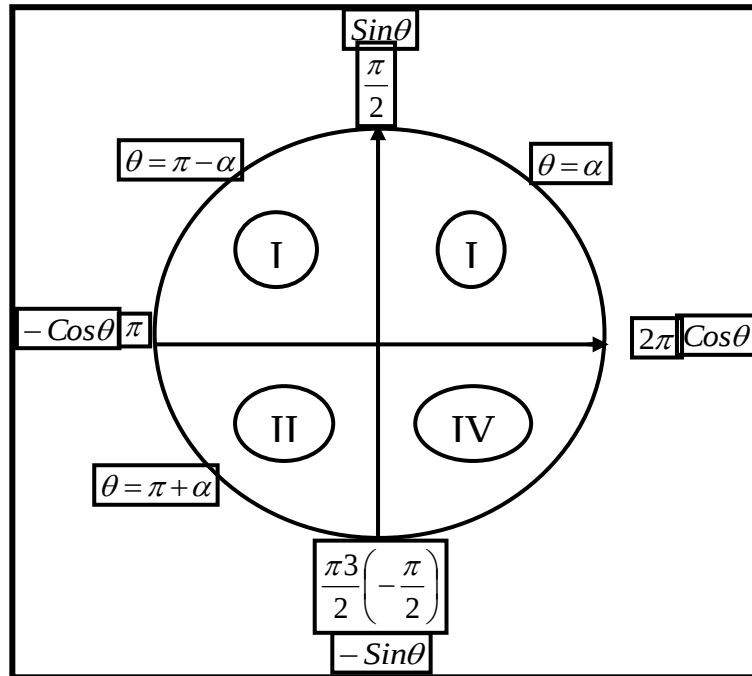


سلسلة - سبل التألق - في الرياضيات

ملخص شامل في رحاب الأعداد المركبة

- موجه إلى جميع الشعب العلمية -



إنما الأعمال العظيمة هي أعمال صغيرة كتب
لها الاستمرار

الأستاذ : محمد حاقة

خريج المدرسة العليا للأساتذة القبة القديمة - الجزائر - ENS -

ثانوية عبد العزيز الشريف - الوادي -

مارس 2017

أولاً: دليل الحساب في مجموعة الأعداد المركبة

✗ كل عدد z يكتب بصورة وحيدة على الشكل: $z = x + iy$

حيث x و y عدنان حقيقيان و $i^2 = -1$

✗ تسمى الكتابة: $z = x + iy$ الشكل الجبري للعدد المركب z

✗ يسمى x الجزء الحقيقي لـ z ونرمز له بـ: $\text{Re}(z) = x$

✗ يسمى y الجزء التخيلي لـ z ونرمز له بـ: $\text{Im}(z) = y$

✗ أ/ إذا كان: $\text{Im}(z) = 0$ ، فإن $z = x$ ونقول أن: z حقيقي

ب/ إذا كان: $\text{Re}(z) = 0$ ، فإن $z = iy$ ونقول أن: z تخيلي صرف (بحت)

ج/ إذا كان: $z = 0$ ، فإن العدد 0 هو في آن واحد حقيقي و تخيلي صرف

ملحوظة: 0 هو العدد المركب الوحيد الذي يحقق هذه الميزة

✗ مرافق عدد مركب:

مرافق العدد المركب: $z = x + iy$ هو العدد المركب: $\bar{z} = x - iy$

(نغير إلا في إشارة الجزء التخيلي)

✗ خواص المرافق:

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2 \quad /3 \quad \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad /2 \quad \overline{\bar{z}} = z \quad /1$$

$$k \in \mathbb{R}, \quad \overline{k \cdot z} = k \cdot \bar{z} \quad /6 \quad z_2 \neq 0, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad /5 \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \quad /4$$

$$n \in \mathbb{Z}, \quad \overline{(z^n)} = (\bar{z})^n \quad /8 \quad z \neq 0 \text{ و } k \in \mathbb{R}, \quad \overline{\left(\frac{k}{z}\right)} = \frac{k}{\bar{z}} \quad /7$$

✗ نتائج: ليكن z عدد مركب حيث: $z = x + iy$

$$\bar{z} \cdot z = x^2 + y^2 \quad /3 \quad \bar{z} - z = 2yi \quad /2 \quad \bar{z} + z = 2x \quad /1$$

$$\bar{z} = -z \quad /5 \quad \text{تخيلي صرف يكافئ } z \quad \bar{z} = z \quad /4 \quad \text{حقيقي يكافئ } z$$

✗ **طويلة وعمدة عدد مركب:**

من أجل كل عدد مركب غير معدوم $z = x + iy$ لدينا: r طويلة z و $\arg(z)$ عمدة z حيث:

$$\arg(z) = \theta = \begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases} \Rightarrow \theta = \dots + 2k\pi \quad /2 \quad \boxed{r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}} \quad /1$$

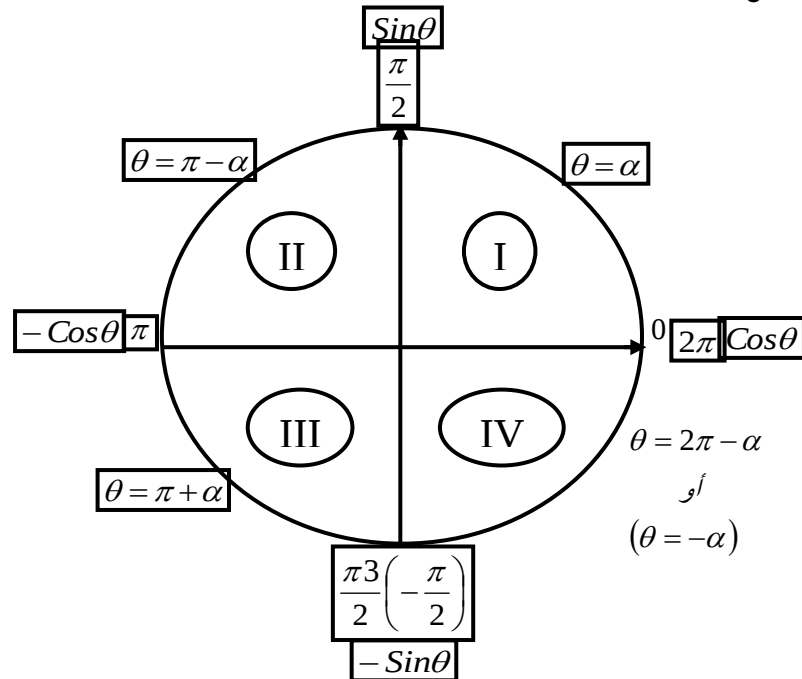
✗ **الشكل المثلثي والآسي لعدد مركب z :**

الشكل الجبري	الشكل المثلثي	الشكل الآسي
$z = x + iy$	$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$	$z = re^{i\theta}$

ما يجب معرفته وعدم نسيانه للانتقال من الشكل الجبري إلى المثلثي والآسي

✗ **البحث عن عمدة عدد مركب (الدائرة المثلثية + جدول الزوايا الشهيرة):**

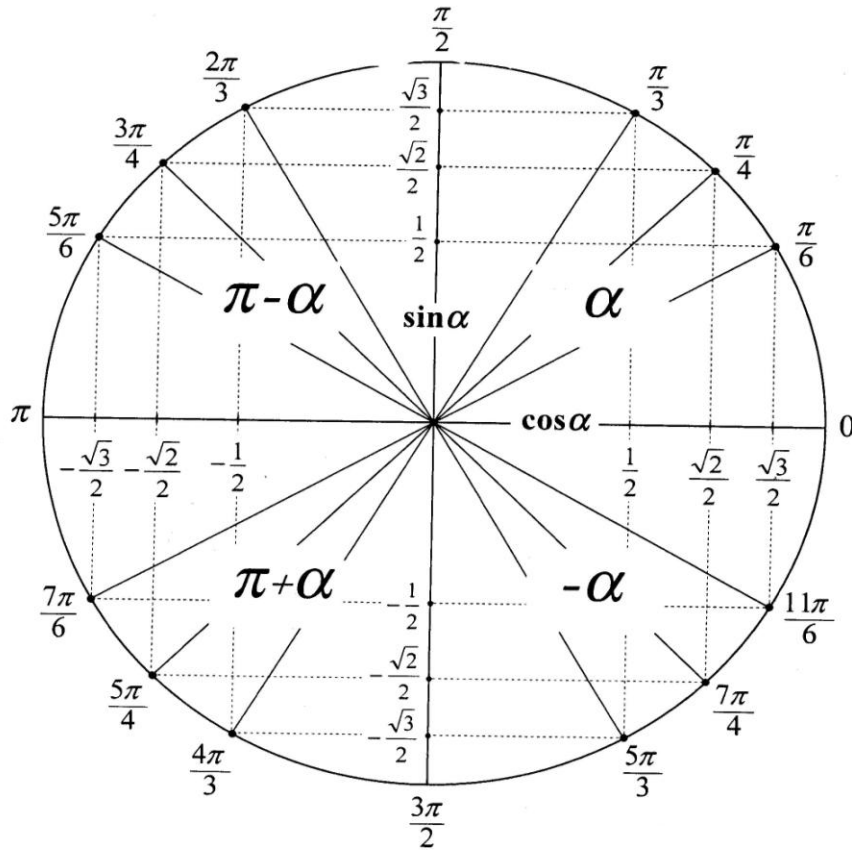
أولاً: ميزة كل ربع الدائرة المثلثية:



ثانياً: النسب المثلثية لأقياس الزوايا الشهيرة التي تستعملها لحساب العمدة:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} \left(-\frac{\pi}{2} \right)$	π
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	-1
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1	0

✕ الدائرة المثلثية



$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 \alpha \\ \sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha \\ 2\cos^2 \alpha &= 1 + \cos 2\alpha \\ 2\sin^2 \alpha &= 1 - \cos 2\alpha \end{aligned}$$

✕ علاقات مثلثية مهمة

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

ⓧ خواص العمدة:

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi \quad /2$$

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi \quad /1$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad /4$$

$$\arg(-z) = \pi + \arg(z) \quad /3$$

$$\arg(z^n) = n \cdot \arg(z) + 2k\pi \quad /6 \quad \text{حيث } n \text{ من } \mathbb{Z}$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad /5$$

ⓧ خواص الطويلة: z_1 و z_2 عدنان مركبان غير معدومين

$$\left|z_1^n\right| = \left|z_1\right|^n \quad /4 \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad /3 \quad \left|\frac{1}{z_1}\right| = \frac{1}{|z_1|} \quad /2 \quad |z| = |\bar{z}| = |-z| \quad /1$$

ملحوظة هامة جدا: $|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|$ وأيضا: $|z_1 - z_2| \neq |z_1| - |z_2|$

والصواب: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ و $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

ⓧ دستور موافر (MOIVER):

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{n\theta i} = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$$

العد الفردي يكافئ الزاوية π يعني: $\pi \times \text{عدد فردي}$

العدد الزوجي يكافئ الزاوية 0 يعني: $0 \times \text{عدد زوجي}$

$$z^n = [r^n, n\theta] = r^n e^{in\theta} \quad \text{لدينا:}$$

z^n حقيقي	z^n حقيقي موجب	z^n حقيقي سالب	z^n تخيلي صرف
$n\theta = k\pi$	$n\theta = (2k)\pi$	$n\theta = (2k+1)\pi$	$n\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2}$

ⓧ التحويل من الشكل الآسي الى الشكل الجبري في حالات خاصة:

الشكل الآسي	الشكل الجبري	ومنه	الشكل الآسي	الشكل الجبري
$e^{2\pi i}$	1		$ke^{2\pi i}$	k
$e^{\pi i}$	-1		$ke^{\pi i}$	-k
$e^{\frac{\pi}{2}i}$	i		$ke^{\frac{\pi}{2}i}$	ki
$e^{-\frac{\pi}{2}i} = e^{\frac{3\pi}{2}i}$	-i		$ke^{-\frac{\pi}{2}i}$	-ki

ⓧ هام جداً: $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

1/ قياس الزاوية $\frac{\pi}{n}$ صورته من الربع الأول

2/ قياس الزاوية من الشكل $\frac{(n-1)\pi}{n}$ صورته تقع في الربع الثاني

3/ قياس الزاوية من الشكل $\frac{(n+1)\pi}{n}$ صورته تقع في الربع الثالث

4/ قياس الزاوية من الشكل $-\frac{\pi}{n}$ صورته تقع في الربع الرابع

ثانياً: دليل هندسة الأعداد المركبة

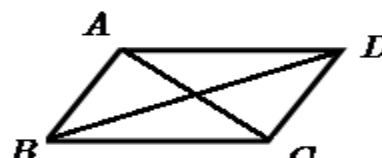
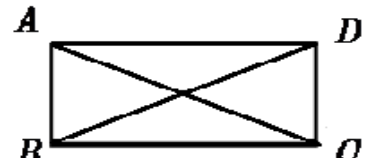
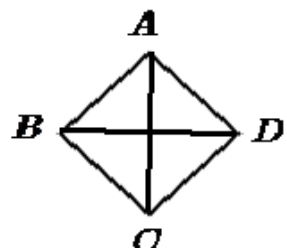
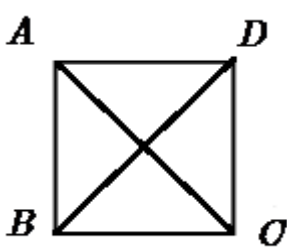
1. دليل التفسيرات الهندسية المختلفة للأعداد المركبة

المفهوم الهندسي	التفسير الهندسي بالأعداد المركبة (الكتابة المركبة)
الطول (مسافة) AB	$AB = Z_B - Z_A $
لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$	$Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_B - Z_A$
لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)\}$	$Z_G = \frac{\alpha Z_A + \beta Z_B + \gamma Z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$
لاحقة النقطة H مركز ثقل المثلث ABC	$Z_H = \frac{Z_A + Z_B + Z_C}{3}$
لاحقة النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$	$Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$
لاحقة النقطة B نظيرة A بالنسبة إلى C	$Z_C = \frac{Z_A + Z_B}{2} \Rightarrow Z_B = 2Z_C - Z_A$
لاحقة النقطة M' نظيرة M بالنسبة لمحور الفواصل	$Z_M = x + iy \Rightarrow Z_{M'} = \overline{Z_M} = x - iy$
لاحقة النقطة M' نظيرة M بالنسبة لمحور الترتيب	$Z_M = x + iy \Rightarrow Z_{M'} = -x + iy$
لاحقة النقطة M' نظيرة M بالنسبة لمبدأ المعلم	$Z_M = x + iy \Rightarrow Z_{M'} = -x - iy$
قياس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right)$
النقاط C, B, A على استقامة واحدة $((\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}))$	$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \text{عدد حقيقياً}$
الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان $((\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}))$	$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \text{عدد تخيلياً صرفاً}$
طويلة النسبة $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}$	$\left \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} \right = \frac{AB}{AC}$

ملاحظات مهمة

- ✗ معادلة الدائرة المحيطة بالمثلث القائم، يكون الوتر قطراً لهذه الدائرة ومنه مركزها هو منتصف الوتر ونصف قطرها هو طول الوتر على 2
- ✗ معادلة الدائرة المحيطة بالمثلث المتقايس الأضلاع، مركز ثقل المثلث هو مركز الدائرة ونصف قطرها هو بعد المركز عن أحد رؤوس المثلث
- ✗ إذا كان $|z_A| = |z_B| = |z_C| = |z_D| = r$ فإن النقاط A, B, C, D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها المبدأ O ونصف قطرها r
- ✗ إذا كان $|Z_A - Z_\omega| = |Z_B - Z_\omega| = |Z_C - Z_\omega| = |Z_D - Z_\omega| = r$ فإن النقاط A, B, C, D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها المبدأ ω ونصف قطرها r

2- دليل التعرف على طبيعة رباعي الأضلاع

طرق الإثبات	الطريقة (1) للإثبات	الطريقة (2) للإثبات
نوع الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع 	شعاان متقابلان في نفس الاتجاه متساويان $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أي $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{DC}}$ معناه: $Z_B - Z_A = Z_C - Z_D$	القطران متناصفان $\frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{Z_B + Z_D}{2}$
$ABCD$ مستطيل 	شعاان متقابلان في نفس الاتجاه متساويان ضلعان متتابعان متعامدان أي: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$	القطران متناصفان ومتساويان أي: $\frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{Z_B + Z_D}{2}$ معناه $AC = BD$ $ Z_C - Z_A = Z_D - Z_B $
$ABCD$ معين 	شعاان متقابلان في نفس الاتجاه متساويان ضلعان متتابعان متساويان أي: $AB = AD$ و $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$	القطران متناصفان ومتعامدان أي: $\frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{Z_B + Z_D}{2}$ معناه $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$
$ABCD$ مربع 	شعاان متقابلان في نفس الاتجاه متساويان ضلعان متتابعان متساويان ومتعامدان أي: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ و $AB = AD$	القطران متناصفان ومتساويان ومتعامدان أي $\frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{Z_B + Z_D}{2}$ و $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ معناه $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ و $AC = BD$ معناه $ Z_C - Z_A = Z_D - Z_B $

3. التفسير الهندسي لطويلة وعمدة النسبة $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ واستنتاج طبيعة المثلث ABC

$$\boxed{\times} \text{ إذا كان } \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \pm i \text{ فإن } \left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1 \text{ و } \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = \left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = \frac{AB}{AC} = 1 \Rightarrow \boxed{AB = AC} \quad (1) \text{ التفسير الهندسي للطويلة:}$$

التفسير الهندسي للعمدة:

$$\boxed{\left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB} \right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}} \quad (2) \text{ ومنه } \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB} \right)$$

نستنتج من (1) و (2) أن المثلث ABC قائم في A ومتساوي الساقين

$$\boxed{\times} \text{ إذا كان } \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = ai \text{ حيث } a \in \mathbb{R}^* - \{-1, 1\} \text{ فإن } \left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = |a| \neq 1$$

$$\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi, a > 0 \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, a < 0 \end{cases} \text{ و}$$

$$\left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = \left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = \frac{AB}{AC} = |a| \neq 1 \Rightarrow \boxed{AB \neq AC} \quad (1) \text{ التفسير الهندسي للطويلة:}$$

التفسير الهندسي للعمدة:

$$\boxed{\left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB} \right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi, a > 0 \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, a < 0 \end{cases}} \quad (2) \text{ ومنه } \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB} \right)$$

نستنتج من (1) و (2) أن المثلث ABC قائم في A

$$\boxed{\times} \text{ إذا كان } \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ فإن } \left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1 \text{ و } \arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = \left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = \frac{AB}{AC} = 1 \Rightarrow \boxed{AB = AC} \quad (1) \text{ التفسير الهندسي للطويلة:}$$

التفسير الهندسي للعمدة:

$$\left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB} \right) = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad (2) \text{ ومنه } \arg \left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right) = \left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB} \right)$$

نستنتج من (1) و (2) أن المثلث ABC متقايس الأضلاع

$$\boxed{\times} \text{ إذا كان } \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = [1; \theta] \text{ حيث: } \theta \neq \left\{ \pm \frac{\pi}{2}; \pm \frac{\pi}{3} \right\} \text{ فإن } \left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = 1$$

$$\arg \left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right) = \theta + 2k\pi \text{ و}$$

$$\left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = \frac{|z_B - z_A|}{|z_C - z_A|} = \frac{AB}{AC} = 1 \Rightarrow \boxed{AB = AC} \quad (1) \text{ التفسير الهندسي للطويلة:}$$

$$\arg \left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right) = \left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB} \right) \text{ التفسير الهندسي للعمدة:}$$

$$\boxed{\left(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB} \right) = \theta + 2k\pi} \quad (2) \text{ ومنه}$$

نستنتج من (1) و (2) أن المثلث ABC متساوي الساقين

4. دليل مجموعات النقط M في المستوي المركب

A, B و M ثلاث نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب z_A, z_B, z

حيث $M \neq A$ و $M \neq B$

$$\boxed{\times} \quad (E): MA = k > 0 \text{ مجموعة النقط } M \text{ هي دائرة مركزها } A \text{ ونصف قطرها } r = k$$

$$\boxed{\times} \quad (E): |z - z_A| = |z - z_B| \text{ مجموعة النقط } M \text{ هي المستقيم المحوري للقطعة}$$

$$\boxed{AB} \text{ المستقيمة} \quad \text{ملحوظة: } |z - z_A| = |z - z_B| \Rightarrow MA = MB$$

$$\boxed{\times} \quad (E): \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \text{ مجموعة النقط } M \text{ هي دائرة قطرها } [AB]$$

$$\boxed{\times} \quad (E): \arg(z - z_A) = \theta + 2k\pi \text{ مجموعة النقط } M \text{ هي نصف مستقيم مبدؤه}$$

$$\text{النقطة } A \text{ باستثناء } A \text{ بالترميز: } (E): [AB) - \{A\}$$

$$\boxed{\times} \quad (E): \arg(z - z_A) = \theta + k\pi \text{ مجموعة النقط } M \text{ هي مستقيم باستثناء } A$$

$$\text{بالترميز: } (E): (AB) - \{A\}$$

$$\boxed{\times} \quad \arg \left(\frac{z_B - z}{z_A - z} \right) = \left(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB} \right) = k\pi \text{ عددا حقيقيا: معناه}$$

مجموعة النقط M هي المستقيم (AB) باستثناء النقطة A

بالترميز $(E) : (AB) - \{A\}$

$$\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = 2k\pi \quad \text{عددا حقيقيا موجبا: معناه} \quad \frac{z_B - z}{z_A - z} \quad \boxed{\times}$$

مجموعة النقط M هي المستقيم (AB) باستثناء القطعة المستقيمة $[AB]$

بالترميز $(E) : (AB) -]AB]$

$$\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \pi + 2k\pi \quad \text{عددا حقيقيا موجبا: معناه} \quad \frac{z_B - z}{z_A - z} \quad \boxed{\times}$$

مجموعة النقط M هي القطعة المستقيمة $[AB]$ باستثناء النقطة A

بالترميز $(E) : [AB] - \{A\}$

$$\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{عددا تخيليا صرف معناه:} \quad \frac{z_B - z}{z_A - z} \quad \boxed{\times}$$

مجموعة النقط M هي دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطة A

$$\text{عددا تخيليا صرف (جزؤه التخيلي موجب) معناه:} \quad \frac{z_B - z}{z_A - z} \quad \boxed{\times}$$

$$\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

مجموعة النقط M هي نصف دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطة A بحيث

يكون MAB في الاتجاه المباشر

$$\text{عددا تخيليا صرف (جزؤه التخيلي سالب) معناه:} \quad \frac{z_B - z}{z_A - z} \quad \boxed{\times}$$

$$\arg\left(\frac{z_B - z}{z_A - z}\right) = (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

مجموعة النقط M هي نصف دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطة A بحيث

يكون MAB في الاتجاه غير المباشر

$$\text{عددا حقيقي موجب تمام (معلوم) و } \theta \text{ يتغير (يمسح) في } \mathbb{R} \quad \boxed{\times} \quad z = z_A + ke^{i\theta}$$

$$\text{لدينا } z = z_A + ke^{i\theta} \Leftrightarrow |z - z_A| = |ke^{i\theta}| \quad \text{ومنه } AM = k$$

مجموعة النقط M هي دائرة لاحقة مركزها z_A ونصف قطرها k

$$\text{عددا حقيقي موجب (يمسح) في } \mathbb{R} \text{ و } \theta \text{ يتغير (يمسح) في } \mathbb{R} \quad \boxed{\times} \quad z = z_A + ke^{i\theta}$$

لدينا: $z - z_A = ke^{i\theta} \Leftrightarrow z = z_A + ke^{i\theta}$ ومنه $z_{\overline{AM}} = ke^{i\theta}$ أي $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \theta$

مجموعة النقط M هي المستقيم الذي يشمل النقطة ذات اللاحقة z_A وشعاع توجيهه $\vec{v}$ يحقق $(\vec{u}; \vec{v}) = \theta$

ⓧ حيث $z = z_A + ke^{i\theta}$ في $\mathbb{R}_+$ و θ عدد حقيقي معلوم

لدينا: $z - z_A = ke^{i\theta} \Leftrightarrow z = z_A + ke^{i\theta}$ ومنه $z_{\overline{AM}} = ke^{i\theta}$ أي $(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) = \theta$

مجموعة النقط M هي نصف المستقيم الذي مبدؤه النقطة ذات اللاحقة z_A وشعاع توجيهه $\vec{v}$ يحقق $(\vec{u}; \vec{v}) = \theta$

5- دليل المرجح في المستوي المركب

A ، B و C ثلاث نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب z_A ، z_B و z_C

ⓧ لاحقة النقطة H مركز ثقل المثلث ABC هي: $z_H = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$

ⓧ لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} \text{ هي}$$

(2) كيفية تحويل العلاقة الشعاعية من الشكل: $\alpha \overrightarrow{AM} + \beta \overrightarrow{BM} + \gamma \overrightarrow{CM}$

علما أن: $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

بإدخال نقطة المَرَّج G نجد: $\boxed{\alpha \overrightarrow{AM} + \beta \overrightarrow{BM} + \gamma \overrightarrow{CM} = (\alpha + \beta + \gamma) \overrightarrow{MG}}$

• التعميم المَرَّج M (مجموع المعاملات)

▪ ملاحظة: إذا كان $\alpha + \beta + \gamma = 0$ فلا يوجد مَرَّج للنقط A ، B و C ويكون الشعاع:

$\alpha \overrightarrow{AM} + \beta \overrightarrow{BM} + \gamma \overrightarrow{CM}$ شعاعا ثابتاً مستقلاً عن النقطة M ويتم تحويل العبارة بإدخال إحدى

النقط المعلومة واستعمال علاقة شال Chasles

(3) كيفية تحويل العلاقة العددية من الشكل $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$

بإدخال نقطة المَرَّجَح G نجد

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2$$

• التعميم: اجعل مكان M نقطة المَرَّجَح $+ [M \text{ المَرَّجَح}] \times (\text{مجموع المعاملات})$

6. دليل التحويلات النقطية

F : تحويل نقطي من المستوي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$

$$F: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$M(z) \longrightarrow M'(z')$$

مع $z' = az + b$ ، a و b عدنان مركبان و $a \neq 0$

(1) كيفية التعرف على التحويل النقطي واستخراج عناصره المميزة

☞ إذا كان $a = 1$ فإن F انسحاب لاحقة شعاعه $z'_u = b$

☞ إذا كان $a \neq 1$ و $a \in \mathbb{R}$ فإن F تحاكي نسبته a ولاحقة مركزه $z_\omega = \frac{b}{1-a}$

☞ إذا كان $a \in \mathbb{C}$ و $|a| = 1$ فإن F دوران زاويته $\theta = \arg(a)$ ولاحقة مركزه

$$z_\omega = \frac{b}{1-a}$$

☞ إذا كان $a \in \mathbb{C}$ و $|a| \neq 1$ فإن F تشابه مباشر زاويته $\theta = \arg(a)$

$$|a| \text{ ولاحقة مركزه } z_\omega = \frac{b}{1-a} \text{ ونسبته } |a|$$

(2) في حالة الشكل المركب (الصيغة المبسطة) : $(z' - z_\omega) = a(z - z_\omega)$

☞ $(z' - z_\omega) = k(z - z_\omega)$ تحاكي نسبته k ولاحقة مركزه z_ω

☞ $(z' - z_\omega) = e^{i\theta}(z - z_\omega)$ دوران زاويته θ ولاحقة مركزه z_ω

☞ $(z' - z_\omega) = ke^{i\theta}(z - z_\omega)$ تشابه مباشر زاويته θ ولاحقة مركزه z_ω ونسبته k

(3) أوجد التحويل F الذي يحول A إلى B ويحول C إلى D

$$\text{نحل الجملة : } \begin{cases} z_B = az_A + b & (1) \\ z_D = az_C + b & (2) \end{cases} \text{ بضرب الثانية في } (-1) \text{ والجمع نجد } a = \frac{z_B - z_D}{z_A - z_C}$$

نعوض بعد ذلك قيمة a في (1) أو (2) نجد b

(4) أوجد التحويل F الذي يحول A إلى B ومركزه C

$$\text{نحل الجملة : } \begin{cases} z_B = az_A + b & (1) \\ z_C = az_C + b & (2) \end{cases} \text{ بضرب الثانية في } (-1) \text{ والجمع نجد } a = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$$

نعوض بعد ذلك قيمة a في (1) أو (2) نجد b

(5) استنتاج من علاقة أن نقطة هي صورة نقطة أخرى بتحويل

إذا كان: $a = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ فان $z_B - z_A = a(z_C - z_A)$ وهذا يعني أن B صورة C بالتحويل

الذي مركزه A ، نعرف طبيعة التحويل من خلال a

ختاما أقول

وهكذا لكل بداية نهاية ، وخير العمل ما حسن آخره وخير الكلام ما قل ودل
وبعد هذا الجهد المتواضع أتمنى أن أكون موفقا في سردي للعناصر
السابقة سردا لا ملل فيه ولا تقصير موضحا ما كان يشكل عائقا أمام طلبتي
الأعزاء له ذه الوحدة الجديدة عليكم والممتعة أكيد ، وفقني الله وإياكم
لما فيه صالحنا جميعا

حكمة أعجبتني

تعلم من الأمس ، عَش من أجل اليوم وتطلع إلى الغد الأمر المهم هو ألا تتوقف عن التساؤل

ما أروع عقلا يستهدي ، يسأل ، يتأمل ، يتفكر