$$1 - \text{حل المعادلة } (1+2i)\bar{z} + 2-i = 0$$

$$(1+2i)\bar{z} = -2+i$$

$$\bar{z} = \frac{-2+i}{1+2i} \times \frac{1-2i}{1-2i}$$

$$= \frac{-2+4i+i+2}{5} = \frac{5i}{5} = i$$

$$z = -i \text{ 5 د هغه}$$

الاختيار - ف

مناقشة الكالور يا التجربة

الموضوع الاول

الجزء الاول

$$\text{لجنة دهم} \\ \text{ترتيبه} = \left\{ \begin{array}{l} 9H \\ 8+ \text{عبدالله} \end{array} \right\} \text{ و } \left\{ \begin{array}{l} FF \\ 6+ \text{مطهر} \end{array} \right\}$$

$$A_{16}^3 = 3360$$

أ. حساب الاحتمالات

"اللجنة تضم عبد الله"

$$P(A) = \frac{3 \times A_{16}^1 A_{15}^2}{A_{16}^3} = \frac{630}{3360} = \frac{3}{16}$$

$$B \text{ "ناظرة كاتبة اللجنة"} \\ P(B) = \frac{A_{16}^1 A_{15}^2}{3360} = \frac{210}{3360} = \frac{1}{16}$$

C "اللجنة تضم إما ناضية وإما عبد الله"

$$P(C) = \frac{3 \times (A_{16}^1 A_{15}^2 + A_{16}^1 A_{15}^2)}{3360} = \frac{13}{40}$$

D "اللجنة تتكون من النساء والرجال"

$$P(D) = \frac{3 \times (A_9^2 A_7^1 + A_9^1 A_7^2)}{3360} = \frac{63}{80}$$

$$= 1 - P(\bar{D}) = 1 - \frac{(A_9^3 + A_7^3)}{3360}$$

ب. المتغير العشوائي

$$FFF \rightarrow 0 \quad FHH \rightarrow 2$$

$$FFH \rightarrow 1 \quad HHH \rightarrow 3$$

$$X(2) = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$P(X=0) = \frac{A_7^3}{3360} = \frac{1}{16}$$

$$P(X=1) = 3 \times \frac{A_7^2 A_9^1}{3360} = \frac{27}{80}$$

$$P(X=2) = 3 \times \frac{A_7^1 A_9^2}{3360} = \frac{9}{20}$$

$$P(X=3) = \frac{A_9^3}{3360} = \frac{3}{20}$$

$X=x_i$	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{27}{80}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{20}$

حساب التام:

الجواب الثالث

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1} \end{cases}$$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{(u_n - 1)^2}{2u_n - 1} \quad \text{1- يبين أنه:}$$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^2}{2u_n - 1} - 1 = \frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2u_n - 1} = \frac{(u_n - 1)^2}{2u_n - 1}$$

2) البرهان بالتراجع أنه: $u_n - 1 > 0$
التحقق من صحة الخاصية الابتدائية.

$$u_0 - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$$

ومنه الخاصية الابتدائية محققة

نفرض أن $u_n - 1 > 0$ من أجل n عدد صحيح
نبرهن أن $u_{n+1} - 1 > 0$

$$\text{لدينا } u_n - 1 > 0 \text{، عليه } (u_n - 1)^2 > 0 \dots \textcircled{1}$$

$$\text{لدينا } u_n > 1 \text{، ومنه } 2u_n - 1 > 0 \dots \textcircled{2}$$

$$\text{من } \textcircled{1} \text{ و } \textcircled{2} \text{ نجد } \frac{(u_n - 1)^2}{2u_n - 1} > 0 \text{، ومنه } u_{n+1} - 1 > 0$$

وعليه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن $u_n - 1 > 0$
3- المحيط: تغير المتتالية.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n^2}{2u_n - 1} - u_n \\ &= \frac{u_n^2 - 2u_n^2 + u_n}{2u_n - 1} \\ &= \frac{-u_n^2 + u_n}{2u_n - 1} = \frac{u_n(1 - u_n)}{2u_n - 1} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \dots -u_n + 1 < 0 \text{، ومنه } u_n - 1 > 0$$

$$\textcircled{2} \dots u_n > 0 \text{، ومنه } u_n - 1 > 0$$

$$\textcircled{3} \dots 2u_n - 1 > 0$$

$$\text{وعليه } u_{n+1} - u_n < 0 \text{، ومنه}$$

(u_n) متناقص.

(u_n) متناقصة، ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة.

2

2) تمثّل العدد المركّب z

$$z = -3 \left(-\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$= 3 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$$

دلالة $-\frac{\pi}{4}$ - عمدة لـ

الخيار - ب -

$$L = \left(\frac{z_A - z_B}{\sqrt{2}} \right)^{144\pi}$$

3

$$\frac{z_A - z_B}{\sqrt{2}} = \frac{1 - 2i - i}{\sqrt{2}} = \frac{1 - 3i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$$

$$= e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$L = \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} \right)^{144\pi} = e^{-i\frac{144\pi}{4}\pi}$$

$$= e^{-i(360\pi + \frac{5\pi}{4})}$$

$$= e^{-i\frac{5\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

الخيار - ج -

$$\frac{z_B}{z} = \frac{-i}{z} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{re^{i0}} = \frac{1}{r} e^{-i(\frac{\pi}{2} + 0)} \quad (4)$$

الخيار - ج -

5) مجموعة النقاط .

$$\arg(i z - 1) = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\arg(i z + i^2) = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\arg(i(z - (-i))) = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\arg(i) + \arg(z - z_B) = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\arg(z - z_B) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + k\pi = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$(\vec{u}, \vec{BM}) = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

ومنه المستقيم (BA) مارة بالنقطة B.

الخيار - ب -

$$P_n = e^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \right)$$

$$P_n = e^{\frac{1}{4}} (2^{n+1} - 1)$$

الحل الرابع

I - لقراءة بيانيت: تحديد، وضعية (3) بالسيئة (D)

x	0	1	+∞
الرمز السيئة	(3) (A)	(3) (P)	(3) (D)

2 - استاج إشارة g(x)

$$g(x) = x - 1 + 2 \ln x = 2 \ln x - (-x + 1)$$

اعتقادا على الرفع البيني لـ (D), (3) فان :

x	0	1	+∞
g(x)	-	0	+

$$f(x) = x - 2 + (\ln x)^2 - \ln x \quad \text{II}$$

أ - حساب النهايات

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \left(\frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln x} + \ln x - 1 \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

و منه $x=0$ حادثة لستقيم مقارب عمودي

2 - بيان ان $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$

$$f'(x) = 1 + 2 \times \frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} = \frac{x + 2 \ln x - 1}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

استاج اشارة f(x) من اشارة g(x)

و منه اشارة f(x) من اشارة g(x)

و عليه f متناقصة على $[0, 1]$ و متزايدة على $[1, +\infty]$

x	0	1	+∞
f'(x)	-	0	+
f(x)	+∞	-1	+∞

3 - بيان ان $f(x) = 0$ قابل حلين α, β

على المجال $[0, 1]$: f متصلة و متناقصة فاما على

$[1, +\infty]$ فهي كذلك على $[0, 1]$ و $[1, +\infty]$ ، لدينا

$$f(0.4) = 0.16 \quad \text{و} \quad f(0.5) = -0.33$$

اذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة الفاصل $(0.4, 0.5)$ فيه

نقطة α حيث $0.4 < \alpha < 0.5$

$$v_n = \ln \left(1 - \frac{1}{u_n} \right)$$

1 - اثبات ان (v_n) هندسة اساسها $q=2$

$$v_{n+1} = 2v_n$$

$$v_{n+1} = \ln \left(1 - \frac{1}{u_{n+1}} \right) = \ln \left(1 - \frac{1}{\frac{u_n^2}{2u_n - 1}} \right)$$

$$= \ln \left(1 - \frac{2u_n - 1}{u_n^2} \right)$$

$$= \ln \left(\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n^2} \right)$$

$$= \ln \left(\left(\frac{u_n - 1}{u_n} \right)^2 \right) = 2 \ln \left(1 - \frac{1}{u_n} \right)$$

$$= 2v_n$$

و منه (v_n) هندسة اساسها $q=2$

حيث $v_0 = \ln \left(1 - \frac{1}{4} \right)$

$$= \ln \left(\frac{3}{4} \right)$$

استاج v_n, v_{n+1}

$$v_n = v_0 \times q^n = \ln \left(\frac{3}{4} \right) \times 2^n = \ln \left(\frac{3}{4} \right)^{2^n}$$

$$v_n = \ln \left(1 - \frac{1}{u_n} \right)$$

$$1 - \frac{1}{u_n} = e^{v_n}$$

$$\frac{1}{u_n} = 1 - e^{v_n} = 1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{2^n}$$

$$u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{2^n}}$$

النهايات

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{2^n}} = 1$$

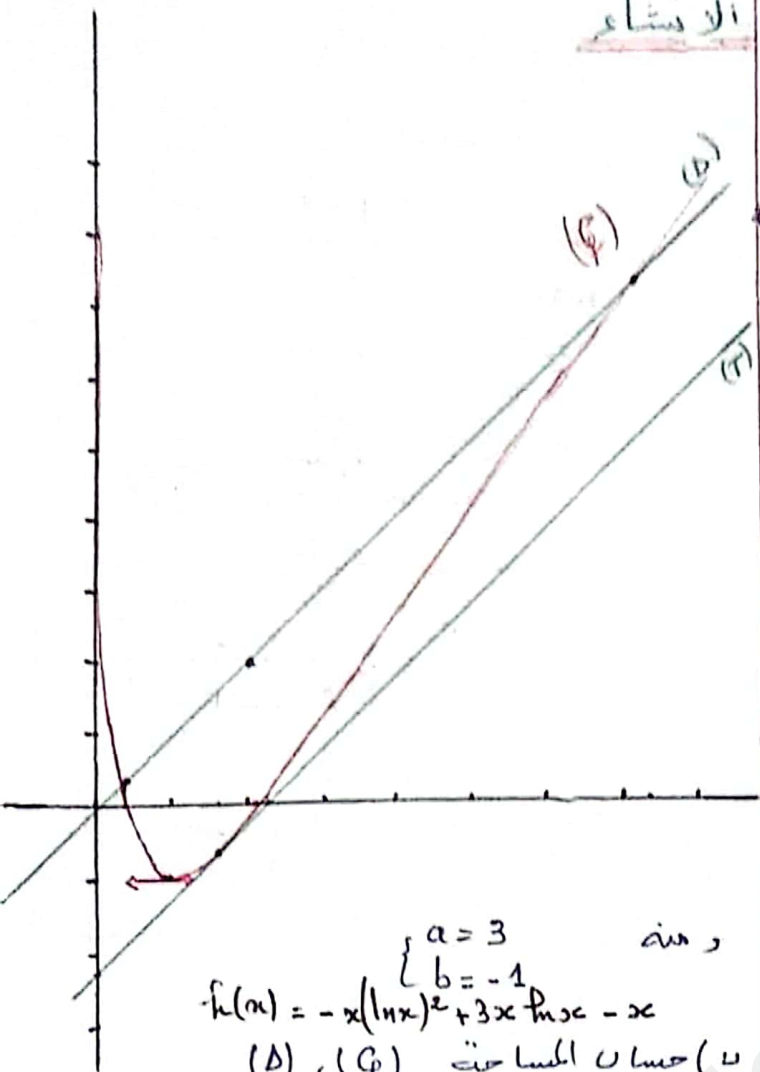
الحل الخامس

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{u_0} \right) \left(1 - \frac{1}{u_1} \right) \times \dots \times \left(1 - \frac{1}{u_n} \right)$$

$$1 - \frac{1}{u_n} = e^{v_n}$$

$$P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n}$$

الاشارة



$$\begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases} \quad \text{حيث،}$$

$$h(x) = -x(\ln x)^2 + 3x \ln x - x$$

(b) حساب المساحة تحت (f) و (b) حيث

$$x = e^2, \quad x = \frac{1}{e}$$

(f) تحت (b) على $[e^{-1}; e^2]$

$$S = \int_{e^{-1}}^{e^2} (y - f(x)) dx$$

$$= \int_{e^{-1}}^{e^2} (x - x + 2 - (\ln x)^2 + \ln x) dx$$

$$= [h(x)]_{e^{-1}}^{e^2}$$

$$= h(e^2) - h(e^{-1})$$

$$= -e^2 \times 4 + 3e^2 \times 2 - e^2 - (-e^{-1} - 3e^{-1} \cdot e^{-1} - e^{-1})$$

$$= (e^2 + 5e^{-1}) \text{ cm}^2.$$

على المجال $[1; +\infty[$ ، f متزايدة ومتزايدة على $[1; +\infty[$
 $f(1,2) = 0,03, f(2,2) = -0,09$
 ومنه $f(1,2) f(2,2) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيمة
 المتوسطة $f(x) = 0$ لـ x بين 1 و 2، حيث $1 < x < 2$
 4- دراسة وقيمة (f) سالبة لـ (b)

$$f(x) - y = x - 2 + (\ln x)^2 - \ln x - x$$

$$= (\ln x)^2 - \ln x - 2.$$

لـ $y = x - 2$ نجد $\ln x = y$

$$(y-2)(y+1) = 0$$

حيث $y = 2$ أو $y = -1$ ومنه

$x = e^2$ أو $x = e^{-1}$ ومنه

x	0	e^{-1}	e^2	$+\infty$
$f(x) - y$	+	-	-	+
$(f)'$	(f)	(f)	(f)	(f)
$(f)''$	(f)	(f)	(f)	(f)

5- بيان ان (f) قابل للحساب بواسطة (b).

$f(x) = 1$ ومنه $g(x) = x$ أو

$2 \ln x = 1$ ومنه $2 \ln x + x - 1 = x$

$x = e^{1/2}$

$f(e^{1/2}) = 1$

$f(e^{1/2}) = e^{1/2} - 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{9}{4} + e^{1/2}$

(1) $y = (x - e^{1/2}) + e^{1/2} - \frac{9}{4}$

$$= x - \frac{9}{4}$$

البيان

$f(x) = x - m$ قيم فواصل نطق تقاطع (f) مع المستقيم

$y = x - m$ له

$-m < -\frac{9}{4}$ أي $m > \frac{9}{4}$ لا توجد حلول.

$-m = -\frac{9}{4}$ أي $m = \frac{9}{4}$ يوجد حل.

$-m > -\frac{9}{4}$ أي $m < \frac{9}{4}$ يوجد حلان متباينان.

(7) $h(x) = -x(\ln x)^2 + a \ln x + b$

إيجاد a, b بحيث h دالة أصلية لـ (b)

$$x \rightarrow e - (\ln x)^2 + \ln x$$

$h'(x) = -(\ln x)^2 - 2 \ln x + a \ln x + a + b$

$= -(\ln x)^2 + (a-2) \ln x + a+b$

$\begin{cases} a-2=1 \\ a+b=2 \end{cases}$ ومنه

$$P(X=4) = \frac{C_4^2}{C_{13}^2} = \frac{1}{78}$$

$X=x_i$	0	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{78}$	$\frac{24}{78}$	$\frac{34}{78}$	$\frac{16}{78}$	$\frac{1}{78}$

حساب التوقع الرياضي

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P_i = \frac{24}{13} = 1,846 = \frac{144}{78}$$

التحليل الثاني

$$(\bar{z} + 3 + 2i)(z^2 - 2z + 5) = 0 \quad I$$

ومن $z^2 - 2z + 5 = 0$ أو $\bar{z} + 3 + 2i = 0$

$\bar{z} = -3 - 2i$ ومنه $z = -3 + 2i$

حساب التميز $\Delta = 4 - 20 = -16$

$$z_1 = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i$$

$$z_2 = \bar{z}_1 = 1 + 2i$$

$z_c = -3 + 2i$ ، $z_b = 1 + 2i$ ، $z_a = 1 - 2i$ (II)

$$z_0 = -1$$

1. حساب $|z_c - z_b|$ ، $|z_b - z_0|$ ، $|z_a - z_0|$

$$|z_a - z_0| = |1 - 2i + 1| = |2 - 2i| = \sqrt{8}$$

$$|z_b - z_0| = |1 + 2i + 1| = |2 + 2i| = \sqrt{8}$$

$$|z_c - z_0| = |-3 + 2i + 1| = |-2 + 2i| = \sqrt{8}$$

ب) لدينا $AD = BD = CD$ وعليه A ، B ، C

تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D ، نصف قطرها $r = \sqrt{3}$

ج. كتابة $\frac{z_a - z_b}{z_c - z_b}$ على الشكل الأسّي .

$$\frac{z_a - z_b}{z_c - z_b} = \frac{1 - 2i - 1 - 2i}{-3 + 2i - 1 - 2i} = \frac{-4i}{-4} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

لدينا $\left| \frac{z_a - z_b}{z_c - z_b} \right| = 1$ وعليه المثلث ABC

قائم في B ، ومساوي الساقين $\arg\left(\frac{z_a - z_b}{z_c - z_b}\right) = \frac{\pi}{2}$

د) استنتاج أن A صورة C بتحويل R

$$\frac{z_a - z_b}{z_c - z_b} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ومن $z_a - z_b = e^{i\frac{\pi}{2}}(z_c - z_b)$

الموضوع الثاني
البيان الأول

$$\begin{array}{c|c} R_1 R_2 & R_2 \\ \hline V_0 & V_2 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} R_0 & R_1 R_2 R_3 \\ \hline V_0 & V_1 V_2 \end{array}$$

$U_2 \qquad U_3$

1- حساب احتمال الحادتين A و B

$$P(A) = \frac{1}{2} \left(\frac{A_5^2 + A_3^2}{A_8^2} + \frac{3^2 + 2^2}{5^2} \right) = \frac{689}{1400}$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \left(\frac{A_5^2 + A_2^2}{A_8^2} + \frac{3^2 + 1^2 + 1^2}{5^2} \right) = \frac{583}{1400}$$

2- البحث في استقلال الحادتين

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \left(\frac{A_3^2 + A_2^2}{A_8^2} + \frac{2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2}{5^2} \right) = \frac{37}{175}$$

ولدينا : $P(A) \times P(B) = \frac{401689}{1960000} \neq P(A \cap B)$

ومنه الحادتين A و B غير مستقلتين

3- الحركتين المسحوقتين من لونين مختلفين حساب $P_A(U_2)$

$$P_A(U_1) = \frac{P(U_1 \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{1}{2} \times 2A_3^1 A_5^2}{1 - P(A)} = \frac{\frac{15}{56}}{\frac{711}{1400}} = \frac{125}{237}$$

II المتغير العشوائي

قيم المتغير العشوائي

الحالتات الممكنة : 0, 1, 2, 3, 4	$0+0 \rightarrow 0$
	$0+1 \rightarrow 1$
	$0+2 \rightarrow 2$
	$1+1 \rightarrow 2$
	$1+2 \rightarrow 3$

حانون المتغير العشوائي

$$P(X=0) = \frac{C_3^2}{C_{13}^2} = \frac{3}{78}$$

$$P(X=1) = \frac{C_3^1 C_3^1}{C_{13}^2} = \frac{24}{78}$$

$$P(X=2) = \frac{C_3^1 C_2^1 + C_3^2}{C_{13}^2} = \frac{34}{78}$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^1 C_1^1}{C_{13}^2} = \frac{16}{78}$$

$$\begin{array}{c|c} R_0 V_0 & R_1 R_2 \\ \hline V_0 & R_1 R_2 \\ & R_1 V_1 \\ & V_1 V_2 \end{array}$$

و منه A هورة c بالدران الذي مركزه B و زاوية $\frac{\pi}{2}$.

3/ تعيين z_c

$$z_c = \frac{z_A - z_B + z_C}{1 - 1 + 1} = \frac{1 - 2i - 1 - 2i - 3 + 2i}{1 - 1 + 1} = -3 - 2i = \bar{z}_c$$

بيان ان الرباعي $ABCG$ مربع.

لدينا $z_G = \bar{z}_c$ وعليه $BC = AG$

و $(\vec{BC}, \vec{BA}) = \frac{\pi}{2}$ و منه الرباعي $ABCG$ مربع.

4/ مجموعة النقط

$$|\bar{z} + 1| = |iz + 2 + 3i|$$

$$|\bar{z} + 1| = |iz^2 - 2iz^2 + 3i|$$

$$|\bar{z} + 1| = |iz(2 + 3 - 2i)|$$

$$|2 - (-1)| = |iz||2 - (-3 + 2i)|$$

$$|2 - 2i| = |z \cdot 2i|$$

$$DM = CM$$

و منه مجموعة النقط هي المستقيم المحوري

للقطعة $[DC]$

المرتين الثالث

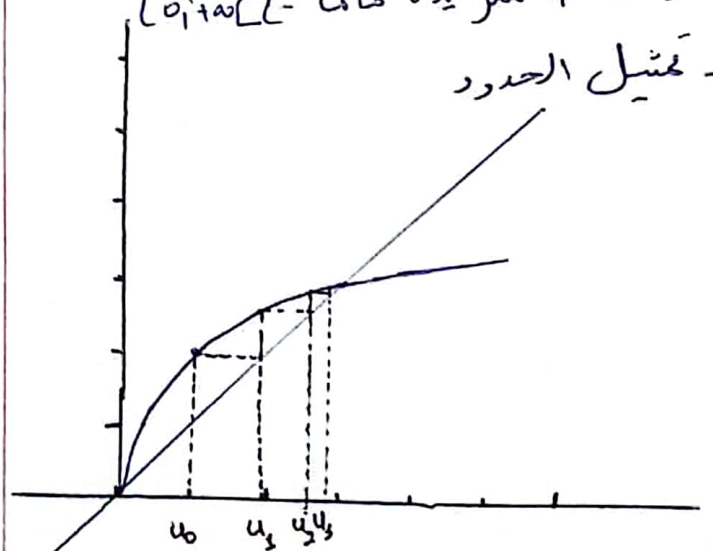
$$f(x) = 4 - \frac{4}{n+1}$$

1- بيان ان f متزايدة تما

$$f'(x) = \frac{4}{(n+1)^2} > 0$$

و منه f متزايدة تما $[0; +\infty[$

2- تمثيل الحدود



ب) التحسين

$u_1 < u_2 < u_3 < u_4$ و منه (u_n) متزايدة والمسافة بين الحدود تتناقص فهي متقاربة.

3- البرهان بالتراجع ان $0 < u_n < 3$

نسمي $P(n)$ الخاصية "من اجل كل n من N : $0 < u_n < 3$ "
التحقق من صحة الخاصية $P(0)$

من اجل $n=0$: $u_0 = 1 < 3$ و $0 < u_0$ صحيحة.

نفرض ان $P(n)$ صحيحة ونبهرن $P(n+1)$

نفرض ان $0 < u_n < 3$

ولدينا f متزايدة ومنت $f(0) < f(u_n) < f(3)$

$$0 < u_{n+1} < 3$$

وعليه $P(n+1)$ صحيحة و منه $P(n)$ صحيحة

ن- دراسة اتجاه تغير المتسلسلة (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{u_n + 1} - u_n = \frac{4u_n - u_n^2 - u_n}{u_n + 1}$$

$$= \frac{u_n(3 - u_n)}{u_n + 1}$$

$$0 < u_n < 3 \Rightarrow 0 < u_{n+1} < u_n$$

$$u_{n+1} < u_n \Rightarrow 1 < u_n \dots \dots \dots$$

$$0 < u_n < 3 \Rightarrow 0 < u_{n+1} < 3 - u_n < 3 \dots \dots \dots$$

من ① و ② و ③ فان $u_{n+1} - u_n > 0$ و منه (u_n) متزايدة.

التقارب

(u_n) متزايدة و محدودة من الاعلى فهي متقاربة

$$v_n = 1 - \frac{3}{u_n} \quad (4)$$

بيان ان (v_n) هندسية اساسها $\frac{1}{4}$.

$$v_{n+1} = 9 \cdot v_n$$

$$v_{n+1} = 1 - \frac{3}{u_{n+1}} = 1 - \frac{3}{\frac{4u_n}{u_n + 1}}$$

$$= 1 - \frac{(u_n + 1)3}{4u_n}$$

$$= \frac{u_n - 3}{4u_n} = \frac{1}{4} v_n$$

و منه (v_n) هندسية اساسها $q = \frac{1}{4}$ حد ص

$$\text{الاولى } v_0 = 1 - \frac{3}{u_0} \text{ اي } v_0 = -2$$

$$v_n = v_0 q^n = -2 \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{عبارة } v_n$$

أشارة $g(x)$ $g(x) > 0$ يكافئ $-x < \alpha$ ، و $-x > \alpha$ يكافئ $g(x) < 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

$$f(x) = 1 - x + \frac{x-1}{e^x} \quad \text{II}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - x e^x + x - 1}{e^x} = -\infty$$

(ب) نبيان أن $y = -x + 1$ مغارب (f)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{e^x} = 0$$

و منه (د) مغارب (f) عند $+\infty$ ، دراسة الوضعية

$$e^x > 0 \text{ لدينا ، } f(x) - y = \frac{x-1}{e^x}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوضع النسبي	(ف) تحت (د)	(ف) فوق (د)	(ف) فوق (د)

2- حساب $f'(x)$

$$f'(x) = -1 + e^{-x} - e^{-x}(x-1)$$

$$= -e^{-x}(e^x + x - 2)$$

$$= -\frac{g(-x)}{e^x}$$

(ب) دراسة اتجاه التغير

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$g(-x)$	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-

و حله f متزايدة تمامًا على $[-\alpha; +\infty[$ ، متزايدة تمامًا مع $]-\infty; -\alpha]$ جدول التغيرات

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(-\alpha)$	$-\infty$

عبارة u_n : لدينا $u_n = 1 - \frac{3}{u_n}$

و منه $\frac{3}{u_n} = 1 - u_n$

$$u_n = \frac{3}{1 - u_n} = \frac{3}{1 + 2(\frac{1}{u})^n}$$

لهاية u_n

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{1 + 2(\frac{1}{u})^n} = \frac{3}{1} = 3$$

لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{u})^n = 0$

3- حساب المجموع

$$S_n = \frac{u_n}{u_n - 3} + \dots + \frac{u_{n+2024}}{u_{n+2024} - 3}$$

لدينا

و منه $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$

$$\frac{1}{v_n} = \frac{u_n}{u_n - 3}$$

و منه $S_n = \frac{1}{v_n} + \frac{1}{v_{n+1}} + \dots + \frac{1}{v_{n+2024}}$

$$S_n = \frac{1}{v_n} \left(\frac{1 - (\frac{1}{9})^{2025}}{1 - \frac{1}{9}} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \times 4^n \left(\frac{1 - 4^{2025}}{-3} \right)$$

$$= \frac{4^n}{6} (1 - 4^{2025})$$

الحل الرابع

$$g(x) = e^{-x} - x - 2$$

1- ببيان أن $g(x) = 0$ قابل حلاً وسطياً α ، $0.4 < \alpha < 0.5$ من جدول تغيرات الدالة g نلاحظ أنها مستمرة و متناقصة على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة و متناقصة على $[-0.5; -0.4]$ ، لدينا $g(-0.5) = 0.082$ ، $g(-0.4) = -0.018$ و منه $g(-0.5) \times g(-0.4) < 0$ ، مبرهنة القيم المتوسطة $g(\alpha) = 0$ قابل حلاً وسطياً α حيث $-0.5 < \alpha < -0.4$ إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

(5) المساحة المتبقية البسيطة

$$x-1 = (-1+2m+x)e^x \text{ ، ومنه}$$

$$\frac{x-1}{e^x} = -1+x+2m \text{ ، ومنه}$$

$$F(m) = 2m \text{ ، وعليه } 1-x+\frac{x-1}{e^x} = 2m$$

هنا خواصل نقط تقاطع (F) مع المستقيم $y=2m$

$$2m = F(-\alpha) \text{ ، ومنه } m = \frac{F(-\alpha)}{2} \text{ يوجد حل موجب}$$

$$2m > F(-\alpha) \text{ ، ومنه } m > \frac{F(-\alpha)}{2} \text{ لا يوجد حلول}$$

$$2m = 0 \text{ ، ومنه } m = 0 \text{ يوجد حلان}$$

أما فيما موجب ، الآخر سالب

$$0 < m < \frac{F(-\alpha)}{2} \text{ ، يوجد حلان موجبان}$$

$$m < 0 \text{ ، يوجد حلان مختلفان في}$$

الاتجاه

$$I = \int_0^1 m e^x dx \text{ 6- التكامل بالتجزئة}$$

$$u(x) = x \quad u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^{-x} \quad v(x) = -e^{-x}$$

$$I = [-x e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} dx$$

$$= [-x e^{-x} - e^{-x}]_0^1$$

$$= (-1 e^{-1} - e^{-1}) - (-1)$$

$$= 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}$$

(ب) حساب المساحة (D) ، (F) ، $x=1$ ، $x=0$

(F) تحت (D) ، وعليه :

$$S = -2 \times 2 \int_0^1 (F(x) - y) dx$$

$$= -4 \int_0^1 (x-1) e^{-x} dx \text{ cm}^2$$

$$= -4 \left[\int_0^1 x e^{-x} dx + \int_0^1 -e^{-x} dx \right] \text{ cm}^2$$

$$= -4 \left[\left(1 - \frac{2}{e} \right) + [e^{-x}]_0^1 \right] \text{ cm}^2$$

$$= -4 \left(1 - \frac{2}{e} + e^{-1} - 1 \right) \text{ cm}^2$$

$$= \frac{4}{e} \text{ cm}^2$$

النتيجة

$$3- \text{بيان أن : } f(-\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha+2}$$

$$f(-\alpha) = 1 + \alpha + \frac{\alpha+1}{e^{-\alpha}}$$

$$\text{ولنا } f(\alpha) = 0 \text{ ، ومنه } e^{-\alpha} - \alpha - 2 = 0$$

$$f(-\alpha) = 1 + \alpha + \frac{-\alpha+1}{\alpha+2} \text{ ، ومنه } e^{-\alpha} = \alpha + 2$$

$$= \alpha + \frac{\alpha+2-\alpha+1}{\alpha+2} = \alpha + \frac{1}{\alpha+2}$$

النتيجة $f(-\alpha)$

$$1,5 < \alpha + 2 < 4,6 \text{ ، ومنه } ① : -0,5 < \alpha < -0,4$$

$$\text{ومنه } \frac{1}{1,6} < \frac{1}{\alpha+2} < \frac{1}{1,5}$$

$$② : 0,625 < \frac{1}{\alpha+2} < 0,67$$

بجمع ① و ②

$$0,125 < f(\alpha) < 0,47$$

$$4- \text{بيان أن : } F(x) = (1-x)(1-e^{-x})$$

$$F(x) = 1 - x + \frac{x-1}{e^x}$$

$$= 1 - x + (x-1)e^{-x}$$

$$= (1-x)(1-e^{-x})$$

(ب) تعيين نقط تقاطع (F) مع المحاور

$$f(x) = 0 \text{ ، ومنه } (1-x)(1-e^{-x}) = 0$$

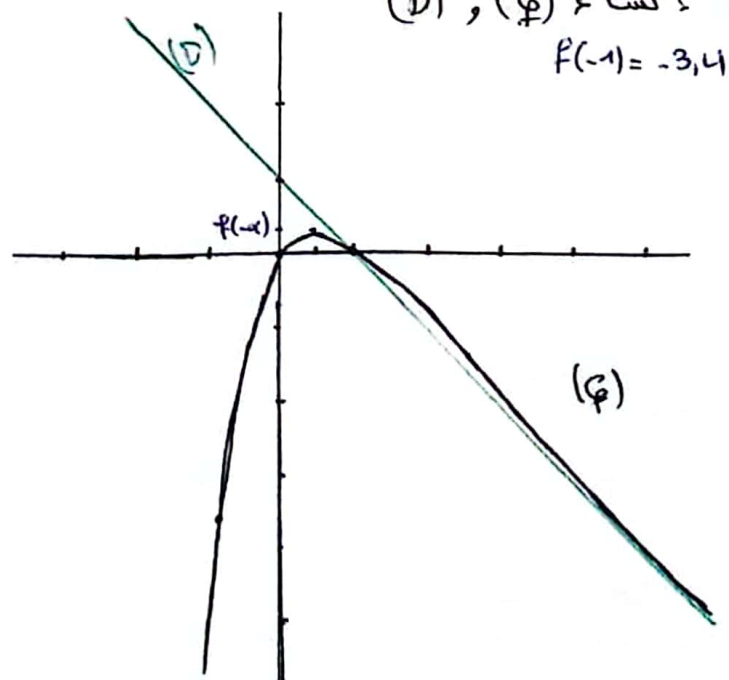
$$1-x=0 \text{ أو } 1-e^{-x}=0 \text{ ، وعليه}$$

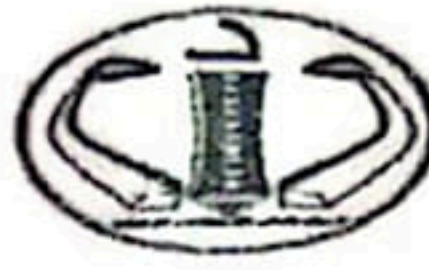
$$x=1 \text{ أو } x=0 \text{ ، ومنه } (F) \text{ يتقاطع}$$

مع المحاور في النقطتين $(1,0)$ و $(0,0)$

المنشأ (D) ، (F)

$$F(-1) = -3,4$$





على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول : 04 نقاط

(u_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $u_0 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2u_n^2}{4u_n + 1}$

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

2. أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة .

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2u_n}\right)$.

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 يطلب تعيين حددها الأول .

(ب) أكتب (v_n) بدلالة u_n بدلالة n ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $P_n = \left(\frac{2u_0 + 1}{2u_0}\right) \times \left(\frac{2u_1 + 1}{2u_1}\right) \times \dots \times \left(\frac{2u_n + 1}{2u_n}\right) = 2^{(2^{n+1}-1)}$.

التمرين الثاني : 04 نقاط

نعتبر صندوقين متماثلين u_1 و u_2 حيث يحتوي الصندوق على خمس كرات حمراء مرقمة 1، 1، 1، 2، 0 و ثلاث

كرات خضراء تحمل الأرقام 1، 1، 0 . ويحتوي الصندوق u_2 على ثلاث كرات حمراء تحمل الأرقام 1، 1، 2

و كرتين خضراوين تحملان الرقمين 0، 1 ، (كل الكرات لا نفرق عند اللمس) .

I. نختار عشوائيا أحد الصندوقين فإذا كان u_1 نسحب منه كرتين على التوالي بدون إرجاع و إذا كان u_2 نسحب منه كرتين

على التوالي بإرجاع

1. أحسب احتمال الحوادث التالية :

A : " سحب كرتين من نفس اللون " . B : " سحب كرتين تحملان نفس الرقم " ،

C : " سحب كرة حمراء على الأقل " .

2. هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟ علل .

3. إذا علمت أن الكرتين المسحوبتين من لونين مختلفين فما هو احتمال أن تكونا من الصندوق u_1 .

II. نأخذ الكرات الموجودة في الصندوقين u_1 و u_2 و نضعها جميعا في صندوق واحد u_3

نسحب عشوائيا من الصندوق u_3 كرتين في آن واحد .

و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة مجموع الأرقام التي تحملها الكرتين المسحوبتين .

1. عين قيم المتغير العشوائي X .

2. عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X . ثم أحسب أمله الرياضي .

التمرين الثالث : 05 نقاط

1. حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة المعادلة : $z^2 - 2z + 5 = 0$

2. استنتج حلول المعادلة $(z^2 + 1)^2 - 2z + 3 = 0$

II. المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ،

لتكن النقط A, B, C, D, E لواحقها على الترتيب $z_A = 1+2i$ ، $z_B = \bar{z}_A$ ، $z_C = -1-i$ ، $z_D = \bar{z}_C$ و $z_E = -z_C$

$$1. \text{ (أ) اثبت أن } \left(\frac{\sqrt{2}z_A}{z_A + z_B + z_E} \right)^{2021} = \frac{z_C}{\sqrt{2}}$$

(ب) عين قيم العدد الطبيعي n حتي يكون العدد $\left(\frac{z_E}{\sqrt{2}} \right)^n$ تخيلي صرف .

2. عين زاوية الدوران r الذي مركزه D و يحول C إلى E .

3. (أ) أكتب العدد $\frac{z_A - z_B}{z_D - z_C}$ على الشكل الجبري .

(ب) استنتج وجود تحويل نقطي T يحول D إلى A و يحول C إلى B يطلب تعيين طبيعته و عناصره المميزة

4. (أ) عين (Γ) مجموعة النقط M التي لاحقها z حتي يكون العدد $\frac{z_E - z}{z_C - z}$ تخيلي صرف ثم أحسب مساحته

(ب) عين (Γ') صورة (Γ) بالتحويل T ثم استنتج مساحة (Γ') .

التمرين الرابع : 07 نقاط

I. g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + (2x^2 - 1)e^{1-x^2}$

1. (أ) بين أن الدالة g زوجية ثم فسر النتيجة بيانيا .

(ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

2. (أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x) = 2x(3 - 2x^2)e^{1-x^2}$.

(ب) أدرس إتجاه تغير الدالة g على $[0; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها على $[0; +\infty[$.

(ج) استنتج إتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3. (أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث : $0.51 < \alpha < 0.52$.

(ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x(1 - e^{1-x^2})$.

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. بين أنه من أجل x من $\mathbb{R}$: $f(x) + f(-x) = 0$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

2. بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3. (أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$.

(ب) أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها .

(ت) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيينها .

4. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ثم استنتج (Δ')

المستقيم المقارب المائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

5. تحقق أن معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$ هي $y = (1 - e)x$.

6. ارسم المستقيمتان (T) ، (Δ) و (Δ') و المنحنى (C_f) .

7. بين أن (C_f) يقبل مماسين متناظرين و يوازيان المستقيم (Δ) . عين معادلة كل منهما ثم أرسمهما .

8. عين حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$.

إنتهى الموضوع الأول

f الدالة المعرفة على $[1; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$.

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f على $[1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .

ب) استنتج أنه من أجل كل x من $[1; +\infty[$ فإن $f(x) \in [1; +\infty[$

2. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 1$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة .

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = (v_n)^2$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < v_n < \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية (v_n) ثم نهاية المتتالية (u_n)

4. نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $w_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$ ، أحسب نهاية المتتالية (w_n) .

5. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$ ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

6. أحسب بدلالة n الجداء $t_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$ ثم استنتج نهاية t_n

التمرين الثاني : 04 نقاط

يحتوي صندوق على 8 كرات لا نفرق بينها باللمس، كرتان تحملان الرقم 0 وأربع كريات تحملان الرقم 2 وكرية تحمل الرقم 1 و كرية تحمل الرقم 4 .
نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الصندوق .
نعتبر الحادثتين :

A : " الكريات المسحوبة مجموع أرقامها يساوي 6 "

B : " الكريات المسحوبة جداء أرقامها 8 "

1. أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ احتمال الحادثتين A و B على الترتيب .

2. أحسب $P(A \cap B)$ هل الحادثتان A و B مستقلتان . برر ، جابتك .

3. استنتج $P_A(B)$ ثم $P(\overline{A \cap B})$.

4. ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب جداء أرقام الكرات المسحوبة .

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X . ثم أحسب $E(X)$ أمله الرياضي .

التمرين الثالث : 05 نقاط

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{v})$ (حدة الرسم 2cm)

نرمز بـ J للنقطة ذات اللاحقة i .

1. نعتبر النقط A ، B ، C و H لواحقتها على الترتيب $z_A = -3 - i$ ، $z_B = -2 + 4i$ ، $z_C = 3 - i$

و $z_H = -2$ ، علم هذه النقط على الرسم ،

2. بين أن النقطة J مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

3. أكتب الشكل الجبري للعدد المركب $\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$ استنتج أن المستقيمين (AH) و (BC) متعامدان

في بقية الرسم نقبل أن H هي نقطة تقاطع إرتفاعات المثلث ABC .

4. نرسم G إلى مركز ثقل المثلث ABC ، عين g لاحقة G ثم علم النقطة G على الرسم

5. بين أن النقط J ، H و G في إستقامة و تحقق من ذلك في الرسم،

6. نرسم A' إلى منتصف القطعة $[BC]$ لاحقاً $z_{A'} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ و K إلى منتصف القطعة $[AH]$

(أ) عين z_K لاحقة النقطة K ،

(ب) بين أن الرباعي $KHA'J$ متوازي أضلاع،

التمرين الرابع: 7 نقاط

I. g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = \ln x + \frac{1}{x}$.

1. أدرس اتجاه تغير الدالة g .

2. (أ) استنتج إشارة $g(x)$ في المجال $]0; +\infty[$

(ب) بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $g\left(1 + \frac{2}{x}\right) > 0$.

$$\begin{cases} f(x) = x - 3 + x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right); & x > 0 \\ f'(0) = -3 \end{cases}$$

II. f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ :

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. (أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3$. ماذا نستنتج؟

(ب) هل الدالة f قابلة للإشتقاق عند 0 من اليمين؟ اعطي تفسيراً هندسياً للنتيجة.

2. (أ) بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) = 2$. (يمكن إستعمال النتيجة : $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$)

(ب) استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(ج) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

3. (أ) بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$.

(ب) بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = g\left(1 + \frac{2}{x}\right)$.

(ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

4. بين المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α في المجال $]0; +\infty[$ ، ثم تحقق أن : $1.6 < \alpha < 1.7$.

5. ارسم (Δ) و المنحنى (C_f) . (نقبل أن (Δ) فوق (C_f))

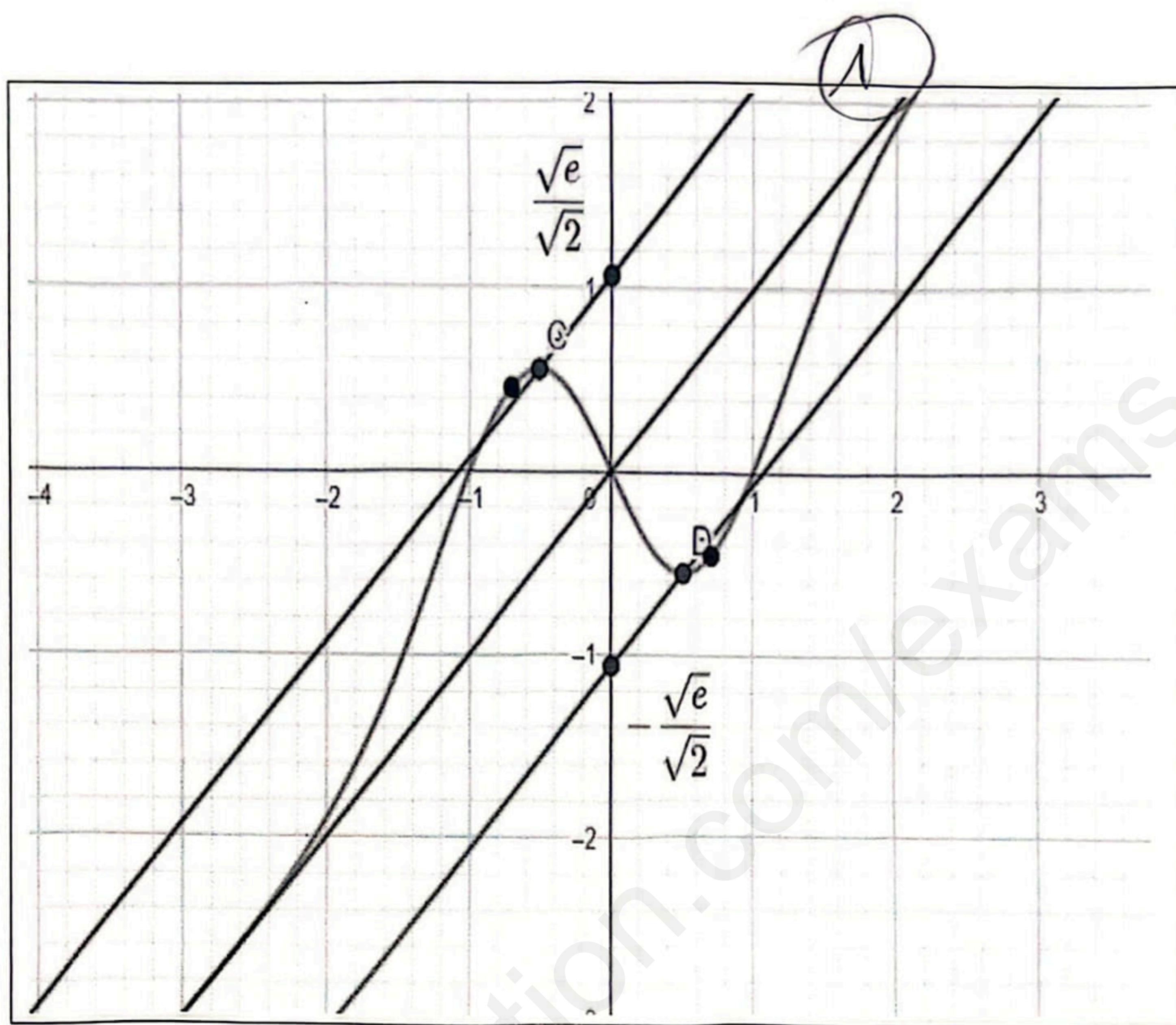
6. F الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$.

ليكن (C_F) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(أ) ادرس اتجاه تغير الدالة F دون حساب عبارة $F(x)$.

(ب) عين معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة α .

إنتهي الموضوع الثاني



(ب) ثابت (V_n) بدلالة n
 لدينا ما قبل كل n ما W
 $V_n = V_0 \cdot q^n = \ln(e) \cdot 2^n$

$$V_n = \ln(2^{e^n})$$

لدينا ما قبل كل n ما W

$$V_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2^{U_n}}\right)$$

$$e^{V_n} = 1 + \frac{1}{2^{U_n}}$$

$$e^{V_n} - 1 = \frac{1}{2^{U_n}} \quad \text{حيث}$$

$$\frac{1}{e^{V_n} - 1} = 2^{U_n}$$

$$\frac{1}{e^{(e^{V_n}-1)}} = U_n \quad \text{ومن ثم}$$

$$U_n = \frac{1}{e^{(e^{V_n}-1)} - 1}$$

$$= \frac{1}{2^{(e^{V_n}-1)}} \quad \text{حيث}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0 \quad \text{حيث}$$

نبن أن ما قبل كل n ما W

$$P_n = \frac{2^{U_0+1}}{e^{U_0+1}-1} + \dots + \frac{2^{U_n+1}}{e^{U_n+1}-1}$$

لدينا ما قبل كل n ما W

$$V_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2^{U_n}}\right)$$

$$\ln\left(\frac{2^{U_n+1}}{2^{U_n}}\right)$$

ومن ثم لدينا ما قبل كل n ما W

$$U_{n+1} - U_n = 1$$

بما أن (U_n) محدودة من الأسفل
 ومتناهية على منقارية
 3. نحسب المتتالية (V_n) المعطاة
 ما قبل كل عدد طبيعي n :

$$V_n = \ln\left(1 + \frac{1}{2^{U_n}}\right)$$

(ب) نبن أن (V_n) متسلسلة أساسية
 $q=2$

(ج) متسلسلة (V_n) هو مجموع عدد
 حقيقي q ثابت حيث
 ما قبل كل n ما W

$$V_{n+1} = q + V_n$$

لدينا ما قبل كل n ما W

$$V_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{2^{U_{n+1}}}\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{\frac{4^{U_n^2}}{4^{U_{n+1}}}}\right)$$

$$= \ln\left(1 + \frac{4^{U_{n+1}}}{4^{U_n^2}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{4^{U_n^2} + 4^{U_{n+1}}}{4^{U_n^2}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(2^{U_n+1})^2}{(2^{U_n})^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(2^{U_n+1})^2}{2^{U_n^2}}\right)$$

$$= 2 \ln\left(1 + \frac{1}{2^{U_n}}\right)$$

$$= 2 V_n$$

ومن ثم (V_n) متتالية أساسية
 أساسية $q=2$ حيث

$$V_0 = \ln\left(1 + \frac{1}{2^1}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

A: سحب كرتين من ضمن اللون "

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{A_3^2 + A_3^2}{A_8^2} + \frac{1}{2} \times \frac{3^2 + 2^2}{5^2} = \frac{13}{56} \quad (0.17)$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{A_3^2}{A_8^2} + \frac{1}{2} \times \frac{3^2}{5^2} = \frac{251}{700} \quad (0.17)$$

C: سحب كرة حمراء على الأقل
C: سحب أي كرة حمراء

$$P(\bar{C}) = \frac{1}{2} \times \frac{A_3^2}{A_8^2} + \frac{1}{2} \times \frac{2^2}{5^2} = \frac{184}{1400}$$

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{184}{1400} = \frac{1213}{1400} \quad (0.17)$$

15 إذا علمت أن الكرتين المستخرجتين من لونين مختلفتين مما هو احتمال أن يكونا من اللون نفسه

P: سحب كرتين من لونين مختلفتين

$$P(D) = 1 - P(A) = 1 - \frac{221}{700}$$

$$P(P) = \frac{443}{700} \quad (0.17)$$

$$P_{un}^{(D)} = \frac{A_1^2 \times A_3^2 \times 2}{A_8^2} = \frac{12}{28}$$

يكون X المتغير العشوائي الذي يمثل مجموع الأرقام المحتملة لرتين المستخرجتين

قيم المتغير العشوائي X

$$P(X=0) = \frac{C_2^2}{C_{13}^2} = \frac{1}{26}$$

بين أن من أجل كل n في N:

$$P_n = \left(\frac{e^{u_0+1}}{e^{u_0}} \right) \times \left(\frac{e^{u_1+1}}{e^{u_1}} \right) \times \dots \times \left(\frac{e^{u_{n-1}+1}}{e^{u_{n-1}}} \right) = e^{(e^{n+1}-1)}$$

لدينا من أجل كل n في N:

$$v_n = \ln \left(1 + \frac{1}{e^{u_n}} \right)$$

$$e^{v_n} = \left(1 + \frac{1}{e^{u_n}} \right)$$

$$e^{v_n} = \frac{e^{u_n+1}}{e^{u_n}} \quad (0.17)$$

$$P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n} = e^{v_0+v_1+\dots+v_n} = e^{s_n}$$

نحسب:

$$s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left[\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right] \quad (0.17)$$

$$= \ln(e) \left[\frac{1 - e^{n+1}}{-1} \right]$$

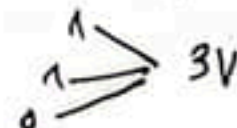
$$= \ln(e) \times [e^{n+1} - 1]$$

$$= \ln(e^{e^{n+1}-1})$$

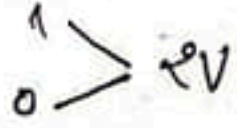
$$P_n = e^{\ln(e^{e^{n+1}-1})} = e^{e^{n+1}-1} \quad (0.17)$$

التمديد الثاني:

المزدوج من



المزدوج من



و من $z = 1 - 2i$ ن
 $z^2 + 1 = 1 - 2i$
 $z^2 = -2i$
 نضع $z = x + iy$ و من

بالمجموع

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ xy = -2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

عذ أن $x^2 = 2$
 و من $x = 1$ أو $x = -1$

عند $x = 1$ فإن $y = -1$
 و عند $x = -1$ فإن $y = 1$

و من $z = 1 - i$ أو $z = -1 + i$
 $z^2 = 2i$ و من

نضع $z = x + iy$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

و من $x^2 = 1$ أو $x = 1$ أو $x = -1$

و من $y = 1$ أو $y = -1$

و من $z = 1 + i$ أو $z = 1 - i$

II المستوي المربوع منسوب
 ال المحاور المتعامدة والمتجانسة
 $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ا) انبعاث z في

$$\frac{\sqrt{2} z_A}{z_A + z_B + z_C} = \frac{z_C}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2} z_A}{z_A + z_B + z_C} = \frac{\sqrt{2} (1 + i)}{1 + i + 1 - i + 1 + i}$$

$$= \frac{\sqrt{2} (1 + i)}{3 + i}$$

$$= \frac{\sqrt{2} (1 + i)(3 - i)}{10}$$

$$P(X=1) = \frac{C_1^1 \times C_2^1}{C_3^2} = \frac{4}{13}$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 + C_1^1 \times C_2^1}{C_3^2} = \frac{17}{39}$$

$$P(X=3) = \frac{C_2^1 \times C_1^1}{C_3^2} = \frac{8}{39}$$

$$P(X=4) = \frac{C_2^2}{C_3^2} = \frac{1}{18}$$

0112

$X = x_i$	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{17}{39}$	$\frac{8}{39}$	$\frac{1}{18}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{4}{13} + 2 \times \frac{17}{39} + 3 \times \frac{8}{39} + 4 \times \frac{1}{18}$$

$$E(X) = \frac{1}{18}$$

المعادلة التربيعية
 حل $z^2 - 2z + 5 = 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16$$

و من المعادلة التربيعية

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 - i\sqrt{16}}{2} = 1 - 2i$$

$$z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{2 + i\sqrt{16}}{2} = 1 + 2i$$

استنتاج حل المعادلة:

$$z^2 + 1 = 0$$

المعادلة $z^2 + 1 = 0$

نضع $z = z' + 1$

و من $z^2 - z' + 5 = 0$

و من المعادلة التربيعية
 $z' = 1 + 2i$ و $z' = 1 - 2i$

$|a|=1$ و $a = e^{i\theta}$ و $\arg(a) = \theta$ زاوية الدوران

$$a = \frac{z_E - z_P}{z_C - z_P}$$

$$a = \frac{(1+i) - (-1+i)}{(-1-i) - (1-i)} = \frac{1}{-i} = i$$

011 $\arg(a) = \pi/2$ و $|a|=1$

ومنذ الدوران زاوية $\pi/2$ و مركزه D.

(3) كتابة العدد $\frac{z_A - z_B}{z_D - z_C}$ على الشكل الجبري.

$$\frac{z_A - z_B}{z_D - z_C} = \frac{(1+2i) - (1-i)}{(-1+i) - (-1-i)} = \frac{1+3i}{2i}$$

$$= \frac{4i}{2i} = 2$$

ومنذ نستنتج ان $\overline{AB} = 2\overline{DC}$

r: D $\xrightarrow{z_D}$ A $\xrightarrow{z_A} z_A = a z_D + b$

r: C $\xrightarrow{z_C}$ B $\xrightarrow{z_B} z_B = a z_C + b$

$$a = \frac{z_A - z_B}{z_D - z_C} = 2$$

$$a = k \text{ و } k \in \mathbb{R}$$

الاصول تحاكي النسبة $k=2$ و مركزه D و زاوية الدوران $\pi/2$ بالاصول

$$z_A = 2z_D + b$$

$$b = z_A - 2z_D = 1+9i - 2(1+i) = -1+7i$$

$$\frac{\sqrt{2} z_A}{z_A + z_B + z_C} = \frac{\sqrt{2}(3-i+6i+2)}{10} = \frac{\sqrt{2}(5+5i)}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = e^{i\pi/4}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2} z_A}{z_A + z_B + z_C} \right)^{2011} = e^{i \frac{2011\pi}{4}} = e^{-i3\pi/4}$$

$$e^{-i3\pi/4} = \cos(-3\pi/4) + i \sin(-3\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i) = \frac{z_C}{\sqrt{2}}$$

ومنذ نستنتج ان

$$\left(\frac{\sqrt{2} z_A}{z_A + z_B + z_C} \right)^{2011} = \frac{z_C}{\sqrt{2}}$$

هنا نرى ان العدد الجبري n حتى n في العدد $\left(\frac{z_E}{\sqrt{2}} \right)^n$ واصل صرف

$$z_E = -z_C = 1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

$$\left(\frac{z_E}{\sqrt{2}} \right)^n = (1)^n e^{in\pi/4}$$

$\left(\frac{z_E}{\sqrt{2}} \right)^n$ واصل صرف نغز ان

011 $\frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad | k \in \mathbb{N}$

$$\frac{n}{4} = \frac{1}{2} + k \quad | k \in \mathbb{N}$$

$$n = 2 + 4k \quad | k \in \mathbb{N}$$

هنا نرى زاوية الدوران $\pi/2$ و مركزه D و حول C الى E

r: D $\xrightarrow{z_D}$ P $\xrightarrow{z_P} z_P = a z_D + b$

r: C $\xrightarrow{z_C}$ E $\xrightarrow{z_E} z_E = a z_C + b$

المدرسة الرابع

١ : g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$.

$$g(x) = 1 + (e^{x^2} - 1) \cdot e^{1-x^2}$$

(١) نبين أن g دالة زوجية
لدينا من أجل كل x في $\mathbb{R}$ فإن $g(-x) = g(x)$

$$g(-x) = 1 + (e^{(-x)^2} - 1) \cdot e^{1-(-x)^2}$$

$$= 1 + (e^{x^2} - 1) \cdot e^{1-x^2}$$

$$= g(x) \quad \text{O/21}$$

ومن ثم g دالة زوجية (٢) (٣)
مناقشة بالنسبة لحدود الدالة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 \quad \text{O/21}$$

وبما أن g دالة زوجية فإن

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1 \quad \text{O/21}$$

(٤) ١٢ نبين أن g من أجل كل x في $\mathbb{R}$

$$g'(x) = e^x(3 - e^{x^2}) \cdot e^{1-x^2}$$

لدينا من أجل كل x في $\mathbb{R}$

$$g'(x) = 4 \cdot e^{1-x^2} - e^x(e^{x^2} - 1) \cdot e^{1-x^2}$$

$$= e^{1-x^2} \cdot e^x(2 - (e^{x^2} - 1))$$

$$= e^x(3 - e^{x^2}) \cdot e^{1-x^2}$$

(٥) دراستنا اتجاه تغير الدالة g

على المجال $\mathbb{R}_0 + \infty$

استارة $g'(x)$ في استارة $(3 - e^{x^2})$

لأنه لدينا من أجل كل x في $\mathbb{R}_0 + \infty$

$$e^{1-x^2} > 0 \quad \text{O/21}$$

لدينا

$$4 = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \vee \quad x^2 = \frac{3}{2} \quad \vee \quad 3 - e^{x^2} = 0$$

x	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	+	-

$$T: M \rightarrow M' \quad \text{ومن ثم}$$

$$z \rightarrow z' = az + b$$

$$z' = az + b \quad \text{ومن ثم}$$

دالة النقطة المطمعة

$$a_2 = \frac{b}{1-a} = \frac{3}{1-2} = -3$$

(٢) (٣) (٤) تبين أن مجموعة النقط

في $\mathbb{H}$ لا تحتوي على حد حقيقي

$$\frac{z_E - z}{z_C - z} \quad \text{العدد}$$

تحديد مبرن

$$\arg\left(\frac{z_E - z}{z_C - z}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

$$ME \perp MC \quad \text{O/21}$$

أي المثلث EMC قائم الزاوية
دائرة محيطها بالمثلث القائم الذي
مركزها O منتصف $[EC]$ ونصف
قطرها MC

$$z_0 = \frac{z_E + z_C}{2} = \frac{+1+i-1-i}{2} = 0$$

$$K = \frac{EC}{2} = \frac{|z_C - z_E|}{2} = \frac{|-2-i|}{2}$$

$$K = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

مساحة الدائرة (Γ) هي

$$S(\Gamma) = \pi K^2 = \pi \times \frac{5}{4} = \frac{5\pi}{4} \quad \text{O/21}$$

صورة (Γ) هي دائرة مركزها

$$O' = T(O) \quad \text{O/21}$$

$$z_{O'} = 2z_0 + 3 = 3$$

ونصف قطرها $r' = 2K$

$$\text{O/21}$$

(6)

حسب مبرهنة القيمة المتوسطة
فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل
حل وحيد x على $[0, \sqrt{3/2}]$ و $[0, 1/2]$

إشارة $g(x)$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3/2}$	0	$+\sqrt{3/2}$	$+\infty$
$g(x)$		+	-	+	

(II) f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$f(x) = x(1 - e^{1-x^2})$$

نثبت أنّ f تنازلي لكل $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) + f(-x) = 0$$

لدينا f تنازلي لكل $x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) = -x(1 - e^{1-(-x)^2})$$

$$= -x(1 - e^{1-x^2})$$

$$= -f(x)$$

ومن ذلك لدينا f تنازلي لكل $x \in \mathbb{R}$.

$$f(-x) + f(x) = 0$$

$$f(-x) = -f(x)$$

ومن ذلك نستنتج أنّ f دالة فردية.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - e^{1-x^2})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - x \cdot e^{1-x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{x}{\frac{1}{1-x^2}} \cdot e^{1-x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{x}{1-x^2} \cdot (1-x^2) \cdot e^{1-x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - x = 0$$

$$= 0$$

بما أن f دالة فردية فإن

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -f(-x) = -\lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x) = 0$$

لدينا f تنازلي لكل $x \in \mathbb{R}$ فإن
 $g(x) = f(x) + f'(x)$ متزايدة
تماماً على $[0, \sqrt{3/2}]$

لدينا f تنازلي لكل $x \in \mathbb{R}$ فإن

$g(x) = f(x) + f'(x)$ متزايدة
تماماً.

إشارة $g(x)$

x	0	$\sqrt{3/2}$	$+\infty$
$g(x)$	+	-	

$$g(x) = 1 + (2\sqrt{3/2} - 1) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$= 1 + (3 - 1) \cdot e^{-1/2}$$

$$= 1 + \frac{2}{\sqrt{e}}$$

$$g(\sqrt{3/2}) = 1 + (2(\sqrt{3/2}) - 1) \cdot e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{3/2})^2}$$

$$= 1 + (3 - 1) \cdot e^{-1/2}$$

$$= 1 + \frac{2}{\sqrt{e}}$$

بما أن g دالة زوجية فإن اتجاه

تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ متماثل

المناظرة يكون متعاكس

x	$-\infty$	$-\sqrt{3/2}$	0	$+\sqrt{3/2}$	$+\infty$
$g(x)$		+	-	+	-

x	$-\infty$	$-\sqrt{3/2}$	0	$+\sqrt{3/2}$	$+\infty$
$g(x)$		+	-	+	-

جدول تغير الدالة g

x	$-\infty$	$-\sqrt{3/2}$	0	$+\sqrt{3/2}$	$+\infty$
$g(x)$		+	-	+	-

x	$-\infty$	$-\sqrt{3/2}$	0	$+\sqrt{3/2}$	$+\infty$
$g(x)$		+	-	+	-

$$g(x) = 1 + (2\sqrt{3/2} - 1) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$g(x) = 1 + (3 - 1) \cdot e^{-1/2}$$

$$g(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{e}}$$

$$g(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{e}}$$

$$g(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{e}}$$

$$g(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{e}}$$

$$g(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{e}}$$

$$f(x) = x \left(1 + \frac{1}{e^{x^2}} \right)$$

$$e^{1-x^2} = \frac{1}{e^{x^2-1}}$$

0/25

$$f(x) = x \left(1 + \frac{1}{e^{x^2}} \right)$$

مباين 0.12 و 0.15 عند 0
 $-0.05 \leq f(x) \leq 0.15$
 و مباين 0.16 و 0.12
 $0.12 \leq f(-x) \leq 0.16$
 (4) بنينا ان المسطحين (A) ذو المحل
 $y = k$ مقارب مائل لـ (E)
 عند 0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x(1 - e^{1-x^2}) - x]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{1-x^2}$$

0/2

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} \cdot (1 - x^2) \cdot e^{1-x^2}$$

0/3

صفت (D) ان المقدار 0
 مقارب مائل لـ (E) عند 0
 مباين لـ (E) جزالة مزدوجة فان (E)
 قبل مسمين مقارب مائل عند 0
 دهر (D) كالنسبة لعدد المثل
 ونحوها على اننا نعلم دهر
 السطح كالنسبة لـ 0 و 0

$$\begin{cases} x = -x \\ y = -y \end{cases}$$

0/2

$$(D) : y = x \text{ و } y = -x$$

$$y = x \text{ و } -y = -x$$

$$(D') \text{ معادلة } y = x$$

(D') مقارب لـ (E) عند 0 بنينا
 على (D)

(8)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = g(x)$$

دنيا مابل كل ص 1K

$$f'(x) = 1 + (1 - e^{1-x^2}) + e^x \cdot x \cdot e^{1-x^2}$$

$$= 1 - e^{1-x^2} + e^{x^2} x e^{1-x^2}$$

$$= 1 + (x^2 - 1) e^{1-x^2}$$

$$= g'(x) \text{ 0/1}$$

$$g'(x) \text{ اشارة } f'(x) \text{ مابل } g(x)$$

0/25

x	-∞	-x	+x	+∞
f'(x)	+	+	-	+

دنيا مابل كل ص 1K
 فان $f'(x) \geq 0$ لـ f متزايدة
 تماماً

دنيا مابل كل ص 1K
 فان $f'(x) \leq 0$ لـ f متناقصة
 تماماً
 جدول لـ f

x	-∞	-x	+x	+∞
f'(x)	+	+	-	+

f(x)	-∞	f(-x)	f(x)	+∞
------	----	-------	------	----

$$f(x) \approx 0.5e^1$$

$$f(-x) = -0.1e^1$$

ادرجار حيدر د $f(x)$ على
 احوال [0.1, 1.1]
 دما

٤) نبي أن (٥) يعبر نقطة ازو طاف
 مطالب بينهما.

نسباً ما اطل كل ما ١٢

$$f''(u) = g'(u)$$

٥) $f''(u) = 0$ و $f'(u) = 0$
 اما $u = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ او $u = \sqrt{\frac{3}{2}}$ او $u = 0$

u	-∞	$-\sqrt{\frac{3}{2}}$	0	$+\sqrt{\frac{3}{2}}$	∞
$f''(u)$		+	-	+	-

(٥) يعبر نقطة ازو طاف

مواصلة النسب $u = 0$
 $u = \sqrt{\frac{3}{2}}$ و $u = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

٥) من ايجزة انما النسب اعني من
 هو اهل هذه النقطة مفيدة

٥) لتصف ان معادلة العمل
 د (٥) عند النقطة ذات الصلة
 $y = (1-e) \cdot u$ و $u_0 = 0$

(٦) مماس د (٥) عند النقطة ذات
 الصلة $u_0 = 0$ معادلة

$$y = f'(0)(u-0) + f(0)$$

$$f'(0) = 1 + (e(0)^2 - 1) \cdot e^{1-0^2} = 1 - e$$

$$f(0) = 0$$

$$y = (1-e)u$$

٦) رسم (٦) (٥) و (٥) و (٥) و (٥)

٦) نبي ان (٥) يعبر مماسين
 مناظرين د جواريا ن (٥)

$$f'(u) = 1 \text{ يعني ان } f'(u) = 1$$

$$1 + (e u^2 - 1) \cdot e^{1-u^2} = 1$$

$$(e u^2 - 1) \cdot e^{1-u^2} = 0$$

(٩)

١) $e u^2 - 1 = 0$ و $u^2 = \frac{1}{e}$
 اما $u = \frac{1}{\sqrt{e}}$ او $u = -\frac{1}{\sqrt{e}}$

١) $u_0 = \frac{1}{\sqrt{e}}$ او $u_0 = -\frac{1}{\sqrt{e}}$
 نبي معادلة كل منهما

$$y = f'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\left(u - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

$$= 1\left(u - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}}\left(1 - e^{1-\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}}\left(1 - e^{1-\frac{1}{e}}\right)$$

٥) $= \frac{1}{\sqrt{e}}\left(1 - e^{\frac{1}{e}}\right)$
 $= \frac{1}{\sqrt{e}}(1 - \sqrt{e})$

$$y = \left(u - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) + \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{e}$$

$$= u - \frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{e}$$

(٦) من زفير (٦) بالنسبة
 للمبدأ لان الالة ف جارية

دستور الشامل
 بالنسبة للمبدأ

$$\begin{cases} x = -x \\ y = -y \end{cases}$$

$$-y = -x - \frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{e}$$

$$y = x + \frac{1}{\sqrt{e}}\sqrt{e}$$

(٦) مماس د (٥) عند

النقطة ذات الصلة

$$u_0 = -\frac{1}{\sqrt{e}}$$

١. لتبين حسب ختم الوسيط m
عدد وامتارعة حلول المعادلة

$$f(x) = x + m \cdot (1)$$

لتبين اقلية ختم (p_m) ان y

$$y = x + m$$

$$(67) \quad (p_m) \parallel (1) \text{ و } (p_m) \parallel (2)$$

حل المعادلة $f(x) = x + m$ يؤول
الاجابة مواصلة نقطة تقاطع
 (p_m) و (e) .

من اجل $m < -\frac{\sqrt{e}}{2}$ فان المعادلة

ليس لها حل

من اجل $m = -\frac{\sqrt{e}}{2}$ فان المعادلة (1)

تقبل حل مضاعف $x = \frac{1}{2}$

من اجل $m > -\frac{\sqrt{e}}{2}$ فان

المعادلة (1) تقبل حلان موجبان

من اجل $m \in \left[-\frac{\sqrt{e}}{2}, \frac{\sqrt{e}}{2}\right]$ فان

المعادلة تقبل حلان سالبان

من اجل $m = +\frac{\sqrt{e}}{2}$ فان المعادلة

(1) تقبل حل مضاعف $x = \frac{1}{2}$

من اجل $m > \frac{\sqrt{e}}{2}$ فان المعادلة

ليس لها حل .

الرسم (1)



MELINA PRIVATE SCHOOL

ثانوية ميلينا الخاصة

الموسم الدراسي : 1445 هـ / 23 - 2024 م

البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات

للسنة الثالثة ثانوي شعبة علوم تجريبية

التاريخ : 2024/05/13

أستاذ المادة: مزروح يوسف

المدة : 3 ساعات ونصف

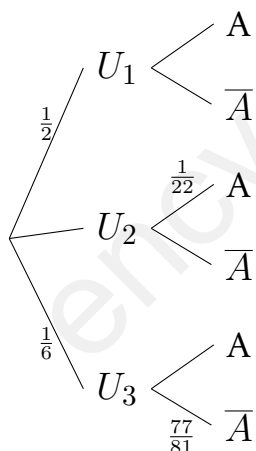
على المترشح إختيار احد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: 05 نقاط

ثلاث صناديق غير شفافة U_1 ، U_2 و U_3 يحتوي الصندوق U_1 على 6 كرات بيضاء و 5 كرات خضراء و 4 كرات حمراء ويحتوي الصندوق U_2 على 5 كرات بيضاء و 4 كرات خضراء و 3 كرات حمراء ويحتوي الصندوق U_3 على 4 كرات بيضاء و 3 كرات خضراء و 2 كرات حمراء (كل الكرات متشابهة ولا نفرق بينها عند اللمس) نرمي زهرة نرد غير مزيف ذات 6 اوجه مرقم من 1 إلى 6

إذا ظهر رقم زوجي فإننا نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من U_1 وإذا ظهر رقم فردي اكبر من 2 فإننا نسحب عشوائيا كرتين على التوالي دون إرجاع من U_2 وفي بقية الحالات نسحب كرتين على التوالي مع الإرجاع من U_3 نعتبر الأحداث : : A "سحب كرتين حمراوين" ، B "سحب كرتين من نفس اللون"



1 بين أن $P_{U_1}(A) = \frac{2}{35}$

2 أكمل شجرة الإحتمالات المرفقة مبررا خطوات الحساب

3 بين أن $P(A) = \frac{9721}{187110}$ ثم أحسب $P_{U_3}(B)$.

4 علما أن الكرتين حمراوان، ما إحتمال أن تكونا من نفس الصندوق U_1

نفرغ الآن جميع الكرات من الصناديق الثلاثة ونضعها في صندوق واحد ونسحب عشوائيا 3 كرات بدون إرجاع ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة

1 عين قانون إحتمال المتغير العشوائي x ثم أحسب امله الرياضي

2 إستمع $P(\ln(\sqrt{x+1}) - \frac{1}{2} > 0)$

التمرين الثاني: 04 نقاط لكل سؤال إجابة واحدة فقط صحيحة عينها مع التعليل:

1 القيمة المتوسطة للدالة $(x-2)e^{x^2-4x+1}$ على المجال $[0;4]$ هي

(أ) $m = \frac{1-e}{4}$ (ب) $m = 0$ (ج) $m = \frac{e^2-e}{4}$

2 العدد المركب A حيث: $A = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1445} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2024}$ يساوي:

(أ) $A = -i\sqrt{3}$ (ب) $A = -1$ (ج) $A = i\sqrt{3}$

3 المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 8 \times 3^{2n} - 2n + 1$

نضع $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ يساوي:

(أ) $9^{n+1} - n^2$ (ب) $9^{n+1} - (n+1)^2$ (ج) $9^{n+1} + n^2$

4 نعتبر المعادلة التفاضلية: $-y' + 2y - 2 = 0$ الحل الخاص لها والذي يحقق $y(0) = 2024$ هو:

(أ) $y = 2023e^{-2x} + 1$ (ب) $y = -2023e^{2x} + 1$ (ج) $y = 2023e^{2x} + 1$

التمرين الثالث: 04 نقاط

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$u_n = \int_n^{n+1} e^{1-x} dx$$

1 أحسب u_0 ثم برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n > 0$

2 أحسب u_n بدلالة n .

3 برهن أن المتتالية (u_n) هندسية أساسها $\frac{1}{e}$

4 أدرس إتجاه تغير المتتالية (u_n)

5 إستمع أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم أحسب نهايتها.

6 ليكن المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$:
أحسب S_n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

التمرين الرابع: 07 نقاط

-I g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = 2(e^x + e^{-x}) - 3$

1 أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها. (لا يطلب حساب النهايات)

2 إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي $x: g(x) > 0$

-II f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ ب: $f(x) = \frac{2xe^x - 2x - 1}{e^x - 1}$

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2 (أ) بين أن $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(e^x - 1)^2}$ ثم أدرس إتجاه تغير الدالة f .

(ب) شكل جدول تغيرات الدالة f

3 (أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

(ب) أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

(ج) بين أن المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

4 بين أن $f(-x) + f(x) = 1$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

5 (أ) ارسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) . (يعطى $f(0,6) = f(-0,86) = 0$)

(ب) بين أن جميع المستقيمات ذي المعادلات $y = mx + \frac{1}{2}$ تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيينها. حيث $(m \in \mathbb{R})$

(ج) ناقش بياننا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = mx + \frac{1}{2}$

6 (أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم: $f(x) = 2x - \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$

(ب) S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و (Δ) والمستقيمات $x = 1$ و $x = 2$

بين أن: $S = (\ln(e + 1) - 1)u.a$

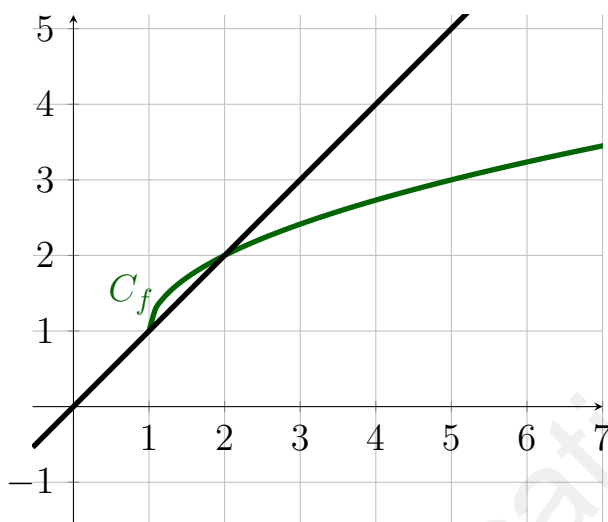
الموضوع الثاني

التمرين الأول: 05 نقاط

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1} + 1$ في الشكل المقابل المنحنى (C_f) الممثل للدالة f المرفقة بالمتتالية (u_n) والمعرفة بالعبارة $f(x) = \sqrt{x-1} + 1$ والمنصف الأول ذي المعادلة $y = x$

1 (أ) أعد رسم الشكل ثم مثل الحدود $u_0 ; u_1 ; u_2$

(ب) ماهو تخمينك حول إتجاه تغير المتتالية (u_n)



2 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 < u_n \leq 6$

3 تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n - 1}(1 - \sqrt{u_n - 1})$$

4 إستنتج أن (u_n) متناقصة ثم بين انها متقاربة وعين نهايتها.

5 (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$0 \leq u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{2}(u_n - 2)$$

(ب) إستنتج أن $0 \leq u_n - 2 \leq 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ثم عين نهاية (u_n)

التمرين الثاني: 04 نقاط

1 كيس به 3 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء نسحب من الكيس 3 كرات على التوالي بدون إرجاع الكرة المسحوبة.

(أ) أحسب إحتمال الحادثتين :

A : "الحصول على 3 كرات من نفس اللون."

B : "الحصول على كرة سوداء واحدة على الأقل."

2 في هذا الجزء نفرض ان عدد الكرات السوداء هو n حيث n عدد طبيعي كفيي اكبر تماما من 2

نقوم بسحب كرتين على التوالي بدون إرجاع الكرة المسحوبة

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات السوداء المسحوبة.

$$(أ) \text{ بين أن } P(x=1) = \frac{6n}{(n+3)(n+2)}$$

$$(ب) \text{ عرف قانون الاحتمال لـ } X \text{ ثم بين أن } E(x) = \frac{2n}{n+3}$$

التمرين الثالث: 04 نقاط

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط $C; B; A$ حيث : $z_C = z_A \times z_B$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_A = 1 + i\sqrt{3}$

$$1 \text{ حل في المجموعة } \mathbb{C} \text{ المعادلة ذات المجهول } z : z^2 - 2z + 4 = 0$$

$$2 \text{ (أ) بين أن المثلث } ABC \text{ متقايس الأضلاع}$$

$$(ب) \text{ عين } z_G \text{ لاحقة النقطة } G \text{ مركز ثقل المثلث } ABC$$

$$(ج) \text{ بين أن } G \text{ مركز الدائرة المحيطة بالمثلث } ABC$$

$$3 \text{ (أ) هي مجموعة النقط } M \text{ من المستوي ذات اللاحقة } z \text{ حيث : } z = 2 + 2e^{i\theta} \text{ و } \theta \in \mathbb{R}$$

$$(أ) \text{ تحقق أن النقطة } A \text{ تنتمي إلى المجموعة } (\lambda)$$

$$(ب) \text{ إستنتج مجموعة النقط } (\lambda)$$

$$4 \text{ (أ) دوران مركزه } A \text{ ويحول } B \text{ إلى } C$$

$$(أ) \text{ أكتب العبارة المركبة للدوران } r$$

$$(ب) \text{ عين مجموعة النقط } M \text{ من المستوي ذات اللاحقة } z \text{ حيث : } |\overline{z} - 1 - i\sqrt{3}| = |z - 1 - i\sqrt{3}|$$

التمرين الرابع: 07 نقاط

I- الدالة العددية المعرفة على $D =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln(1 + \frac{1}{x}) + x + 1$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1 أحسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2 (أ) بين أنه من أجل كل x من D فإن: $f'(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + x}$

(ب) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3 (أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y = x + 1$

(ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)

4 بين أنه من أجل كل x من D : $f(-1-x) + f(x) = 1$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

5 بين أن (C_f) يقبل مماسان (T_1) و (T_2) يوازيان المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x + e$ ثم عين معادلة كل منهما.

6 أرسم (T_1) ، (T_2) ، (Δ) و (C_f)

7 تحقق أن الدالة $x \ln(1 + \frac{1}{x}) + \ln(|x + 1|)$ أصلية لـ $\ln(1 + \frac{1}{x})$

8 نسمي S المساحة للحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمت $y = x + 1$ و $x = 1$ و $x = 2$

بين أن: $S = (3\ln(\frac{3}{2}) - \ln(2))u.a$

II- دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = f(|x|)$

1 بين أن h دالة زوجية.

2 إشرح كيف يمكن إنشاء (C_h) إنطلاقا من (C_f) ثم أرسمه في نفس المعلم.



BAC 2024 SE- M-R-34032



مديرية التربية لولاية برج بوعرييج

ثانوية كيال عراس - تيكستار

دورة : ماي 2024

الشعبة: علوم تجريبية



المدة: 03 ساعات

امتحان البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

عَيِّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

(1) يتكون فريق عمل من 4 إناث و 3 ذكور، يراد تشكيل لجنة مكونة من رئيس ونائب لل، احتمال أن تكون اللجنة من الجنسين هو:

$$\text{أ) } \frac{1}{7} \quad , \quad \text{ب) } \frac{3}{7} \quad , \quad \text{ج) } \frac{4}{7}$$

(2) طبيعة المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $\int_n^{n+1} e^{3-x} dx$ هي:

أ) هندسية ، ب) حسابية ، ج) لا حسابية و لا هندسية

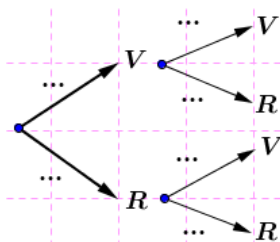
(3) نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{a}{b + e^{-x}}$ حيث a و b عدنان حقيقيان.علما أن: $f(0) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ ، قيمتي العددين الحقيقيين a و b هما :أ) $a = 6$ و $b = 2$ ، ب) $a = 2$ و $b = 3$ ، ج) $a = 4$ و $b = 1$ (4) في المستوي المركب A ، B و C نقط لواحقها على الترتيب: $z_A = 1 + 2i$ ، $z_B = 1 - 2i$ ، $z_C = i$ لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي متوازي أضلاع هي :أ) $z_D = -3i$ ، ب) $z_D = 1 - \sqrt{3}i$ ، ج) $z_D = 1 + i$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 5 كرات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس: منها 2 كرية خضراء و 3 كريات حمراء

(1) نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الصندوق نرمز بـ X إلى المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الكريات الخضراء المتبقية.أ) تحقق أن $P(X = 2) = \frac{3}{10}$ ، ثم عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أملا الرياضياتي $E(X)$ ب) احسب احتمال الحدث A : " الكرتان المسحوبتان من نفس اللون "

(2) نسحب الآن من الصندوق كرتين على التوالي بالطريقة التالية: إذا كانت الكرية المسحوبة حمراء نعيدها إلى الصندوق أمّا إذا

كانت الكرية المسحوبة خضراء لا نعيدها، نرمز للكربية الخضراء بالرمز V ، وإلى الكرية الحمراء بالرمز R 

أ) أنقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها.

ب) احسب احتمال الحدثين B : " الكرية المسحوبة الأولى خضراء " C : " احدى الكرتين المسحوبتين فقط خضراء "ج) بيّن أن احتمال أن يبقى في الصندوق 2 كرية خضراء هو $\frac{9}{25}$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية (u_n) معرفة بدورها الأول : $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$.

(1) أ) برهن أننا من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_n \leq 4$.

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة و احسب نهايتها .

(2) نعرف من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n = \frac{4 - u_n}{1 - u_n}$.

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ ، يطلب حساب حدتها الأول v_0 .

ب) عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

ج) احسب نهاية المتتالية (u_n) من جديد .

د) احسب بدلالة n المجموعين : $T_n = v_0 + \frac{v_1}{4} + \frac{v_2}{4^2} + \dots + \frac{v_n}{4^n}$ و $K_n = \frac{3}{1-u_0} + \frac{3}{1-u_1} + \frac{3}{1-u_2} + \dots + \frac{3}{1-u_n}$.

(3) أ) أثبت أننا من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

ب) استنتج أننا من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ، ثم احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ مرة أخرى .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

(1) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x+2)e^{x-2} - 2$.

(1) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

(2) أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق من أن $1,45 < \alpha < 1,46$.

ب) استنتج إشارة $g(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x .

(II) f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x^2 - x^2 e^{x-2}$.

نسمي (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) أ) بين أننا من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -x.g(x)$.

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

ج) بين أن $f(\alpha) = \frac{\alpha^3}{\alpha+2}$ ، ثم أعط حصرا لـ $f(\alpha)$ حيث α هو العدد الحقيقي المعروف في الجزء (1) .

(3) ليكن (Γ) المنحنى الممثل للدالة $x \mapsto x^2$ على $\mathbb{R}$:

أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x^2] = 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

ب) ادرس الوضعية النسبية للمنحنيين (C_f) و (Γ) .

(4) اكتب معادلة لـ (T) المماس لـ (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 2 .

(5) أنشئ (T) ، (Γ) و (C_f) في المجال $]-\infty; 2]$.

(6) لتكن H الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{x-2}$. حيث a, b, c أعداد حقيقية .

أ) عين الأعداد الحقيقية a, b و c بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x \mapsto x^2 e^{x-2}$ المعرفة على $\mathbb{R}$.

ب) احسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و (Γ) و المستقيمين اللذين معادلتهما $x = 0$ ، $x = 2$.

التمرين الأول : (04 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6\sqrt{2}z + 36 = 0$

(2) المستوي المركب منسوب إلى M المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

لتكن النقط A, B, C, D التي لاحتقاتها على الترتيب: $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = 6\sqrt{2}$ ، $z_D = \frac{z_C}{2}$

(أ) اكتب z_A, z_B و $(1+i)z_A$ على الشكل الأسّي

(ب) اكتب النسبة $\frac{z_B}{z_A}$ على الشكل الأسّي ، ثم استنتج طبيعة المثلث OAB

(ج) بين أن النقط O, A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها D . يطلب تعيين نصف قطرها .

(د) أحسب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ ثم جد قياسا للزاوية $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB})$. ما هي طبيعة الرباعي $OACB$ ؟

(3) بين أن العدد $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2024}$ هو عدد حقيقي .

(4) عين وأنشئ (E) مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوي ذات اللاحقة z حيث $|2iz - 6\sqrt{2}i| = |z_A - \sqrt{2} - \sqrt{2}i|$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

صندوق U يحتوي على 8 كريات سوداء ثلاثة منها تحمل الرقم -1 ، ثلاثة منها تحمل الرقم 0 واثنان منها تحمل الرقم 1 و كرتين حمراوين تحملان الرقمين 1 و 2 ، لا نميز بين الكرات عند اللمس.

(1) نسحب عشوائيا من الصندوق كرتين في آن واحد

(أ) أحسب احتمال الأحداث التالية:

A : " سحب كرتين من نفس اللون " ، **B** : " سحب كرة سوداء على الأكثر " و **C** : " سحب كرة سوداء على الأقل " .

(ب) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب جداء الرقمين المسجلين على الكرتين

عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله و أحسب أملا الرياضياتي $E(X)$.

(2) نسحب عشوائيا من الصندوق n كرة في آن واحد حيث $1 \leq n \leq 9$

- ونعتبر الحدث D : " سحب كرة واحدة حمراء

أحسب $P(D)$ بدلالة n ، ثم عين قيم العدد الطبيعي n اذا علمت أن: $P(D) = \frac{7}{15}$.

(3) نضيف الآن m كرة حمراء إلى الصندوق ثم نسحب كرتين على التوالي دون إرجاع

- ونعتبر الحدث F : " سحب كرتين مختلفتين في اللون " .

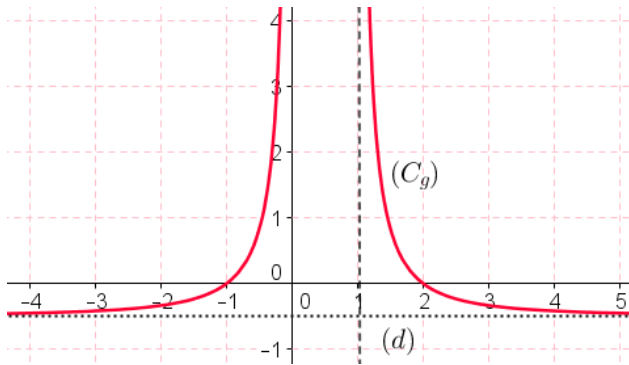
(أ) أحسب $P(F)$ بدلالة m .

(ب) استنتج $\lim_{m \rightarrow +\infty} P(F)$ تم أعط تفسيراً للنتيجة المتحصل عليها .

التمرين الثالث : (04 نقاط)

- المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بحددها الأول : $u_0 = 1$ و من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = -2 + \sqrt{5 + (u_n + 2)^2}$.
- (1) برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 1$.
 - (2) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة .
 - (3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = (2 + u_n)^2$.
 (أ) بين أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حددها الأول .
 (ب) بين أن العدد 1954 هو حد من حدود المتتالية (v_n) .
 (ج) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n ، ثم احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 - (4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = e^9 \times e^{14} \times e^{19} \times \dots \times e^{5n+9}$.
 عين قيمة العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $\ln P_n = 1998$.

التمرين الرابع : (07 نقاط)



- (I) الشكل المقابل يمثل (C_g) منحنى الدالة g المعرفة على $] -\infty; 0[\cup] 1; +\infty[$: $g(x) = \frac{ax^2 + x + 2}{2x(x+b)}$ حيث a و b عدنان حقيقيان ، (d) المستقيم ذا المعادلة : $y = -\frac{1}{2}$.
- (1) بقراءة بيانية أجب عن الأسئلة التالية :
 (أ) عين نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها .
 (ب) عين كلا من : $g(2)$ و $g(-1)$.
 (2) مستعينا بما سبق ، بين أن : $a = b = -1$.
 (3) تحقق أن من أجل كل $x \in D_g$: $g(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$.
 (4) احسب العدد الحقيقي I حيث : $I = \int_3^2 g(x) dx$ و فسر هندسيا .
- (II) الدالة العددية f معرفة على $] -\infty; 0[\cup] 1; +\infty[$: $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- (1) (أ) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها .
 (ب) بين أن المنحني (C_f) يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة ، أحدها المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = -\frac{1}{2}x$.
 (ج) ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
 (3) بين أن من أجل كل $x \in D_f$ فإن : $f'(x) = g(x)$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .
 (4) أنشئ (Δ) و (C_f) .
 - (5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة : $f(x) = -\frac{x}{2} + m$.
 - (6) F الدالة العددية المعرفة على $] 1; +\infty[$: $F(x) = x \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) - \ln(x-1) - \frac{x^2}{4}$.
 (أ) تحقق أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على $] 1; +\infty[$.

- (ب) احسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) وحامل محاور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهم $x = 2$ ، $x = \frac{3}{2}$.

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:
الموضوع الأول

التمرين الأول (5, 04 ن):

من أجل تحضير امتحان استداركي لمادة الرياضيات في ثانوية أم موسى بوجمعة أرادت مديرة الثانوية اختيار لجنة تضم

3 أعضاء من هيئة التدريس التي تتكون من 3 أستاذات و 4 أساتذة، أستاذتان وأستاذ من ثانوية أم موسى و أستاذة و 3 أساتذة من ثانوية قطاف.

1. أحسب احتمال الحوادث التالية: A : "توجد أستاذة واحدة في اللجنة". B : "توجد على الأقل أستاذة في اللجنة".

C "أعضاء اللجنة كلهم من ثانوية قطاف". D "اللجنة تضم أستاذتان من أم موسى وأستاذة من قطاف"

2. توجد في هيئة التدريس الأستاذة العارفي والأستاذة بن يوسف، ولتكن:

الحدث E "إما الأستاذة العارفي وإما الأستاذة بن يوسف في اللجنة". والحدث F "أن لا تكون الأستاذة العارفي في اللجنة"

أ. بين أن $P(E) = \frac{4}{7}$ ، ثم أحسب $P(F)$.

ب. أحسب احتمال أن لا تكون الأستاذة بن يوسف في اللجنة علما أن الأستاذة العارفي ليست من ضمنها.

3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل لجنة مختارة عدد الأستاذات اللواتي لم يشاركن فيها.

عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين الثاني (04 ن):

(U_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $U_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 3 - \frac{2}{U_n}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $2 < U_n \leq 3$

2. بين أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة.

3. لتكن المتتالية (V_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = \ln\left(\frac{U_{n-1}}{U_{n-2}}\right)$

أ. بين أن (V_n) متتالية حسابية أساسها $\ln 2$ يطلب تعيين حدها الأول.

ب. أكتب V_n بدلالة n ، ثم بين أن $U_n = \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+1}-1}$.

ج. أحسب نهاية المتتالية (U_n) .

4. أ. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_n$.

ب. بين أن $\left(\frac{U_0-1}{U_0-2}\right) \times \left(\frac{U_1-1}{U_1-2}\right) \times \left(\frac{U_2-1}{U_2-2}\right) \times \dots \times \left(\frac{U_n-1}{U_n-2}\right) = 2^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$ **التمرين الثالث (04 ن):**

1. نعتبر العدد المركب $z = 1 + i$ و n عدد طبيعي، يكون z^n حقيقيا سالبا إذا كان:
 - أ. $(k \in \mathbb{N}) \quad n = 8k + 4$
 - ب. $(k \in \mathbb{N}) \quad n = 4k + 8$
 - ج. $(k \in \mathbb{N}) \quad n = 8k$
2. إذا كان الأمل الرياضي لمتغير عشوائي X يساوي 2 ($E(X) = 2$) فإن $E(2024X + 1445)$ يساوي:
 - أ. 4048
 - ب. 5493
 - ج. 2890
3. الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y' = 2y + 5$ والذي يحقق $y(\ln 2) = 1$ هو:
 - أ. $y(x) = e^{x \ln 2} - \frac{5}{2}$
 - ب. $y(x) = 7e^{2x} - \frac{5}{2}$
 - ج. $y(x) = \frac{7}{8}e^{2x} - \frac{5}{2}$
4. A, B و C نقط لواحقها على الترتيب: $z_A = 1 + 2i, z_B = 1 - 2i$ و $z_C = i$. لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع هي:
 - أ. $z_D = 5i$
 - ب. $z_D = 1 - i\sqrt{3}$
 - ج. $z_D = 1 + i$

التمرين الرابع (07, 5 ن):

- أولا: g دالة معرفة على المجال $]-\infty, 1[$ بـ: $g(x) = x^2 - 2x - 1 + \ln(1 - x)$
1. أحسب نهايتي الدالة g عند طرفي مجموعة تعريفها.
 2. أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
 3. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,32 < \alpha < -0,31$.
 4. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-\infty, 1[$.
- ثانيا: f دالة معرفة على المجال $]-\infty, 1[$ بـ: $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2 - \ln(1-x)}{1-x}$ (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة الثانية بيانيا.
 2. تحقق أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty, 1[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{(1-x)^2}$.
 3. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
 4. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين وحيدين β و γ حيث $0,5 < \beta < 0,6$ و $-3,2 < \gamma < -3$.
 5. اكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.
 6. أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.
 7. أدرس الوضعية النسبية لـ (C_f) و (Δ) .
 8. أرسم (T) ، (Δ) و (C_f) .
 9. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $(x+1)^2 = \ln(1-x) + 3 - mx + m$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول (04 ن):

يحتوي صندوق على 5 كرات متماثلة لانفرق بينها عند اللمس منها 2 كريات خضراء و 3 كريات حمراء.

1. ن سحب عشوائيا في آن واحد كريتين من الصندوق ونرمز بـ X للمتغير العشوائي الذي يمثل عدد الكرات الخضراء المسحوبة.

أ. تحقق أن $P(X = 0) = \frac{3}{10}$ ، ثم عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ، وأحسب أمله الرياضي $E(X)$.

ب. أحسب احتمال الحادثة A "الكريتان المسحوبتان من نفس اللون"

2. ن سحب الآن كريتين من الصندوق على التوالي بالطريقة التالية: إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء نعيدها إلى

الصندوق أما إذا كانت الكرة المسحوبة خضراء لا نعيدها إلى الصندوق. نرمز للكرة الخضراء بالرمز V وإلى الكرة الحمراء بالرمز R .

أ. أنقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها.

ب. أحسب احتمال الحادثتين: B "الكرة المسحوبة الأولى خضراء"

C "إحدى الكريتين المسحوبتين خضراء"

ج. بين أن احتمال أن يبقى في الصندوق كريتين خضراوين هو $\frac{9}{25}$.

التمرين الثاني (04, 5 ن):

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1, +\infty[$ بـ: $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى

المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. و (Δ) المستقيم ذي المعادلة $y = x$ كما هو موضح في الشكل المقابل.

نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحددها الأول $U_0 = \frac{5}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$.

1. أ. أنقل الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على حامل

محور الفواصل الحدود U_0, U_1, U_2 و U_3 دون حسابها.

ب. ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها.

2. أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < U_n < 2$

ب. أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3. لتكن المتتالية (V_n) المعرفة بحددها العام من أجل كل

عدد طبيعي $V_n = e^{-\frac{1}{2} + 2n}$.

أ. بين أن (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

4. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

التمرين الثالث (04 ن):

1. حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 - 2z + 5 = 0$

2. نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{u}, \vec{v})$ النقط A, B, C و D التي لواحقتها

على الترتيب $z_A = 3 + 2i, z_B = -3, z_C = -(1 + 6i)$ و $z_D = 1 - 2i$.

أ. أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $z = \frac{z_A - z_D}{z_B - z_D}$.

ب. أكتب العدد المركب z على الشكل الأسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث DAB .

3. أ. لتكن النقطة G مرجح الجملة $\{(A, 1), (B, -1), (C, 1)\}$.

ب. أحسب z_G لاحقة النقطة G .

ج. عين طبيعة المجموعة (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z من المستوي حيث:

$$\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = 4\sqrt{5}$$

التمرين الرابع (07, 5 ن):

II. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (2x + 1)e^{-x} + 1$.

1. أحسب نهايتي الدالة g .

2. أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث: $\alpha \in]-0,74; -0,73[$. ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (-2x - 3)e^{-x} + x$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2. بين أن من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

3. بين أن $f(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{2}{2\alpha+1}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

5. ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم المقارب (Δ) .

6. بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف I يطلب تعيين إحداثيتها، ثم أكتب معادلة المماس (T) لـ (C_f) عند I .

7. أرسم (Δ) ، (T) و (C_f) .

8. بين أن الدالة $H : x \rightarrow (2x + 5)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h : x \rightarrow (-2x - 3)e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

9. أحسب بـ c^2 المساحة $A(\alpha)$ للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات المعرفة بالمعادلات

$$x = \alpha, y = x \text{ و } x = 2.$$



المدة: 03 سا و 30د

إختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $]-3; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = \frac{3x+4}{x+3}$

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = -1$ ،

ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$ (أنظر الشكل المقابل)

أ- أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبرزا خطوط التمثيل ثم ضع تخمينا حول اتجاه

تغير المتتالية (u_n) ونقارها .

ج- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-1 \leq u_n < 2$

3- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة

4- لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ يطلب تعيين حددها الأول.

ب- أكتب كلا من u_n و v_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

ج- أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

د- واستنتج بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n}$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

1- حل في C المعادلة $(z + \sqrt{3} - i)(z - 2i)(z^2 - 8\sqrt{3}z + 64) = 0$

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B ، C و D

التي لواحقتها على الترتيب $Z_A = 4\sqrt{3} - 4i$ ، $Z_B = 4\sqrt{3} + 4i$ ، $Z_C = -\sqrt{3} + i$ و $Z_D = 2i$

2- أ- أكتب Z_A و Z_B على الشكل الأسّي .

ب- بين أن العدد Z_B^{1962} حقيقي.

ج- أحسب الأطوال OA ، OB و AB ، واستنتج طبيعة المثلث OAB .

3- نسمي G مرجح الجملة المثقلة $\{(O, -1); (D, 1); (B, 1)\}$

أ- تحقق من وجود G وبين أن لاحقتها $Z_G = 4\sqrt{3} + 6i$

ب- بين أن الرباعي $OBGD$ متوازي أضلاع .

ج- ماهي طبيعة المثلث AGC ؟

التمرين الثالث: (04 نقاط)

تتكون جمعية من 10 رجال و 5 نساء من بينهم رجل واحد اسمه زيد ، نريد تشكيل لجنة مكونة من : رئيس ، نائب ، كاتب و أميناً للمال .

- (1) - ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها ؟
- (2) - احسب احتمال كل من الأحداث التالية :
A " اللجنة تضم زيد في منصب الرئيس "
B " اللجنة تضم ثلاث رجال على الأكثر "
C " اللجنة تضم إمرأتان على الأقل "
- (3) - علما أن اللجنة تضم إمرأتان على الأقل ، ماهو احتمال أن يكون فيها زيد في منصب الرئيس ؟
- (4) - ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل اختيار عدد الرجال في اللجنة المكونة (أ) عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله
(ب) - أحسب $E(X)$

(د) - أحسب احتمال الحدث $\ln X > 0$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) - نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$

- (1) - أحسب نهاية الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.
- (2) - أدرس إتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .
- (3) - استنتج من أجل كل x من $]0; +\infty[$ إشارة $g(x)$.

(II) - نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 2cm)

- (1) - أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .
- (2) - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (3) - بين ان المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + \frac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$
- (ب) - ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) .
- (4) - بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
- (ب) - إستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها
- (5) - أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .
- (6) - بين أن المعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]\frac{1}{2}; 1[$.
- (6) - أرسم (T) ، (Δ) و (C_f) .

(III) - نعتبر الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$

- (1) - أحسب $h'(x)$ ، ماذا تستنتج؟
- (2) - أحسب بالسنتيمتر مربع S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y = 0$ ، $x = 1$ و $x = e$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{6u_n - 2}{u_n + 3} \end{cases} \quad \text{نعتبر المتتالية العددية } (u_n) \text{ و المعرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ:}$$

- (1) - تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 6 - \frac{20}{u_n + 3}$
- (ب) - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$
- (2) أ - أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
- (ب) - استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .
- (3) أ - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 2 - u_{n+1} \leq \frac{8}{9}(2 - u_n)$
- (ب) - استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 2 - u_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{8}{9}\right)^n$
- (ج) - أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U على 10 كريات ، منها خمس كريات حمراء مرقمة بـ: -2 ، -1 ، 0 ، 1 و 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: -1 ، 0 و 1 وكريتين سوداوين مرقمتين بـ -1 و 1 .

و يحتوي صندوق V على 9 كريات ، منها خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 1 ، 1 ، 2 ، 2 و 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: -3 ، -2 و 3 وكرية سوداء مرقمة بـ: -1 . (لا يمكن التمييز بينها باللمس) .

نسحب عشوائيا أربع كريات في آن واحد من أحد الصندوقين بالكيفية الآتية :

نقوم بسحب بطاقة واحدة عشوائيا من الصندوق W به 5 بطاقات متماثلة ، منها ثلاث بطاقات بيضاء وبطائتين صفراوين

إذا حصلنا على بطاقة بيضاء نسحب أربع كريات من صندوق U

إذا حصلنا على بطاقة صفراء نسحب أربع كريات من صندوق V

نسمي الحادثة A : " الحصول على بطاقة بيضاء "

نسمي الحادثة B : " الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم "

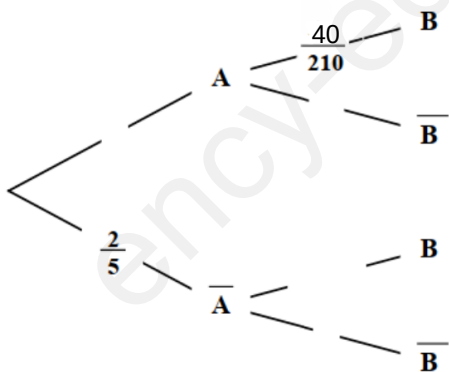
(1) - أنقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها موضحا طريقة الحساب .

(2) - أحسب $P(B)$ ثم أحسب $P_{\bar{B}}(A)$

(3) - ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة

(أ) - عين قيم المتغير العشوائي X (ب) - عرف قانون احتماله .

(ج) - احسب الأمل الرياضي $E(X)$ ثم استنتج $E(1445X + 2024)$.



التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) - $P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث $P(z) = z^3 + 2z^2 - 16$

(أ) - تحقق أن 2 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$

(ب) - جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 2)(z^2 + \alpha z + \beta)$

(ج) - حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A ، B و D

نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب : $Z_A = -2 - 2i$ ، $Z_B = 2$ و $Z_D = -2 + 2i$

(1) أكتب Z_A ، Z_B و Z_D على الشكل الأسّي .

(2) - احسب اللاحقة Z_C للنقطة C حتى يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع .

(3) - لتكن E صورة C بالدوران الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ - ولتكن F صورة C بالدوران الذي مركزه D وزاويته $\frac{\pi}{2}$

- أحسب Z_E و Z_F لاحتقي النقطتين E و F على الترتيب .

(3) - بين أن $\frac{Z_F - Z_A}{Z_E - Z_A} = i$

(ب) - استنتج طبيعة المثلث AEF .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) - نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x) = x - 1 + e^{-x}$

(1) - أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(2) - ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) - أحسب $g(0)$ ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) \geq 0$

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = \frac{x}{x + e^{-x}}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 2cm)

(1) - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، وبين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ثم فسر النتيجةين بيانيا .

(2) - بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x) = \frac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$

(ب) - استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

(3) - أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

(ب) - تحقق انه من أجل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $x - f(x) = \frac{xg(x)}{1 + g(x)}$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) .

(ج) - استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتها .

(6) - أرسم (T) و (C_f) .

(7) - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة ذات المجهول x : $f(x) = m$

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $h(x) = f(-|x|)$

(1) - بين أن الدالة h دالة زوجية

(2) - أكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

(3) - اشرح كيفية انشاء (C_h) المنحني الممثل للدالة h انطلاقا من (C_f) ، ثم أنشئه .



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (4 نقاط)

يحتوي كيس على 7 كريات مرقمة بـ : (2334445).

جميع الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس . نسحب كرتان عشوائيا و في آن واحد من الكيس .

نعرف الحدثين : A " الحصول على كرتان جداء رقميهما مضاعف للعدد 3 " B " الكرتان المسحوبتان مجموع رقميهما زوجي "

1. أحسب $P(A)$ و $P(B)$

2. بين أن $P(A \cap B) = \frac{1}{7}$. ثم استنتج $P_B(A)$.

3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب العدد $7 - \alpha$ حيث α هو مجموع الرقمين الظاهرين .

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانونه احتمالي X .

(ب) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ و بين أن : $P(X^2 - 1 > 0) = \frac{5}{21}$

التمرين الثاني : (4 نقاط)

(u_n) المتتالية الهندسية المعرفة على $\square$ و حدودها موجبة تماما حيث : $\begin{cases} \ln u_3 + \ln u_5 = 2 \ln 2 - 8 \\ \ln u_4 - \ln u_2 = -2 \end{cases}$

I. عين u_4 و الأساس q للمتتالية (u_n) ثم تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان : $u_n = \frac{2}{e^n}$.

II. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\square$ بـ : $v_{n+1} = \frac{1}{e} v_n + e - 1$ و $v_0 = 2 + e$.

1. (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان $v_n = u_n + e$.

(ب) استنتج v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

2. أحسب الجداء p_n التالي : $p_n = (v_0 - e) \times (v_1 - e) e^2 \times \dots \times (v_n - e) e^{2n}$

التمرين الثالث : (5 نقاط)

$$I. \text{ أوجد الأعداد المركبة } \alpha, \beta, \gamma \text{ التي تحقق الجملة التالية: } \begin{cases} \alpha - \beta = 2i\sqrt{3} \\ \bar{\alpha} + \bar{\beta} = -2 \\ \bar{\beta} - \bar{\alpha} = \gamma \end{cases} \text{ و } \gamma \text{ تخيلي صرف.}$$

II. A, B, C ثلاث نقاط من المستوي المركب $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لواحقتها على الترتيب:

$$z_C = 2 \text{ و } z_B = \bar{z}_A \text{ و } z_A = -1 - i\sqrt{3}$$

(1) أكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي و استنتج أن النقط A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة يطلب تحديد مركزها و نصف قطرها ثم أنشئها بدقة.

(2) أكتب العدد المركب $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$ على الشكل الأسّي ثم حدد طبيعة المثلث ABC.

(ب) استنتج زاوية الدوران r الذي يحول A إلى B و مركزه C.

(3) أوجد لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي OABD متوازي أضلاع ثم أنشئها.

(4) أ) نحقق أن النقطة C تنتمي إلى المجموعة (Δ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي المركب التي تحقق:

$$z - 2i\sqrt{3} = ke^{i(-\frac{\pi}{3})} \text{ لما يسمح } k \text{ المجموعة } \mathbb{C}^* \text{ ثم حدد طبيعة المجموعة } (\Delta).$$

(ب) أنشئ كذلك صورة (Δ) بالدوران r .

التمرين الرابع : (7 نقاط)

الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^x$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (حيث : $\|\vec{OI}\| = 1\text{cm}$)

1. أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و فسر النتيجة بيانيا ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(ب) أدرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) و محور الفواصل.

2. أ) أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. يعطى $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \approx -1.2$ و $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \approx 2.3$

(ب) بين أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

3. أ) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند 1.

(ب) عين نقطة تقاطع (C_f) مع محور الترتيب ثم أنشئ كل من (T) و (C_f) .

4. بين أنه مهما يكن الوسيط الحقيقي m النقطة ذات الفاصلة 1 تنتمي إلى المستقيم (Δ_m) ذا المعادلة : $y = -mx + m$.

5. عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة : $f(x) = m(-x+1)$ ثلاث حلول مختلفة.

6. أوجد العددان الحقيقيان α و β حتى تكون الدالة : $x \mapsto (x^2 + \alpha x + \beta)e^x$ دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

7. أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل والمستقيمين الذين معدلتيهما $x=0$ و $x=2$.

I. يحتوي كيس U على ثلاث كريات بيضاء مرقمة بـ : (211) و أربعة كريات حمراء مرقمة بـ : (2211) وخمس كريات خضراء مرقمة بـ : (22111) . جميع الكريات متماثلة لا نفرق بينها في اللمس .

نسحب من الكيس 3 كريات في آن واحد و نعتبر الحدثين التاليين :

A " الكريات المسحوبة الثلاث من نفس اللون " B " الكريات المسحوبة الثلاث مجموع أرقامها أكبر أو يساوي 5 "

1. أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ و بين أن $P(A \cap B) = \frac{1}{44}$.

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات البيضاء التي تحمل رقما فرديا .

أ) عين قيم X ثم عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X .

السنة الأمازيغية

ب) أحسب $S = E(2024X + 1962)$.

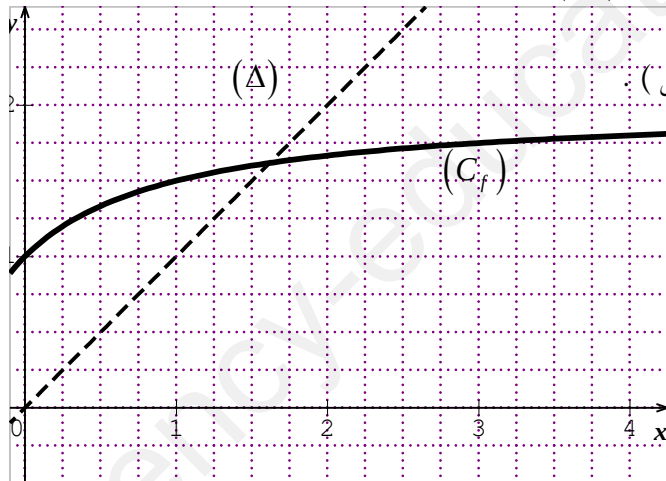
II. نعتبر الآن كيس ثاني V يحتوي على ثلاث كريات حمراء و كرتين بيضاويتين لا نفرق بينها عند المس . نضع الكريات الثلاث

المسحوبة من الكيس U في الكيس V . علما أن الكريات الثلاث المسحوبة من U من نفس اللون .

نسحب ثلاث كريات في آن واحد من الكيس V . ما احتمال أن تكون الكريات الثلاث المسحوبة تمايزة اللون مثنى مثنى .

التمرين الثاني : (4 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$. (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد



و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (الشكل المقابل) :

نعتبر المتتاليتين العدديتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases} : \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1. أ) أنقل الشكل على ورقة ميليمترية ثم مثل الحدود

الأربعة الأولى لكل متتالية مع إبراز خطوط الإنشاء .

ب) ضع تخمينا حول إتجاه تغير و تقارب كل من المتتاليتين (v_n) و (u_n) .

2. بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ ثم أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) .

3. أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n . $\sqrt{3} < v_n \leq 4$ و $0 \leq u_n < \sqrt{3}$.

ب) استنتج إتجاه تغير كل من المتتاليتين (v_n) و (u_n) .

4. أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n . $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{6}(v_n - u_n)$ و $0 < v_n - u_n \leq 4\left(\frac{1}{6}\right)^n$.

ب) استنتج : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n)$ ثم حدد نهاية كل من (v_n) و (u_n) .

التمرين الثالث : (5 نقاط)

- (1) $P(z) = z^3 - 12z^2 + 49z - 78$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث : $P(z) = z^3 - 12z^2 + 49z - 78$.
- (أ) تحقق أن 6 جذرا لكثير الحدود $P(z)$.
- (ب) جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب : $P(z) = (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta)$.
- (ج) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\square$ المعادلة $P(z) = 0$.
- (2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. A , B و C ثلاث نقط من المستوي المركب لواحقتها على الترتيب : $z_A = 3 + 2i$, $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = z_A + z_B$.
- (أ) بين أن النقطة B هي صورة النقطة O بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AC}$.
- (ب) أكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_O}$ على الشكل الأسّي ثم حدد بدقة طبيعة الرباعي $OACB$.
- (ج) عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد المركب $\left(\frac{3\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_O}\right)\right)^n = \frac{2}{3}\left(\frac{z_C - z_O}{z_A - z_B}\right)$.
- (3) (γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي المركب التي تحقق : $\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \square$.
- تحقق أن النقطة G مركز ثقل الرباعي $OACB$ تنتمي إلى (γ) ثم حدد طبيعة المجموعة (γ) ثم أنشئها .

التمرين الرابع : (7 نقاط)

- I. نعتبر الدالة العددية g معرفة على المجال $]-2; +\infty[$ ب : $g(x) = x^2 + 4x + 2 + \ln(x+2)$.
- (1) بين أن g متزايدة تماما على المجال $]-2; +\infty[$.
- (2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.6 < \alpha < -0.7$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.
- II. لتكن الدالة العددية f المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ ب : $f(x) = -x + \frac{x+1+\ln(x+2)}{x+2}$.
- (C_f) تمثيلها البيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (حيث : $\|\vec{OI}\| = 1\text{cm}$)
- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- (2) بين أنه من أجل كل x من المجال $]-2; +\infty[$ فان : $f'(x) = -\frac{g(x)}{(x+2)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- (3) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ و حدد وضعيته مع (C_f) .
- (4) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب كتابة معادلته .
- (5) أنشئ كل من (Δ) ، (T) و (C_f) . يعطى $f(\alpha) \approx 1.2$ ، $f(1.1) \approx 0$ و $f(-1.4) \approx 0$.
- (6) عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة : $f(x) = -x + m$ حلان مختلفان في الإشارة .
- (7) أحسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين الذين معدلتيهما $x = -1$ و $x = 0$.

امتحان بكالوريا تجريبي في مادة الرياضيات

المستوى: 3 ع ت

المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

النمرين الأول (04 نقاط) :

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية ، مع التبرير :

(1) (U_n) متتالية معرفة بحددها الاول U_0 و من أجل كل عدد طبيعي n ، $U_{n+1} = 4 + \sqrt{U_n + 2}$ و $4 \leq U_n \leq 7$ قيمة U_0 حتى تكون المتتالية ثابتة هي :

أ (7) ب (2) ج (4)

(2) المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = \int_n^{n+1} e^{1-x} dx$ هي متتالية هندسية أساسها q يساوي :

أ ($q = \frac{e-1}{e}$) ب ($q = \frac{1}{e}$) ج ($q = e-1$)

(3) كيس به 7 كريات متماثلة لانفرق بينها باللمس ، منها 4 كريات بيضاء و 3 كريات سوداء

نسحب من الكيس ثلاث كريات على التوالي دون إرجاع

احتمال سحب الكرة الثانية بيضاء و لأول مرة هو :

أ ($\frac{2}{7}$) ب ($\frac{6}{7}$) ج ($\frac{9}{35}$)

(4) حلول المعادلة $3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0$ في $\mathbb{R}$ هي :

أ ($S = \{1; 2\}$) ب ($S = \left\{ \frac{1}{\ln 3}; \frac{\ln 2}{\ln 3} \right\}$) ج ($S = \left\{ 0; \frac{\ln 2}{\ln 3} \right\}$)

النمرين الثاني: (05 نقاط)

المتتالية العددية (U_n) معرفة بـ : $U_0 = 4$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \sqrt{5 + \frac{1}{2}U_n^2}$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n > \sqrt{10}$

(2) بين أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة

(3) المتتالية العددية (V_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $V_n = \alpha - U_n^2$ حيث α عدد حقيقي

• عين قيمة α التي من أجلها تكون المتتالية (V_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$

(4) نضع فيما يلي : $\alpha = 10$

أ (أكتب V_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$)

ب (احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2$)

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس ، منها كريتان تحملان الرقم 1 و ثلاث كريات تحمل الرقم 0 و خمس كريات تحمل الرقم 2

(1) نسحب عشوائيا و في آن واحد 3 كريات من الصندوق و نعتبر الحدثين A و B حيث :
 A " الكريات المسحوبة تحمل أرقاما مختلفة " B " الكريات المسحوبة تحمل أرقاما جداولها معدوما "

أ (احسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمال الحدثين A و B على الترتيب

ب (بين أن $P(A \cap B) = \frac{7}{10}$ ، هل الحدثان A و B مستقلان ؟ علل

ج (علما أن جداء أرقام الكريات معدوما ، ما احتمال أن تكون مختلفة

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الارقام المتساوية المحصل عليها

أ (برر أن مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي : $\{0; 2; 3\}$

ب (عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ (احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا

ب (احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا

(2) أ (بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-1 - 2 \ln x}{x^3}$

ب (استنتج إتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها

(3) أ (بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة يطلب تعيين احداثياتها

ب (استنتج اشارة $f(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

(4) أنشئ (C_f)

(5) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نرمز بالعدد I_n لمساحة الحيز المحصور بين (C_f) و حامل محور

الفواصل و المستقيمين اللذين معادتهما : $x = \frac{1}{e}$ و $x = n$

أ (بين أن $F: x \mapsto \frac{-2 - \ln x}{x}$ دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$

ب (احسب I_n بدلالة n

ج (احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

إتتهى الموضوع الاول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

يراد تشكيل لجنة تضم رئيسا و نائبه الأول و نائبه الثاني من بين 6 ذكور و 4 إناث

(1) بين أن عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو : 720

(2) أحسب احتمال الأحداث الآتية

A " اللجنة من جنسين مختلفين " B " الرئيس ذكر و النائب الأول أنثى "

C " باللجنة أنثى على الأقل " D " اللجنة مشكلة من الذكور فقط "

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل لجنة $X = -\alpha y + 2z$ حيث y عدد الاناث المتواجدات باللجنة و

z عدد الذكور المتواجدون باللجنة (α عدد حقيقي

أ) عين القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X و عرف قانون احتماله

ب) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X بدلالة α

ج) عين قيمة العدد الحقيقي α حتى يكون: $E(X) = -\frac{6}{5}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(U_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $U_0 = \frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{6U_n - 2}{U_n + 3}$

(1) عين العددين الحقيقيين a و b حيث : $U_{n+1} = a + \frac{b}{U_n + 3}$

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{3}{2} \leq U_n \leq 2$

(3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة

(4 أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 2 - U_{n+1} \leq \frac{8}{9}(2 - U_n)$

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 2 - U_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{8}{9} \right)^n$

ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) $P(z)$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث : $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$

أ) تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب) جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 6)(z^2 + \alpha z + \beta)$

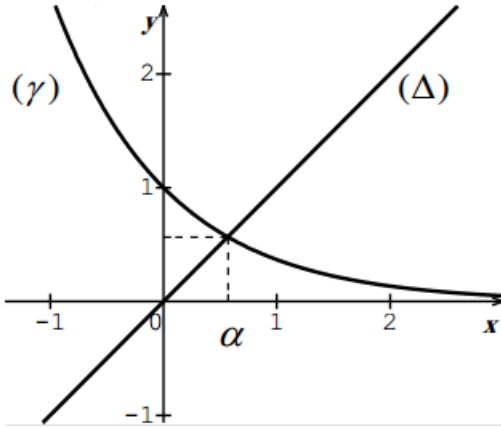
ج) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$

(2) المستوي المركب مزود بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر النقط A ، B ، C ذات اللواحق : $z_A = 6$ ، $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_C = 3 - i\sqrt{3}$ على الترتيب

- أ (أكتب كلا من z_A ، z_B و z_C على الشكل الأسّي .
- ب (أكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري ، ثم على الشكل الأسّي .
- ج (استنتج طبيعة المثلث ABC
- 3 (ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.
- أ (جد الكتابة المركبة للتشابه S .
- ب (عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S .
- ج (بين أن النقط A ، B و A' في استقامة .

التمرين الرابع: (07 نقاط)



- المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- (I) ليكن (γ) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto e^{-x}$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ ، α هي فاصلة نقطة تقاطع (γ) و (Δ)
- (1) بقراءة بيانية حدد وضعية (γ) بالنسبة لـ (Δ) على $\mathbb{R}$
- (2) $g(x) = e^{-x} - x$: بـ $\mathbb{R}$ الدالة المعرفة على
- استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$
- (3) تحقق أن : $0,56 < \alpha < 0,57$

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^3 + (3x+3)e^{-x}$

و (C_f) هو تمثيلها البياني

(1) أ (احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب (ادرس الوضعية النسبية بين المنحنى (C_f) و المنحنى (P) الممثل للدالة مكعب

ج (احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x^3]$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا

(2) أ (بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -3x g(x)$

ب (استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها

(3) أنشئ المنحنى البياني للدالة مكعب و المنحنى (C_f) ، تعطى $f(\alpha) \approx 2,8$

(4) من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما β ، نرمز بـ $S(\beta)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين

(C_f) و (P) و المستقيمين ذا المعادلتين $x = \beta$ و $x = 0$

أ (باستعمال الكاملة بالتجزئة أحسب $S(\beta)$ ، ثم $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} S(\beta)$

إنهى الموضوع الثاني

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين:

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بـ $u_{n+1} = \frac{6u_n}{1+15u_n}$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \geq \frac{1}{3}$

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة ثم أكتب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 - \frac{1}{3u_{n+1}} = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{3u_n}\right)$ ،

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1 - \frac{1}{3u_n} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^n$ ثم أكتب u_n بدلالة n

(4) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $\frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} = 3n + \frac{3}{5} + \frac{12}{5} \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لكل اقتراح إجابة صحيحة واحدة اختر الجواب الصحيح مع التبرير:

(1) ليكن $I = \int_1^e \frac{(\ln x)^{2023}}{x} dx$ قيمة العدد الحقيقي I

(أ) $\frac{3^{2024} - 2^{2024}}{2024}$ (ب) $\frac{3^{2024} - 2^{2024}}{2023}$ (ج) $\frac{3^{2024} + 2^{2024}}{2023}$ (د) $\frac{2^{2024} - 3^{2024}}{2024}$

(2) (u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بـ $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{8}{3}$

من أجل كل عدد طبيعي n عبارة u_n تساوي

(أ) $u_n = 4 \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2$ (ب) $u_n = 4 - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$ (ج) $u_n = 4 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$ (د) $u_n = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{8n}{3}$

(3) كيس يحتوي على 8 كرات منها 5 كرات خضراء وثلاث بيضاء، نسحب كرتين من الكيس على التوالي وبدون إرجاع

B_1 : "الكرة المسحوبة الأولى بيضاء"

V_1 : "الكرة المسحوبة الأولى خضراء"

B_2 : "الكرة المسحوبة الثانية بيضاء"

V_2 : "الكرة المسحوبة الثانية خضراء"

- احتمال حصول الحادثة V_2 علما أن الحادثة V_1 محققة هو:

(أ) $\frac{5}{8}$ (ب) $\frac{4}{7}$ (ج) $\frac{5}{14}$ (د) $\frac{21}{56}$

(4) احتمال حصول الحادثة V_2 هو:

(أ) $\frac{5}{8}$ (ب) $\frac{5}{7}$ (ج) $\frac{3}{28}$ (د) $\frac{9}{7}$

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

- (1) أ) بين أن المعادلة $P(z)=0$ تقبل في C حلين مترافقين بحيث $P(z)=z^3+2z^2-16$
 ب) عين حلين للمعادلة $P(z)=0$ علما أن طويلا كل منهما تساوي $2\sqrt{2}$ ثم استنتج الحل الثالث للمعادلة $P(z)=0$
 - المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقطة A, B, D ذات اللواحق
 $z_A = -2-2i$ ، $z_B = 2$ و $z_D = -2+2i$ على الترتيب.

(2) أ) أكتب z_A ، z_B و z_D على الشكل الأمي.

ب) أحسب z_C لاحقة النقطة C بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع.

(3) لتكن النقطة E صورة C بالدوران الذي مركزه B وزاويته $\frac{-\pi}{2}$

و النقطة F صورة C بالدوران الذي مركزه D وزاويته $\frac{\pi}{2}$

- حدد z_E و z_F لاحقتي النقطتين E و F ، تحقق من أن $\frac{z_F - z_A}{z_E - z_A} = i$ ثم حدد طبيعة المثلث AEF

(4) عين (γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق $(\bar{z}+2-2i)(z+2+2i)=4$

التمرين الرابع: (07.5 نقاط)

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	$\swarrow$	$\downarrow$	$\searrow$

(1) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = (x-2)e^x - 1$

(1) أنقل ثم أكمل جدول تغيرات الدالة g المقابل.

(2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α

حيث $2 < \alpha < 2,5$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

(II) f دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ $f(x) = x + \frac{e^{-x} + 1}{x-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

(2) بين أنه من أجل كل $x \neq 1$ فإن $f'(x) = \frac{xe^{-x}g(x)}{(x-1)^2}$ ، استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمستقيم (Δ)

(4) ليكن (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات القاصلة x_0

أ) بين أنه إذا كان المماس (T) يشمل النقطة $A(1;0)$ فإن $(x_0+1)(e^{-x_0}+1)=0$

ب) استنتج أن المعادلة $y = \frac{3+e}{4}(x-1)$ هي معادلة لمماس المنحنى (C_f) والذي يشمل النقطة $A(1;0)$

(5) أحسب $f(-2)$ ثم أرسم (Δ) ، (T) و (C_f) (نأخذ $f(\alpha) \approx 3,5$)

(6) لتكن $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين ذوو المعادلتين $x=2$ و $x=e^{2\alpha}+1$

أ) تحقق أنه من أجل كل x من المجال $]1; +\infty[$ فإن $f(x) < x + \frac{e^{-x} + 1}{x-1}$

ب) تحقق من أن $0 < A(\alpha) < 2\alpha(e^{-1} + 1)$ ثم بين أن $0 < A(\alpha) < \frac{9}{2}(e^{-1} + 1)$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

- عين الجذران التربيعيان للعدد المركب $-2-2i\sqrt{3}$
- المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، A ، B ، C و D نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $z_B = (1-i)z_A$ و $z_C = 2$ ، $z_B = -1-i\sqrt{3}$ ، $z_A = -1+i\sqrt{3}$
- بين أن $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، استنتج طبيعة المثلث ABC ثم عين مركز ونصف قطر الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC
- أ) تحقق من أن $z_D = (\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)$
ب) أكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$
- عين (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z والتي تحقق $z = 2(1+e^{i\theta})$ عندما يتغير θ على $\mathbb{R}$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

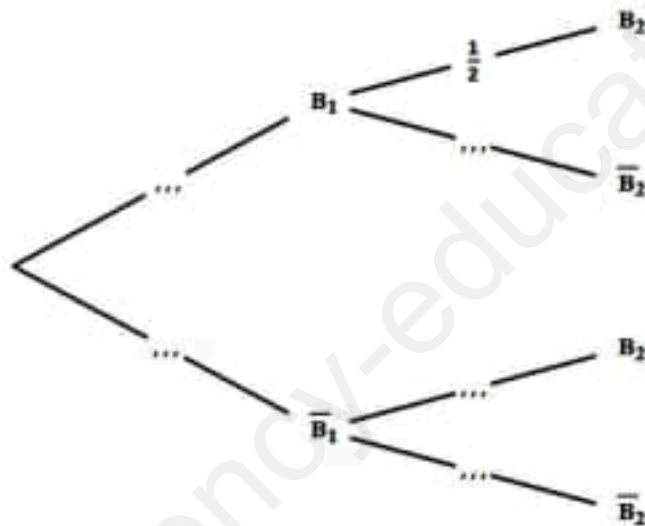
يحتوي كيس U_1 على ثلاث كرات بيضاء وكرتين سوداوين، ويحتوي كيس U_2 على كرتين سوداوين وكرة بيضاء. كل الكرات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس.

نقترح التجربة العشوائية التالية:

نسحب عشوائيا كرة من الكيس U_1 ونضعها في الكيس U_2 ثم نسحب عشوائيا كرة من الكيس U_2 ونضعها في الكيس U_1 .
نعتبر الأحداث التالية:

B_1 : "الكرة المسحوبة من الكيس U_1 بيضاء"

B_2 : "الكرة المسحوبة من الكيس U_2 بيضاء"



1) أ) أقل ثم أكمل شجرة الاحتمالات.

ب) تحقق من أن $P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2}$ ثم أحسب $P(B_2)$

2) علما أن الكرة المسحوبة من الكيس U_2 بيضاء، ما هو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الكيس U_1 بيضاء؟

3) أحسب الحدث E : "عند نهاية التجربة بقي توزيع الكرات في الكيسين كما هو"

4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات السوداء المتبقية في الكيس U_2 عند نهاية التجربة.

أ) عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$

ب) عين قيمة العدد الحقيقي α والذي يحقق $E(10X + \alpha) = 2024$

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_0 = -3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n بـ $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 8} - 4$

(1) برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n فإن $-3 \leq u_n \leq -2$

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n + 2)(u_n + 4)}{\sqrt{2u_n + 8} + u_n + 4}$

ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n $v_n = \frac{1}{2^n} \ln\left(\frac{u_n + 4}{2}\right)$

أ) أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ثم أكتب v_n بدلالة n

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n = 2e^{w_n} - 4$ حيث (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

(4) أ) أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $(u_0 + 4)(u_1 + 4) \times \dots \times (u_n + 4) = 2^{n+1} e^{S_n}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) g دالة معرفة على المجال $]e; +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{x-e}{x} + \frac{x}{e-x} + \ln\left(\frac{x}{x-e}\right)$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow e^+} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(2) أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $]e; +\infty[$: $g'(x) = \frac{e(x^2 - ex + e^2)}{x^2(e-x)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) حدّد إشارة $g(x)$ على المجال $]e; +\infty[$

(II) f دالة معرفة على المجال $]e; +\infty[$ بـ $f(x) = (x-e) \ln x - x \ln(x-e)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسياً.

ب) تحقق أنه من أجل كل x من المجال $]e; +\infty[$ فإن $f(x) = \frac{ex}{x-e} \times \frac{\ln\left(1 + \frac{e}{x-e}\right)}{\frac{e}{x-e}} - e \ln x$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $]e; +\infty[$: $f'(x) = g(x)$

ب) استنتج أن الدالة f متناقصة تماماً على المجال $]e; +\infty[$ ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]e; +\infty[$ حلاً وحيداً α حيث $4 < \alpha < 5$

(4) أرسم المنحنى (C_f)

(5) h دالة معرفة على $\mathbb{R} - \{e\}$ بـ $h(x) = |x-e| \ln(|x-e|+e) - (|x-e|+e) \ln|x-e|$ و (C_h) تمثيلها البياني

أ) بين أن المستقيم ذا المعادلة $x = e$ هو محور تناظر للمنحنى (C_h)

ب) اشرح كيف يمكن رسم المنحنى (C_h) انطلاقاً من المنحنى (C_f) ثم أرسمه

انتهى الموضوع الثاني



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(I) (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$

(1) أ) احسب كلا من u_1 و u_2 .

ب) برهن بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة .

(3) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع : $v_n = u_n - \alpha$ ، حيث α عدد حقيقي .

أ) عين قيمة العدد α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية ، يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 .

ب) لكتب v_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(II) نضع ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $w_n = \ln(u_n - 3)$ (ln يرمز إلى اللوغاريتم النيبيري).

(1) عبر عن w_n بدلالة n ثم استنتج نوع المتتالية (w_n) .

(2) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3) \times \dots \times (u_n - 3)$ و $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

احسب بدلالة n عبارة P_n ثم بين أن : $S_n = 3n + 6 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$

التمرين الثاني : (04 نقاط)

يحتوي الصندوق U_1 على ثلاث كريات تحمل الأرقام : 2 ، 2 و 3 ويحتوي الصندوق U_2 على تسع كريات منها أربعة خضراء ونحمل كل منها

الرقم 3 ونمس كريات حمراء تحمل الأرقام : 1 ، 2 ، 2 ، 3 و 4 .

الكرات لا يمكن التمييز بينها بالنسبة لنحسب عشوائيا كرية من الصندوق U_1 ونجمل رقبها وليكن n .

إذا كان : $n = 2$ نحسب عشوائيا من الصندوق U_2 كرتين على التوالي دون إرجاع .

إذا كان : $n = 3$ نحسب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الصندوق U_2 ،

نعتبر الحاديين التاليين :

B : الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 تحمل نفس الرقم *

A : الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 لها نفس اللون *

ب) بين أن $P(A \cap B) = \frac{55}{378}$ ثم استنتج : $P_A(B)$.

أ) بين أن $P(A) = \frac{19}{54}$ ، ثم احسب $P(B)$.

ج) هل الحدان A و B مستقلان ؟ علل إجابتك .

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 .

✓ عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$.

(3) احسب $P(X^2 = 2^X)$.

التمرين الثالث : (05 نقاط)

1) نعتبر كثير حدود ذات المجهول المركب z التالي : $P(z) = z^3 - (4+3i)z^2 + (13+12i)z - 39i$:

أ/ بين أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا صرفا ، بطلب تعيينه

ب/ عين الأعداد الحقيقية a, b و c بحيث يكون من كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 3i)(az^2 + bz + c)$:

ج/ حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z التالية : $P(z) = 0$

2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. A, B, C و D أربع نقط من المستوي لواحظها

على الترتيب : $z_D = i$, $z_C = 2 - 3i$, $z_B = \overline{z_A}$, $z_A = 3i$:

أ) اكتب العبارة المركبة للتشابه S الذي مركزه B ويحول C إلى A

ب) استنتج طبيعة المثلث ABC ، ثم احسب مساحته .

ج) لتكن النقطة E صورة النقطة A بالتحويل S . استنتج مساحة المثلث ABE

3) أ) احسب العدد $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}$ ، ثم استنتج أن صورة A صورة D بتحويل نقطي f بطلب تعيين طبيعته و عناصره المميزة .

4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $z = z_A + 6e^{i\theta}$ حيث $(\theta \in \mathbb{R})$

أ) تحقق أن B تنتمي إلى (Γ)

ب) عين المجموعة (Γ)

التمرين الرابع : (07 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; i, j)$.

I) f دالة معرفة على المجال $]-1; +\infty[$: $f(x) = ax + b + 3\ln(x+1)$ ، حيث a و b عدنان حقيقيان .

(Γ) التمثيل البياني للدالة f ، المعطى في الشكل

المقابل ، يقبل في النقطة $A(2; -1 + 3\ln 3)$ مماسا

موازيًا لحامل محور الفواصل .

أ) بقراء بيانية :

أ) ضع تخميناً حول : $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (Γ)

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f .

2) باستعمال المعطيات المتوفرة، جد قيمة كل من a و b .

II) نعتبر في هذا الجزء : $f(x) = -x + 1 + 3\ln(x+1)$.

أ) احسب نهاية الدالة f عند -1 بقيم أكبر . ثم احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

2) أ) عين النقطة B من المنحنى (Γ) التي يكون فيها المماس (T) للمنحنى (Γ) موازيًا للمستقيم الذي

معادلته $y = x$ ، ثم اكتب معادلة للمماس (T) .

ب) استنتج بيانيا ، قيم العدد الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x) = x + m$ حلين موجبين تمامًا .

3) g الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$: $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$: $g(x) = (x+1)\ln(x+1) - x$:

أ) احسب $g'(x)$ ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$.

ب) لتكن α و β فاصلتي نقطتي تقاطع المنحنى (Γ) مع حامل محور الفواصل ،

بين أن : $\alpha \in]7,37; 7,38[$ و $\beta \in]-0,37; -0,36[$.

ج) احسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (Γ) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين

معادلتهما : $x = \alpha$ ، $x = 0$.

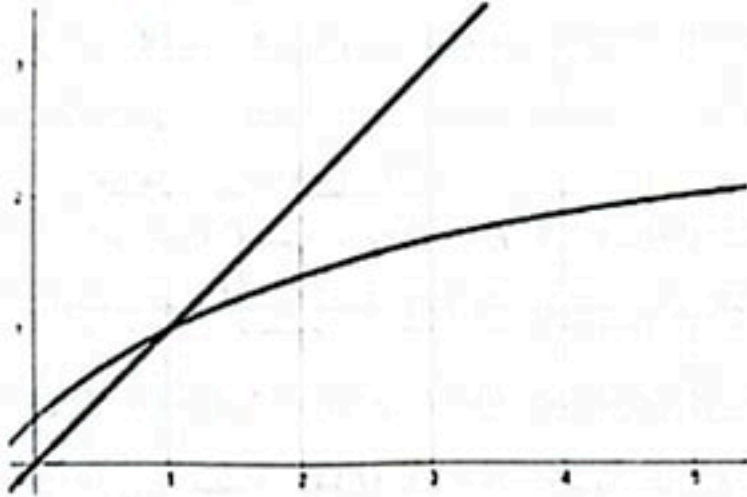
د) تحقق أن : $S = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha - 1\right) \ln \alpha$ ، ثم عين حصرًا لـ S (وحدة مساحة)

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (05 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{3x+1}{x+3}$ و (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$



والمستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = x$.

α عدد حقيقي موجب ، المتتالية العددية المعرفة على N بعدها الأول u_0

حيث : $u_0 = \alpha$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة .

(2) أثبت أن الدالة f متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$.

(II) نضع في كل مايلي : $\alpha = 5$.

(أ) اقل الشكل المقابل ثم مل على حامل محور القواسم الحدود

u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حساب الحدود) .

(ب) بالبرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$1 < u_{n+1} < u_n \leq 5$ ، ثم استنتج تفراب المتتالية (u_n) .

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على N بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

(أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$. يطلب تبين حدها الأول . (ب) عبر بدلالة n عن v_n و u_n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

(3) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_n + v_{n+1} + \dots + v_{n+2022}$.

ثم استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث : $S'_n = \frac{1}{u_n + 1} + \frac{1}{u_{n+1} + 1} + \dots + \frac{1}{u_{n+2022} + 1}$.

التمرين الثاني : (03 نقاط)

يراد عشوائيا تشكيل لجنة تضم رئيسا ونائبا له من مجموعة أشخاص ثلاث رجال هم : عمر ، سفيان ، فاروق وأربع نساء هن : رغد ، آمنة ، يمين ، هبي .

(1) بين أن عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو : 42 .

(2) نعتبر الحوادث الآتية : A "اللجنة من نفس الجنس"

C "عمر هو الرئيس"

B "اللجنة من جنسين مختلفين"

D "اللجنة لا تنضم كلا من فاروق و رغد"

(أ) احسب $P(A)$ احتمال الحدث A ثم استنتج $P(B)$.

(ب) احسب $P(C)$ و $P(D)$.

(3) المتغير العشوائي X يرفق بكل لجنة عدد الرجال فيها . عين قانون احتمال X .

التمرين الثالث : (05 نقاط) 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول Z : $Z^2 + Z + 1 = 0$

2) في المستوى المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، نعتبر النقط A, B, C, D و F ذات

اللاحقات : $Z_A = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، $Z_B = \overline{Z_A}$ ، $Z_C = -2$ ، $Z_D = -2 + 2\sqrt{3}i$ و $Z_F = \overline{Z_D}$ على الترتيب .

أ- اكتب Z_B و Z_A على الشكل المتأني ثم علم النقط A, B, C, D و F .

ب- ما طبيعة المثلث ABC ؟

3) ليكن R الدوران الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها Z النقطة M' التي لاحقتها Z' حيث :

$$Z' + 2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}(Z + 2)$$

أ- عين مركزه وزاوية الدوران R .

ب- لتكن النقطة E صورة النقطة D بالدوران R . علم النقطة E ثم إن لاحقتها هي : $Z_E = 1 + \sqrt{3}i$

ج- اكتب العدد $\frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E}$ على الشكل الجبري ثم استنتج أن المستقيمين (ED) و (EF) متعامدان .

4) لكل عدد مركب Z يختلف عن E ، نرفق العدد المركب Z' حيث : $Z' = \frac{Z - Z_C}{Z - Z_E}$

لتكن (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللواحق Z بحيث يكون Z' عددا تخيليا صرفا . عين وأنشئ المجموعة (Γ_1) .

5) أ- لتكن G مرجع الجملة $\{(A, |Z_A|); (B, |Z_B|); (C, |Z_C|)\}$ حدد لاحقة النقطة G .

ب- (Γ_2) هي مجموعة النقط M من المستوى حيث : $|\overline{MA} + \overline{MB} + 2\overline{MC}| = |\overline{MA} + \overline{MB} - 2\overline{MC}|$

- تحقق أن C تنتمي إلى (Γ_2) ثم عين طبيعة المجموعة (Γ_2) .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = \frac{1}{2} - \frac{1+2x}{2e^{2x}}$

1) أ- احسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) احسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

ج- بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيها .

3) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$. ثم ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلته له .

4) أ- بين أن المنحنى (C_f) يتقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $-0.9 < \alpha < -0.8$.

ب- لوسم (Δ) و (T) و (C_f) .

5) ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة : $1 + x = me^{2x}$.

6) لتكن الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $H(x) = (ax+b)e^{-2x}$ ، حيث a و b عددين حقيقيين .

أ- عين a و b بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x+1)e^{-2x}$ على $\mathbb{R}$.

ب- احسب العدد A مساحة العيزز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمتين $x = 0$ و $x = \alpha$ و $y = \frac{1}{2}x$. انتهى الموضوع الثاني



Bac Blanc Mathématiques S Mai 2024 Lycée ElHoura

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية



الثانوية: الحرية
المستوى: ثالثة ثانوي
المعامل: 5

مديرية التربية لولاية قسنطينة
المادة: الرياضيات
الشعبة: علوم تجريبية
الإثنين 13 ماي 2024

المدة: 3 ساعات ونصف ساعة

البكالوريا البيضاء

دورة ماي 2024

على المترشحة أن تختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأولالتمرين الأول (4ن):

(1) نرمي قطعة نقدية مزيفة مرة واحدة، نرمز للظهر بالرمز P وللوجه بـ F .
أحسبي احتمال كل من الظهر والوجه علماً أنّ احتمال ظهور الظهر يُساوي أربع مرات احتمال ظهور الوجه.

(2) نرمي الآن قطعة نقدية n مرة حيث: $n \geq 1$ ، نُسمي الحادثتين:

A : «حادثّة الحصول على الوجه مرة واحدة على الأقل خلال n رمية» .
و F_n : «حادثّة الحصول على الوجه في الرمية n » .

أ- أحسبي الإحتمالين $P(F_3)$ و $P(\overline{F_3})$.

ب- بيّني أنّ: $P(A) = \frac{5^n - 4^n}{5^n}$.

(3) نفرض في كل مما يلي: $n = 3$.

يضع اللاعب في البداية مبلغ قيمته 30DA ثم يرمي القطعة النقدية السابقة، ومن أجل كل رمية نعتبر:

- ظهور الوجه ثلاث مرات يكسب اللاعب 3kDA.

- ظهور الوجه مرتين يكسب اللاعب 6kDA.

- ظهور الوجه مرة واحدة يكسب اللاعب 5kDA.

- ظهور الظهر ثلاث مرات لا يكسب اللاعب شيئاً.

نعتبر المتغيّر العشوائي X الذي من أجله يربح اللاعب من خلال الفرق بين ما يدفعه وما يكسبه.

أ- ماهي القيم الممكنة للمتغيّر العشوائي X ؟

ب- عرّف قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X .

ج- ابتداءً من أية قيمة للعدد الطبيعي k تكون اللعبة في صالح منظمّ اللعبة؟

التمرين الثاني (4ن): لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة بحدّها الأول: $u_0 = 0$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2}{3}} + 8.$$

(1) برهني بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $0 \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$.

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 12 - u_n^2$.

أ- بيّني أنّ المتتالية (v_n) هندسية، يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب- عبّري عن v_n بدلالة n ، ثمّ إستنتجي عبارة u_n بدلالة n .

ج- أحسبي $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) أحسبي بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$ ، ثم أحسبي $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

التمرين الثالث (5ن):

- (1) نعتبر المعادلة (E) في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ حيث :

$$z^2 - (1 + 5i)z - 8 + 4i = 0 \dots\dots (E)$$
 - أ- جدي الجذور التربيعية للعدد المركب $(8 - 6i)$.
 - ب- حلّي في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .
- (2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C ذات اللواحق: $z_A = i$ ، $z_B = 2 + 2i$ و $z_C = -1 + 3i$.
 ولتكن النقطة M ذات اللاحقة: $z_M = m$ ، حيث: $m \in \mathbb{C}^*$.
 - أ- عيّني طبيعة (Γ) مجموعة النقط M حتى تكون النقط O ، C و M في إستقامية.
 - ب- عيّني طبيعة (Δ) مجموعة النقط M حتى يكون المثلث OCM قائم في O .
 - ج- حدّدي طبيعة المثلث ABC معللاً إجابتك.
- (3) نعتبر الدوران R الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ، والتحاكي H ذو المركز A والنسبة -2 .
 - أ- أكتب العبارة المركبة للتحويلين R و H .
 - ب- عيّني طبيعة التحويل النقطي T المعرّف بـ: $T = R \circ H$ ، (هو رمز التركيب).
 - ج- لتكن C' صورة النقطة C بالتحويل T ، برهني أنّ النقط A ، B و C' في إستقامية.
- (4) عيّني (Y) مجموعة النقط M حتى تكون النقط A ، B ، C و M تنتمي إلى نفس الدائرة.

التمرين الرابع (7ن):

- (I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln x$.
 - (1) أدرسي تغيّرات الدالة g وشكلي جدول تغيّراتها.
 - (2) بيّني أنّ المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $1.7 < \alpha < 1.8$.
 - (3) إستنتجي إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.
- (II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x$.
 وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث :
 $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.
 - (1) أحسبي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
 - (2) أثبتني أنّه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماماً، فإنّ: $f'(x) = xg(\frac{1}{x})$.
 - (3) شكلي جدول تغيّرات الدالة f .
 - (4) بيّني أنّ: $f(\frac{1}{\alpha}) = \frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$ ، ثمّ إستنتجي حصراً للعدد $f(\frac{1}{\alpha})$. (تدور النتائج إلى 10^{-2}).
 - (5) أحسبي $f(3)$ ثمّ أرسمي (C_f) على المجال $]0; 3]$.
- (III) لتكن الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = x^2 \ln x$.
 - (1) بإستعمال المكاملة بالتجزئة، أحسبي بدلالة λ التكامل $\int_2^\lambda h(x) dx$ ، حيث: $\lambda > 2$.
 - (2) إستنتجي بدلالة λ مساحة الحيّز للمستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين: $x = \lambda$ و $x = 2$.

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول (4ن):

- D_1 و D_2 زهرتي نرد، النرد D_1 مغشوش وله كل وجهين يحملان نفس الرقم k حيث: $k \in \{1; 2; 3\}$. نرسم بـ u_k احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم k .
- (1) أحسبي u_1, u_2 و u_3 ، علماً أن هذه الأعداد تُشكّل حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $\frac{1}{4}$.
- (2) النرد D_2 ليس مغشوش وله كل ثلاث وجوه تحمل نفس الرقم p حيث: $p \in \{1; 2\}$. نرسم بـ v_p احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم p .
- أحسبي v_1 و v_2 .
- (3) نرمي النرد D_1 و D_2 في آن واحد، ونعتبر المتغير العشوائي X الذي يُساوي جداء رقمي الوجهين العلويين للنرد D_1 و D_2 بعد السقوط.
- أ- عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .
- ب- أحسبي $\sigma(2024 - 1445X)$.

التمرين الثاني (4ن):

- لتكن (t_n) متتالية هندسية متزايدة تماماً معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $\begin{cases} t_0 + t_1 + t_2 = 7\ln 2 \\ t_0 \times t_1 \times t_2 = 8(\ln 2)^3 \end{cases}$
- (1) أحسبي الحدود t_1 ثم t_0 و t_2 .
- (2) إستنتجي الأساس q للمتتالية (t_n) ، ثم أكتبي t_n بدلالة n .
- (3) جدي أصغر قيمة للعدد الطبيعي n الذي يُحقق: $t_n \geq \ln 2^{2974}$.
- (4) أ- أحسبي المجموع S_n بدلالة n و الجداء P_n بدلالة n حيث: $\begin{cases} S_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n \\ P_n = t_0 \times t_1 \times \dots \times t_n \end{cases}$
- ب- إستنتجي S'_n بدلالة n حيث: $S'_n = \ln(t_0) + \ln(t_1) + \dots + \ln(t_n)$.
- ج- أحسبي S''_n بدلالة n حيث: $S''_n = t_0^{2024} + t_1^{2024} + \dots + t_n^{2024}$.

التمرين الثالث (5ن):

- في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقط A, B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $Z_A = -1 + \sqrt{3}i$ ، $Z_B = \bar{Z}_A$ و $Z_C = 2$.
- (1) أ- أكتبي العدد المركب: $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}$ على الشكل الأسّي.
- ب- إستنتجي طبيعة المثلث ABC .
- ج- عيّني ω مركز و نصف قطر الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC .
- (2) أ- عيّني طبيعة و عناصر المجموعة (Γ) للنقط $M(Z)$ التي تُحقق: $ZZ\bar{Z} + 2(Z + \bar{Z}) = 0$.
- ب- تحققي أن النقطتين A و B تنتميان إلى المجموعة (Γ) .
- (3) ليكن r الدوران الذي مركزه النقطة A و زاويته $\frac{\pi}{3}$.
- أ- عيّني صورة النقطة B بالدوران r .
- ب- عيّني Z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران r .
- ج- إستنتجي طبيعة الرباعي $ABCD$.
- د- عيّني صورة النقطة Ω بالدوران r ، ثم إستنتجي صورة المجموعة (Γ) بالدوران r .

التمرين الرابع (7ن):

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - (x^2 + 1)e^{-x}$.

(1) أدرسي تغيرات الدالة g وشكلي جدول تغيراتها.

(2) أحسبي $g(0)$ ، ثم إستنتجي إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$.

وَلَيْكُن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ حيث :

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$$

(1) أ- أحسبي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب-تحققي أن المستقيم $y = x - 1$: (D) مستقيم مقارب مائل للبيان (C_f) عند $(+\infty)$.

ج-أدرسي وضعية البيان (C_f) بالنسبة إلى (D) .

(2) أ- أثبتني أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3 + xe^x - e^x}{e^x}$.

ب- أحسبي $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(3) أ- أكتبي $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ ، حيث: f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

ب- إستنتجي إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكلي جدول تغيراتها.

(4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = f(x) - x$ ، والمستقيم $(d): y = x$.

أ- بيّني أن المعادلة: $h(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $2 < \alpha < 3$.

ب- إستنتجي الوضعية النسبية للبيان (C_f) بالنسبة إلى (d) .

(5) أحسبي $f(-\frac{3}{2})$ ثم أرسمي المستقيمين (D) ، (d) والبيان (C_f) على $[-\frac{3}{2}; +\infty[$.

(6) أ- بيّني أن الدالة: $(x^2 + 2x + 2)e^{-x} \mapsto x$ هي دالة أصلية للدالة: $-x^2 e^{-x} \mapsto x$.

ب- بإستعمال التكامل بالتجزئة، أحسبي بدلالة العدد الحقيقي x ، التكامل: $\int x e^{-x} dx$.

ج- أحسبي بدلالة β ، مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (d) والمستقيمين

ذو المعادلتين: $x = 3$ و $x = \beta$ ، حيث: $\beta > 4$.

إنتهى الموضوع الثاني

العلامة	الموضوع الأول - التصحيح المفصل
(4 نقاط)	التمرين الأول: نرمي قطعة نقدية مزيفة مرة واحدة، نرسم للظهر بالرمز P وللوجه بـ F. (1) حساب احتمال كل من الظهر والوجه علماً أن احتمال ظهور الظهر يساوي أربع مرات احتمال ظهور الوجه: لدينا: $\begin{cases} P(P) = 4P(F) \\ P(P) + P(F) = 1 \end{cases}$ ومنه: $4P(F) + P(F) = 1$، وعليه فإن: $5P(F) = 1$ أي: $P(F) = \frac{1}{5}$ و $P(P) = \frac{4}{5}$.
(0.25 ن) (0.25 ن)	(2) نرمي الآن قطعة نقدية n مرة حيث: $n \geq 1$، نسمى الحادثتين: A: «حادثة الحصول على الوجه مرة واحدة على الأقل خلال n رمية». F_n: «حادثة الحصول على الوجه في الرمية n». أ- حساب الاحتمالين $P(F_3)$ و $P(\bar{F}_3)$: لدينا: $P(F_3) = P(F) = \frac{1}{5}$ و $P(\bar{F}_3) = P(P) = \frac{4}{5}$.
(0.25 ن) (0.25 ن)	ب- إثبات أن: $P(A) = \frac{5^n - 4^n}{5^n}$: لدينا: $P(A) = 1 - P(\bar{A})$، حيث: $\bar{A}$: «حادثة عدم الحصول على الوجه خلال n رمية». ومن: $P(\bar{A}) = P(\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2 \cap \dots \cap \bar{F}_n)$. وبما أن الحوادث: $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ مستقلة فإن: $P(\bar{A}) = P(\bar{F}_1) \times P(\bar{F}_2) \times \dots \times P(\bar{F}_n)$. معناه أن: $P(\bar{A}) = [P(P)]^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$، ومنه: $P(A) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{5^n - 4^n}{5^n}$. إذن: $P(A) = \frac{5^n - 4^n}{5^n}$.
(1 ن)	(3) أ- القيم الممكنة للمتغير العشوائي X: القيم الممكنة لـ X هي: $\{3k - 30; 6k - 30; 5k - 30; -30\}$.
(0.25 ن)	ب- تعريف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X: أي: $P(X = 3k - 30) = P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) = P^3(F)$، ومنه: $P(X = 3k - 30) = \left(\frac{1}{5}\right)^3$.
(0.25 ن)	و: $P(X = 6k - 30) = P(F_1 \cap F_2 \cap \bar{F}_3) + P(F_1 \cap \bar{F}_2 \cap F_3) + P(\bar{F}_1 \cap F_2 \cap F_3)$. أي: $P(X = 6k - 30) = 3P^2(F) \times P(P)$، ومنه: $P(X = 6k - 30) = 3 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \frac{4}{5}$.
(0.25 ن)	و: $P(X = 5k - 30) = P(F_1 \cap \bar{F}_2 \cap \bar{F}_3) + P(\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2 \cap F_3) + P(\bar{F}_1 \cap F_2 \cap \bar{F}_3)$. أي: $P(X = 5k - 30) = 3P^2(P) \times P(F)$، ومنه: $P(X = 5k - 30) = 3 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{1}{5}$.
(0.25 ن)	و: $P(X = -30) = P^3(\bar{F}) = P^3(P)$، أي: $P(X = -30) = P(\bar{F}_1 \cap \bar{F}_2 \cap \bar{F}_3)$. ومن: $P(X = -30) = \left(\frac{4}{5}\right)^3$.

خلاصة: تعريف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X :

(0.25ن)	X_i	$3k - 30$	$6k - 30$	$5k - 30$	-30	$\sum$
	$P(X = X_i)$	$\left(\frac{1}{5}\right)^3$	$3\left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \frac{4}{5}$	$3\left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{1}{5}$	$\left(\frac{4}{5}\right)^3$	$\frac{125}{125} = 1$
	$X_i \times P(X = X_i)$	$(3k - 30) \times \left(\frac{1}{5}\right)^3$	$(6k - 30) \times 3\left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \frac{4}{5}$	$(5k - 30) \times 3\left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{1}{5}$	$(-30)\left(\frac{4}{5}\right)^3$	$\frac{315k - 2454}{125}$

ج - ابتداءً من أية قيمة للعدد الطبيعي k تكون اللعبة في صالح منظم اللعبة؟

تكون اللعبة في صالح اللاعب إذا كان الأمل الرياضي موجباً أي في غير مصلحة منظم اللعبة. والعكس، تكون اللعبة في صالح منظم اللعبة إذا كان الأمل الرياضي سالباً.

معناه أن: $E(X) = \sum X_i \times P(X = X_i) = \frac{315k - 2454}{125} < 0$ ، وهذا يكافئ أن: $315k - 2454 < 0$.

أي: $k < \frac{2454}{315} \simeq 7.79$.

وهذا يعني أن اللعبة تكون في صالح منظمها إذا كان: $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

التمرين الثاني:

لدينا: $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}: \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2}{3} + 8} \end{cases}$

1 البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$:

من أجل $n = 0$ فإن: $0 \leq u_0 = 0 \leq 2\sqrt{3}$ ، ومنه: $P(0)$ محققة.

نفرض صحة الخاصية حتى الدرجة n أي: $0 \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$.

ونحاول إثبات صحة الخاصية من أجل الدرجة $(n + 1)$ أي: $0 \leq u_{n+1} \leq 2\sqrt{3}$ ؟

لدينا فرضاً: $0 \leq u_n \leq 2\sqrt{3} \xrightarrow{\text{نربع الأطراف الموجبة للمتباينة}} 0 < u_n^2 \leq 12$

وبضرب الأطراف الموجبة لهذه المتباينة في العدد الموجب $\left(\frac{1}{3}\right)$ نجد: $0 \leq \frac{u_n^2}{3} \leq 4$ ، ثم نضيف 8 لأطرافها

نحصل على: $8 \leq \frac{u_n^2}{3} + 8 \leq 12$ ،

ونجذر الأطراف الموجبة لها فنحصل على $2\sqrt{3} = \sqrt{12} \geq \sqrt{\frac{u_n^2}{3} + 8} \geq \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \geq 0$.

وبالتعدي نجد أن: $0 \leq u_{n+1} \leq 2\sqrt{3}$.

إذن: $0 \leq u_n \leq 2\sqrt{3}$ ، من أجل كل عدد طبيعي n .

2 نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 12 - u_n^2$.

أ - إثبات أن المتتالية (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

(v_n) متتالية هندسية (إذا وفقط إذا كان $(v_{n+1} = v_n \times q)$).

لدينا: $v_n = 12 - u_n^2$ ،

ومنه: $v_{n+1} = 12 - u_{n+1}^2 = 12 - \left(\frac{u_n^2}{3} + 8\right) = 4 - \frac{u_n^2}{3} = \frac{12}{3} - \frac{u_n^2}{3}$.

وعليه فإن: $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$ أي: $v_{n+1} = \frac{1}{3}(12 - u_n^2)$.

مما يدل أن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$.

وحدها الأول: v_0 حيث: $v_0 = 12 - u_0^2 = 12 - 0^2 = 12$ أي: $v_0 = 12$.

(0.25ن)	بكتابة v_n بدلالة n : بما أن (v_n) متتالية هندسية، فمن عبارة الحد العام: $v_n = v_0 \times q^n$.
(0.25ن)	وبالتعويض نجد أن: $v_n = 12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ، من أجل كل عدد طبيعي n .
(0.25ن)	• استنتاج u_n بدلالة n :
(0.25ن)	لدينا: $v_n = 12 - u_n^2$ ، ومنه: $u_n^2 = 12 - v_n$ ، إذن: $u_n = \sqrt{12 - v_n}$.
(0.25ن)	أي: $u_n = \sqrt{12 - 12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}$.
(0.25ن)	حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:
(0.25ن)	لدينا: $q = \frac{1}{3} \in]-1; 1[$ ، مما يعني أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$.
(0.25ن)	ومنه فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{12 - 12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \sqrt{12}$ ، أي: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2\sqrt{3}$.
(0.25ن)	3) حساب S_n بدلالة n حيث: $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$:
(0.25ن)	لدينا: $v_n = 12 - u_n^2$ ، ومنه: $u_n^2 = 12 - v_n$.
(0.25ن)	و عليه فإن: $S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2 = 12 - v_0 + 12 - v_1 + \dots + 12 - v_n$.
(0.25ن)	إذن: $S_n = (12 + 12 + \dots + 12) - (v_0 + v_1 + \dots + v_n)$.
(0.25ن)	أي: $S_n = 12 \times (n + 1) - v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ ، إذن: $S_n = 12 \times (n + 1) - 12 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$.
(0.25ن)	ومنه فإن: $S_n = 12(n + 1) - 12 \times \frac{3}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$.
(0.25ن)	فينتج: $S_n = 12(n + 1) - 18 \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$.
(0.25ن)	• حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$:
(0.25ن)	لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$ ، ومنه فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.
(5نقاط)	التمرين الثالث: نعتبر المعادلة: $(E) \dots z^2 - (1 + 5i)z - 8 + 4i = 0$.
(0.25ن)	1) أ- إيجاد الجذور التربيعية للعدد المركب $(8 - 6i)$:
(0.25ن)	لنعتبر أن: $(x + iy)^2 = 8 - 6i$ ، فهو يُحقق إذن الجملة:
(0.25ن)	$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \dots (1) \\ 2xy = -6 \dots (2) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10 \dots (3) \end{cases}$
(0.25ن)	وبجمع المعادلتين (1) و (3) نجد أن: $2x^2 = 18$ أي: $x^2 = 9$ ، إذن: إما $x = -3$ أو $x = 3$.
(0.25ن)	ومن المعادلة (2) نجد أن: $y = \frac{-6}{2x} = \frac{-3}{x}$.
(0.25ن)	من أجل $x = -3$ فإن: $y = 1$ ومن أجل $x = 3$ فإن: $y = -1$.
(0.25ن)	إذن: $(3 - i)^2 = 8 - 6i$ أو $(-3 + i)^2 = 8 - 6i$.
(0.25ن)	بحل المعادلة (E) في $\mathbb{C}$:
(0.25ن)	نحسب المميز Δ :
(0.25ن)	$\Delta = (-1 + 5i)^2 - 4(1)(-8 + 4i) = 1 - 10i - 25 + 32 - 16i$
(0.25ن)	ومنه: $\Delta = 8 - 6i$ ، وحسب السؤال أ- فإن: $(-3 + i)^2 = 8 - 6i = (3 - i)^2$.

(ن0.25)	وَهَذَا يَعْنِي أَنَّ للمعادلة (E) حلان متمايزان هما: $\begin{cases} z_1 = \frac{1+5i-3+i}{2} = -1 + 3i \\ z_2 = \frac{1+5i+3-i}{2} = 2 + 2i \end{cases}$ إذن: $S = \{-1 + 3i; 2 + 2i\}$.
(ن0.25)	(2) نعتبر النقط A, B, C ذات اللواحق: $z_A = i, z_B = 2 + 2i, z_C = -1 + 3i$ ولتكن النقطة M ذات اللاحقة: $z_M = m$, حيث: $m \in \mathbb{C}^*$. أ- تعيين طبيعة (Γ) مجموعة النقط M حتى تكون النقط O, C, M في إستقامية: (النقط O, C, M في إستقامية) إذا وفقط إذا $(\frac{z_M - z_O}{z_C - z_O} \in \mathbb{R})$. حيث: $\frac{z_M - z_O}{z_C - z_O} \in \mathbb{R}$ يكافئ أن: $\frac{\overline{z_M - z_O}}{z_C - z_O} = \frac{z_M - z_O}{z_C - z_O}$. ومنه: $\frac{\overline{m}}{-1+3i} = \frac{m}{-1+3i}$ أي: $\frac{\overline{m}}{-1-3i} = \frac{m}{-1+3i}$. وعلیه فإن: $m(-1-3i) = \overline{m}(-1+3i)$، إذن: $m(-1-3i) = \overline{m}(-1+3i)$. ومنه: $0 = \overline{m} - m - 3i(\overline{m} + m)$ أي: $-2i \times Im(m) - 3i \times 2Re(m) = 0$. وبضرب الطرفين لهذه المعادلة الأخيرة في $\frac{i}{2}$ نجد أن: $Im(m) + 3Re(m) = 0$ مع $m \in \mathbb{C}^*$. إذن: (Γ) مجموعة النقط M حتى تكون النقط O, C, M في إستقامية هي المستقيم ذو المعادلة: $y = -3x$, ماعدا المبدأ O.
(ن0.25)	ب- تعيين طبيعة (Δ) مجموعة النقط M حتى يكون المثلث OCM قائم في O: (المثلث OCM قائم في O) إذا وفقط إذا $(\frac{z_M - z_O}{z_C - z_O} \text{ عدد تخيلي صرف})$ تكافئ أن مجموعة النقط M تنتمي إلى المستقيم: $y = -3x$ (OC) العمودي على المستقيم: $y = \frac{1}{3}x$ (Δ), ماعدا المبدأ O.
(ن0.25)	ج- تحديد طبيعة المثلث ABC: لدينا: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1+3i-i}{2+2i-i} = \frac{-1+2i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{-2+i+4i+2}{4+1} = \frac{5i}{5} = i$. وهذا يكافئ أن: $arg(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ و $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 1$. معناه أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم في A.
(ن0.25)	(2) نعتبر الدوران R الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$, والتحاكي H ذو المركز A والنسبة -2: أ- أكتب العبارة المركبة للتحويلين R و H: حيث: $R(z) = z' = a_R z + b_R = e^{\frac{\pi}{2}i} z + b_R = iz + b_R$, ومنه: $b_R = z_A(1 - a_R) = i(1 - i) = i + 1 = 1 + i$. من جهة أخرى، فإن: $H(z) = z' = a_H z + b_H = -2z + b_H$. حيث: $b_H = z_A(1 - a_H) = i(1 - (-2)) = i \times 3 = 3i$. ب- تعيين طبيعة التحويل النقطي T المعروف بـ: $T = R \circ H$: لدينا: $T(z) = R \circ H(z) = R[H(z)] = R[-2z + 3i] = i(-2z + 3i) + 1 + i$. ومنه: $T(z) = i(-2z + 3i) + 1 + i = -2iz - 3 + 1 + i = -2iz - 2 + i$. أي: $T(z) = -2iz - 2 + i$. حيث: $a_H = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$, مما يعني أن T عبارة عن تشابه مباشر، نسبته $k = 2$ وزاويته $\theta = -\frac{\pi}{2}$. ومركزه A (لأنه A هو مركز التحويلين الدوران والتحاكي).

	ج-اثبات أن النقط A, B, C' في إستقامية علماً أن: C' صورة النقطة C بالتحويل T: $T(z_{C'}) = -2iz_C - 2 + i = -2i(-1 + 3i) - 2 + i = 2i + 6 - 2 + i = 4 + 3i$. من جهة أخرى فإن: $\frac{z_{C'} - z_B}{z_{C'} - z_A} = \frac{4+3i-2-2i}{4+3i-i} = \frac{2+i}{4+2i} = \frac{2+i}{2(2+i)} = \frac{1}{2}$ وهذا يعني أن: $\overrightarrow{BC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}$. ومن هنا فإن النقط A, B, C' في إستقامية.												
(0.25ن)	(4) تعيين (Y) مجموعة النقط M حتى تكون النقط A, B, C, M تنتمي إلى نفس الدائرة: حسب السؤال الأول ج- فإن: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ أي: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ تخيلي صرف. ومن جهة أخرى: $\frac{z_C - z_M}{z_B - z_M} \times \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ عدد حقيقي، وهذا يكافئ أن: $\frac{z_C - z_M}{z_B - z_M}$ تخيلي صرف، مما يعني أن: $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MC}$ وهذا يكافئ أن: $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$، إذن: مجموعة النقط M هي الدائرة التي قطرها $[BC]$. (هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC).												
(7نقاط)	التمرين الرابع: (I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x$: (1) دراسة تغيرات الدالة g: - مجموعة التعريف: من المعطيات: $D_g =]0; +\infty[$. - النهايات: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 2) = -2$، لأن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x - 2 + \frac{1}{2}\ln x \right] = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty$، لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - 2 + \frac{1}{2}\ln x \right] = +\infty$ - الإشتقاقية: g معرفة وقابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$ ودالتها المشتقة: $g'(x) = 1 + \frac{1}{2x} = \frac{2x+1}{2x}$، أما إشارتها فهي موجبة تماماً على $]0; +\infty[$ لأن: $2x > 0; x > 0$، من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$، إذن: g متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$. - جدول تغيرات الدالة g: <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td></td><td>+</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	x	0	$+\infty$	$g'(x)$		+	$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$			
x	0	$+\infty$											
$g'(x)$		+											
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$											
(0.25ن)	(2) اثبات أن المعادلة: $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $1.7 < \alpha < 1.8$: g معرفة ومستمرة ومتزايدة تماماً على $]0; +\infty[$ (حسب السؤال الأول). حيث: $g(1.7) \simeq -0.03 < 0$، $g(1.8) \simeq 0.22 > 0$، إذن: $g(1.7) \times g(1.8) < 0$. إذن وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنه يوجد حل وحيد α في $]1.7; 1.8[$ يُحقق: $g(\alpha) = 0$.												
(0.25ن)	(3) استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$: حسب ما سبق، فإن: <table><tr><td>x</td><td>0</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td><td>+</td></tr></table>	x	0	α	$+\infty$	$g(x)$		-	0				+
x	0	α	$+\infty$										
$g(x)$		-	0										
			+										

(II) الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x$:

(1) أحسبي $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

(0.25ن)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[-\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x \right] = 0$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{7}{8}x^2 + x \right) = 0$$

(0.25ن)

$$\text{و: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x \right] = -\infty$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{4}x^2 \ln x \right) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{7}{8}x^2 + x \right) = -\infty$$

(2) إثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تمامًا، فإن: $f'(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$:

(0.25ن)

f معرفة وقابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ كمجموع وجداء دوال قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ، ودالتها المشتقة هي: $f'(x) = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x - \frac{1}{4}x = 1 - 2x - \frac{1}{2}x \ln x = 1 - 2x + \frac{1}{2}x \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

(0.25ن)

$$\text{أي: } f'(x) = 1 - 2x + \frac{1}{2}x \ln\left(\frac{1}{x}\right) = x\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right) = xg\left(\frac{1}{x}\right). \text{ وهو المطلوب.}$$

(0.25ن)

• إشارة $f'(x)$ من إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$ من أجل كل عدد حقيقي موجب تمامًا حيث:

- $x \in]0; \frac{1}{\alpha}]$ ، بمعنى أن: $\frac{1}{x} > \alpha$ ، وحسب الجزء (I) فإن: $g\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ ، أي: $f'(x) > 0$.
وهذا يعني أن: f متزايدة تمامًا على $]0; \frac{1}{\alpha}]$.

(0.25ن)

- $x \in \left] \frac{1}{\alpha}; +\infty \right[$ ، بمعنى أن: $\frac{1}{x} < \alpha$ ، وحسب الجزء (I) فإن: $g\left(\frac{1}{x}\right) < 0$ ، أي: $f'(x) < 0$.
وهذا يعني أن: f متناقصة تمامًا على $\left] \frac{1}{\alpha}; +\infty \right[$.

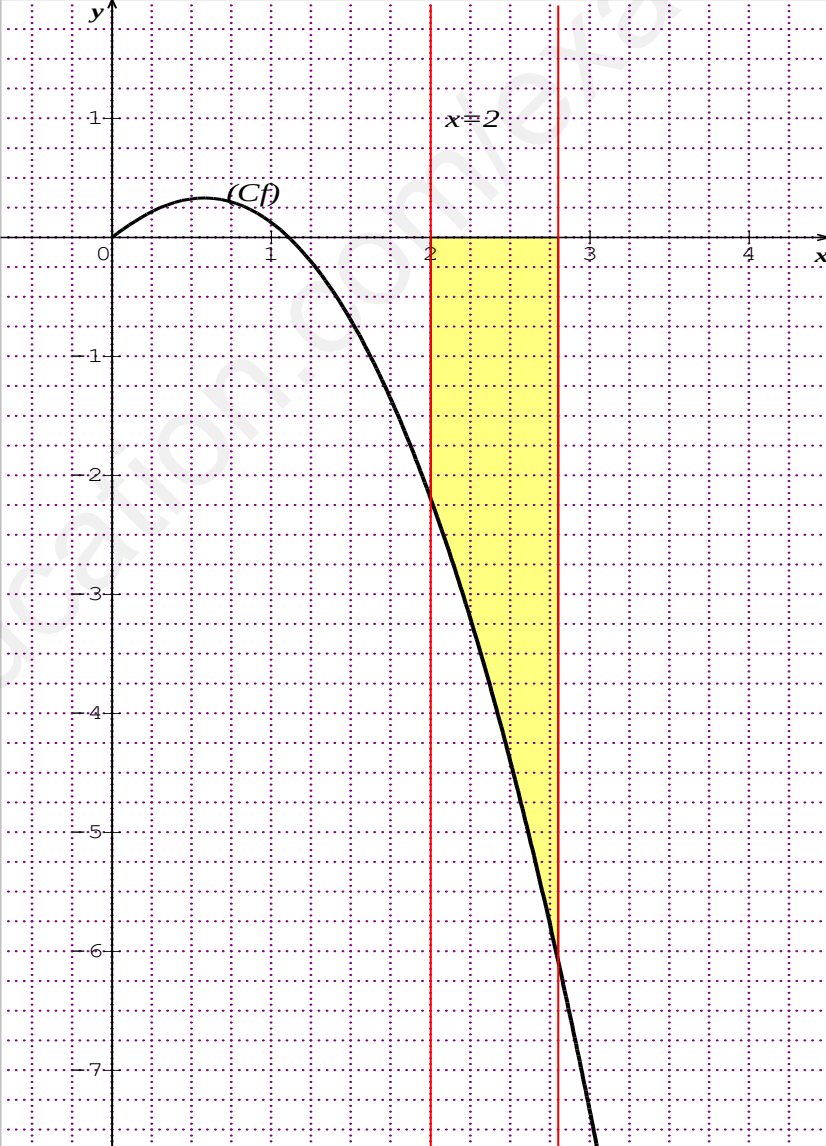
(3) تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

(0.25ن)

x	0	$\frac{1}{\alpha}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	$-\infty$

(1) إثبات أن: $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$:

حسب الجزء (I) فإن: $g(\alpha) = \alpha - 2 + \frac{1}{2} \ln \alpha = 0$ ، ومنه: $\frac{1}{2} \ln \alpha = 2 - \alpha$ ، أي: $\ln \alpha = 4 - 2\alpha$.

(0.25ن)	وَنَعْلَمُ أَنَّ: $-\ln \alpha = \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 2\alpha - 4$، وَبَتَعْوِيضِ هَذِهِ الْأَخِيرَةِ فِي عِبَارَةِ $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1+4\alpha}{8\alpha^2}$ نَجِدُ أَنَّ:
(0.25ن)	$f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\frac{7}{8\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \times \frac{8\alpha}{8\alpha} - \frac{1}{4\alpha^2} (2\alpha - 4) \times \frac{2}{2} = \frac{-7 + 8\alpha - 4\alpha + 8}{8\alpha^2} = \frac{4\alpha + 1}{8\alpha^2}.$
	• <u>إِسْتِنْتَاجُ حَصْرٍ لِلْعَدَدِ $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$:</u>
	حَسَبِ الْجُزْءِ (I) فَإِنَّ: $1.7 < \alpha < 1.8$، وَمِنْهُ: $4 \times 1.7 + 1 = 7.8 < 4\alpha + 1 < 4 \times 1.8 + 1 = 8.2$. إِذَنْ: $7.8 < 4\alpha + 1 < 8.2$.
(0.25ن)	مِنْ جِهَةٍ أُخْرَى، فَإِنَّ: $1.7 < \alpha < 1.8$، إِذَنْ: $8 \times 1.7^2 = 23.12 < 8\alpha^2 < 8 \times 1.8^2 = 25.92$.
(0.25ن)	وَعَلَيْهِ نَجِدُ: $\frac{7.8}{25.92} < \frac{4\alpha+1}{8\alpha^2} < \frac{8.2}{23.12}$. أَيْ: $0.3 < f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < 0.35$.
(0.25ن)	2) <u>حِسَابُ $f(3)$: $f(3) \simeq -7.35$.</u> • <u>رِسْمُ الْبَيَانِ (C_f) عَلَى الْمَجَالِ $[0; 3]$:</u>
(0.5ن)	
(0.25ن)	

	III) لتكن الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = x^2 \ln x$. (1) باستعمال المكاملة بالتجزئة، حساب بدلالة λ التكامل $\int_2^\lambda h(x) dx$، حيث: $\lambda > 2$: لدينا: $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^2 \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{3} x^3 \end{cases}$، إذن: $\int_2^\lambda h(x) dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_2^\lambda - \frac{1}{3} \int_2^\lambda x^2 dx$. ومنه: $\int_2^\lambda h(x) dx = \left[-\frac{x^3}{3} \left(\frac{1}{3} - \ln x \right) \right]_2^\lambda = -\frac{\lambda^3}{3} \left(\frac{1}{3} - \ln \lambda \right) + \frac{8}{3} \left(\frac{1}{3} - \ln 2 \right)$. و عليه فإن: $\int_2^\lambda h(x) dx = \frac{8}{9} - \frac{\lambda^3}{9} - \frac{8}{3} \ln 2 + \frac{\lambda^3}{3} \ln \lambda$.
(ن0.25)	(2) استنتاج مساحة الحيز بدلالة λ للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين: $x = \lambda$ و $x = 2$: بما أن البيان (C_f) يقع تحت محور الفواصل من أجل $2 < x < \lambda$، حيث: $\lambda > 2$، فإن: $I = -\ \vec{i}\ \times \ \vec{j}\ \times \int_2^\lambda f(x) dx = -4 \int_2^\lambda \left[-\frac{7}{8} x^2 + x - \frac{1}{4} h(x) \right] dx$. وحسب السؤال الأول، فإن: $I = -4 \left[-\frac{7}{8} \times \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{36} - \frac{x^3}{12} \ln x \right]_2^\lambda = -4 \left[-\frac{19x^3}{72} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12} \ln x \right]_2^\lambda$ أي: $I = -4 \left[-\frac{19\lambda^3}{72} + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^3}{12} \ln \lambda + \frac{19}{9} - 2 + \frac{2}{3} \ln 2 \right]$ $= -4 \left[-\frac{19\lambda^3}{72} + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^3}{12} \ln \lambda + \frac{1}{9} + \frac{2}{3} \ln 2 \right]$ إذن: $I = \left(\frac{19\lambda^3}{18} - 2\lambda^2 + \frac{\lambda^3}{3} \ln \lambda - \frac{4}{9} - \frac{8}{3} \ln 2 \right) cm^2$.
(ن0.25)	

العلامة	الموضوع الثاني - التصحيح المفصل -																																																															
(4 نقاط)	التمرين الأول: D_1 و D_2 زهرتي نرد، النرد D_1 مغشوش وله كل وجهين يحملان نفس الرقم k حيث: $k \in \{1; 2; 3\}$. نرمز بـ u_k إحتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم k. (1) حساب u_1, u_2, u_3، علماً أن هذه الأعداد تُشكّل حدود متتابعة لمتتالية حسابية أساسها $\frac{1}{4}$: بما أن u_1, u_2, u_3 عبارة عن حدود متتابعة لمتتالية حسابية، فإن: u_2 هو الوسط الحسابي. من جهة أخرى فإن: $u_1 + u_2 + u_3 = 3$، وعليه لدينا الجملة: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 1 \\ u_1 + u_3 = 2u_2 \end{cases}$ فينتج: $3u_2 = 1$، ومنه: $u_2 = \frac{1}{3}$. ومن جهة أخرى وبما أن الأساس هو $r = \frac{1}{4}$، وبما أن: $u_1 = u_2 - r = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$. إذن: $u_1 = \frac{1}{12}$. ويكون: $u_1 = u_2 + r = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$. إذن: $u_2 = \frac{7}{12}$.																																																															
(0.25 ن)																																																																
(0.25 ن)																																																																
(0.25 ن)																																																																
(0.25 ن)	(2) النرد D_2 ليس مغشوش وله كل ثلاث وجوه تحمل نفس الرقم p حيث: $p \in \{1; 2\}$. نرمز بـ v_p إحتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم p. • حساب v_1 و v_2: بما أن النرد D_2 ليس مغشوش، فنحن في حالة تساوي الإحتمالات وعليه فإن: إذن: $v_1 = v_2 = \frac{1}{2}$. $v_1 = v_2 = \frac{\text{card}\{1;1;1\}}{\text{card}\Omega} = \frac{\text{card}\{1;1;1\}}{\text{card}\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.																																																															
(0.25 ن)																																																																
(0.25 ن)	(3) نرمي النردين D_1 و D_2 في آن واحد، وَنعتبر المتغير العشوائي X الذي يُساوي جداء رقمي الوجهين العلويين للنردين D_1 و D_2 بعد السقوط. أ- تعريف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X: نُوضّح في الجدول أدناه النتائج: <table> <tr> <td>$D_2 \backslash D_1$</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr> <td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr> <td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr> <td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr> <td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>6</td><td>6</td></tr> <tr> <td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>6</td><td>6</td></tr> <tr> <td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>6</td><td>6</td></tr> </table> و عليه فإن قيم المتغير العشوائي X: $X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 6\}$. أما قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X: <table> <tr> <td>X_i</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>6</td><td>$\sum$</td></tr> <tr> <td>P_i</td><td>$\frac{6}{36}$</td><td>$\frac{12}{36}$</td><td>$\frac{6}{36}$</td><td>$\frac{6}{36}$</td><td>$\frac{6}{36}$</td><td>$\frac{36}{36} = 1$</td></tr> </table>	$D_2 \backslash D_1$	1	1	2	2	3	3	1	1	1	2	2	3	3	1	1	1	2	2	3	3	1	1	1	2	2	3	3	2	2	2	4	4	6	6	2	2	2	4	4	6	6	2	2	2	4	4	6	6	X_i	1	2	3	4	6	$\sum$	P_i	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{36}{36} = 1$
$D_2 \backslash D_1$	1	1	2	2	3	3																																																										
1	1	1	2	2	3	3																																																										
1	1	1	2	2	3	3																																																										
1	1	1	2	2	3	3																																																										
2	2	2	4	4	6	6																																																										
2	2	2	4	4	6	6																																																										
2	2	2	4	4	6	6																																																										
X_i	1	2	3	4	6	$\sum$																																																										
P_i	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{36}{36} = 1$																																																										
(0.25 ن)																																																																
(1.5 ن)																																																																
(0.25 ن)	ب- حساب $\sigma(2024 - 1445X)$: نعلم أن: الإنحراف المعياري مُعطى بالعلاقة: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$، و $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.																																																															

الجدول أدناه يُساعدنا، حيث:

X_i	1	2	3	4	6	$\sum$
P_i	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{36}{36} = 1$
$X_i \times P_i$	$\frac{6}{36}$	$\frac{24}{36}$	$\frac{18}{36}$	$\frac{24}{36}$	$\frac{36}{36}$	$\frac{108}{36} = 3$
X_i^2	1	4	9	16	36	
$X_i^2 \times P_i$	$\frac{6}{36}$	$\frac{48}{36}$	$\frac{54}{36}$	$\frac{96}{36}$	$\frac{216}{36}$	$\frac{420}{36} = \frac{35}{3}$

(ن0.25) إذن: $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum X_i^2 \times P_i - [\sum X_i \times P_i]^2 = \frac{35}{3} - 3 = \frac{8}{3}$

(ن0.25) ويكون: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

(ن0.25) من جهة أخرى، نعلم أن: $\begin{cases} \sigma(X+b) = \sigma(X) \\ \sigma(aX) = |a|\sigma(X) \end{cases}$

(ن0.25) فيكون: $\sigma(2024 - 1445X) = \sigma(-1445X) = |-1445|\sigma(X)$

(ن0.25) إذن: $\sigma(2024 - 1445X) = 1445 \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{2809\sqrt{6}}{3}$

(نقاط4) **التمرين الثاني:** لتكن (t_n) متتالية هندسية متزايدة تمامًا معرفّة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

(ن0.25) $\begin{cases} t_0 + t_1 + t_2 = 7\ln 2 \dots (1) \\ t_0 \times t_1 \times t_2 = 8(\ln 2)^3 \dots (2) \end{cases}$

(1) **حساب الحدود t_1 ثم t_0 و t_2 :**

(ن0.25) بما أن (t_n) هندسية، والحدود t_0, t_1, t_2 متتابعة منها، فإن: t_1 هو الوسط الهندسي الذي يُحقّق: $t_1^2 = t_0 \times t_2$ ومنه، وبالتعويض في (2) نجد: $t_1^3 = 8(\ln 2)^3 = (2\ln 2)^3$ وهذا يُكافئ أن: $t_1 = 2\ln 2 = \ln 4$

(ن0.25) من جهة أخرى، وبالتعويض $t_1 = 2\ln 2$ في كل من (1) و (2)، نحصل على الجملة التالية:

(ن0.25) $\begin{cases} t_0 + t_2 = 7\ln 2 - 2\ln 2 = 5\ln 2 \dots (1) \\ t_0 \times t_2 = (2\ln 2)^2 = 4(\ln 2)^2 \dots (2) \end{cases}$

(ن0.25) وتؤول حل هذه الجملة إلى حل المعادلة: $x^2 - Sx + P = 0$ ، حيث: $S = 5\ln 2$ و $P = 4(\ln 2)^2$

(ن0.25) أي: $x^2 - x(5\ln 2) + 4(\ln 2)^2 = 0$ ، لنحسب المميز $\Delta = (5\ln 2)^2 - 4 \times 1 \times 4(\ln 2)^2$ ومنه فإن: $\Delta = 25(\ln 2)^2 - 16(\ln 2)^2 = 9(\ln 2)^2 = (3\ln 2)^2 > 0$

(ن0.25) المعادلة إذن تقبل حلان متمايزان هما: $\begin{cases} x' = \frac{5\ln 2 - 3\ln 2}{2} = \ln 2 \\ x' = \frac{5\ln 2 + 3\ln 2}{2} = 4\ln 2 \end{cases}$

(ن0.25) وعليه إما: $(t_0; t_1; t_2) = (4\ln 2; 2\ln 2; \ln 2)$ ، مرفوض، لأن: المتتالية (t_n) متزايدة تمامًا.

(ن0.25) أو $(t_0; t_1; t_2) = (\ln 2; 2\ln 2; 4\ln 2)$ ، مقبول، لأن: المتتالية (t_n) متزايدة تمامًا.

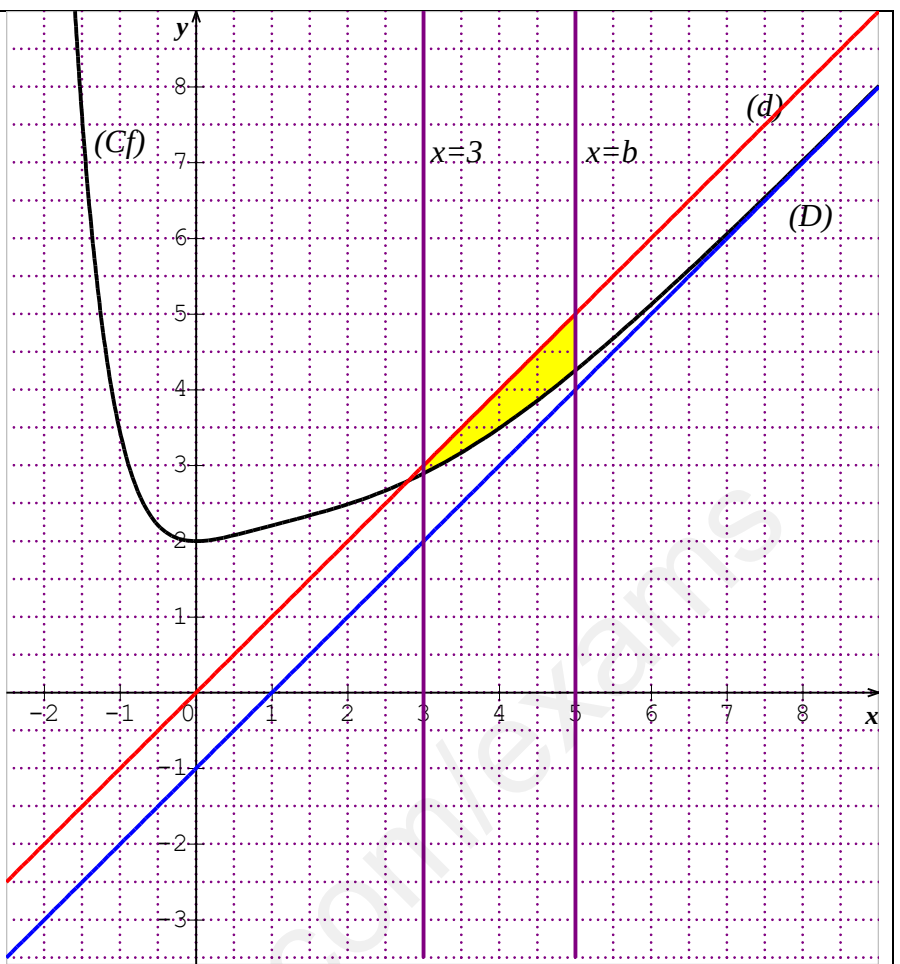
(ن0.25)	(2) استنتاج الأساس q للمتتالية (t_n): حسب السؤال الأول، فإن: $q = \frac{t_1}{t_0} = \frac{2\ln 2}{\ln 2} = 2$ ، أي: $q = 2$. • أكتبي t_n بدلالة n: بما أن المتتالية (t_n) هندسية، فمن عبارة الحد العام: $t_n = t_0 \times q^n = 2^n(\ln 2); \forall n \in \mathbb{N}$
(ن0.25)	(3) إيجاد أصغر قيمة للعدد الطبيعي n الذي يُحقق: $t_n \geq \ln 2^{2974}$: $t_n \geq \ln 2^{2974}$ تكافئ -حسب خواص اللوغاريتم النيبيري- وحسب السؤال الثاني فإن: $2^n(\ln 2) \geq \ln 2^{2974} = 2974(\ln 2)$ ، وهذا يعني أن: $2^n \geq 2974$ ، أي وبتطبيق خواص اللوغاريتم النيبيري: $n \ln 2 \geq \ln 2974$ ، إذن: $n \geq \frac{\ln 2974}{\ln 2} \simeq 11.53$ ، ومنه قيمة $n = 12$.
(ن0.25)	(4) أ- حساب المجموع S_n بدلالة t_n: $S_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n$: بما أن المتتالية (t_n) هندسية فإن: $S_n = t_0 \times \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \ln 2 \times \frac{2^{n+1}-1}{2-1}$. إذن: $S_n = (2^{n+1} - 1)\ln 2; \forall n \in \mathbb{N}$. • حساب الجداء P_n بدلالة t_n: $P_n = t_0 \times t_1 \times \dots \times t_n$: لدينا: $P_n = t_0 \times t_1 \times \dots \times t_n = 2^0(\ln 2) \times 2^1(\ln 2) \times \dots \times 2^n(\ln 2)$. وحسب قواعد القوى، فإن: $P_n = 2^{(0+1+\dots+n)}(\ln 2)^{n+1} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}(\ln 2)^{n+1}$. ملاحظة: نلاحظ أن: حيث: $u_n = n$ و $u_{n+1} = n+1$ من الشكل: $u_{n+1} = n+r$ ، مما يعني أن المتتالية (u_n) حسابية وأساسها $r = 1$ ، إذن: $0 + 1 + 2 + \dots + n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{n-0+1}{2} \times (u_0 + u_n)$ $0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n+1}{2} \times (0 + n) = \frac{n(n+1)}{2}$.
(ن0.25)	ب- استنتاج S'_n بدلالة n حيث: $S'_n = \ln(t_0) + \ln(t_1) + \dots + \ln(t_n)$: لدينا وحسب خواص اللوغاريتم النيبيري: $S'_n = \ln(t_0) + \ln(t_1) + \dots + \ln(t_n) = \ln(t_0 \times t_1 \times \dots \times t_n) = \ln P_n$ ومنه، وحسب السؤال أ- فإن: $S'_n = \ln \left[2^{\frac{n(n+1)}{2}}(\ln 2)^{n+1} \right]$.
(ن0.25)	ج- حساب S''_n بدلالة n حيث: $S''_n = t_0^{2024} + t_1^{2024} + \dots + t_n^{2024}$: لدينا: $S''_n = t_0^{2024} + t_1^{2024} + \dots + t_n^{2024} = v_0 + v_1 + \dots + v_n$. حيث: $v_n = t_n^{2024} = [2^n(\ln 2)]^{2024} = 2^{2024n}(\ln 2)^{2024}$. نلاحظ أن: $v_{n+1} = 2^{2024(n+1)}(\ln 2)^{2024} = v_n \times 2^{2024}$ ، مما يعني أن: (v_n) متتالية هندسية أساسها: $q' = 2^{2024}$ وحدها الأول: $v_0 = (\ln 2)^{2024}$ ، ومنه: $S''_n = v_0 \times \frac{q'^{n+1}-1}{q'-1} = (\ln 2)^{2024} \left[\frac{2^{2024(n+1)}-1}{2^{2024}-1} \right]$
(ن0.25)	التمرين الثالث: في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$، نعتبر النقاط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب: $Z_A = -1 + \sqrt{3}i$، $Z_B = \bar{Z}_A$ و $Z_C = 2$. (1) أ- كتابة العدد المركب: $\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}$ على الشكل الأسّي: نضع: $Z = \frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}$ ، ومنه: $Z = \frac{-1 - \sqrt{3}i - 2}{-1 + \sqrt{3}i - 2} = \frac{-3 - \sqrt{3}i}{-3 + \sqrt{3}i} = \frac{-\sqrt{3}(\sqrt{3} + i)}{-\sqrt{3}(\sqrt{3} - i)} = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} \times \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} + i} = \frac{3 + 2\sqrt{3}i - 1}{3 + 1}$. إذن: $Z = \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. حيث: $Z = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$.

(ن0.25)	ولتكن: $\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow \arg(Z) = \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$ ، ومنه: $\arg(Z) = \theta$
(ن0.25)	إذن: $Z = \left[1; \frac{\pi}{3}\right]$ ، أي: $Z = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
(ن0.25)	ب- استنتاج طبيعة المثلث ABC: حسب السؤال أ- فإن: $Z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، وهذا يكافئ أن:
(ن0.25)	$\begin{cases} \left \frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C} \right = 1 \\ \arg\left(\frac{Z_B - Z_C}{Z_A - Z_C}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ ومنه فإن: $\left\{ \begin{array}{l} BC = AC \\ (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3} \end{array} \right.$
(ن0.25)	وهذا يعني أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.
(ن0.25)	ج- تعيين ω مركز ونصف قطر الدائرة (γ) المحيطة بالمثلث ABC:
(ن0.25)	نلاحظ أن: $ Z_A = \sqrt{1+3} = 2 = Z_B = Z_C $ ، وهذا يكافئ أن: $OA = OB = OC = 2$.
(ن0.25)	إذن: النقط A، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة (γ) التي مركزها المبدأ O ونصف قطرها 2.
(ن0.25)	2) أ- تعيين طبيعة وعناصر المجموعة (Γ) للنقط M(Z) التي تحقق: $Z\bar{Z} + 2(Z + \bar{Z}) = 0$:
(ن0.25)	بوضع: $\begin{cases} Z = x + iy \\ \bar{Z} = x - iy \end{cases}$ مع x و y عدنان حقيقيان، يكون إذن: $Z\bar{Z} + 2(Z + \bar{Z}) = 0$ ، أي:
(ن0.25)	$(x + iy)(x - iy) + 2(x + iy + x - iy) = x^2 + y^2 + 2x$
(ن0.25)	من الشكل: $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ ، إذن: (Γ) عبارة عن دائرة مركزها $\Omega(-2; 0)$ ونصف القطر 2.
(ن0.25)	ب- التحقق أن النقطتين A و B تنتميان إلى المجموعة (Γ): لدينا:
(ن0.25)	$\begin{cases} \Omega A = Z_A - Z_\Omega = -1 + \sqrt{3}i - (-2) = 1 + \sqrt{3}i = 2 \\ \Omega B = Z_B - Z_\Omega = -1 - \sqrt{3}i - (-2) = -1 + \sqrt{3}i = 2 \end{cases}$
(ن0.25)	وهذا يعني أن: A و B تنتميان إلى المجموعة (Γ).
(ن0.25)	3) ليكن r الدوران الذي مركزه النقطة A وزاويته $\frac{\pi}{3}$.
(ن0.25)	أ- تعيين صورة النقطة B بالدوران r:
(ن0.25)	لدينا: $\begin{cases} r(B) = B' \\ r(A) = A \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} Z_{B'} = aZ_B + b \\ Z_A = aZ_A + b \end{cases}$ ، فينتج: $a = \frac{Z_{B'} - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.
(ن0.25)	إذن: $Z_{B'} = Z_A + a(Z_B - Z_A)$ ، ومنه: $Z_{B'} - Z_A = a(Z_B - Z_A)$.
(ن0.25)	أي: $Z_{B'} = -1 + \sqrt{3}i + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(-1 - \sqrt{3}i + 1 - \sqrt{3}i)$.
(ن0.25)	ومنه: $Z_{B'} = -1 + \sqrt{3}i + \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)(-2\sqrt{3}i) = -1 + \sqrt{3}i - \sqrt{3}i + 3 = 2$.
(ن0.25)	إذن: $Z_{B'} = Z_C = 2$.
(ن0.25)	ب- تعيين Z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة C بالدوران r:
(ن0.25)	لدينا: $r(C) = D$ ، وحسب السؤال أ- فإن: $Z_D = Z_A + a(Z_C - Z_A)$ ، ومنه:
(ن0.25)	$Z_D = -1 + \sqrt{3}i + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(2 + 1 - \sqrt{3}i) = -1 + \sqrt{3}i + \frac{(1+i\sqrt{3})(3-\sqrt{3}i)}{2}$
(ن0.25)	أي: $Z_D = -1 + \sqrt{3}i + \frac{3+3\sqrt{3}i-\sqrt{3}i+3}{2} = -1 + \sqrt{3}i + 3 + \sqrt{3}i$
(ن0.25)	إذن: $Z_D = 2 + 2\sqrt{3}i$.
(ن0.25)	ج- استنتاج طبيعة الرباعي ABCD:

(ن0.25)	لدينا: $\vec{BA} = \vec{CD}$ أي: $\begin{cases} Z_{\vec{CD}} = Z_D - Z_C = 2 + 2\sqrt{3}i - 2 = 2\sqrt{3}i \\ Z_{\vec{BA}} = Z_A - Z_B = -1 + \sqrt{3}i + 1 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}i \end{cases}$ ومنه: الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع. ومن جهة أخرى فإن: $r(B) = C$ و $r(C) = D$، معناه أن: $BC = CD$. إذن: متوازي الأضلاع $ABCD$ معين.												
(ن0.25)	د-تعيين صورة النقطة Ω بالدوران r: حسب السؤال 2-أ. فإن: $\Omega(-2; 0)$ وهذا يكافئ أن: $Z_{\Omega} = -2$. لدينا: $r(\Omega) = \Omega'$، وحسب السؤال 2-أ. فإن: $Z_{\Omega'} = Z_A + a(Z_{\Omega} - Z_A)$، ومنه: $Z_{\Omega'} = -1 + \sqrt{3}i + \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(-2 + 1 - \sqrt{3}i) = -1 + \sqrt{3}i + \frac{(1+i\sqrt{3})(-1-\sqrt{3}i)}{2}$ أي: $Z_{\Omega'} = -1 + \sqrt{3}i + \frac{-1-2\sqrt{3}i+3}{2} = -1 + \sqrt{3}i + 1 - \sqrt{3}i = 0$ إذن: $Z_{\Omega'} = 0$، أي: $r(\Omega) = O$.												
(ن0.25)	• استنتاج صورة المجموعة (Γ) بالدوران r: لدينا: $\begin{cases} r(B) = C \\ r(\Omega) = O \end{cases}$، معناه أن: صورة الدائرة (Γ) بالدوران r هي الدائرة (γ).												
(نقاط7)	التمرين الرابع: (I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - (x^2 + 1)e^{-x}$: (1) دراسة تغيرات الدالة g: مجموعة التعريف: من المعطيات: $D_g = \mathbb{R}$ النهايات: (ن0.25) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [1 - (x^2 + 1)e^{-x}] = -\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow -\infty} -(x^2 + 1) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x} = +\infty$ (ن0.25) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 - (x^2 + 1)e^{-x}] = 1$ لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x} = 0$ الاشتقاقية: معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: (ن0.25) $g'(x) = -2xe^{-x} + (x^2 + 1)e^{-x} = (-2x + x^2 + 1)e^{-x} = (x - 1)^2 e^{-x}$ (ن0.25) أما إشارتها فهي موجبة تماماً على $\mathbb{R}$ لأن: $(x - 1)^2 > 0$; $e^{-x} > 0$، من أجل كل عدد حقيقي x، إذن: g متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$. جدول تغيرات الدالة g: <table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>$-\infty$</td> <td>1</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$g'(x)$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$g(x)$</td> <td>$-\infty$</td> <td></td> <td>1</td> </tr> </table> (ن0.25) $g(1) = 1 - 2e^{-1}$	x	$-\infty$	1	$+\infty$	$g'(x)$	+	0	+	$g(x)$	$-\infty$		1
x	$-\infty$	1	$+\infty$										
$g'(x)$	+	0	+										
$g(x)$	$-\infty$		1										
(ن0.25)	(2) حساب $g(0)$: $g(0) = 1 - 1 = 0$												

	استنتاج إشارة $g(x)$: حسب ما سبق، فإن:								
(ن0.25)	<table border="1"> <tr> <td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr> <tr> <td>$g(x)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr> </table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$g(x)$	$-$	0	$+$
x	$-\infty$	0	$+\infty$						
$g(x)$	$-$	0	$+$						
(ن0.25)	(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$: أ- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - 1 + (x^2 + 2x + 3)e^{-x}] = +\infty.$ لأن: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \end{cases}$								
(ن0.25)	ب- التحقق أن المستقيم $y = x - 1$ (C_f) مستقيم مقارب مائل للبيان عند $(+\infty)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^2 + 2x + 3)e^{-x}] = 0.$ لأن: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \end{cases}$ ومنه: المستقيم $y = x - 1$ (D): مستقيم مقارب مائل للبيان عند $(+\infty)$.								
(ن0.25)	ج- دراسة الوضعية النسبية: أي ندرس إشارة: $f(x) - y$، حيث: $f(x) - y = f(x) - (x - 1) = (x^2 + 2x + 3)e^{-x} > 0; \forall x \in \mathbb{R}$ لأن: $(\Delta = 4 - 12 = -9 < 0)$; $(x^2 + 2x + 3) > 0$; $e^{-x} > 0$، من أجل كل عدد حقيقي. إذن: $f(x) - (x - 1) > 0; \forall x \in \mathbb{R}$. أي: البيان ($C_f$) يقع فوق المقارب المائل (D).								
(ن0.25)	(2) أ- اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3 + xe^x - e^x}{e^x}$: لدينا: $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2x + 3)e^{-x} = x - 1 + \frac{x^2 + 2x + 3}{e^x}$. إذن: $f(x) = \frac{(x-1)e^x + x^2 + 2x + 3}{e^x} = \frac{x^2 + 2x + 3 + xe^x - e^x}{e^x}$.								
(ن0.25)	ب- حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$: حسب السؤال أ- فإن: $+\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 3 + xe^x - e^x}{e^x} = +\infty$ لأن: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 2x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases}$								
	(3) أكتابة $f'(x)$ بدلالة $g(x)$، حيث: f' هي الدالة المشتقة للدالة f: f معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ كمجموع وجداء دوال قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$، ودالتها المشتقة:								

(ن0.25)	$f'(x) = 1 + (2x + 2)e^{-x} - (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ $. f'(x) = 1 + (-x^2 - 1)e^{-x} = 1 - (x^2 + 1)e^{-x} = g(x): \text{أي:}$												
(ن0.25)	ب-إستنتجى إتجاه تغيّر الدالة f: حسب السؤال -أ- فإنّ إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $g(x)$ وحسب الجزء I فإنّ: $f'(x) < 0$ من أجل $x \in]-\infty; 0[$، ومنه: f متناقصة تمامًا على $]-\infty; 0[$. $f'(x) > 0$ من أجل $x \in]0; +\infty[$، ومنه: f متزايدة تمامًا على $]0; +\infty[$.												
(ن0.25)	• تشكيل جدول تغيّرات الدالة f: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td>$f(0)$</td><td>$+\infty$</td></tr></table> مع: $f(0) = -1 + 3 = 2$.	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f'(x)$	$-$	0	$+$	$f(x)$	$+\infty$	$f(0)$	$+\infty$
x	$-\infty$	0	$+\infty$										
$f'(x)$	$-$	0	$+$										
$f(x)$	$+\infty$	$f(0)$	$+\infty$										
(ن0.25)	(4) لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = f(x) - x$، والمستقيم $(d): y = x$ أ- إثبات أن المعادلة: $h(x) = 0$ تقبل حلًا وحيدًا α حيث: $2 < \alpha < 3$ h معرفة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ كمجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة: $h'(x) = f'(x) - 1 = g(x) - 1 = -(x^2 + 1)e^{-x} < 0; \forall x \in \mathbb{R}$ وعليه، فإنّ: h متناقصة تمامًا على $]2; 3[$ كجزء من $\mathbb{R}$ حيث: $\begin{cases} h(2) \simeq 0.48 > 0 \\ h(3) \simeq -0.11 < 0 \end{cases}$ فينتج: $h(2) \times h(3) < 0$، إذن: وحسب مبرهنة القيم المتوسطة، فإنّه يوجد حل وحيد $\alpha \in]2; 3[$ يُحقق: $h(\alpha) = 0$.												
(ن0.25)	ب-إستنتاج الوضعية النسبية للبيان (C_f) بالنسبة إلى (d): لدينا: $h(x) = f(x) - x$، ومن دراسة إشارتها تساعدنا على معرفة الوضعية النسبية للبيان (C_f) بالنسبة إلى (d) وحسب السؤال -أ- فإنّ: <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$h(x)$</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr></table> أي أنّ: (C_f) يقع أعلى (d) لما $x \in]-\infty; \alpha[$، ويقع أسفل (d) لما $x \in]\alpha; +\infty[$. و: $(C_f) \cap (d) = \{(\alpha; 0)\}$.	x	$-\infty$	α	$+\infty$	$h(x)$	$+$	0	$-$				
x	$-\infty$	α	$+\infty$										
$h(x)$	$+$	0	$-$										
	(5) حساب $f(-\frac{3}{2})$: $f(-\frac{3}{2}) \simeq 7.58$ • رسم المستقيمين (D)، (d) والبيان (C_f) على $]-\frac{3}{2}; +\infty[$:												

(ن0.25) (ن0.25)	
(ن0.25)	6) أ- بيني أن الدالة: $x \mapsto (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة: $x \mapsto -x^2e^{-x}$ الدالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ كجاء دالتين قابلتين للاشتقاق، حيث: $(2x + 2)e^{-x} - (x^2 + 2x + 2)e^{-x} = (2x + 2 - x^2 - 2x - 2)e^{-x} = -x^2e^{-x}$ وهو المطلوب.
(ن0.25)	ب- باستعمال التكامل بالتجزئة، أحسب بدلالة العدد الحقيقي x ، التكامل: $\int xe^{-x}dx$ لدينا: $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ ومنه: $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$، إذن: $I = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx$ أي: $I = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c = -(x+1)e^{-x} + c$
(ن0.25) (ن0.25) (ن0.25) (ن0.25)	ج- حساب بدلالة β ، مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (d) والمستقيمين ذوو المعادلتين: $x = \beta$ و $x = 3$ ، حيث: $\beta > 4$ بما أن البيان (C_f) يقع أسفل المستقيم (d) على المجال $]3; +\infty[$ ، فإن: $\mathcal{A}(\beta) = \ \vec{i} \ \times \ \vec{j} \ \int_3^\beta [x - f(x)]dx$ أي: $\mathcal{A}(\beta) = 1 \times 1 \int_3^\beta (x - x + 1 - x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 3e^{-x})dx$ ، ومنه: $\mathcal{A}(\beta) = \int_3^\beta (-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 3e^{-x} + 1)dx$ ، وحسب ب- و ج- فإن: $\mathcal{A}(\beta) = [(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + 2(x + 1)e^{-x} + 3e^{-x} + x]_3^\beta$ ، أي: $\mathcal{A}(\beta) = [(x^2 + 4x + 7)e^{-x} + x]_3^\beta$ ، فينتج: $\mathcal{A}(\beta) = [(\beta^2 + 4\beta + 7)e^{-\beta} + \beta - 28e^{-3} - 3](cm^2)$

الامتحان التجريبي لشهادة البكالوريا دورة: جوان 2024

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات الآتية مع التبرير.
(1) المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}; \vec{v})$ ، A ، B و C نقط لواحقها على الترتيب:

$$z_C = -1 \quad , \quad z_B = \overline{z_A} \quad , \quad z_A = \sqrt{3} - 1 + i$$

- العدد المركب α حيث: $\alpha = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ (يساوي: أ) $\alpha = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ (ب) $\alpha = e^{i\frac{\pi}{3}}$ (ج) $\alpha = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

(2) طبيعة المثلث ABC هو: أ) ABC قائم في C (ب) ABC قائم في B ومتساوي الساقين (ج) ABC متقايس الأضلاع

(3) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \sqrt{e^{-x} + 3}$

V حجم الجسم الناتج عن دوران (C_f) دورة كاملة حول محور الفواصل لما $x \in [0; 1]$ هو:

أ) 11 (ب) 12 (ج) 15 تعطى النتائج مدور الى الوحدة.

(4) كيس يحتوي على 3 كريات بيضاء و 4 حمراء وواحدة خضراء. نسحب n كرية عشوائيا على التوالي وبالارجاع.

- احتمال الحصول على الأقل رية بيضاء هو: أ) $1 - \left(\frac{5}{8}\right)^n$ (ب) $1 - \left(\frac{3}{8}\right)^n$ (ج) $1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

$I / (u_n)$ متتالية العددية المعرفة ب: $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{7u_n - 9}{u_n + 1}$ حيث α عدد حقيقي.

(1) حدد قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

$II /$ نضع $\alpha = 4$.

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 < u_n < 5$

(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج انها متقاربة واحسب نهايتها.

(3) (v_n) المتتالية المعرفة على n ب: $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$

أ- يرهّن أنّ (v_n) متتالية حساية يطلب أساسها وحدها الأول.

ب- اكتب كلاً من v_n و u_n بدلالة n ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$.

ج- نضع P_n بدلالة n ، حيث $n \in \mathbb{N}^*$: $p_n = \left(\frac{4-u_1}{u_1-3}\right) \times \left(\frac{4-u_2}{u_2-3}\right) \times \dots \times \left(\frac{4-u_n}{u_n-3}\right)$: بين أنّ: $P_n = \frac{n!}{4^n}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي صندوق 12 كرية متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها ثلاث كريات حمراء مرقمة ب: 2، 2، 4 وأربع كريات بيضاء مرقمة ب: 0، 0، 4، 2، 0، 0، 2، 2، 4. نُسحب عشوائيًا وفي آن واحد 4 كريات من هذا الصندوق.

(1) احسب احتمال الحوادث A ، B ، C و D حيث: A : "جاء الأرقام في الكريات المسحوبة معدوم".

B : "الحصول على أرقام تشكل السنة الميلادية الحالية" C : "الحصول على نفس اللون". D : "الحصول على نفس الرقم".

(2) ننزع الكريات الخضراء من الصندوق السابق ونقوم بالسحب على التوالي وبدون إرجاع 3 كريات.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل طويلة العدد المركب $(a + ib)$ حيث:

a : عدد الكريات الحمراء المسحوبة. b : عدد الكريات البيضاء المتبقية في الصندوق.

(أ) بين أن قيم X هي: $X \in \{1; \sqrt{5}; \sqrt{13}; 5\}$

(ب) عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب الأمل الرياضي $E(X^2)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I / لتكن الدالة g العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب:

(1) حدد قيمة العدد الحقيقي a حتى تكون الدالة g تحقق: $g'(x) + g(x) = 1 - 2xe^{-x}$

(2) أدرس اتجاه تغير g ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $-1.2 < \alpha < -1.1$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II / الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كيلي: $f(x) = x + (x+1)^2 e^{-x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة $2cm$)

(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن: $f'(x) = g(x)$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها وبين أن $f(\alpha) = (\alpha+1)(2e^{-\alpha} + 1)$.

(3) أكتب معادلة (Δ) مماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 .

(4) أ- بين أن (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب- أدرس الوضع النسبي بين (C_f) ومستقيمه المقارب المائل (Δ) .

(6) أنشئ (Δ) والمنحنى (C_f) . نأخذ $f(\alpha) = -1$

(7) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) - x = 2 + 2e^{-x} - 2g(x) - g'(x)$

- جد بسنتيمتر مربع المساحة $S(\alpha)$ لحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما

$$x = 0 \text{ و } x = \alpha$$

$$S(\alpha) = \frac{-16\alpha^2 + 16\alpha + 40}{\alpha^2 - 1} \text{ cm}^2 \quad - \text{ ثم تحقق أن:}$$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04.5 نقاط)

أجب بصحيح أو خاطئ مع التبرير:

ليكن المستوي المركب المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}; \vec{v})$ ، A ، B و C نقط لواحقها على الترتيب:

$$z_C = i \quad , \quad z_B = -2 - 2i \quad , \quad z_A = 3 - i$$

01	$(z_A - 2)$ هو حلا للمعادلة :	$z^2 - 6z + 10 = 0$
02	$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ يساوي	$-i$
03	قيم العدد الطبيعي n حتى يكون $\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right)^n$ حقيقي موجب هي	$n = 4k \quad / \quad k \in \mathbb{N}$
04	التحويل النقطي T الذي مركزه C ويحول A الى B هو	دوران زاويته $\frac{3\pi}{2}$
05	مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $ \bar{z} + 1 - 3i = \bar{z}_B + z_C $ هي	دائرة مركزها A ونصف قطرها $\sqrt{13}$
06	$\left(\frac{z_A - 2}{\sqrt{2}}\right)^{2024} - \sqrt{2}\left(\frac{z_B}{2\sqrt{2}}\right)^{1445} + (z_C)^{1962}$ يساوي	$\bar{z}_B$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

مؤسسة تربوية مؤلفة من 7 أساتذة رياضيات من بينهم 3 رجال H_1 ، H_2 و H_3 و 4 نساء F_1 ، F_2 ، F_3 ، F_4 نريد تشكيل لجنة مؤلفة من 3 أساتذة مكلفون بالمهام الآتية (رئيس ونائبا له وكاتبا).

(1) ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها ؟

(2) أحسب احتمال أن تكون اللجنة : A " H_1 رئيسا لها " . B " الرئيس ونائبه من الجنسين " .

C " F_1 و F_2 عضوان في اللجنة " . D " تحتوي على الأقل رجلين " .

(3) نعتبر X المتغير العشوائي الذي يأخذ القيم : $-\alpha$ (عند تواجد كل رجل في اللجنة) ، $2\alpha - 1$ (عند تواجد كل امرأة) حيث α عدد طبيعي.

(أ) بين أن قيم X هي : $\{-3\alpha; -1; 3\alpha - 2; 6\alpha - 3\}$ ثم عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

(ب) حدّد أصغر قيمة لـ α حتى يكون $E(X) > 4335$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(u_n) متتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2} - 1$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq \frac{1}{2}$

(2) أ- تحقق أنه لكل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{-2u_n + 1}{u_{n+1} + u_n + 2}$

- ثم استنتج اتجاه تغيرات (u_n) .

ب- تحقق أن (u_n) متقاربة.

(3) أ- بين أنه لكل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_{n+1} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{3} \left(u_n^2 - \frac{1}{4} \right)$

ب- استنتج أنه لكل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq u_n - \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{3} \right)^n \left(u_0 + \frac{1}{2} \right) \left(u_1 + \frac{1}{2} \right) \times \dots \times \left(u_{n-1} + \frac{1}{2} \right)$

- ثم حدد نهاية (u_n) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I / نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 - x - \ln x$.
- أدرس اتجاه تغيرات الدالة g ثم بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ فإن : $g(x) \geq 0$.

II / لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x^2 - 1 - (\ln x)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم أثبت أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = 2 \left(\frac{g(x) + x}{x} \right)$ ، ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f .

(2) نعتبر الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = x^2 - 1$. ونسمي (γ) تمثيلها البياني .

أ- بين أن L (C_f) و (γ) مماسا مشتركا (T) في النقطة يطلب تعيينها .

ب- اكتب معادلة L (T) ، ثم ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (T) .

ج- ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟ مبررا إجابتك .

(3) مثل بيانيا (T) ، والمنحنى (C_f) .

(4) أ- بين أن : $P : x \mapsto x(\ln x - 1)$ دالة أصلية لـ $p : x \mapsto \ln x$.

ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب التكامل : $I = \int (\ln x)^2 dx$.

ج- احسب A مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) ، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = e$ و $x = e^{-1}$.

III / نعتبر الدالة K المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $K(x) = f(x^2)$. (عبارة $K(x)$ غير مطلوبة) .

- ادرس تغيرات الدالة K .

انتهى الموضوع الثاني



الأستاذ: نوري حمزة 2024