

السلسلة رقم 1 مدعمة بالتصحيح تحضيراً لباكوريا 2011

(إعداد الأستاذ بواب نور الدين)

التمرين الأول : (باكوريا المغرب 2010 علوم تجريبية)

- 1 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 10 = 0$.
- 2 في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما $z_A = 3 - i$ و $z_B = 3 + i$.
وليكن r الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.
- بيّن أن الكتابة المركبة للدوران r هي : $z' = iz + 2 - 4i$.
- 3 C النقطة التي لاحقتها $z_C = 7 - 3i$ و D صورتها بالدوران r .
- تحقق أن لاحقة النقطة D هي : $z_D = 5 + 3i$.
- 4 بيّن أن : $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \frac{1}{2}i$ ثم استنتج طبيعة المثلث BCD .

التمرين الثاني : (Bac Pondichéry Avril 2010)

الفضاء مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
أجب بصحيح أو خطأ مع تبرير الإجابة في كل حالة من الحالات التالية :

- 1 المستقيم الذي تمثيل وسيطي له : $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t \\ z = 3t - 1 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ يوازي المستوي الذي معادلته له : $x + 2y + z - 3 = 0$.

- 2 المستويات (P) ، (P') و (P'') التي معادلاتها على الترتيب :
 $4x - y + 4z = 12$ و $2x + 3y - 2z = 6$ ، $x - 2y + z = 3$
ليس لها أي نقطة مشتركة .

- 3 المستقيمان اللذان تمثيلا هما الوسيطيان :

$$\begin{cases} x = 2t' + 7 \\ y = 2t' + 2 \\ z = -t' - 6 \end{cases} (t' \in \mathbb{R}) \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = 2t - 3 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

هما مستقيمان متقاطعان .

- 4 نعتبر النقط : $A(-1; 0; 2)$ ، $B(1; 4; 0)$ و $C(3; -4; -2)$.

- معادلة للمستوي (ABC) هي : $x + z = 1$.
- 5 نعتبر النقط : $A(-1;1;3)$ ، $B(2;1;0)$ و $C(4;-1;5)$.
يمكن اعتبار النقطة C كمرجح للنقطتين A و B .

التمرين الثالث : (Bac Centres Etrangers Juin 2010 S)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = 6 - \frac{5}{x+1}$

- 1 أ- ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0; +\infty[$.
ب- حل في المجال $[0; +\infty[$ المعادلة $f(x) = x$ ، نرمز إلى الحل بالرمز α .
ج- بيّن أنه إذا كان $x \in [0; \alpha]$ فإن $f(x) \in [0; \alpha]$.
بيّن أيضا أنه إذا كان $x \in [\alpha; +\infty[$ فإن $f(x) \in [\alpha; +\infty[$.
- 2 (u_n) متتالية عددية معرفة بـ :

$$u_0 = 0 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1}$$

- أ- ارسم في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ والمنحني (C) الممثل للدالة f .
- باستعمال الرسم السابق ، مثل على حامل محور الفواصل وبدون حساب الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 و u_4 .
ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .
- 3 أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
ب- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب نهايتها .

التمرين الرابع : (علوم تجريبية 2010)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي :

$$f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$$

- إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 1 أ- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
ب- احسب $\lim_{x \searrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \nearrow 0} f(x)$ وفسّر هندسيا النتيجة .

- ② ادرس اتجاه تغير الدالة f على كل مجال من مجالي تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها .
- ③ أ- بيّن أن المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') معادلتيهما على الترتيب : $y = x$ و $y = x + 1$.
 ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') .
- ④ أثبت أن النقطة $\omega(0 ; \frac{1}{2})$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f) .
- ⑤ أ- بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث : $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1.4 < \beta < -1.3$.
 ب- هل توجد مماسات للمنحني (C_f) توازي المستقيم (Δ) ؟
 ج- ارسم (Δ) و (Δ') ثم المنحني (C_f) .
 د- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة :

$$(m-1)e^{-x} = m$$

تصحيح السلسلة رقم 1

التمرين الأول :

1 حل المعادلة $z^2 - 6z + 10 = 0$:

تذكير : إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين هما :

$$z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

• مميز هذه المعادلة هو : $\Delta = -4 = 4i^2 = (2i)^2$

• المعادلة تقبل حلين مركبين مترافقين هما : $z_1 = 3 - i$ و $z_2 = 3 + i$.

2 تبيان أن الكتابة المركبة للدوران r هي $z' = iz + 2 - 4i$:

تذكير : الكتابة المركبة للدوران الذي مركزه $M_0(z_0)$ وزاويته θ والذي يرفق بكل

نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ هي : $z' - z_0 = e^{i\theta}(z - z_0)$

وعليه فإن : $z' - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_A)$ ونعلم أن : $z_A = 3 - i$ و $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

وبالتعويض نجد : $z' - 3 + i = i(z - 3 + i)$ **ومنه :** $z' = iz + 2 - 4i$.

3 التحقق أن لاحقة النقطة D هي $z_D = 5 + 3i$:

لدينا : $r(C) = D$ ومنه : $z_D = iz_C + 2 - 4i = i(7 - 3i) + 2 - 4i = 5 + 3i$

4 تبيان أن $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \frac{1}{2}i$:

$$\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} = \frac{5 + 3i - 3 - i}{7 - 3i - 3 - i} = \frac{2 + 2i}{4 - 4i} \times \frac{4 + 4i}{4 + 4i} = \frac{8 + 8i + 8i - 8}{32} = \frac{1}{2}i$$

• استنتاج طبيعة المثلث BCD :

لدينا : $\left| \frac{1}{2}i \right| = \frac{1}{2}$ و $\arg\left(\frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{2}$

وبالتالي : $\left| \frac{z_D - z_B}{z_C - z_B} \right| = \frac{1}{2}$ و $\arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B}\right) = \frac{\pi}{2}$

وهذا يعني أن : $BC = 2BD$ و $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$

نستنتج أن المثلث BCD قائم في النقطة B .

التمرين الثاني :

1 أ- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $[0; +\infty[$:

$$\text{من أجل كل } x \text{ من المجال } [0; +\infty[, f'(x) = \frac{5}{(x+1)^2} > 0 ,$$

وعليه فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$.

ب- حل في المجال $[0; +\infty[$ المعادلة $f(x) = x$:

$$f(x) = x \text{ يكافئ } 6 - \frac{5}{x+1} = x \text{ ومنه : } x^2 - 5x - 1 = 0$$

مميّز هذه المعادلة هو $\Delta = 29$ وبالتالي فإن المعادلة تقبل حلين متميزين هما :

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} \text{ و } x_2 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} , \text{ لكن } x \in [0; +\infty[\text{ وعليه فإن الحل}$$

$$\text{الوحيد للمعادلة } f(x) = x \text{ هو } \alpha = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} .$$

ج- تبين أنه إذا كان $x \in [0; \alpha]$ فإن $f(x) \in [0; \alpha]$:

إذا كان $x \in [0; \alpha]$ فإن $f(x) \in [f(0); f(\alpha)]$ لأن الدالة f متزايدة تماما

$$\text{على المجال } [0; +\infty[. \text{ ونعلم أن : } f(0) = 6 - \frac{5}{0+1} = 1 \text{ و } f(\alpha) = \alpha$$

وبالتالي : $f(x) \in [1; \alpha]$ ، لكن : $[1; \alpha] \subset [0; \alpha]$ وعليه : $f(x) \in [0; \alpha]$

إنّ : إذا كان $x \in [0; \alpha]$ فإن $f(x) \in [0; \alpha]$.

• تبين أنه إذا كان $x \in [\alpha; +\infty[$ فإن $f(x) \in [\alpha; +\infty[$:

إذا كان $x \in [\alpha; +\infty[$ أي : $x \geq \alpha$ فإن $f(x) \geq f(\alpha)$ لأن الدالة f متزايدة

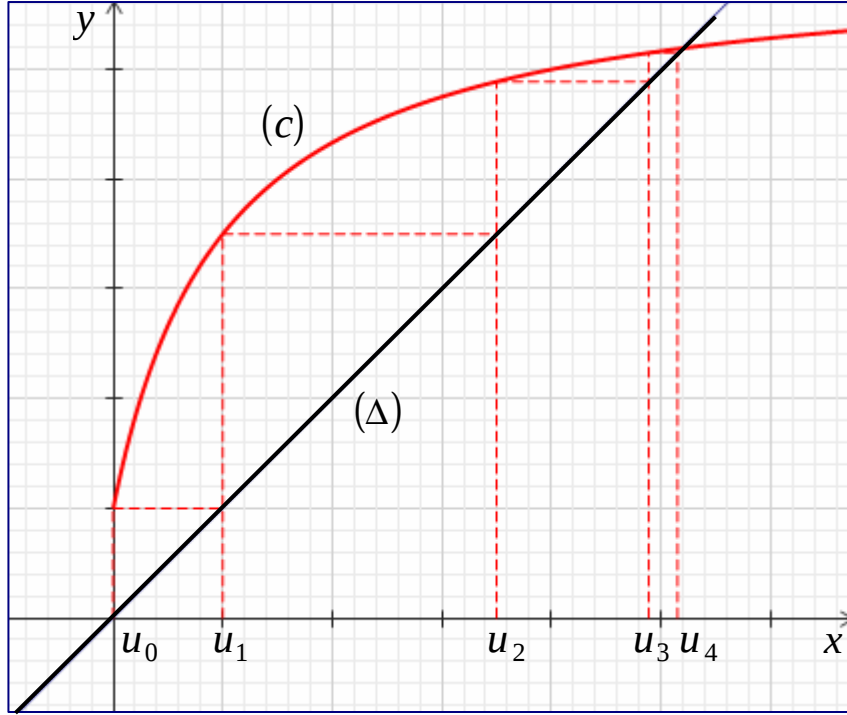
تماما على المجال $[0; +\infty[$. ونعلم أن : $f(\alpha) = \alpha$ وبالتالي : $f(x) \geq \alpha$

أي : $f(x) \in [\alpha; +\infty[$.

إنّ : إذا كان $x \in [\alpha; +\infty[$ فإن $f(x) \in [\alpha; +\infty[$.

$$2 \text{ } u_0 = 0 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n , u_{n+1} = f(u_n) = 6 - \frac{5}{u_n + 1} .$$

أ- رسم (Δ) ، (C) وتمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 : أنظر الشكل .



ب- وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها :
 من الشكل يمكن أن نخمن أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ومتقاربة نحو العدد α
 (العدد α هو فاصلة نقطة تقاطع المستقيم (Δ) مع المنحني (c))
3 أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$:
 نسمي الخاصية p_n "من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ "
 • التحقق من صحة p_0 :
 لدينا : $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$ أي : $0 \leq 0 \leq 1 \leq \alpha$ وهي محققة .
إذن : p_0 صحيحة .

• نفرض أن p_n صحيحة أي : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$
 ونبرهن صحة p_{n+1} أي : $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$.
 من فرضية التراجع ، لدينا : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ وبما أن الدالة f متزايدة تماما
 على المجال $[0; +\infty[$ فإن : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha)$
 وبالتالي : $0 \leq 1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$
 ($u_{n+2} = f(u_{n+1})$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ ، $f(\alpha) = \alpha$ ، $f(0) = 1$)

ومنه : p_{n+1} صحيحة .

• **إذن :** من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

ب- استنتاج أن المتتالية (u_n) متقاربة :

تذكير : كل متتالية ومحدودة من الأعلى هي متتالية متقاربة .

من السؤال السابق وجدنا أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ ،

وهذا يعني أن المتتالية (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى ، نستنتج أنها متقاربة .

• حساب نهاية المتتالية (u_n) : نفرض أن (u_n) متقاربة نحو عدد حقيقي L

ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = L$ ، نحصل على : $u_{n+1} = 6 - \frac{5}{u_n + 1}$

وبالتالي : $L = 6 - \frac{5}{L + 1}$ أي : $f(L) = L$

ومن السؤال 1 - ب - نستنتج أن : $L = \alpha$.

إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$ (هذا يؤكد صحة التخمين السابق)

التمرين الثالث :

1 صحيح

نسمي (D) المستقيم الذي تمثيل وسيطي له : $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t \\ z = 3t - 1 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

$\vec{u}(1; -2; 3)$ هو شعاع توجيه لهذا المستقيم .

ونسمي (P) المستوي الذي معادلة له : $x + 2y + z - 3 = 0$

$\vec{n}(1; 2; 1)$ هو شعاع ناظمي لهذا المستوي .

لدينا : $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \times 1 + (-2) \times 2 + 3 \times 1 = 0$ ومنه : $\vec{u} \perp \vec{n}$

نستنتج أن المستقيم (D) يوازي المستوي (P) .

طريقة أخرى :

لنبحث عن نقط تقاطع (D) و (P) وذلك بحل الجملة : $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t \\ z = 3t - 1 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$

عند حل المعادلة $(t + 2) + 2(-2t) + (3t - 1) = 3$ نجد : $t = 3$

وهذا مستحيل . نستنتج أن المستقيم (D) و المستوي (P) ليس لهما نقطاً مشتركة .

إذن : المستقيم (D) يوازي المستوي (P) .

2 خاطئ

للبحث عن نقط تقاطع المستويات (P) ، (P') و (P'') نقوم بحل الجملة :

$$\begin{cases} x = 2y - z + 3 \\ 2(2y - z + 3) + 3y - 2z = 6 \\ 4(2y - z + 3) - y + 4z = 12 \end{cases} \text{ ومنه : } \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x + 3y - 2z = 6 \\ 4x - y + 4z = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 7y - 4z = 0 \\ 7y + 4z = 0 \end{cases} \text{ وبالتالي : } \begin{cases} x = 2y - z + 3 \\ 7y - 4z = 0 \\ 7y + 4z = 0 \end{cases} \text{ وأخيرا نحصل على الجملة : } \begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 7y - 4z = 0 \end{cases}$$

تمثل هذه الجملة الأخيرة تقاطع مستويين في الفضاء (المستقيم في الفضاء معرف بجملة معادلتين ديكارتيتين لمستويين متقاطعين) .

إذن : للمستويات (P) ، (P') و (P'') مستقيم مشترك .

3 صحيح

$$\begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = 2t - 3 \end{cases} \text{ (} t \in \mathbb{R} \text{) } \text{ ليكن (D) المستقيم الذي تمثله الوسيطى :}$$

$$\begin{cases} x = 2t' + 7 \\ y = 2t' + 2 \\ z = -t' - 6 \end{cases} \text{ (} t' \in \mathbb{R} \text{) } \text{ وليكن (D') المستقيم الذي تمثله الوسيطى :}$$

للبحث عن نقط تقاطع المستقيمين (D) و (D') ، نقوم بحل الجملة :

$$\begin{cases} -3t + 2 = 2t' + 7 \\ t + 1 = 2t' + 2 \\ 2t - 3 = -t' - 6 \end{cases} \text{ . من المعادلتين الأولى والثانية لهذه الجملة نجد :}$$

$t = -1$ و $t' = -1$ وبتعويض هاتين القيمتين في المعادلة الثالثة نحصل على $-5 = -5$ وهي محققة دوما . نستنتج أن المستقيمين (D) و (D') متقاطعان ونقطة تقاطعهما هي $A(5; 0; -5)$.

إذن : المستقيمان (D) و (D') متقاطعان .

4 صحيح

$$\vec{AB}(2; 4; -2) \text{ و } \vec{AC}(4; -4; -4)$$

لدينا : واضح أن الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ غير مرتبطين خطيا لأنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\vec{AC} = k \vec{AB}$ وهذا يعني أن النقط A ، B و C ليست في استقامية ، فهي تعين مستويا (ABC) .

من جهة أخرى : $A \in (ABC)$ لأن $-1+2=1$ ،
 $B \in (ABC)$ لأن $1+0=1$ و $C \in (ABC)$ لأن $3-2=1$
 أي أن إحداثيات كل من النقط A ، B و C تحقق المعادلة $x+z=1$.
إذن : $x+z=1$ هي معادلة للمستوي (ABC) .

5 خاطئ

تذكير : C مرجح النقطتين A و B معناه : النقط A ، B و C في استقامية .
 لدينا : $\overrightarrow{CA}(-3;2;-2)$ و $\overrightarrow{CB}(-2;2;-5)$.
 واضح أن الشعاعين $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CB}$ غير مرتبطين خطيا لأنه لا يوجد عدد حقيقي k
 بحيث $\overrightarrow{CA} = k \overrightarrow{CB}$ وهذا يعني أن النقط A ، B و C ليست في استقامية .
 نستنتج أنه لا يمكن اعتبار النقطة C كمرجح للنقطتين A و B .

التمرين الرابع :

1 أ- حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

نعلم أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ ومنه $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x - 1} = -1$. **إذن :** $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
 • حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

نعلم أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0$. **إذن :** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

ب- حسب نهاية الدالة f عند 0 : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.
 • هندسيا : المستقيم الذي معادلته $x=0$ هو مستقيم مقارب للمنحني (C_f) .

2 دراسة اتجاه تغير الدالة f :

• الدالة f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$ ،

$$\text{ومن أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R}^* , f'(x) = 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} > 0 .$$

وبالتالي فإن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

● جدول تغيّرات f :

3 أ- تبيان أن المنحني (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') :

تذكير : إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي : $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ وكانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ فإن المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f عند $+\infty$.

لدينا : $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$ وبما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^x - 1} = 0$ فإن المستقيم (Δ) الذي معادلاته $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{e^x - 1} = +1$ فإن المستقيم (Δ') الذي معادلاته $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) :

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$ ومنه : $f(x) - x = -\frac{1}{e^x - 1}$

وبالتالي فإن إشارة الفرق $f(x) - x$ هي إشارة $-(e^x - 1)$ ومنه النتائج الآتية :

- إذا كان $x \in]-\infty ; 0[$ يكون $f(x) - x > 0$ ومنه (C_f) يقع فوق (Δ) .

- إذا كان $x \in]0 ; +\infty[$ يكون $f(x) - x < 0$ ومنه (C_f) يقع تحت (Δ) .

● دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ') :

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $f(x) - (x - 1) = \frac{-e^x}{e^x - 1}$ وبالتالي فإن إشارة الفرق

$f(x) - (x - 1)$ هي إشارة $-(e^x - 1)$ (لأن $e^x > 0$) ومنه النتائج الآتية :

- إذا كان $x \in]-\infty ; 0[$ يكون $f(x) - x > 0$ ومنه (C_f) يقع فوق (Δ') .

- إذا كان $x \in]0; +\infty[$ يكون $f(x) - x < 0$ ومنه (C_f) يقع تحت (Δ') .

4 إثبات أن النقطة $\omega(0; \frac{1}{2})$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f) :

تذكير : إذا كان من أجل كل x من D_f ، لدينا :

$$\begin{cases} (2a - x) \in D_f \\ f(x) + f(2a - x) = 2b \end{cases}$$

فإن النقطة $\Omega(a; b)$ هي مركز تناظر للمنحني الممثل للدالة f .

لدينا : من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن $-x \in \mathbb{R}^*$ و $f(x) + f(-x) = \dots = 1$

وبالتالي فإن النقطة $\omega(0; \frac{1}{2})$ هي مركز تناظر للمنحني (C_f) .

5 أ- تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β :

تذكير بمبرهنة القيم المتوسطة : إذا كان :

• f مستمرة على المجال $[a; b]$ ؛

• f رتيبة تماما على المجال $[a; b]$ ؛

• $f(a) \times f(b) < 0$.

فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]a; b[$.

• من جدول تغيرات f نلاحظ أنها مستمرة و متزايدة تماما على $[\ln 2; 1]$

زيادة على ذلك : $f(\ln 2) \approx -0.30$ و $f(1) \approx 0.42$ ($e^{\ln 2} = 2$)

ومنه : $f(\ln 2) \times f(1) < 0$.

نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

حيث : $\ln 2 < \alpha < 1$.

• من جدول تغيرات f نلاحظ أنها مستمرة و متزايدة تماما على $[-1.4; -1.3]$

زيادة على ذلك : $f(-1.4) \approx -0.075$ و $f(-1.3) \approx 0.071$

ومنه : $f(-1.4) \times f(-1.3) < 0$.

نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β

حيث : $-1.4 < \beta < -1.3$.

خلاصة : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث :

$\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1.4 < \beta < -1.3$.

ب- وجود مماسات للمنحني (C_f) توازي المستقيم (Δ) :

تذكير : يتوازي مستقيمان إذا وفقط إذا كان معاملا توجيههما متساويين .
البحث عن المماسات التي توازي المستقيم (Δ) يؤول إلى حل المعادلة $f'(x)=1$

$$\text{ومنه : } 1 + \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = 0 \text{ وبالتالي : } \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = 0$$

وبما أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ ، $e^x > 0$ و $(e^x - 1)^2 > 0$ فإن هذه المعادلة

$$\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = 0 \text{ ليس لها حل في } \mathbb{R}^* .$$

إذن : لا توجد مماسات للمنحني (C_f) توازي المستقيم (Δ) .

جـ- رسم (Δ) ، (Δ') و (C_f) : انظر الشكل .

د- المناقشة البيانية :

$$\text{لدينا : } (m-1)e^{-x} = m \text{ ومنه : } (m-1)e^{-x} \times e^x = m \times e^x$$

$$\text{وبالتالي : } (m-1) = m \times e^x \text{ ومنه : } (m-1) - m = m \times e^x - m$$

$$\text{أي : } -1 = m \times e^x - m \text{ ومنه : } -1 = m(e^x - 1) \text{ وعليه : } \frac{-1}{e^x - 1} = m$$

$$\text{وأخيرا : } x - \frac{1}{e^x - 1} = x + m \text{ . إذن : } f(x) = x + m \text{ ... (E)}$$

البحث عن عدد حلول المعادلة $f(x) = x + m$ يؤول إلى البحث عن عدد نقط

تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (Δ_m) الذي معادلته $y = x + m$.

(المستقيمت (Δ) ، (Δ') و (Δ_m) متوازية لأن لها نفس معامل التوجيه 1)

- إذا كان $m = 0$ فإن (Δ_m) ينطبق على (Δ) وبالتالي فإن (Δ_m) لا يقطع (C_f)

نستنتج أن المعادلة (E) لا تقبل حلو لا .

- إذا كان $m = 1$ فإن (Δ_m) ينطبق على (Δ') وبالتالي فإن (Δ_m) لا يقطع (C_f)

نستنتج أن المعادلة (E) لا تقبل حلو لا .

- إذا كان $m \in]0; 1[$ فإن (Δ_m) يقع بين (Δ) و (Δ') وموازي لهما وبالتالي فإن

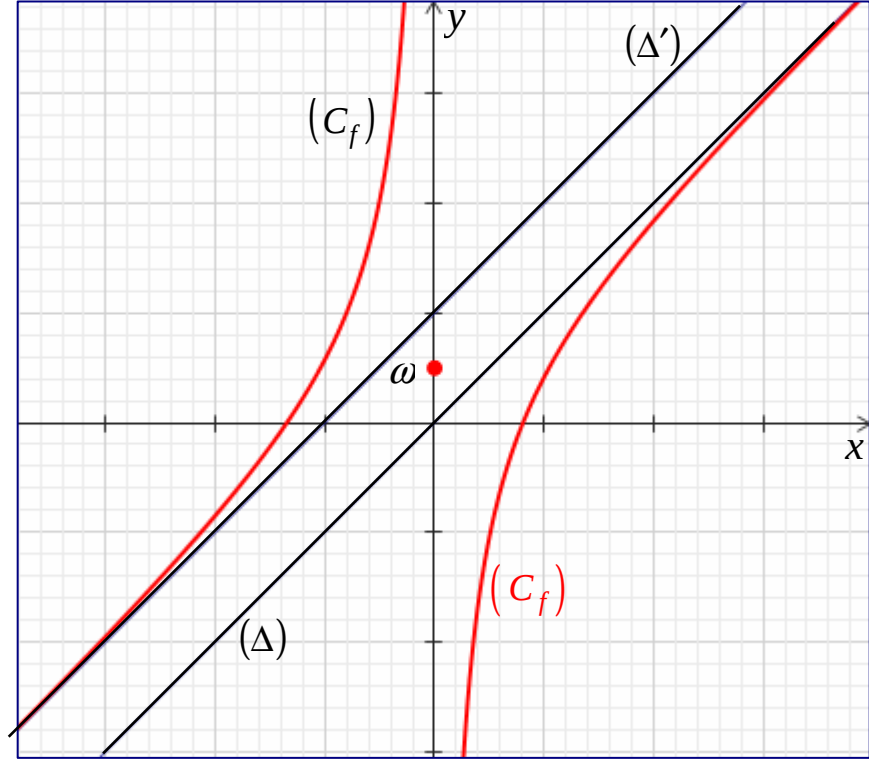
(Δ_m) لا يقطع (C_f) ، نستنتج أن المعادلة (E) لا تقبل حلو لا .

- إذا كان $m \in]-\infty; 0[$ فإن (Δ_m) يقطع (C_f) في نقطة واحدة فاصلتها موجبة

نستنتج أن المعادلة (E) تقبل حلا واحدا موجبا .

- إذا كان $m \in]1; +\infty[$ فإن (Δ_m) يقطع (C_f) في نقطة واحدة فاصلتها سالبة

نستنتج أن المعادلة (E) تقبل حلا واحدا سالبا .



السلسلة رقم 2 تحضير لـ البكالوريا 2011
(إعداد الأستاذ بواب نور الدين)

التمرين الأول : (Bac Pondichéry Avril 2010)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$u_0 = 1 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2 .$$

1) احسب u_1, u_2, u_3 .

2) أ- أثبت أنه ، من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$ ، $u_n \geq 0$.

ب- استنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$ ، $u_n \geq n - 3$.

ج- استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

3) لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول .

ب- استنتج أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.

ج- احسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين الثاني : (Bac Polynésie Juin 2010 S)

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر :
النقطتين $A(1;1;1)$ و $B(3;2;0)$ ؛

المستوي (P) المارّ بالنقطة B و $\vec{AB}$ شعاع ناظمي له ؛

المستوي (Q) الذي معادلة له $x - y + 2z + 4 = 0$ ؛

سطح الكرة (S) التي مركزها A ونصف قطرها AB .

1) بيّن أن معادلة ديكارتية للمستوي (P) هي : $2x + y - z - 8 = 0$.

2) اكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) .

3) أ- احسب المسافة بين النقطة A والمستوي (Q) .

- استنتج أن المستوي (Q) مماس لسطح الكرة (S) .

ب- هل المستوي (P) مماس لسطح الكرة (S) ؟

4) لتكن النقطة $C(0;2;-1)$ المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (Q) .

أ- بيّن أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان .

ب- ليكن (D) مستقيم تقاطع المستويين (P) و (Q) .

$$\begin{cases} x = t \\ y = 12 - 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ هو : } (D)$$

ج- تحقق أن النقطة A لا تنتمي إلى المستقيم (D) .

د- نسمي (R) المستوي المعروف بالنقطة A والمستقيم (D) .

هل الجملة الآتية صحيحة أو خاطئة ؟ علل إجابتك .

« كل نقطة من (R) متساوية المسافة عن النقطتين B و C » .

التمرين الثالث : (Bac Métropole Juin 2010 STL)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(E) : z^2 - 4z + 16 = 0$.

2 نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحتقائهما $z_A = 2 - 2i\sqrt{3}$ و $z_B = 2 + 2i\sqrt{3}$.

- عيّن الطويلة وعمدة لكل من العددين المركبين z_A و z_B .

3 لتكن C النقطة ذات اللاحقة $z_C = -2\sqrt{3} - 2i$

أ- بيّن أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة (c) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .
ب- أنشئ الدائرة (c) والنقط A ، B و C .

4 لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D = 4i$.

- بيّن أن النقطة C هي صورة النقطة D بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

5 بيّن أن النقطة E صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{OB}$ تنتمي إلى الدائرة (c) .
- علم النقطة E في الشكل .

التمرين الرابع : (Bac Liban Juin 2010 S)

الجزء الأول :

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$

1 ادرس تغيرات الدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

2 بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.31 < \alpha < 1.32$.

3 استنتج ، حسب قيم x ، إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ :

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$$

1 أثبت أنه ، من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$.

2 استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

الجزء الثالث :

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، نسمي (Γ) المنحني الممثل للدالة $\ln$ (الدالة اللوغاريتمية النيبيرية) .

لتكن A النقطة ذات الإحداثيين $(0; 2)$ و M نقطة من (Γ) ذات الفاصلة x .

1 أثبت أن المسافة AM تعطى بالعلاقة $AM = \sqrt{f(x)}$.

2 لتكن h الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $h(x) = \sqrt{f(x)}$.

أ- بيّن أن للدالتين f و h نفس اتجاه التغير على المجال $]0; +\infty[$.

ب- عيّن إحداثيي النقطة P من (Γ) بحيث تكون المسافة AM أصغر ما يمكن .

ج- بيّن أن : $AP = \alpha \sqrt{1 + \alpha^2}$.

3 (T) مماس للمنحني (Γ) في النقطة P . بيّن أن (AP) عمودي على (T) .

السلسلة رقم 3 تحضير لـ البكالوريا 2011

(إعداد الأستاذ بواب نور الدين)

التمرين الأول : (Bac Métropole Juin 2010 STL)

- المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
- 1 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $(E) : z^2 - 4z + 16 = 0$.
 - 2 نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحتقاهما $z_A = 2 - 2i\sqrt{3}$ و $z_B = 2 + 2i\sqrt{3}$.
- عيّن الطويلة وعمدة لكل من العددين المركبين z_A و z_B .
 - 3 لتكن C النقطة ذات اللاحقة $z_C = -2\sqrt{3} - 2i$
أ- بيّن أن النقط A ، B و C تنتمي إلى نفس الدائرة (c) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .
ب- أنشئ الدائرة (c) والنقط A ، B و C .
 - 4 لتكن D النقطة ذات اللاحقة $z_D = 4i$.
- بيّن أن النقطة C هي صورة النقطة D بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.
 - 5 بيّن أن النقطة E صورة النقطة A بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{OB}$ تنتمي إلى الدائرة (c) .
- علم النقطة E .

التمرين الثاني : (Bac Amérique du Nord Juin 2010 S)

- في الفضاء المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط :
- 1 أ- بيّن أن النقط $A(1; -2; 4)$ ، $B(2; -6; 5)$ و $C(-4; 0; -3)$.
أ- بيّن أن النقط A ، B و C ليست في استقامية .
ب- بيّن أن الشعاع $\vec{n}(1; -1; -1)$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .
ج- عيّن معادلة للمستوي (ABC) .
 - 2 أ- اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم الذي يمرّ بالنقطة O وعمودي على المستوي (ABC) .
ب- عيّن إحداثيات النقطة O' المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC) .
 - 3 نسمي H المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (BC) .
ليكن t العدد الحقيقي الذي يحقق $\vec{BH} = t \vec{BC}$.
أ- بيّن أن : $t = \frac{\vec{BO} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BC}\|^2}$.
ب- استنتج قيمة t وإحداثيات النقطة H .

التمرين الثالث :

- يحتوي صندوق على 5 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء و 3 كرات حمراء (لا نميّز بينها عند اللمس) .
نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربع كرات من هذا الصندوق .
- 1 نعتبر الحادثتين التاليتين :
A : « الحصول على كرة حمراء واحدة فقط »
B : « الحصول على كرة بيضاء على الأقل »
- بيّن أن : $P(A) = \frac{1}{2}$ و $P(B) = \frac{41}{42}$.
 - 2 ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط بكل سحبة لأربع كرات بعدد الكرات الحمراء المسحوبة .

أ- حدّد القيم التي يأخذها المتغيّر العشوائي X .

ب- عيّن قانون الاحتمال للمتغيّر العشوائي X .

التمرين الرابع : (Bac Polynésie Juin 2010 S)

الجزء الأول :

لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ : $g(x) = \ln(2x) + 1 - x$

1 أ- بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $[1; +\infty[$ حلا وحيدا α .

ب- أثبت أن : $1 + \ln(2\alpha) = 1$.

2 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \ln(2u_n) + 1$.

نسُمي (Γ) المنحني الذي معادلته $y = \ln(2x) + 1$ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

أ- باستعمال المنحني (Γ) ، مثل على محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .

ب- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.

ج- أثبت أن المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد α .

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ : $f(x) = (x-1)e^{1-x}$.

ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 من أجل كل عدد حقيقي x أكبر من أو يساوي 1 ، نضع :

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x (t-1)e^{1-t} dt$$

أ- بيّن أن الدالة F متزايدة على المجال $[1; +\infty[$.

ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة ، أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[1; +\infty[$ ،

$$F(x) = -xe^{1-x} + 1$$

ج- بيّن أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x من $[1; +\infty[$ ،

$$\text{المعادلة } F(x) = \frac{1}{2} \text{ تكافئ المعادلة } \ln(2x) + 1 = x$$

2 a عدد حقيقي أكبر من أو يساوي 1 . نسُمي D_a جزء المستوى المحدد بالمنحني (C_f) ،

محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = a$ و $x = 1$.

عيّن العدد a بحيث يكون $D_a = \frac{1}{2}$.

مراجعة عامة في الرياضيات تحضيراً لباكوريا 2011 « السلسلة 4 »
إعداد الأستاذ : بواب نورالدين

تمرين 1 : (بكالوريا تونس 2008 . الشعبة : علوم تجريبية)

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط :
 $A(3; 2; 6)$ ، $B(1; 2; 4)$ و $C(4; -2; 5)$.

(1) أ- عيّن إحداثيات كل من الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$.

ب- استنتج أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة .

ج- احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$.

(2) لتكن H المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC) .

- بيّن أن $OH = \frac{4}{3}$

(3) لتكن (S) سطح الكرة التي مركزها النقطة O وتمرّ بالنقطة A .

أ- بيّن أن تقاطع (S) مع المستوي (ABC) هو دائرة (c) مركزها النقطة H .

ب- احسب نصف قطر الدائرة (c) .

تمرين 2 : (بكالوريا تسيير واقتصاد جوان 2008)

يحتوي كيس على 7 كرات منها 3 بيضاء تحمل الأرقام -2 ، 1 ، 2 و 4 كرات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 1 ، 1 .

(1) نسحب كرة واحدة من الكيس .

أ- ما هو احتمال الحصول على كرة تحمل الرقم 1 ؟

ب- إذا كانت الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1 فما هو احتمال أن يكون لونها أحمر ؟

(2) نسحب على التوالي كرتين من الكيس دون إرجاع .

أ- ما هو احتمال الحصول على كرتين تحمل كل منها رقماً فردياً ؟

ب- ما هو احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون ؟

ج- ما هو احتمال أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين 3 ؟

تمرين 3 : (Bac Centres Etrangers juin 2008 S)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

(1) حل ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $z^2 + 4z + 8 = 0$.

تعطى الحلول على الشكل الجبري ثم على الشكل المثلثي .

(2) A و B نقطتان من المستوي لاحتقائهما $a = 2 - 2i$ و $b = -a$.

أ- علم النقطتين A و B على أن يتم إكمال الشكل في سياق التمرين .

ب- عيّن لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

ج- نسمي D صورة النقطة C بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

- بيّن أن لاحقة النقطة D هي $d = 2 - 6i$
- د- علم النقطتين C و D . ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟
- (3) α عدد حقيقي غير معدوم ، نسمي G_α مرجح الجملة المثقلة : $\{(A;1), (B;-1), (C;\alpha)\}$
- أ- عبّر عن الشعاع $\overrightarrow{CG_\alpha}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{BA}$.
- ب- استنتج مجموعة النقط G_α عندما يسمح α المجموعة $\mathbb{R}^*$. أنشئ هذه المجموعة .
- ج- ما هي قيمة α لكي تنطبق G_α على D ؟
- (4) نفرض في هذا السؤال أن $\alpha = 2$.
- عيّن وأنشئ مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{2}$

تمرين 4 : (BAC 2008 STI)

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{3}{e^{3x} + 1}$
- نسمي (c_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
(وحدة الطول : 4 cm على محور الفواصل و 2 cm على محور الترتيب)
- (1) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$. فسّر هذه النتيجة هندسيا .
- (2) ليكن (D) المستقيم الذي معادلته $y = 3$
- أ- احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$.
- ب- استنتج أن (D) مستقيم مقارب للمنحني (c_f) عند $-\infty$.
- ج- بيّن أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = 3 - \frac{3e^{3x}}{e^{3x} + 1}$.
- د- ادرس الوضعية النسبية للمنحني (c_f) بالنسبة للمستقيم (D) .
- (3) نرمز بـ f' للدالة المشتقة للدالة f .
- أ- أثبت أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = -\frac{9e^{3x}}{(e^{3x} + 1)^2}$.
- ب- استنتج اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$ وشكل جدول تغيّراتها .
- (4) اكتب معادلة (Δ) مماس المنحني (c_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
- (5) ارسم (D) ، (Δ) و (c_f) .
- (6) ليكن α عددا حقيقيا موجبا تماما . $A(\alpha)$ بوحدّة المساحة هي مساحة الحيزّ المستوي المحدّد بالمنحني (c_f) ، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = \alpha$ و $x = 0$.
- أ- أثبت أن : $A(\alpha) = 3\alpha - \ln(e^{3\alpha} + 1) + \ln 2$.
- ب- احسب نهاية $A(\alpha)$ عندما يؤوّل α إلى $+\infty$ (لاحظ أن : $3\alpha = \ln e^{3\alpha}$) .

مراجعة عامة في الرياضيات تحضير لباكوريا 2011 « السلسلة 5 »

إعداد الأستاذ : بواب نورالدين

تمرين 1 : (Bac Polynésie juin 2008)

- (1) حل ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $z^2 - 6z + 13 = 0$.
- (2) في المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها $a = 3 - 2i$ ، $b = 3 + 2i$ و $c = 4i$ على الترتيب .
أ- علم النقط A ، B و C .
ب- أثبت أن الرباعي $OABC$ متوازي أضلاع .
ج- عيّن لاحقة النقطة Ω ، مركز متوازي الأضلاع $OABC$.
- (3) عيّن وأنشئ (E) مجموعة النقط M من المستوي حيث : $\|\vec{MO} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 12$
- (4) لتكن M نقطة من المستقيم (AB) . يرمز β إلى الجزء التخيلي للاحقة M . نسمي N صورة النقطة M بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$.
أ- بيّن أن لاحقة النقطة N هي $\frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i$.
ب- كيف نختار β بحيث تنتمي النقطة N إلى المستقيم (BC) .

تمرين 2 : (Bac Polynésie juin 2008)

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط : $A(1; 2; 3)$ ، $B(0; 1; 4)$ ، $C(-1; -3; 2)$ ، $D(4; -2; 5)$ والشعاع $\vec{n}(2; -1; 1)$.
- (1) أ- بيّن أن النقط A ، B و C ليست في استقامية .
ب- بيّن أن $\vec{n}(2; -1; 1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .
ج- عيّن معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .
 - (2) ليكن (Δ) المستقيم الذي تمثيله الوسيطى :

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$
- بيّن أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ) وأن هذا المستقيم عمودي على المستوي (ABC) .
- (3) لتكن E المسقط العمودي للنقطة D على المستوي (ABC) .
- بيّن أن النقطة E هي مركز ثقل المثلث ABC .

تمرين 3 : (بكالوريا الجزائر 2008 . الشعبة : تسيير واقتصاد)

$$(u_n) \text{ متتالية عددية معرفة كما يلي : } \begin{cases} u_0 = \alpha & ; (\alpha \in \mathbb{R}) \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{9} & ; (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

- (1) برهن بالتراجع أنه في حالة $\alpha = -\frac{8}{3}$ تكون المتتالية (u_n) ثابتة .
- (2) في كل ما يلي $\alpha = 2$ ، ونعرّف المتتالية العددية (v_n) كما يلي : $v_n = u_n + \frac{8}{3}$
أ- احسب u_1 و u_2 .
ب- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_0 .
ج- اكتب عبارة u_n بدلالة n . واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

تمرين 4 : (بكالوريا المغرب 2008 . الشعبة : علوم تجريبية . الدورة العادية)

I- لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي : $g(x) = x - 2\ln x$

(1) أ- احسب $g'(x)$ لكل x من المجال $]0; +\infty[$.

ب- بيّن أن g متناقصة على $]0; 2[$ ومتزايدة على $[2; +\infty[$.

(2) استنتج أن $g(x) > 0$ لكل x من المجال $]0; +\infty[$ (لاحظ أن $g(2) > 0$) .

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي : $f(x) = x - (\ln x)^2$ ، (c) تمثيلها

البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسّر هذه النتيجة هندسيا .

(2) أ- بيّن أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (يمكن وضع $t = \sqrt{x}$. نذكر أن : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$)

ب- استنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ وأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ (لاحظ أن : $f(x) = x \left(1 - \frac{(\ln x)^2}{x} \right)$)

ج- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ ثم استنتج أن المنحني (c) يقبل ، بجوار $+\infty$ ، فرعا مكافئا اتجاهه

المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$.

د- بيّن أن المنحني (c) يوجد تحت المستقيم (Δ) .

(3) أ- بيّن أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0; +\infty[$ وبيّن أن f متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f .

ج- بيّن أن $y = x$ هي معادلة لمماس المنحني (c) في النقطة التي فاصلتها 1 .

(4) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$ وأن $\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$.

(5) أنشئ (Δ) و (c) (نقبل أن $I(e; e-1)$ نقطة انعطاف للمنحني (c)) .

(6) أ- بيّن أن $H : x \mapsto x \ln x - x$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0; +\infty[$ ثم بيّن أن $\int_1^e \ln x \, dx = 1$

ب- باستعمال المكاملة بالتجزئة ، بيّن أن : $\int_1^e (\ln x)^2 \, dx = e - 2$.

ج- احسب مساحة حيّز المستوي المحصور بين المنحني (c) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين

معادلتهما $x = e$ و $x = 1$.

مراجعة عامة في الرياضيات تحضيراً لباكالوريا 2011 « السلسلة 7 »
إعداد الأستاذ : بواب نورالدين

تمرين 1 : (بكالوريا المغرب 2008 . الشعبة : علوم تجريبية)

- 1 حل ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $z^2 - 6z + 34 = 0$.
- 2 في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقتها على الترتيب : $a = 3 + 5i$ ، $b = 3 - 5i$ و $c = 7 + 3i$.
ليكن z لاحقة النقطة M من المستوي و z' لاحقة النقطة M' صورة M بالانسحاب T الذي شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة $4 - 2i$.
أ- بيّن أن : $z' = z + 4 - 2i$ ثم تحقق أن النقطة C هي صورة النقطة A بالانسحاب T .
ب- بيّن أن : $\frac{b-c}{a-c} = 2i$.
ج- استنتج أن المثلث ABC قائم الزاوية وأن $BC = 2AC$.

تمرين 2 : (بكالوريا تونس 2008 . الشعبة : علوم تجريبية)

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط :
- 1 أ- عيّن إحداثيات كل من الشعاعين $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$.
ب- استنتج أن النقط A ، B و C ليست على استقامة واحدة .
ج- احسب حجم رباعي الوجوه $OABC$.
- 2 لتكن H المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC) . بيّن أن $OH = \frac{4}{3}$.
- 3 لتكن (S) سطح الكرة التي مركزها النقطة O وتمرّ بالنقطة A .
أ- بيّن أن تقاطع (S) مع المستوي (ABC) هو دائرة (c) مركزها النقطة H .
ب- احسب نصف قطر الدائرة (c) .

تمرين 3 : (بكالوريا المغرب 2008 . الشعبة : علوم تجريبية)

- يحتوي كيس على ست كرات حمراء وثلاث كرات خضراء (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) .
- 1 نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من هذا الكيس .
أ- احسب احتمال الحصول على كرتين حمراوين وكرة خضراء .
ب- بيّن أن احتمال الحصول على كرة خضراء واحدة على الأقل هو $\frac{16}{21}$.
- 2 نسحب عشوائيا بالتتابع وبدون إرجاع ثلاث كرات من هذا الكيس .
- احسب احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء .

تمرين 4 : (Bac Antilles Guyane sept 2008 S)

- لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$
- نسمي (c) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 2 cm) .

- (1) أ- احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$.
 ب- بيّن أن المستقيم (D_1) الذي معادلته $y = x + 2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (c) عند $-\infty$.
 ج- ادرس الوضعية النسبية للمنحني (c) بالنسبة للمستقيم (D_1) .
- (2) أ- أثبت أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2$.
 ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وشكل جدول تغيّراتها .
- (3) أ- ما ذا يمكن القول عن المماس (D_2) للمنحني (c) في النقطة I ذات الفاصلة $\ln 3$ ؟
 ب- باستعمال تغيّرات الدالة f ، ادرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى (D_2) .
- (4) أ- بيّن أن معادلة المماس (D_3) للمنحني (c) في النقطة ذات الفاصلة 0 هي : $y = \frac{1}{4}x + 1$.
 ب- ادرس ، على المجال $]-\infty; \ln 3]$ ، وضعية المنحني (c) بالنسبة للمماس (D_3) .
 (يمكن استعمال المشتقة الثانية f'' للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f''(x) = \frac{12e^x(e^x - 3)}{(e^x + 3)^2}$)
- (5) نقبل أن النقطة I هي مركز تناظر للمنحني (c) .
 - ارسم (D_1) ، (D_2) ، (D_3) و (c) .
- (6) أ- عيّن دالة أصلية للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 3}$.
 ب- ليكن λ عددا حقيقيا سالبا تماما . $A(\lambda)$ بوحدة المساحة هي مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحني (c) ، المستقيم (D_1) والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = \lambda$ و $x = 0$.
 - أثبت أن : $A(\lambda) = 4 \ln 4 - 4 \ln(e^\lambda + 3)$.
 ج- احسب $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$.

تمرين 5 : (بكالوريا تونس 2008 . الشعبة : رياضيات)

- 1) نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة $(E) : 3x - 8y = 5$.
 - برهن أن حلول المعادلة (E) هي الثنائيات $(x; y)$ حيث : $x = 8k - 1$ و $y = 3k - 1$ مع $k \in \mathbb{Z}$.
- 2) أ- ليكن n ، x و y ثلاثة أعداد طبيعية حيث :
$$\begin{cases} n = 3x + 2 \\ n = 8y + 7 \end{cases}$$

 - أثبت أن $(x; y)$ حل للمعادلة (E) .
 ب- نعتبر الجملة $(S) : \begin{cases} n \equiv 2 [3] \\ n \equiv 7 [8] \end{cases} (n \in \mathbb{N})$
 - أثبت أن n حل للجملة (S) إذا وفقط إذا كان : $n \equiv 23 [24]$.
- 3) أ- ليكن k عددا طبيعيا . عيّن باقي قسمة 2^{2k} على 3 وباقي قسمة 7^{2k} على 8 .
 ب- تحقق أن 1991 حل للجملة (S) وبيّن أن العدد $1 - (1991)^{2008}$ يقبل القسمة على 24 .

مراجعة عامة في الرياضيات تحضير لباكوريا 2011 « السلسلة 8 »
(إعداد الأستاذ بواب نور الدين)

التمرين الأول :

1) ليكن p كثير الحدود المعروف من أجل كل عدد مركب z كما يلي :

$$p(z) = z^3 - 7z^2 + 20z - 24$$

أ- تحقق أن $p(3) = 0$.

ب- عين العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z :

$$p(z) = (z - 3)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

ج- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z) = 0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقتها $a = 3$ ، $b = 2 + 2i$ و $c = 2 - 2i$ على الترتيب .

أ- علم النقط A ، B و C .

ب- عين الطويلة وعمدة لكل من العددين المركبين b و c .

ج- أثبت أن المثلث OBC قائم ومتساوي الساقين .

3) نعتبر المجموعة (E) للنقط M ذات اللاحقة z بحيث : $|z - 3| = \sqrt{5}$

أ- بين أن النقطتين B و C تنتميان إلى المجموعة (E) .

ب- عين الطبيعة والعناصر المميزة للمجموعة (E) وأنشئها في نفس المعلم السابق .

التمرين الثاني :

(u_n) المتتالية المعرفة بحدّها الأول u_0 ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{3}{4}$$

1) احسب u_1 و u_2 .

2) أ- برهن بالتراجع أنه ، من كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq -1$.

ب- بين أنه ، من كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = -\frac{3}{4}(u_n + 1)$ ،

ج- بين أن المتتالية (u_n) هي متتالية متناقصة ، استنتج أنها متقاربة .

د- عين نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = u_n + 1$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$.

ب- عبّر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

ج- عين ، ثانية ، نهاية المتتالية (u_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$.

التمرين الثالث :

في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة $A(-3; -1; -3)$ وشعاع توجيهه $\vec{u}(2; -2; -1)$ والمستقيم (D) الذي يشمل النقطة $B(3; 2; 3)$ وشعاع توجيهه $\vec{v}(1; 2; -2)$.

1) أ- بين أن المستقيمين (Δ) و (D) متعامدان و لا ينتميان إلى مستو واحد .

- ب- اكتب معادلة ديكرتية للمستوي الذي يحوي (Δ) ويوازي (D) .
- 2) لتكن S سطح الكرة التي مركزها $C(-1; 0; -1)$ ونصف قطرها 6 .
وليكن (P) المستوي الذي معادلته : $2x + y + 2z + 13 = 0$.
أ- بيّن أن S و (P) يتقاطعان وفق دائرة مركزها النقطة A ، يطلب تعيين نصف قطرها .
ب- بيّن أن المستقيم (D) مماس لسطح الكرة S في النقطة B .
- 3) أ- احسب AB ، واستنتج أن النقطة C تنتمي إلى القطعة $[AB]$.
ب- عيّن مستقيما عموديا على كل من المستقيمين (Δ) و (D) .

التمرين الرابع :

f دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

نسمي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم فسّر هذه النتيجة هندسيا .

2) أ- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$.
ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسّر هذه النتيجة هندسيا .

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

4) أ- اكتب معادلة المماس T للمنحني C_f عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
ب- احسب الدالة المشتقة الثانية للدالة f وبيّن أن النقطة O هي نقطة انعطاف للمنحني C_f .

5) ارسم T و C_f .

6) أ- بيّن أنه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) = 1 - \frac{2e^{-x}}{e^{-x} + 1}$.

ب- احسب ، بوحدة المساحة ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني C_f والمستقيمات التي معادلاتها : $y=1$ ، $x=0$ و $x=1$.

7) ناقش بيانها ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة $f(x) = mx$.