



وزارة التربية الوطنية

ثانويات المقاطعة الأولى
مارس 2024

مديرية التربية لولاية تيميمون
الشعبة : 3 رياضيات

المدة : ثلاث ساعات

اختبار في مادة الرياضيات

التمرين الأول: (06 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin(x) dx$.

(1) برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\cos(n\pi) = (-1)^n$

(2) (ا) باستعمال المكاملة بالتجزئة مرتين، بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = (-1)^n \left(\frac{e^{-\pi} + 1}{2} \right) e^{-n\pi}$

(ب) بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول u_0 .

(3) من أجل كل عدد طبيعي n ، نعرف المجموع S_n كما يلي: $S_n = 1 + \frac{u_1}{u_0} + \left(\frac{u_2}{u_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{u_n}{u_{n-1}} \right)^n$.

- عبر عن S_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

(4) نعتبر الجداء P_n المعروف من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$

- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = \left[(-e^{-\pi})^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\frac{e^{-\pi} + 1}{2} \right) \right]^{n+1}$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

(I) m و n عددان صحيحان غير معدومين و a عدد صحيح.

- أثبت أنه إذا كان العددان m و n قاسمين للعدد a ، وكان m و n أوليين فيما بينهما، فإن العدد mn قاسم للعدد a .

(II) نعتبر في $\mathbb{Z}$ الجملة (S) التالية: $\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$ حيث $\begin{cases} a, b, p, q \in \mathbb{Z} \\ p \gcd(p, q) = 1 \end{cases}$

(1) برر أنه توجد ثنائية (u_0, v_0) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث: $pu_0 + qv_0 = 1$.

(2) بين أن: $x_0 = bpu_0 + aqv_0$ حل للجملة (S) .

(3) (ا) ليكن x حلاً للجملة (S) ، بين أن العدد pq يقسم العدد $x - x_0$.

(ب) ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث: pq يقسم العدد $x - x_0$ ، بين أن x حل للجملة (S) .

1. استنتج مجموعة حلول الجملة (S) .

2. حل في $\mathbb{Z}$ الجملة التالية: $\begin{cases} x \equiv 1[5] \\ x \equiv 3[7] \end{cases}$.

التمرين الثالث: (09 نقاط)

ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم.

(I) نعتبر الدالة g_n المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g_n(x) = n(x+1) + e^x$

(1) ادرس تغيرات الدالة g_n ، وشكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن المعادلة $g_n(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا وحيدا α_n ينتمي إلى المجال $]-2; -1[$.

(3) استنتج، تبعا لقيم العدد الحقيقي x ، إشارة $g_n(x)$.

(II) نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f_n(x) = \frac{xe^x}{n+e^x}$ ، وليكن (C_n) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f_n(x) - x]$ ، ثم فسّر النتائج بيانيا .

(ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f_n'(x) = \frac{e^x \cdot g_n(x)}{(n+e^x)^2}$.

(ج) بين أن: $f_n(\alpha_n) = 1 + \alpha_n$ و استنتج حصرا لـ $f_n(\alpha)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f_n .

(2) (أ) ادرس وضعية المنحني (C_n) بالنسبة للمستقيم (d) الذي معادلته: $y = x$.

(ب) ادرس وضعية المنحنيين (C_n) و (C_{n+1}) ، ثم أنشئ المنحنيين (C_1) و (C_2) و المستقيم (d)

(III) نعتبر التكاملين: $I_0 = \int_{-1}^0 xe^x dx$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $I_n = \int_{-1}^0 f_n(x) dx$.

(1) (أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة، بين أن: $I_0 = 2e^{-1} - 1$.

(ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[-1; 0]$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

$$\frac{xe^x}{n} \leq \frac{xe^x}{n+e^x} \leq \frac{xe^x}{n+1}$$

(ج) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\frac{I_0}{n} \leq I_n \leq \frac{I_0}{n+1}$ (1)

ثم استنتج قيمة النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $V_n = I_1 + I_2 + \dots + I_n$.

(أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $\int_{k+1}^{k+2} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k+1}$.

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n

$$\frac{1}{1+1} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{3+1} + \dots + \frac{1}{n+1} \geq \ln(n+2) - \ln(2) \dots \dots \dots (2)$$

(ج) باستعمال النتيجة (1) و (2) برهن أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$.