شروح مفصلة+طرائق+درس
كامل+قوانين+جدول المصطلحات

القسمة والموافقات

حلول بكالوريات من 2020 إلى 2023

لشعبة الرياضيات

طرائق وحيل ومبرهنات

المناقشة والأسلوب الممتع

علي سماعيل
طالب بالقطب الجامعي سيدي عبد الله،
المدرسة الوطنية العليا في الرياضيات

مُقَدَّمَةٌ

بِسْمِ اللهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

اَلْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ، وَالصَّلَاةُ وَالسَّلَامُ عَلَى خَاتَمِ الْأَنْبِيَاءِ وَأَشْرَفِ الْمُرْسَلِينَ نَبِيِّنَا مُحَمدٍ وَعَلَى آلِهِ الْأَطْهَارِ وَصَحِبِهِ الْأَبْرَارِ وَعَلَى تَابِعِيهِمْ بِإِحْسَانٍ إِلَى يَوْمِ الدِّينِ أَمَّا بَعْدُ،

فَإِنِّي أَحْمَدُ اللهُ تَعَالَى عَلَى مَا مَنَّ بِهِ عَلَيَّ مِنْ إِتْمَامِ هَذَا الْكُتَيِّبِ الصَّغِيرِ فِي حَجْمِهِ الْكَبِيرِ فِي فَوَائِدِهِ، وَهُوَ كِتَابٌ يَحْوِي حُلُولَ تَمَارِينِ دَرْسِ الْقِسْمَةِ وَالْمُوَافَقَاتِ لِلسَّنَةِ الثَّالِثَةِ ثَانَوِيّ لِشُعْبَةِ الرِّيَاضِيَاتِ، مِنْ أَرْبَعِ امْتِحَانَاتٍ مِن امْتِحَانَاتِ الْبَاكَالُورِيَّةْ اَلْجَزَائِرِيَّةِ مِنْ بَاكَالُورِيَّةْ سَنَةِ 2020 إِلَى بَاكَالُورِيَّةْ سَنَةِ 2023، **وَلَيْسَتْ حُلُولًا فَحَسْبُ**، بَلْ شُرُوحًا مُفَصَّلَةً بِأُسْلُوبٍ شَيِّقٍ تَفَاعُلِيٍّ لَمْ تَعْهَدْهُ فِي كُتُبٍ أُخْرَى، وَهَذَا هُوَ أَوَّلُ كِتَابٍ لِي **أَلَّفْتُهُ فِي أَقَلَّ مِنْ أُسْبُوعَيْنِ**، وَالْقَادِمُ أَجْمَلُ بِإِذْنِ اللهِ تَعَالَى،

وَبِطَبِيعَةِ الْحَالِ، أَبَى اللهُ أن يَّكُونَ الْكَمَالُ لِكِتَابٍ غَيْرِ كِتَابِهِ الْعَزِيزِ، فَمَنْ وَجَدَ خَطَأً فَلْيَعْذُرْنِي فَإِنَّمَا أَنَا بَشَرٌ أُخْطِئُ وَأُصِيبُ، فَمَا كَانَ صَوابًا فَمِنَ اللهِ، وَمَا كَانَ خَطَأً فَمِن نَّفْسِي وَمِنَ الشَّيْطَانِ،

وَتَجِدُ ــأَخِي الطَّالِبُــ فِي آخِرِ الْكِتَابِ مَجْمُوعَةً مِنَ التَّعْرِيفَاتِ وَالطَّرَائِقِ وَالْمُبَرْهَنَاتِ الَّتِي تَحْتَاجُهَا مُجَمَّعَةً وَأَمَامَ كُلِّ وَاحِدَةٍ رَقْمُ الصَّفْحَةِ الَّتِي هِيَ فِيهَا، وَبِاللهِ التَّوْفِيقُ

عَلِي سماعيل، طَالِبٌ بِالْقُطْبِ الْجَامِعِيّ لِمَدِينَةِ سيدي عبد الله،

بِالْمَدْرَسَةِ الْوَطَنِيَّةِ الْعُلْيَا فِي الرِّيَاضِيَاتِ

اَلْفِهْرِسْتُ

بَاكَالُورِيَّهْ سَنَةِ 2023..... اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 1

اَلْمَوْضُوعُ الْأَوَّلُ..... اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 1

اَلْمَوْضُوعُ الثَّانِي..... اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 5

بَاكَالُورِيَّهْ سَنَةِ 2022..... اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 8

اَلْمَوْضُوعُ الْأَوَّلُ..... اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 8

اَلْمَوْضُوعُ الثَّانِي..... اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 12

بَاكَالُورِيَّهْ سَنَةِ 2021..... اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 16

اَلْمَوْضُوعُ الْأَوَّلُ..... اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 16

اَلْمَوْضُوعُ الثَّانِي..... اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 18

بَاكَالُورِيَّهْ سَنَةِ 2020..... اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 21

اَلْمَوْضُوعُ الْأَوَّلُ..... اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 21

اَلْمَوْضُوعُ الثَّانِي..... اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 24

اَلْمُصْطَلَحَاتُ وَالتَّعْرِيفَاتُ وَالْخَوَاصُّ وَالطَّرَائِقُ..... اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 27

بَاكَالُورِيَّةْ سَنَةِ 2023

اَلْمَوْضُوعُ الْأَوَّلُ: وَيَشْتَمِلُ عَلَى ثَلَاثِ أَسْئِلَةٍ، الأَوَّلُ وَالثَّالِثُ يَنْدَرِجُ تَحْتَهُ سُؤَالَانِ اثْنَانِ فَرْعِيَّانِ: "أ" وَ"ب"، وَاللهَ أَسْأَلُ التَّوْفِيقَ وَالسَّدَادَ

اَلسُّؤَالُ الْأَوَّلُ:

أ- لَدَيْنَا مُعَادَلَةٌ طُلِبَ مِنَّا التَّحَقُّقُ مِنْ أَنَّ الثُّنَائِيَّةَ $(6,2)$ حَلٌّ لَهَا، ثُمَّ بَعْدَهَا اسْتِنْتَاجُ حُلُولِ الْمُعَادَلَةِ، وَهِيَ الْمُعَادَلَةُ $16x + 361y = 818$ ذَاتُ الْمَجْهُولَيْنِ الصَّحِيحَيْنِ x وَy:

أَمَّا التَّحَقُّقُ مِنْ أَنَّ الثُّنَائِيَّةَ $(6,2)$ حَلٌّ فَمِنَ السَّهْلِ أَنْ تَجِدَ أَنَّ: $16(6) + 361(2) = 818$، أَمَّا عَنِ اسْتِنْتَاجِ حُلُولِ الْمُعَادَلَةِ فَبِاسْتِعْمَالِ طَرِيقَةٍ سَمِّهَا إِنْ شِئْتَ **طَرِيقَةَ الْحَلِّ الْخَاصِّ** وَهِيَ مَشْرُوحَةٌ وَلِلَّهِ الْحَمْدُ فِي كِتَابِي هَذَا فِي جَوَابِ السُّؤَالِ الْأَوَّلِ مِنْ تَمْرِينِ الْمَوْضُوعِ الثَّانِي مِنْ بَاكَالُورِيَّةْ سَنَةِ 2021، فَبِاسْتِعْمَالِ الْحَلِّ الْخَاصِّ عَلِمْتَ أَنَّ: $16(6) + 361(2) = 818$، وَبِطَرْحِ هَاتِهِ الْعِبَارَةِ مِنْ عِبَارَةِ الْمُعَادَلَةِ سَوْفَ تَجِدُ أَنَّ:

$16(x-6) + 361(y-2) = 0$، وَمِنْهُ: $16(x-6) = 361(2-y)$، وَاحْذَرِ الْإِشَارَةَ فَقَدْ قَلَبْتُ الْعَدَدَيْنِ 2 وَy مِنْ أَجْلِ الْإِشَارَةِ السَّالِبَةِ، ثُمَّ بَعْدَ ذَلِكَ نَسْتَعْمِلُ **مُبَرْهَنَةَ غوص**، وَلَا بَأْسَ أَنْ أُذَكِّرَكَ بِهَا فَفِي الذِّكْرَى مَنْفَعَةٌ:

> **مُبَرْهَنَةَ غوص**: إِذَا كَانَ الْعَدَدُ n يَقْسِمُ الْجُدَاءَ ab، وَصَدَقَ أَنْ كَانَ الْعَدَدُ n أَوَّلِيًّا مَعَ الْعَدَدِ a، فَإِنَّ الْعَدَدَ n حَتْمًا يَقْسِمُ الْعَدَدَ b !

وَمَا مَعْنَى قَوْلِنَا: اَلْعَدَدُ n أَوَّلِيٌّ مَعَ الْعَدَدِ a؟

> **جَوَابٌ**: نَقُولُ إِنَّ الْعَدَدَ n أَوَّلِيٌّ مَعَ الْعَدَدِ a إِذَا لَمْ يَكُنْ بَيْنَهُمَا قَوَاسِمُ مُشْتَرَكَةٌ سِوَى الْعَدَدِ 1، أَيْ إِذَا كَانَ: $pgcd(n,a) = 1$

إِذَا فَهِمْتَ هَذَيْنِ التَّعْرِيفَيْنِ فَهَلُمَّ نَعُدْ إِلَى خَطِّ سَيْرِنَا وَنَسْتَعْمِلُهُمَا لِحَلِّ الْمُعَادَلَةِ:

لَقَدْ تَوَصَّلْنَا إِلَى أَنَّ: $16(x-6) = 361(2-y)$، وَبِمَا أَنَّ الْعَدَدَ 16 يَقْسِمُ الْجُدَاءَ $361(2-y)$ وَهُوَ أَوَّلِيٌّ مَعَ الْعَدَدِ 361 فَهُوَ حَتْمًا يَقْسِمُ الْعَدَدَ $2-y$، وَكَذَلِكَ الْعَدَدَ 361 يَقْسِمُ الْجُدَاءَ $16(x-6)$ وَهُوَ أَوَّلِيٌّ مَعَ الْعَدَدِ 16 فَهُوَ إِذَنْ قَاسِمٌ لِلْعَدَدِ $(x-6)$، إِذَنْ فَحُلُولُ الْمُعَادَلَةِ هِيَ جَمِيعُ الثُّنَائِيَّاتِ الصَّحِيحَةِ مِنَ الشَّكْلِ: $(361p + 6,2 - 16p)$

ب- هَيَّا بِنَا الْآنَ نُعَيِّنْ مَجْمُوعَةَ الثُّنَائِيَّاتِ الصَّحِيحَةِ الَّتِي تُحَقِّقُ الْمُتَرَاجِحَةَ: $|x + 23y| \leq 4$

وَلَعَلَّكَ أَصَابَكَ بَعْضُ الِارْتِبَاكِ حِينَمَا رَأَيْتَ رَمْزَ الْقِيمَةِ الْمُطْلَقَةِ، لَكِنِّي أَقُولُ لَكَ لَا تَقْلَقْ سَأُذَكِّرُكَ بِشَيْءٍ مِنْ ذَلِكَ حَتَّى يَذْهَبَ عَنْكَ مَا كَانَ بِكَ:

تَذْكِرَةٌ: اَلْقِيمَةُ الْمُطْلَقَةُ لِعَدَدٍ حَقِيقِيٍّ هِيَ الْقِيمَةُ الْمُوجَبَةُ لَهُ، أَيْ الْقِيمَةُ الْمُطْلَقَةُ لِعَدَدٍ x مَجْهُولِ الْإِشَارَةِ هِيَ إِمَّا الْعَدَدُ نَفْسُهُ إِذَا كَانَ مُوجَبًا، إِمَّا مُعَاكِسُهُ وَهَذَا إِذَا كَانَ سَالِبًا، وَنَكْتُبُ:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{إِذَا كَانَ مُوجَبًا} \\ -x, & \text{إِذَا كَانَ سَالِبًا} \end{cases}$$

أَمَّا فِيمَا يَخُصُّ السُّؤَالَ الَّذِي نَحْنُ فِيهِ، فَأُذَكِّرُكَ بِخَاصِّيَّةٍ تَتَعَلَّقُ بِالْقِيمَةِ الْمُطْلَقَةِ وَهِيَ:

خَاصِّيَّةٌ: إِذَا كَانَ $|x-a| \leq b$، فَهَذَا يَعْنِي أَنَّ: $a-b \leq x \leq a+b$

اَلْآنَ فَلْنُطَبِّقِ الْخَاصِّيَّةَ عَلَى السُّؤَالِ لِنَجِدَ أَنَّهُ إِذَا كَانَ $|x+23y| \leq 4$ وَبِتَعْوِيضِ الْحُلُولِ:

$|7p+52| \leq 4$، فَإِنَّ: $52-4 \leq 7p \leq 52+4$ أَيْ أَنَّ: $48 \leq 7p \leq 56$ وَمِنْهُ نَجِدُ أَنَّ:

$6 < 6.85 \leq p \leq 8$، وَهَكَذَا إِذَنْ: اَلْعَدَدُ p يَأْخُذُ الْقِيَمَ 7 وَ8، وَهَكَذَا فَالثُّنَائِيَّاتُ الَّتِي تُحَقِّقُ الْمُتَرَاجِحَةَ مِنْ بَيْنِ مَجْمُوعَةِ الْحُلُولِ هُمَا ثُنَائِيَّتَانِ: $(2533,-110)$ وَ$(2894,-126)$

اَلسُّؤَالُ الثَّانِي: طُلِبَ مِنْكَ _أَخِي الطَّالِبُ_ تَعْيِينَ الْعَدَدَيْنِ α وَβ ثُمَّ كِتَابَةَ الْعَدَدِ P فِي **نِظَامِ الْعَدِّ الْعُشَرِيِّ**:

طَرِيقَةُ الْعَمَلِ: لَا بُدَّ قَبْلَ الْعَمَلِ مِنْ عِلْمٍ فَلَا عَمَلَ بِلَا عِلْمٍ، فَلْأُذَكِّرْكَ _أُخَيِّ_ مَا هُوَ **نِظَامُ التِّعْدَادِ** أَوْ **نِظَامُ الْعَدِّ**؟

تَعْرِيفُ نِظَامِ التِّعْدَادِ: نَقُولُ إِنَّ النِّظَامَ ذَا **الْأَسَاسِ** "عشرة" هُوَ نِظَامُ تِعْدَادٍ لِأَنَّ كُلَّ عَدَدٍ طَبِيعِيٍّ مِنَ الشَّكْلِ:

$a_n \dots a_2 a_1 a_0$ (كَالْعَدَدِ 6572 مَثَلًا) هُوَ فِي الْحَقِيقَةِ يُكْتَبُ بِهَذِهِ الطَّرِيقَةِ:

$a_0 + a_1 \times 10^1 + a_2 \times 10^2 + \cdots + a_n \times 10^n$، بِحَيْثُ كُلُّ وَاحِدٍ مِنَ الْأَعْدَادِ مِنْ a_0 إِلَى a_n أَصْغَرُ تَمَامًا مِنَ الْأَسَاسِ 10

وَبِنَفْسِ الْكَيْفِيَّةِ، كُلُّ عَدَدٍ طَبِيعِيٍّ N يُكْتَبُ فِي نِظَامِ التِّعْدَادِ ذِي الْأَسَاسِ i بِالشَّكْلِ:

$a_0 + a_1 \times i + a_2 \times i^2 + \cdots + a_n \times i^n$ بِحَيْثُ كُلُّ وَاحِدٍ مِنَ الْأَعْدَادِ مِنْ a_1 إِلَى a_n أَصْغَرُ تَمَامًا مِنَ الْأَسَاسِ i، وَيُكْتَبُ هَذَا الْعَدَدُ N بِهَذِهِ الطَّرِيقَةِ: $\overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0}^{\,i}$ لِيُمَيَّزَ عَنْ كِتَابَتِهِ فِي نِظَامِ الْعَدِّ الْعُشَرِيِّ

فَبَعْدَ أَنْ عَرَفْتَ مَا نِظَامُ الْعَدِّ، طَرِيقَةُ الْعَمَلِ بَاتَتْ سَهْلَةً، فَالْعَدَدُ P يُكْتَبُ فِي نِظَامِ الْعَدِّ الَّذِي أَسَاسُهُ الْعَدَدُ 7 بِالطَّرِيقَةِ $\overline{5\alpha\beta 0}$ فَهُوَ إِذَنْ يُكْتَبُ مِنَ الشَّكْلِ: $5 \times 7^3 + \alpha \times 7^2 + \beta \times 7 + 0 \times 7^0$ وَهَكَذَا:

$P = \overline{5\alpha\beta 0}^{7} = 49\alpha + 7\beta + 1715$، وَبِنَفْسِ الطَّرِيقَةِ: اَلْعَدَدُ P يُكْتَبُ فِي نِظَامِ الْعَدِّ الَّذِي أَسَاسُهُ الْعَدَدُ 9 بِالطَّرِيقَةِ $\overline{\beta\alpha 87}$، فَهُوَ يُكْتَبُ مِنَ الشَّكْلِ: $\beta \times 9^3 + \alpha \times 9^2 + 8 \times 9 + 7 \times 9^0$ وَمِنْهُ:

$P = \overline{\beta\alpha 87}^{9} = 81\alpha + 729\beta + 79$، وَبِمَا أَنَّ الْعِبَارَتَيْنِ مُتَسَاوِيَتَيْنِ فَيُمْكِنُ أَنْ نَقُولَ إِنَّ:

$49\alpha + 7\beta + 1715 = 81\alpha + 729\beta + 79$، وَمِنْهُ كَذَلِكَ أَنَّ:

$32\alpha + 722\beta = 1636$، فَيَنْتُجُ أَنَّ: $16\alpha + 361\beta = 818$، وهِيَ مُعَادَلَةٌ نَعْرِفُ حُلُولَهَا الصَّحِيحَةَ، وَلَكِنَّنَا هُنَا نَبْحَثُ عَنِ الْحُلُولِ الطَّبِيعِيَّةِ فَنَقْتَصِرُ إِذَنْ عَلَى الْحُلُولِ الطَّبِيعِيَّةِ مِنْ بَيْنِ مَجْمُوعَةِ الْحُلُولِ الصَّحِيحَةِ الَّتِي هِيَ الثُّنَائِيَّاتُ الصَّحِيحَةُ مِنَ الشَّكْلِ: $(361p + 6{,}2 - 16p)$، لَاحِظْ أَنَّ الْعَدَدَ $16p - 2$ لَا يَكُونُ طَبِيعِيًّا إِلَّا إِذَا كَانَ $p = 0$، وَهَكَذَا نَجِدُ أَنَّ الثُّنَائِيَّةَ الطَّبِيعِيَّةَ الْوَحِيدَةَ الَّتِي تُحَقِّقُ لَنَا الْمُعَادَلَةَ هِيَ الثُّنَائِيَّةُ $(6,2)$، إِذَنْ نَسْتَنْتِجُ أَنَّ: $\alpha = 6$ وَ $\beta = 2$، وَلَكِنْ يَنْبَغِي التَّنَبُّهُ هُنَا لِشَرْطَيْنِ مُهِمَّيْنِ يَتَعَلَّقَانِ بِقِيَمِ الْعَدَدَيْنِ α وَ β وَهُوَ أَنْ يَكُونَ كُلٌّ مِنْهُمَا أَصْغَرَ تَمَامًا مِنَ الْأَسَاسِ الَّذِي يُكْتَبَانِ فِيهِ، بِمَعْنَى: أَنْ يَكُونَ: $\alpha < 7$ وَ $\beta < 9$، وَالشَّرْطَانِ هَهُنَا مُتَحَقِّقَانِ فَالْعَدَدُ $\alpha = 6 < 7$ وَالْعَدَدُ $\beta = 2 < 9$ فَيَجُوزُ اعْتِبَارُهُمَا حَلَّيْنِ لِلْمُعَادَلَةِ

بَقِيَ أَن نَّكْتُبَ الْعَدَدَ P فِي النِّظَامِ الْعُشَرِيِّ بِتَعْوِيضٍ بَسِيطٍ فِي إِحْدَى عِبَارَتَيْهِ لِنَجِدَ أَنَّ: $P = 2023$

اَلسُّؤَالُ الثَّالِثُ:

أ- طُلِبَ الْآنَ مِنْكَ أَنْ تُحَلِّلَ الْعَدَدَ 2023 إِلَى جُدَاءِ عَوَامِلَ أَوَّلِيَّةٍ، فَهَلْ تَعْرِفُ مَا هُوَ الْعَدَدُ الْأَوَّلِيُّ؟

اَلْعَدَدُ الْأَوَّلِيُّ: هُوَ الْعَدَدُ الَّذِي لَا يَقْبَلُ إِلَّا قَاسِمَيْنِ مُخْتَلِفَيْنِ هُمَا: الْعَدَدُ 1 وَالْعَدَدُ نَفْسُهُ، وَبِنَاءً عَلَى هَذَا التَّعْرِيفِ فَالْعَدَدُ 1 لَيْسَ بِعَدَدٍ أَوَّلِيٍّ لِأَنَّهُ لَا يَقْبَلُ إِلَّا قَاسِمًا وَاحِدًا وَهُوَ الْعَدَدُ نَفْسُهُ

وَعَلَى هَذَا فَتَحْلِيلُ عَدَدٍ مَا إِلَى جُدَاءِ عَوَامِلَ أَوَّلِيَّةٍ يَعْنِي إِيجَادُ جَمِيعِ قَوَاسِمِهِ الْأَوَّلِيَّةِ مَعَ اعْتِبَارِ كَمْ يَتَكَرَّرُ كُلُّ قَاسِمٍ مِنْ هَذِهِ الْقَوَاسِمِ الْأَوَّلِيَّةِ، وَفِي سُؤَالِنَا هَذَا: اَلْعَدَدُ 2023 نَجِدُ أَنَّ قَوَاسِمَهُ الْأَوَّلِيَّةَ هُمَا الْعَدَدَانِ 7 وَ17 مَعَ الْعِلْمِ أَنَّ الْعَدَدَ 17 يَتَكَرَّرُ مَرَّتَيْنِ، وَهَكَذَا نَكْتُبُ: $2023 = 7 \times 17^2$، السُّؤَالُ هُنَا: هَلْ مِنْ طَرِيقَةٍ لِإِيجَادِ تَحْلِيلٍ لِعَدَدٍ إِلَى جُدَاءِ عَوَامِلَ أَوَّلِيَّةٍ؟ اَلْجَوَابُ نَعَمْ، وَهَاكَ الطَّرِيقَةَ:

طَرِيقَةُ تَحْلِيلِ عَدَدٍ إِلَى جُدَاءِ عَوَامِلَ أَوَّلِيَّةٍ: الطَّرِيقَةُ سَهْلَةٌ، أَوَّلُ مَا نَفْعَلُهُ هُوَ حِسَابُ جَذْرِ الْعَدَدِ الْمُرَادِ تَحْلِيلُهُ، وَلْيَكُنْ مَثَلًا الْعَدَدَ 1485: $\sqrt{1485} \cong 38.5$، ثُمَّ بَعْدَ هَذَا نَخْتَبِرُ قَابِلِيَّةَ قِسْمَةِ الْعَدَدِ 1485 عَلَى كُلِّ **الْأَعْدَادِ الْأَوَّلِيَّةِ** الْأَصْغَرِ مِنَ الْعَدَدِ 38.5، بِمَعْنَى: نُقَسِّمُ الْعَدَدَ 1485 عَلَى كُلِّ عَدَدٍ أَوَّلِيٍّ أَصْغَرَ مِنَ الْعَدَدِ 38 ثُمَّ نَرَى هَلْ هُوَ قَابِلٌ لِلْقِسْمَةِ عَلَيْهِ أَمْ لَا، فَإِنْ كَانَ كَذَلِكَ نُقَسِّمُهُ مَرَّةً أُخْرَى عَلَى نَفْسِ الْعَدَدِ الْأَوَّلِيِّ لَعَلَّهُ يَتَكَرَّرُ، وَفِي مِثَالِنَا هَذَا نُقَسِّمُ الْعَدَدَ 1485 عَلَى الْعَدَدِ 3 فَنَجِدُ الْحَاصِلَ: 495، ثُمَّ نُقَسِّمُ مَرَّةً أُخْرَى عَلَى الْعَدَدِ 3 فَنَجِدُ: 165، وَمَرَّةً أُخْرَى كَذَلِكَ لِنَجِدَ: 55 وَلَيْسَ قَابِلًا لِلْقِسْمَةِ عَلَى الْعَدَدِ 3، وَهَكَذَا نَعْلَمُ أَنَّ الْعَدَدَ 1485 قَابِلٌ لِلْقِسْمَةِ عَلَى الْعَدَدِ: 3^3، ثُمَّ نُكْمِلُ وَنُقَسِّمُ عَلَى الْعَدَدِ 5 لِنَجِدَ الْحَاصِلَ: 11 وَهُوَ أَوَّلِيٌّ، فَنَسْتَنْتِجُ أَنَّ تَحْلِيلَ الْعَدَدِ 1485 إِلَى جُدَاءِ عَوَامِلَ أَوَّلِيَّةٍ هِيَ هَذِهِ الْكِتَابَةُ: $3^3 \times 5 \times 11$

وَبَعْدَ أَنْ فَهِمْتَ طَرِيقَةَ تَحْلِيلِ عَدَدٍ إِلَى جُدَاءِ عَوَامِلَ أَوَّلِيَّةٍ، فَلْنُطَبِّقْهَا عَلَى سُؤَالِنَا هَذَا، وَجَدْوَلٌ مُسَاعِدٌ لَنْ يَضُرَّكَ، أَوَّلًا نَحْسُبُ الْجَذْرَ: $\sqrt{2023} \cong 44.9$، ثُمَّ نَصْنَعُ الْجَدْوَلَ كَمَا تَقَدَّمَ:

2	3	5	7	11	13	17
لا يقبل	لا يقبل	لا يقبل	**يقبل**	لا يقبل	لا يقبل	**يقبل مرتين**
19	23	29	31	37	41	43
لا يقبل	لا يقبل	لايقبل	لا يقبل	لا يقبل	لا يقبل	لا يقبل

وَهَكَذَا مِنَ الْجَدْوَلِ مُبَاشَرَةً نَسْتَنْتِجُ أَنَّ: $2023 = 7 \times 17^2$، وَهُوَ تَحْلِيلٌ لِلْعَدَدِ 2023 إِلَى جُدَاءِ عَوَامِلَ أَوَّلِيَّةٍ لِأَنَّ كِلَا الْعَدَدَيْنِ 7 وَ17 أَوَّلِيٌّ

بَعْدَ أَنْ حَلَّلْتَ الْعَدَدَ 2023 إِلَى جُدَاءِ عَوَامِلَ أَوَّلِيَّةٍ، طُلِبَ مِنْكَ أَنْ تُعَيِّنَ مَجْمُوعَةً مِنَ الْأَعْدَادِ الطَّبِيعِيَّةِ الَّتِي مُرَبَّعُ كُلٍّ مِنْهَا هُوَ قَاسِمٌ لِلْعَدَدِ 2023، وَالْجَوَابُ فِي التَّحْلِيلِ عَيْنِهِ، فَلَا نَجِدُ إِلَّا الْعَدَدَ 17 وَالْعَدَدَ 1 اللَّذَيْنِ يُحَقِّقَانِ الْمَطْلُوبَ، فَإِنَّ 17^2 قَاسِمٌ لِلْعَدَدِ 2023 وَالْعَدَدُ 1^2 قَاسِمٌ لِلْعَدَدِ 2023

ب- وَهَذَا السُّؤَالُ الْأَخِيرُ، وَيَتَطَلَّبُ عَادَةً تَرْكِيزًا وَفِطْنَةً، وَطُلِبَ مِنْكَ أَنْ تَجِدَ الثُّنَائِيَّاتِ الطَّبِيعِيَّةَ (a,b) الَّتِي تُحَقِّقُ الْمُسَاوَاةَ: $PPCM^2(a,b) + 3PGCD^2(a,b) = 2023$:

لَقَدْ رَمَزَ فِي التَّمْرِينِ لِلْعَدَدِ $PGCD(a,b)$ بِالرَّمْزِ d، وَلِلْعَدَدِ $PPCM(a,b)$ بِالرَّمْزِ m، وَلِهَذَا فَنَحْنُ نَبْحَثُ عَنْ كُلِّ الثُّنَائِيَّاتِ (a,b) الَّتِي تُحَقِّقُ الْمُعَادَلَةَ $m^2 + 3d^2 = 2023$، لَاحِظْ مَعِي_أَخِي الطَّالِبُ_ أَنَّ الْعَدَدَ d وَهُوَ الْقَاسِمُ الْمُشْتَرَكُ الْأَكْبَرُ بَيْنَ الْعَدَدَيْنِ a وَb هُوَ فِي الْحَقِيقَةِ قَاسِمٌ كَذَلِكَ لِلْعَدَدِ m الَّذِي هُوَ الْمُضَاعَفُ الْمُشْتَرَكُ الْأَكْبَرُ بَيْنَ الْعَدَدَيْنِ a وَb، وَعَلَى هَذَا يُمْكِنُ كِتَابَةُ الْعَدَدِ m مِنَ الشَّكْلِ kd حَيْثُ الْعَدَدُ k طَبِيعِيٌّ، فَتَصِيرُ الْمَعَادَلَةُ حِينَئِذٍ: $(kd)^2 + 3d^2 = 2023$ وَمِنْهُ أَيْضًا:

$d^2(k^2 + 3) = 2023$، مِنْ هَذِهِ الْعِبَارَةِ الْأَخِيرَةِ نَسْتَفِيدُ أَنَّ الْعَدَدَ d^2 قَاسِمٌ لِلْعَدَدِ 2023، وَنَحْنُ نَعْلَمُ مِنْ جَوَابِ السُّؤَالِ السَّابِقِ أَنَّ الْعَدَدَ الطَّبِيعِيَّ الْوَحِيدَ الَّذِي مُرَبَّعُهُ يَقْسِمُ الْعَدَدَ 2023 هُوَ الْعَدَدُ 17، مَا يَعْنِي أَنَّ $d = 17$، وَبِالتَّعْوِيضِ فِي الْعِبَارَةِ الْأُولَى نَجِدُ أَنَّ: $m = \sqrt{2023 - 3 \times 17^2} = 34$، بَقِيَ الْآنَ أَنْ نَجِدَ الْعَدَدَيْنِ a وَb، بِمَا أَنَّ الْعَدَدَ 17 هُوَ الْقَاسِمُ الْمُشْتَرَكُ الْأَكْبَرُ بَيْنَ الْعَدَدَيْنِ a وَb فَكُلٌّ مِنْهُمَا يُكْتَبُ مِنَ الشَّكْلِ $17k$، وَأَنْتَ تَعْلَمُ أَيْضًا أَنَّ: $PGCD(a,b) \times PPCM(a,b) = a \times b$، فَمِنْهُ: $md = 17^2 \times 2 = a \times b$ فَالْعَدَدُ 2 قَاسِمٌ لِلْجُدَاءِ $a \times b$ فَهُوَ إِذَنْ قَاسِمٌ لِأَحَدِهِمَا فَنَسْتَنْتِجُ أَنَّ هُنَاكَ احْتِمَالَيْنِ لِلْعَدَدَيْنِ a وَb: إِمَّا أَنْ يَكُونَ $a = 17$ وَ$b = 17 \times 2 = 34$ وَإِمَّا أَنْ يَكُونَ: $a = 17 \times 2 = 34$ وَ$b = 17$، فَالثُّنَائِيَّاتُ الْمَطْلُوبَةُ هُمَا ثُنَائِيَّتَانِ: $(17,34)$ وَ$(34,17)$، وَاللهُ تَعَالَى أَعْلَمُ

اِنْتَهَى حَلُّ تَمْرِينِ الْمَوْضُوعِ الْأَوَّلِ

اَلْمَوْضُوعُ الثَّانِي: وَيَشْتَمِلُ عَلَى أَرْبَعِ أَسْئِلَةٍ، الأَوَّلُ وَالثَّانِي يَنْدَرِجُ تَحْتَهُ سُؤالَانِ اثْنَانِ فَرْعِيَّانِ: "أ" وَ"ب"، وَبِاللهِ أَسْتَعِينُ

اَلسُّؤَالُ الْأَوَّلُ:

أ- وَهَذَا سُؤَالٌ مُعْتَادٌ، دِرَاسَةُ بَوَاقِي قِسْمَةِ الْعَدَدِ 9^n عَلَى الْعَدَدِ 11، سَنَقُومُ بِالْعَمَلِ سَوِيًّا حَتَّى تَتَنَبَّهَ إِلَى بَعْضِ التَّفَاصِيلِ الْمُفِيدَةِ الَّتِي تُسَاعِدُكَ فِي الْحِسَابِ:

طَرِيقَةُ الْعَمَلِ: نَبْحَثُ عَنْ بَاقِي قِسْمَةِ الْعَدَدِ 9^0 عَلَى الْعَدَدِ 11 ثُمَّ 9^1 عَلَى الْعَدَدِ 11، وَهَكَذَا حَتَّى نَلْحَظَ وُجُودَ دَوْرٍ، وَلَكِنْ بِشَرْطِ أَنْ يَكُونَ الدَّوْرُ هُوَ الْعَدَدُ 1، فَإِنْ لَمْ يَكُنْ هُوَ الْعَدَدُ 1 فَإِنَّ الطَّرِيقَةَ حِينَئِذٍ لَيْسَتْ نَافِعَةً إِلَّا فِي حَالَاتٍ خَاصَّةٍ (يَحْسُنُ بِالطَّالِبِ أَنْ يَتَدَارَسَهَا أَوْ يَسْأَلَ الْأُسْتَاذَ عَنْهَا) كَأَنْ يَكُونَ الدَّوْرُ هُوَ الْعَدَدُ السَّالِبُ (-1) وَعَدَدُ الْأَدْوَارِ عَدَدًا زَوْجِيًّا وَاللهُ تَعَالَى أَعْلَمُ.

لَدَيْنَا: $9^0 \equiv 1[11]$ وَ$9^1 \equiv 9[11]$ ثُمَّ $9^2 \equiv 81 \equiv 4[11]$، ثُمَّ لَا دَاعِيَ لِحِسَابِ قِيمَةِ 9^3 بَلْ يَكْفِي ضَرْبُ طَرَفَيِ الْمُوَافَقَةِ فِي الْعَدَدِ 9 كَمَا تَرَى هُنَا: $9^2 \times 9 = 9^3 \equiv 9 \times 4 \equiv 36 \equiv 3[11]$، ثُمَّ بِنَفْسِ الطَّرِيقَةِ: $9^4 \equiv 9 \times 3 \equiv 27 \equiv 5[11]$، ثُمَّ أَخِيرًا: $9^5 \equiv 9 \times 5 \equiv 45 \equiv 1[11]$، وَمِنَ الْمُوَافَقَةِ الْأَخِيرَةِ: $9^5 \equiv 1[11]$، وبِاسْتِعْمَالِ **خَاصِّيَّةِ الْأُسِّ** فِي الْمُوَافَقَاتِ نَسْتَنْتِجُ أَنَّهُ مَهْمَا يَكُنِ الْعَدَدُ الطَّبِيعِيُّ k فَإِنَّ: $(9^5)^k \equiv 1^k[11]$ وَمِنْهُ: $9^{5k} \equiv 1[11]$، وَبِضَرْبِ الطَّرَفَيْنِ فِي الْعَدَدِ 9 نَجِدُ أَنَّ: $9^{5k+1} \equiv 9[11]$، ثُمَّ نُوَاصِلُ عَلَى هَذَا الْمِنْوَالِ، وَنُلَخِّصُ عَمَلَنَا فِي جَدْوَلٍ صَغِيرٍ لَطِيفٍ:

قِيمَةُ الْعَدَدِ n	$5k$	$5k+1$	$5k+2$	$5k+3$	$5k+4$
	1	9	4	3	5

اَلْآنَ اسْتِنْتَاجُ بَوَاقِي قِسْمَةِ الْعَدَدِ 1945^{2023} مِنْ أَسْهَلِ مَا يَكُونُ، لَاحِظْ فَقَطْ_أُخَيِّ_ أَنَّ:

$1945 \equiv 9[11]$، وَمِنْهُ: $1945^{2023} \equiv 9^{2023} \equiv 9^{5(404)+3} \equiv 3[11]$

ب- هَيَّا نُعَيِّنْ مَجْمُوعَةَ الْقِيَمِ الطَّبِيعِيَّةِ n الَّتِي تُحَقِّقُ أَنَّ: $\begin{cases} n \equiv 2023[5] \\ 3n + 9^n \equiv 1444[11] \end{cases}$:

لَاحِظْ_أَخِي الطَّالِبُ أَنَّكَ مِنَ السَّطْرِ الْأَوَّلِ تَفْهَمُ أَنَّ: $n \equiv 3[5]$، أَيْ أَنَّ الْعَدَدَ n مِنَ الشَّكْلِ $5p + 3$، وَمِنْهُ تَسْتَنْتِجُ أَنَّ $9^n \equiv 3[11]$، فَنُعَوِّضُ مَا اسْتَنْتَجْنَاهُ مِنَ السَّطْرِ الْأَوَّلِ فِي السَّطْرِ الثَّانِي لِنَجِدَ أَنَّ:

$3n + 3 \equiv 1444[11]$، وَمَعَ عِلْمِنَا أَنَّ: $1444 \equiv 3[11]$ يَنْتُجُ أَنَّ $3n \equiv 0[11]$ فَنَسْتَنْتِجُ فِي الْأَخِيرِ أَنَّ قِيَمَ الْعَدَدِ الطَّبِيعِيِّ n الَّتِي تُحَقِّقُ الْجُمْلَةَ السَّابِقَةَ هِيَ جَمِيعُ الْقِيَمِ الطَّبِيعِيَّةِ مِنَ الشَّكْلِ $5p + 3$ وَالشَّكْلِ $11p$ فِي آنٍ وَاحِدٍ فَهِيَ إِذَنِ الْقِيَمُ الطَّبِيعِيَّةُ مِنَ الشَّكْلِ $55p + 33$

اَلسُّؤَالُ الثَّانِي:

أ- لِنُبَيِّنْ أَنَّ الْمُتَتَالِيَةَ (v_n) هَنْدَسِيَّةٌ:

تَكُونُ الْمُتَتَالِيَةُ (v_n) إِذَا وُجِدَ عَدَدٌ حَقِيقِيٌّ q يَتَحَقَّقُ بِهِ أَنَّ: $v_{n+1} = qv_n$، وَلَدَيْنَا هُنَا:

$v_n = 4u_n - 8n + 2$، وَمِنْهُ: $v_{n+1} = 4u_{n+1} - 8(n+1) + 2$، عِلْمًا أَنَّ:

$u_{n+1} = 9u_n - 16n + 6$، فَنَجِدُ أَنَّ:

$v_{n+1} = 4(9u_n - 16n + 6) - 8(n+1) + 2 = 36u_n - 72n + 18$،

وَهَكَذَا نَجِدُ أَنَّ: $v_{n+1} = 9(4u_n - 8n + 2) = 9v_n$، فَنَسْتَنْتِجُ أَنَّ الْمُتَتَالِيَةَ (v_n) هَنْدَسِيَّةٌ أَسَاسُهَا الْعَدَدُ 9 وَحَدُّهَا الْأَوَّلُ $v_0 = 4u_0 - 8(0) + 2 = 4 \times \frac{3}{2} + 2 = 8$

ب- بِنَاءً عَلَى السُّؤَالِ السَّابِقِ طُلِبَ مِنْكَ كِتَابَةَ **الْحَدِّ الْعَامِّ لِلْمُتَتَالِيَةِ** الْهَنْدَسِيَّةِ (v_n):

وَالْحَدُّ الْعَامُّ لِمُتَتَالِيَةٍ هَنْدَسِيَّةٍ هُوَ عِبَارَةُ الْمُتَتَالِيَةِ بِدَلَالَةِ الْمُتَغَيِّرِ الطَّبِيعِيِّ n وَهِيَ مِنَ الشَّكْلِ: $v_0 \times 9^n$

8×9^n، ثُمَّ انْطِلَاقًا مِنْ هَاتِهِ الْعِبَارَةِ وَعِبَارَةِ الْمُتَتَالِيَةِ (u_n) نَسْتَنْتِجُ أَنَّ:

$$u_n = \frac{1}{4}(v_n + 8n - 2) = \frac{1}{4}(8 \times 9^n + 8n - 2) = 2 \times 9^n - \frac{1}{2}$$

اَلسُّؤَالُ الثَّالِثُ: اَلْمَطْلُوبُ حِسَابُ مَجْمُوعِ حُدُودِ مُتَتَالِيَةٍ هَنْدَسِيَّةٍ، وَيُحْسَبُ كَالْآتِي:

قَانُونُ مَجْمُوعِ حُدُودِ مُتَتَالِيَةٍ هَنْدَسِيَّةٍ: مَجْمُوعُ حُدُودِ مُتَتَالِيَةٍ هَنْدَسِيَّةٍ أَسَاسُهَا الْعَدَدُ q وَحَدُّهَا الْأَوَّلُ v_0 يُحْسَبُ بِاسْتِعْمَالِ هَذَا الْقَانُونِ:

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q - 1} = v_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

فَمُبَاشَرَةً وَبِاسْتِعْمَالِ الْقَانُونِ نَجِدُ أَنَّ:

$$S_n = v_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = 8 \frac{9^{n+1} - 1}{9 - 1} = 9^{n+1} - 1$$

ثُمَّ لِنَسْتَنْتِجْ نَاتِجَ الْمَجْمُوعِ T_n: لَدَيْنَا: $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ وَمِمَّا سَبَقَ نَسْتَنْتِجُ أَيْضًا أَنَّ:

$$T_n = \frac{1}{4}(v_0 + 8(0) - 2) + \frac{1}{4}(v_1 + 8(1) - 2) + \cdots + \frac{1}{4}(v_n + 8n - 2)$$

وَهَكَذَا:

$$T_n = \frac{1}{4}(v_0 + \cdots + v_n) + \frac{1}{4} \times 8(0 + \cdots + n) - \frac{1}{4} \times 2(n+1)$$

وَمَا بَيْنَ الْقَوْسَيْنِ فِي الْوَسَطِ هُوَ مَجْمُوعُ حُدُودِ مُتَتَالِيَةٍ حِسَابِيَّةٍ بَسِيطَةٍ وَعِبَارَتُهُ مَشْهُورَةٌ يَنْبَغِي حِفْظُهَا عَنْ ظَهْرِ قَلْبٍ، أَمَّا الْمَجْمُوعُ مِنْ جِهَةِ الْيَسَارِ فَحَسَبْنَاهُ، وَأَمَّا الْمَجْمُوعُ مِنْ جِهَةِ الْيَمِينِ فَمِنَ الْوَاضِحِ أَنَّ الْعَدَدَ 2 يَتَكَرَّرُ

$n+1$ مَرَّةً وَذَلِكَ لِأَنَّنَا نَحْسُبُ الصِّفْرَ، وَكُلٌّ مِنْ هَاتِهِ الْمَجَامِيعِ الْجُزْئِيَّةِ مَضْرُوبٌ فِي الْعَدَدِ $\frac{1}{4}$ وَلَا دَاعِيَ لِإِخْرَاجِهِ عَامِلًا مُشْتَرَكًا، وَهَكَذَا نَسْتَنْتِجُ أَنَّ:

$$T_n = \frac{1}{4}(9^{n+1}-1) + \frac{1}{4}\times 8\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{4}\times 2(n+1)$$

مَجْمُوعُ الْأَعْدَادِ الطَّبِيعِيَّةِ مِنْ 0 إِلَى n

وَمِنْهُ:

$$T_n = \frac{9^{n+1}}{4} + n^2 + \frac{1}{2}n - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(9^{n+1} + 4n^2 + 2n - 3)$$

اَلسُّؤَالُ الرَّابِعُ: هَيَّا نُبَيِّنْ مَعًا أَنَّهُ مَهْمَا يَكُنِ الْعَدَدُ الطَّبِيعِيُّ n فَإِنَّ $4T_{5n} - n^2 + n + 5 \equiv 0[11]$:

بِالْحِسَابِ نَجِدُ أَنَّ: $4T_{5n} - n^2 + n + 5 = 9^{5n+1} + 99n^2 + 11n + 2$، وَلَاحِظْ مَعِي أَنَّ: $9^{5n+1} \equiv 9[11]$، وَكَذَلِكَ مِنَ الْوَاضِحِ أَنَّ $11n \equiv 0[11]$ وَأَنَّ $99n^2 \equiv 0[11]$، وَهَكَذَا نَجِدُ أَنَّ: $9^{5n+1} + 99n^2 + 11n + 2 \equiv 9 + 0 + 0 + 2 \equiv 11 \equiv 0[11]$، وَهُوَ الْمَطْلُوبُ، وَاللهُ تَعَالَى أَعْلَمُ

تَمَّ حَلُّ تَمْرِينَيْ بَاكَالُورِيَّة سنة 2023 وَلِلَّهِ الْحَمْدُ أَوَّلًا وَآخِرًا

بَاكَالُورِيَّةْ سَنَةِ 2022

اَلْمَوْضُوعُ الْأَوَّلُ: وَيَشْتَمِلُ عَلَى ثَلَاثِ أَسْئِلَةٍ، الأَوَّلُ يَنْدَرِجُ تَحْتَهُ سُؤالَانِ اثْنَانِ فَرْعِيَّانِ: "أ" وَ"ب"، أَمَّا السُّؤَالُ الثَّالِثُ فَيَتَفَرَّعُ عَنْهُ ثَلَاثُ أَسْئِلَةٍ: "أ" وَ"ب" وَ"ج"، وَبِاللهِ التَّوْفِيقُ وَعَلَيْهِ التُّكْلَانُ.

اَلسُّؤَالُ الْأَوَّلُ:

أ- لِنُعَيِّنْ بَوَاقِيَ قِسْمَةِ الْعَدَدِ 2^n عَلَى الْعَدَدِ 7، وَذَلِكَ حَسَبَ قِيَمِ الْعَدَدِ الطَّبِيعِيِّ n:

بِسُهُولَةٍ نَجِدُ أَنَّ: $2^0 = 1 \equiv 1[7]$ وَ $2^1 = 2 \equiv 2[7]$ وَ $2^2 = 4 \equiv 4[7]$

وَ $2^3 = 8 \equiv 8 - 7 \equiv 1[7]$

وَبِاسْتِعْمَالِ خَاصِّيَّةِ الْأُسِّ فِي الْمُوَافَقَاتِ يَتَبَيَّنُ لَنَا أَنَّهُ مَهْمَا أَخَذْنَا مِنْ قِيمَةٍ لِلْعَدَدِ k فَإِنَّ:

$(2^3)^k \equiv 1^k \equiv 1[7]$ وَهَكَذَا يَنْتُجُ لَنَا أَنَّ: $2^{3k} \equiv 1[7]$، وَبِاسْتِعْمَالِ خَاصِّيَّةٍ أُخْرَى هِيَ خَاصِّيَّةُ ضَرْبِ طَرَفَيْ الْمُوَافَقَةِ فِي عَدَدٍ صَحِيحٍ نَجِدُ أَنَّ: $2^{3k} \times 2 = 2^{3k+1} \equiv 1 \times 2 \equiv 2[7]$ وَمِنْهُ:

$2^{3k+2} \equiv 4[7]$، مِنَ الجَمِيلِ أَنْ نَصْنَعَ جَدْوَلًا لَطِيفًا يُسَاعِدُنَا فِي تَنْظِيمِ الْأَفْكَارِ أَوْ رُبَّمَا الْعَوْدَةِ إِلَيْهِ فِيمَا بَعْدُ:

قِيمَةُ الْعَدَدِ n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
اَلْبَاقِي عَلَى 7	1	2	4

ب- نُبَيِّنُ أَنَّهُ مَهْمَا كَانَتْ قِيمَةُ الْعَدَدِ الطَّبِيعِيِّ n فَإِنَّ: $6^{2n} \equiv 1[7]$:

أَلَيْسَ وَاضِحًا أَنَّ: $6 \equiv 6 - 7 \equiv -1[7]$، فَإِذَنْ $(6)^{2n} \equiv (-1)^{2n}[7]$ ، وَالْعَدَدُ $2n$ زَوْجِيٌّ، إِذَنْ: $(6)^{2n} \equiv 1[7]$، نَسْتَنْتِجُ أَنَّ: $6^{2n+1} \equiv 6[7]$، نَصْنَعُ جَدْوَلًا كَمَا صَنَعْنَا مِنْ قَبْلُ:

قِيمَةُ الْعَدَدِ n	$2k$	$2k+1$
اَلْبَاقِي عَلَى 7	1	6

اَلسُّؤَالُ الثَّانِي: لِنُبَيِّنْ أَنَّهُ مَهْمَا كَانَ الْعَدَدُ الطَّبِيعِيُّ n فَإِنَّ الْعَدَدَ: $(2021^{2022} + 1962^{1443})^{1954} - 2$ قَابِلٌ لِلْقِسْمَةِ عَلَى الْعَدَدِ 7:

لَاحِظْ أَنَّ: $2021 \equiv 5 \equiv 5 - 7 \equiv -2[7]$ إِذَنْ: $2021^{2022} \equiv 2^{2022} \equiv 2^{3(674)} \equiv 1[7]$

بِالطَّرِيقَةِ نَفْسِهَا: $1962 \equiv 2[7]$ إِذَنْ: $1962^{1443} \equiv 2^{3(481)} \equiv 1[7]$

يَنْتُجُ إِذَنْ أَنَّ: $2021^{2022} + 1962^{1443} \equiv 1 + 1 \equiv 2[7]$، وَمِنْهُ:

$$(2021^{2022} + 1962^{1443})^{1954} - 2 \equiv 2^{1954} - 2 \equiv 2^{3(651)+1} - 2 \equiv 2 - 2 \equiv 0[7]$$

اَلسُّؤَالُ الثَّالِثُ:

أ- لِنَدْرُسْ بَوَاقِيَ قِسْمَةِ الْعَدَدِ a_n عَلَى الْعَدَدِ 7:

هَذِهِ الْمَسْأَلَةُ قَدْ تُشْكِلُ عَلَيْكَ أَيُّهَا الطَّالِبُ مِنْ جِهَةِ أَنَّ الْعَدَدَ a_n هُوَ فِي الْحَقِيقَةِ مَجْمُوعُ الْعَدَدَيْنِ 2^n وَ 6^n الَّذَيْنِ كُنَّا قَدْ عَرَفْنَا بَوَاقِيَ قِسْمَةِ كُلٍّ مِنْهُمَا عَلَى الْعَدَدِ 7 حَسَبَ قِيمَةِ الْعَدَدِ **الطَّبِيعِيِّ** n، فَمَا الْعَمَلُ هُنَا؟

اَلْجَوَابُ يَتَطَلَّبُ مِنْكَ تَرْكِيزًا أَيُّهَا الطَّالِبُ، فَإِذَا أَمْعَنْتَ النَّظَرَ سَتَجِدُ أَنَّ بَوَاقِيَ قِسْمَةِ الْعَدَدِ 2^n عَلَى 7 تَتَوَقَّفُ(تَتَعَلَّقُ) عَلَى بَوَاقِي قِسْمَةِ n عَلَى الْعَدَدِ 3 إِمَّا أَنْ يَكُونَ الْبَاقِي هُوَ الْعَدَدُ 0 أَوِ الْعَدَدُ 1 أَوِ الْعَدَدُ 2، وَكَذَلِكَ بِالنِّسْبَةِ لِبَوَاقِي قِسْمَةِ الْعَدَدِ 6^n عَلَى 7 مُتَوَقِّفَةٌ عَلَى بَوَاقِي قِسْمَةِ الْعَدَدِ n عَلَى الْعَدَدِ 2 إِمَّا أَنْ يَكُونَ الْبَاقِي هُوَ الْعَدَدُ 0 أَوِ الْعَدَدُ 1

إِذَا فَهِمْتَ هَذَا الْجُزْءَ مِنَ الْجَوَابِ فَسَوْفَ يَتَبَيَّنُ لَكَ أَنَّ بَوَاقِيَ قِسْمَةِ الْعَدَدِ a_n عَلَى الْعَدَدِ 7 مُتَوَقِّفٌ عَلَى بَوَاقِي قِسْمَةِ الْعَدَدِ n عَلَى 2 وَعَلَى الْعَدَدِ 3 مَعًا، هَذَا يَقُودُنَا إِذَنْ إِلَى الْبَحْثِ عَنِ الْبَوَاقِي الَّتِي نُرِيدُهَا تَبَعًا لِبَوَاقِي قِسْمَةِ الْعَدَدِ n عَلَى الْعَدَدِ 6، وَذَلِكَ كَمَا سَيَظْهَرُ لَكَ فِي الْجَدْوَلِ الْآتِي:

قِيمَةُ الْعَدَدِ n	$6k = 2(3k) = 3(2k)$	$6k+1 = 2(3k)+1 = 3(2k)+1$	$6k+2 = 2(3k+1) = 3(2k)+2$
بَاقِي الْعَدَدِ a_n عَلَى الْعَدَدِ 7	$1+1=2$	$6+2=8\equiv 1[7]$	$1+4=6$
	$6k+3 = 2(3k+1)+1 = 3(2k+1)$	$6k+4 = 2(3k+2) = 3(2k+1)+1$	$6k+5 = 2(3k+2)+1 = 3(2k+1)+2$
	$6+1=7\equiv 0[7]$	$1+2=3$	$6+4=10\equiv 3[7]$

أَرْجُو أَنَّ الْجَوَابَ قَدِ اتَّضَحَ لَكَ أَخِي الطَّالِبُ، وَإِنْ لَمْ يَتَّضِحْ فَاقْرَأْهُ مَرَّةً أُخْرَى بِتَرْكِيزٍ وَ قُلِ **اللَّهُمَّ لَا سَهْلَ إِلَّا مَا جَعَلْتَهُ سَهْلًا وَأَنْتَ تَجْعَلُ الْحَزْنَ إِنْ شِئْتَ سَهْلًا.**

ب- لِنُبَيِّنْ مَعًا أَنَّهُ مَهْمَا تَكُنْ قِيمَةُ الْعَدَدِ **الطَّبِيعِيِّ** n فَإِنَّ: $S_{n+6} \equiv S_n[7]$:

فِي الْوَاقِعِ، لَكَ أَنْ تَرَى أَنَّ: $a_{n+6} = 2^{n+6} + 6^{n+6} = 2^6 \times 2^n + 6^6 \times 6^n$

وَبِمَا أَنَّ: $2^6 = 2^{3(2)} \equiv 1[7]$ وَ: $6^6 = 2^{2(3)} \equiv 1[7]$ فَإِنَّ: $a_{n+6} \equiv a_n[7]$ وَمِنْهُ:

$$S_{n+6} = a_{0+6} + \cdots + a_{n+6} \equiv a_0 + \cdots + a_n \equiv S_n[7]$$

ج- هَيَّا بِنَا نُبَيِّنْ مَعًا أَنَّهُ مَهْمَا كَانَتْ قِيمَةُ الْعَدَدِ الطَّبِيعِيِّ n فَإِنَّ: $S_n \equiv 2^{n+1} + 3 \times 6^{n+1} + 3[7]$:

اَلْعَدَدُ S_n هُوَ عِبَارَةٌ عَنْ مَجْمُوعٍ هُوَ الْمَجْمُوعُ: $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$، إِذَنْ:

$$S_n = (2^0 + 6^0) + (2^1 + 6^1) + (2^2 + 6^2) + \cdots + (2^n + 6^n)$$

إِذَا عَلِمْتَ أَيُّهَا الْأَخُ الطَّالِبُ أَنَّ **الْجَمْعَ تَبْدِيلِيٌّ** فَأَعِدْ تَرْتِيبَ الْعِبَارَةِ لِتَكُونَ هَكَذَا:

$$S_n = (2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n) + (6^0 + 6^1 + 6^2 + \cdots + 6^n)$$

هَلْ لَاحَظْتَ أَنَّ كُلًّا مِنَ الْمَجْمُوعَيْنِ الْمَحْصُورَيْنِ بَيْنَ الْأَقْوَاسِ مَجْمُوعُ حُدُودِ مُتَتَالِيَةٍ هَنْدَسِيَّةٍ أَسَاسُهَا الْعَدَدُ 2 وَالْعَدَدُ 6 عَلَى التَّوَالِي؟ إِذَا لَاحَظْتَ ذَلِكَ فَمَا عَلَيْكَ إِلَّا حِسَابُ الْمَجْمُوعَيْنِ بِاسْتِعْمَالِ الْقَانُونِ، وَلَا بَأْسَ أَنْ أُذَكِّرَكَ بِالْقَانُونِ:

مَجْمُوعُ حُدُودِ مُتَتَالِيَةٍ هَنْدَسِيَّةٍ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ يُحْسَبُ كَالْآتِي:

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q - 1} = v_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

هَيَّا نَسْتَعْمِلِ الْقَانُونَ وَنَحْسُبِ الْمَجْمُوعَ:

$$\begin{cases} 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^0 \dfrac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1 \\ 6^0 + 6^1 + 6^2 + \cdots + 6^n = 6^0 \dfrac{6^{n+1} - 1}{6 - 1} = \dfrac{6^{n+1} - 1}{5} \end{cases}$$

وَهَكَذَا:

$$S_n = 2^{n+1} - 1 + \frac{6^{n+1} - 1}{5} = 2^{n+1} + \frac{6^{n+1} - 6}{5}$$

وَأَنْصَحُكَ فِيمَا يَتَعَلَّقُ بِدَرْسِ الْقِسْمَةِ وَالْمُوَافَقَاتِ وَالْحِسَابِ أَنْ تَحْرِصَ دَائِمًا عَلَى التَّخَلُّصِ مِنَ الْكُسُورِ لَا **تَدَعُ كَسْرًا إِلَّا جَبَرْتَهُ**، فَلِهَذَا أَنَا أَدْعُوكَ لِأَنْ تُلَاحِظَ مَعِيَ أَنَّ الْعَدَدَ: $15 = 7 + 7 + 1 \equiv 1[7]$ وَمِنْهُ يَنْتُجُ أَنَّ:

$$S_n = 2^{n+1} + \frac{6^{n+1} - 6}{5} \equiv 2^{n+1} + \frac{15 \times 6^{n+1} - 15 \times 6}{5}[7]$$

وَهَل لَّكَ أَيْضًا أَنْ تُسَايِرَنِي وَتُلَاحِظَ أَيْضًا أَنَّ: $6 \equiv 6 - 7 \equiv -1[7]$، وَهَكَذَا نَكُونُ قَدْ حَصَّلْنَا الْمَطْلُوبَ لِنَجِدَ أَنَّ:

$$S_n \equiv 2^{n+1} + \frac{15 \times 6^{n+1} - 15 \times (-1)}{5} \equiv 2^{n+1} + 3 \times 6^{n+1} + 3[7]$$

وَأَخِيرًا، طُلِبَ مِنَّا اسْتِنْتَاجُ قِيَمِ الْعَدَدِ الطَّبِيعِيِّ n بِحَيْثُ يَكُونُ الْعَدَدُ S_n قَابِلًا لِلْقِسْمَةِ عَلَى الْعَدَدِ 7:

مَا عَلَيْكَ إِلَّا اسْتِبْدَالُ الْعَدَدَيْنِ الْمُتَغَيِّرَيْنِ 2^{n+1} وَ 6^{n+1} بِمَا يُوَافِقُهُمَا مِنَ الْجَدْوَلَيْنِ الَّذَيْنِ صَنَعْنَاهُمَا آنِفًا (أَرَأَيْتَ كَمْ يُسَاعِدُكَ الْجَدْوَلُ فِي مَهَامِّكَ) ثُمَّ تَنْظُرُ أَيَّ الْقِيَمِ تُحَقِّقُ الْمَطْلُوبَ، وَبِمَا أَنَّ الْمُهِمَّةَ هَهُنَا آلِيَّةٌ لَا تَتَطَلَّبُ جُهْدًا فِكْرِيًّا فَسَأُعْرِضُ عَنْ كِتَابَةِ تَفَاصِيلِهَا وَلَكِنْ قُمْ أَنْتَ بِالْحِسَابِ فَإِنِّي قَدْ فَعَلْتُ !

اَلْآنَ سَأُوَافِيكَ بِالنَّتَائِجِ وَهِيَ كَالْآتِي: وَجَدْتُ بَعْدَ أَنِ اخْتَبَرْتُ الْقِيَمَ أَنَّ التَّوَافُقَ لَا يَتَحَقَّقُ إِلَّا بِشَرْطَيْنِ هُمَا:

أَنْ يَكُونَ: $2^{n+1} \equiv 1[7]$ وَ $6^{n+1} \equiv 1[7]$ وَهَذَا لَا يَتَحَقَّقُ إِلَّا إِذَا كَانَ الْعَدَدُ $n + 1$ مِنَ الشَّكْلِ $2k$ وَمِنَ الشَّكْلِ $3k$ أَيْ قَابِلًا لِلْقِسْمَةِ عَلَى الْعَدَدِ 6 وَبِهَذَا نَسْتَنْتِجُ أَنَّ قِيَمَ الْعَدَدِ n الَّتِي تُحَقِّقُ الْمَطْلُوبَ هِيَ كُلُّ الْقِيَمِ الَّتِي

نُحَقِّقُ أَنَّ: $n+1 \equiv 0[6]$ أَيْ: $n \equiv 5[6]$ وَمِنْهُ فَقِيَمُ الْعَدَدِ n الْمَطْلُوبَةُ هِيَ كُلُّ الْأَعْدَادِ الطَّبِيعِيَّةِ مِنَ الشَّكْلِ: $6k+5$، مَعَ كَوْنِ الْعَدَدِ k عَدَدًا صَحِيحًا.

تَمَّ حَلُّ تَمْرِينِ الْمَوْضُوعِ الْأَوَّلِ

اَلْمَوْضُوعُ الثَّانِي: مُشْتَمِلٌ عَلَى ثَلَاثِ أَسْئِلَةٍ، الأَوَّلُ يَنْدَرِجُ تَحْتَهُ ثَلَاثُ أَسْئِلَةٍ فرعِيَّةٍ: "أ" وَ"ب" وَ"ج"، أَمَّا الثَّانِي وَالثَّالِثُ فَكِلَاهُمَا يَضُمُّ سُؤَالَيْنِ فَرْعِيَّيْنِ: "أ" وَ"ب"، وَالْمَجْمُوعُ سَبْعُ أَسْئِلَةٍ جُزْئِيَّةٍ، وَحَسْبِيَ اللهُ وَنِعْمَ الْوَكِيلُ

اَلسُّؤَالُ الْأَوَّلُ:

أ- لِنُبَيِّنْ أَنَّ $PGCD(A_n, B_n) = PGCD(B_n, 7)$:

طَرِيقَةُ الْعَمَلِ: مَا عَلَيْكَ إِلَّا أَنْ تُجْرِيَ الْقِسْمَةَ الْإِقْلِيدِيَّةَ لِلْعَدَدِ الطَّبِيعِيِّ A_n عَلَى الْعَدَدِ الطَّبِيعِيِّ B_n بَحْثًا عَنْ بَاقِي الْقِسْمَةِ، ثُمَّ تَسْتَعْمِلُ مُبَرْهَنَةً كُنْتَ قَدْ مَرَرْتَ بِهَا فِي دَرْسِ الْقِسْمَةِ، وَإِنْ شِئْتَ سَأُذَكِّرُكَ بِهَا لَعَلَّكَ نَسِيتَهَا:

مُبَرْهَنَةٌ: اَلْقَاسِمُ الْمُشْتَرَكُ الْأَكْبَرُ بَيْنَ عَدَدَيْنِ صَحِيحَيْنِ A وَ B هُوَ نَفْسُهُ الْقَاسِمُ الْمُشْتَرَكُ الْأَكْبَرُ بَيْنَ الْعَدَدِ الصَّحِيحِ B وَبَاقِي قِسْمَةِ الْعَدَدِ A عَلَى الْعَدَدِ B، وَبِصِيَاغَةٍ رَمْزِيَّةٍ نَكْتُبُ:

$PGCD(A, B) = PGCD(B, R_{A/B})$، بِحَيْثُ $R_{A/B}$ هُوَ بَاقِي قِسْمَةِ الْعَدَدِ A عَلَى الْعَدَدِ B.

اَلْآنَ نَشْرَعُ فِي الْقِسْمَةِ، وَأَحْسَبُكَ تُحْسِنُ إِجْرَاءَ الْقِسْمَةِ الْإِقْلِيدِيَّةِ لِكَثِيرِ حُدُودٍ عَلَى كَثِيرِ حُدُودٍ أَقَلَّ مِنْهُ دَرَجَةً ! وَإِنْ كُنْتَ لَا تُحْسِنُهُ فَهَذِهِ فُرْصَتُكَ:

كَيْفِيَّةُ إِجْرَاءِ الْقِسْمَةِ الْإِقْلِيدِيَّةِ لِكَثِيرِ حُدُودٍ عَلَى كَثِيرِ حُدُودٍ أَقَلَّ دَرَجَةً مِنْهُ: نَأْخُذُ كَثِيرِيَ الْحُدُودِ A_n وَ B_n كَمِثَالٍ تَطْبِيقِيٍّ:

$n^3 + 5n^2 + 7n + 9$ | $n + 2$

$n^3 + 5n^2 + 7n + 9$ | $n + 2$

$n^3 + 5n^2 + 7n + 9$ | $n + 2$

$-\ n^2(n + 2) = n^3 + 2n^2$ | n^2

$3n^2 + 7n + 9$

كَمَا تَرَى، فَقَدْ قَسَّمْتُ الْحَدَّ الْأَعْلَى دَرَجَةً مِنْ كَثِيرِ الْحُدُودِ A_n أَلَا وَهُوَ الْحَدُّ n^3، ثُمَّ ضَرَبْتُ الْحَاصِلَ وَهُوَ الْعَدَدُ n^2 ضَرْبَتُهُ فِي الْقَاسِمِ (وَهُوَ $n + 2$)، ثُمَّ طَرَحْتُ نَاتِجَ الضَّرْبِ مِنْ كَثِيرِ الْحُدُودِ A_n لِأَحْصُلَ فِي الْأَخِيرِ عَلَى كَثِيرِ حُدُودٍ جَدِيد وَهُوَ $3n^2 + 7n + 9$ الَّذِي نُعِيدُ فِيهِ الْعَمَلِيَّةَ مِنْ جَدِيدٍ، وَهَكَذَا حَتَّى نَصِلَ إِلَى الْبَاقِي وَهُوَ عَدَدٌ طَبِيعِيٌّ فِي حَالَتِنَا هَذِهِ:

$n^3 + 5n^2 + 7n + 9$ | $n + 2$

$-\ n^2(n + 2) = n^3 + 2n^2$ | n^2

$3n^2 + 7n + 9$

$-\ 3n(n + 2) = 3n^2 + 6n$ | $n^2 + 3n$

$n + 9$

$$\begin{array}{r|l} n^3+5n^2+7n+9 & n+2 \\ -\ n^2(n+2)=n^3+2n^2 & n^2+3n \\ \hline 3n^2+7n+9 & \\ -\ 3n(n+2)=3n^2+6n & \\ \hline n+9 & \end{array} \quad \longleftarrow \quad \begin{array}{r|l} n^3+5n^2+7n+9 & n+2 \\ -\ n^2(n+2)=n^3+2n^2 & n^2+3n+1 \\ \hline 3n^2+7n+9 & \\ 3n(n+2)=3n^2+6n & \\ \hline n+9 & \\ -\ 1(n+2)=n+2 & \\ \hline \text{اَلْبَاقِي} \rightarrow 7 & \end{array}$$

وَهَكَذَا نَكُونُ قَدْ أَتْمَمْنَا إِجْرَاءَ الْقِسْمَةِ الْإِقْلِيدِيَّةِ لِكَثِيرِ الْحُدُودِ A_n عَلَى كَثِيرِ الْحُدُودِ B_n، وَمَا يُهِمُّنَا هَهُنَا هُوَ الْبَاقِي وَهُوَ الْعَدَدُ 7، ثُمَّ بِاسْتِعْمَالِ الْمُبَرْهَنَةِ السَّابِقَةِ نَسْتَنْتِجُ أَنَّ:

$$PGCD(A_n, B_n) = PGCD(B_n, 7)$$

ب- اَلْآنَ نَسْتَنْتِجُ الْقِيَمَ الْمُمْكِنَةَ لِلْقَاسِمِ الْمُشْتَرَكِ الْأَكْبَرِ بَيْنَ الْعَدَدَيْنِ A_n وَ B_n:

بِمَا أَنَّ $PGCD(A_n, B_n) = PGCD(B_n, 7)$، فَهَذَا يَعْنِي أَنَّ هَذَا الْقَاسِمَ الْمُشْتَرَكَ هُوَ قَاسِمٌ لِلْعَدَدِ 7، فَإِذَنْ هُوَ أَحَدُ الْعَدَدَيْنِ 1 أَوْ 7، إِذَنْ: اَلْقِيَمُ الْمُمْكِنَةُ لِلْقَاسِمِ $PGCD(A_n, B_n)$ هِيَ قِيَمُ الْمَجْمُوعَةِ: $\{1,7\}$

ج- كَيْفَ نُعَيِّنُ قِيَمَ الْعَدَدِ الطَّبِيعِيِّ n حَتَّى يَكُونَ الْعَدَدَانِ A_n وَ B_n أَوَّلِيَّيْنِ فِيمَا بَيْنَهُمَا؟

لَا بُدَّ أَنَّكَ تَعْلَمُ أَنَّ عَدَدَيْنِ صَحِيحَيْنِ يَكُونَانِ أَوَّلِيَّيْنِ فِيمَا بَيْنَهُمَا إِذَا كَانَ أَكْبَرُ قَاسِمٍ مُشْتَرَكٍ بَيْنَهُمَا هُوَ الْعَدَدُ 1، وَلِهَذَا، حَتَّى يَكُونَ الْعَدَدَانِ A_n وَ B_n أَوَّلِيَّيْنِ فِيمَا بَيْنَهُمَا يَجِبُ أَنْ يَكُونَ $PGCD(A_n, B_n) = 1$، وَهُوَ نَفْسُهُ $PGCD(B_n, 7)$ كَمَا سَبَقَ، فَيَجِبُ إِذَنْ أَنْ يَكُونَ $PGCD(B_n, 7) = 1$، أَيْ:

$PGCD(n+2,7) = 1$، يَلْزَمُ مِنْ هَذَا أَنَّ $PGCD(n+2,7) \neq 7$ لِأَنَّ الْقِيَمَ الْمُمْكِنَةَ لِهَذَا الْقَاسِمِ إِمَّا أَنْ تَكُونَ الْعَدَدَ 1 أَوِ الْعَدَدَ 7، وَبِمَا أَنَّ الْعَدَدَ $PGCD(n+2,7)$ يَقْسِمُ الْعَدَدَ $n+2$ وَسَبَقَ أَنَّهُ يَجِبُ أَنْ لَا يَكُونَ الْعَدَدَ 7، فَهَذَا يَعْنِي أَنَّ الْعَدَدَ 7 يَجِبُ أَن لَّا يَقْسِمَ الْعَدَدَ $n+2$، وَمِنْهُ نَسْتَنْتِجُ أَنَّ الْقِيَمَ الْمَسْمُوحَةَ لِلْعَدَدِ n مِنْ أَجْلِ أَنْ يَكُونَ $PGCD(A_n, B_n) = 1$ هِيَ الْقِيَمُ الَّتِي تُحَقِّقُ أَنَّ: $n+2 \not\equiv 0[7]$ أَيْ $n \not\equiv 5[7]$ أَيْ هِيَ كُلُّ الْقِيَمِ الطَّبِيعِيَّةِ مَا عَدَا الْقِيَمِ مِنَ الشَّكْلِ $7k+5$، أَوْ بِإِمْكَانِكَ أَنْ تَقُولَ أَيْضًا هِيَ كُلُّ الْقِيَمِ مِنَ الْمَجْمُوعَةِ: $\{7k, 7k+1, 7k+2, 7k+3, 7k+4, 7k+6;\ \ k \in \mathbb{N}\}$

اَلسُّؤَالُ الثَّانِي:

أ- هَيَّا نُبَيِّنْ أَنَّهُ إِذَا كَانَتْ ثُنَائِيَّةُ الْأَعْدَادِ **الصَّحِيحَةُ** حَلًّا لِلْمُعَادَلَةِ (E) فَيَلْزَمُ مِنْهُ أَنَّ $x \equiv 3[4]$:

لِنَكْتُبِ الْمُعَادَلَةَ (E) وَهِيَ الْمُعَادَلَةُ: $A_2x - B_2y = 29$، أَيْ هِيَ الْمُعَادَلَةُ $51x - 4y = 29$، بِقَلِيلٍ مِنَ التَّلَاعُبِ نُحَصِّلُ الْمُرَادَ، فَالْمُسَاوَاةُ $51x - 4y = 29$ تَسْتَلْزِمُ: $51x = 4y + 29$، أَيْ أَنَّ: $51x \equiv 29[4]$، وَالْآنَ مَالْعَمَلُ؟ إِلَيْكَ حِيلَةً فَعَّالَةً وَلَكِنْ رَكِّزْ مَعِي جَيِّدًا فَهَذِهِ الْحِيلَةُ سَتَنْفَعُكَ كَثِيرًا بِإِذْنِ اللهِ: لَقَدْ طُلِبَ مِنْكَ أَنْ تَجِدَ أَنَّ $x \equiv 3[4]$، وَهَذَا يَعْنِي أَنَّ $51x \equiv 153[4]$ بِضَرْبِ طَرَفَيِ الْمُوَافَقَةِ فِي الْعَدَدِ 51، ثُمَّ تَطْرَحُ الْعَدَدَ 29 مِنْ 153 لِتَجِدَ الْفَارِقَ الَّذِي عَلَيْكَ إِضَافَتُهُ بِتِكْرَارِ (تَرْدِيدِ) الْعَدَدِ 4 عَدَدًا مِنَ الْمَرَّاتِ، وَسَوْفَ تَجِدُ الْعَدَدَ 124 وَهُوَ فِي الْوَاقِعِ: 31×4، وَبِمَا أَنَّ لَدَيْنَا أَنَّ $51x \equiv 29[4]$، فَهُوَ يُكَافِئُ أَنَّ: $51x \equiv 29 + 4 \times 31 \equiv 153[4]$، ثُمَّ بِتَقْسِيمِ طَرَفَيِ الْمُوَافَقَةِ عَلَى الْعَدَدِ الصَّحِيحِ 51 نَصِلُ إِلَى مُرَادِنَا وَهُوَ أَنَّ: $x \equiv 3[4]$.

ب- اَلْآنَ طُلِبَ مِنْكَ حَلَّ الْمُعَادَلَةِ بَعْدَمَا أَعَانَكَ عَلَى حَلِّهَا بِإِيقَافِكَ عَلَى الشَّرْطِ الْأَوَّلِ لِتَحَقُّقِهَا:

لَيْسَ عَلَيْكَ إِلَّا أَنْ تُعَوِّضَ عِبَارَةَ الشَّطْرِ الْأَوَّلِ مِنَ الْحَلِّ (أَيْ عِبَارَةَ x) فِي عِبَارَةِ الْمُعَادَلَةِ (E):

$51x - 4y = 29$ تُكَافِئُ: $51(4k + 3) - 4y = 29$ أَيْ: $y = 51k - 31$، فَيَنْتُجُ أَنَّ حُلُولَ الْمُعَادَلَةِ (E) هِيَ كُلُّ الثُّنَائِيَّاتِ الصَّحِيحَةِ مِنَ الشَّكْلِ: $(4k + 3; 51k + 31)$، وَنَكْتُبُ أَيْضًا: حُلُولُ الْمُعَادَلَةِ (E) هِيَ عَنَاصِرُ الْمَجْمُوعَةِ $\mathcal{S}$ وَهِيَ: $\mathcal{S} = \{(4k + 3; 51k + 31); k \in \mathbb{Z}\}$

اَلسُّؤَالُ الثَّالِثُ:

أ- طُلِبَ مِنْكَ اسْتِنْتَاجُ حُلُولٍ لِلْمُعَادَلَةِ (E') وَهِيَ الْمُعَادَلَةُ: $51x - 4y = 45$، أَيِ انْطِلَاقًا مِنْ حُلُولِ الْمُعَادَلَةِ (E):

أَعِدْ _أَخِي الطَّالِبُ_ كِتَابَةَ الْمُعَادَلَةِ بِهَذَا الشَّكْلِ: $51x - 4y = 29 + 16$، ثُمَّ انْقُلْ الزِّيَادَةَ مِنَ الطَّرَفِ الْأَيْمَنِ إِلَى الطَّرَفِ الْأَيْسَرِ لِتَصِيرَ الْمُعَادَلَةُ كَمَا يَلِي: $51x - 4(y + 4) = 29$، ثُمَّ اسْمَحْ لِي أَنْ أُعِيدَ تَسْمِيَةَ الْمَجْهُولِ $y + 4$ وَأُسَمِّيَهُ: t، لِكَيْ نَحْصُلَ عَلَى مُعَادَلَةٍ بِنَفْسِ شَكْلِ الْمُعَادَلَةِ (E) وَهِيَ الْمُعَادَلَةُ: $51x - 4t = 29$ وَالَّتِي حُلُولُهَا هِيَ الثُّنَائِيَّاتُ (x, t) حَيْثُ: $(x;\ t) = (4k + 3;\ 51k + 31)$ وَبِمَا أَنَّ: $t = y + 4$ فَإِذَنْ: $y = t - 4 = 51k + 27$، وَهَكَذَا فَحُلُولُ الْمُعَادَلَةِ (E') هِيَ كُلُّ الثُّنَائِيَّاتِ الصَّحِيحَةِ مِنَ الشَّكْلِ: $(4k + 3;\ 51k + 27)$ حَيْثُ k عَدَدٌ صَحِيحٌ

ب- هَذَا سُؤَالٌ أَخِيرٌ طُلِبَ مِنَّا فِيهِ إِيجَادُ الثُّنَائِيَّاتِ مِنْ بَيْنِ حُلُولِ الْمُعَادَلَةِ (E') الَّتِي تُحَقِّقُ الْمُتَرَاجِحَةَ:

$|y-12x| \leq 3$:

سَبَقَ وَأَنْ وَجَدْنَا حُلُولَ الْمُعَادَلَةِ (E') وَهِيَ الثُّنَائِيَّاتُ $(4k+3;\ 51k+27)$، وَهَكَذَا فَالْمَطْلُوبُ إِيجَادُ حُلُولِ الْمُتَرَاجِحَةِ: $|3k-9| \leq 3$ الَّتِي تُكَافِئُ: $|3k-3| \leq 3$ أَيْ: $|k-3| \leq 1$،

لَقَدْ عَرَفْنَا مَا هُوَ مَدْلُولُ هَذَا الشَّكْلِ مِنَ الْمُتَرَاجِحَاتِ إِذَا كَانَ فِيهَا رَمْزُ الْقِيمَةِ الْمُطْلَقَةِ، وَأُذَكِّرُكَ بِخَاصِّيَّةٍ قَدْ مَرَّتْ بِكَ مِنْ قَبْلُ:

خَاصِّيَّةٌ: إِذَا كَانَ $|x-a| \leq b$، فَهَذَا يَعْنِي أَنَّ: $a-b \leq x \leq a+b$

اَلْآنَ فَلْنُطَبِّقِ الْخَاصِّيَّةَ عَلَى السُّؤَالِ لِنَجِدَ أَنَّهُ إِذَا كَانَ $|k-3| \leq 1$ فَهَذَا يَعْنِي أَنَّ: $3-1 \leq k \leq 3+1$ وَهَكَذَا: $2 \leq k \leq 4$ أَيْ أَنَّ: $k \in \{2,3,4\}$، وَهَكَذَا نَجِدُ أَنَّ الثُّنَائِيَّاتِ الَّتِي تُحَقِّقُ الْمُتَرَاجِحَةَ هِيَ ثَلَاثُ ثُنَائِيَّاتٍ أَلَا وَهِيَ: $(11;\ 129)$ وَ$(15;\ 180)$ وَ$(19;\ 231)$. وَاللهُ تَعَالَى أَعْلَمُ.

***

تَمَّ حَلُّ تَمْرِينَيْ بَاكَالُورِيَّة سنة 2022 وَلِلَّهِ الْحَمْدُ أَوَّلًا وَآخِرًا

بَاكَالُورِيَّةْ سَنَةِ 2021

اَلْمَوْضُوعُ الْأَوَّلُ: وَيَشْتَمِلُ عَلَى ثَلَاثِ أَسْئِلَةٍ، الثَّانِي يَنْدَرِجُ تَحْتَهُ سُؤَالَانِ فَرْعِيَّانِ: "أ" وَ"ب"، أَمَّا الثَّالِثُ فَتَحْتَهُ ثَلَاثُ أَسْئِلَةٍ فَرْعِيَّةٍ: "أ" وَ"ب" وَ"ج"، وَالْمَجْمُوعُ سِتُّ أَسْئِلَةٍ جُزْئِيَّةٍ، وَاللهُ الْمُسْتَعَانُ

اَلسُّؤَالُ الْأَوَّلُ: هَيَّا نَحُلَّ الْمُعَادَلَةَ (E) وَهِيَ الْمُعَادَلَةُ: $42x - y = 38$:

بِمَا أَنَّ الثُّنَائِيَّةَ $(1,4)$ حَلٌّ لِلْمُعَادَلَةِ فَهَذَا يَعْنِي أَنَّ: $42(1) - 4 = 38$، ثُمَّ دَعْنَا نَطْرَحُ هَذِهِ الْمُسَاوَاةِ مِنْ عِبَارَةِ الْمُعَادَلَةِ لِنَجِدَ أَنَّ: $42(x-1) - (y-4) = 0$ مَا يَقُودُنَا إِلَى أَنَّ:

$$42(x-1) = (y-4) \dots (\Sigma)$$

هَلْ لَاحَظْتَ أَنَّ الْعَدَدَ الصَّحِيحَ 42 يَقْسِمُ الْعَدَدَ $(y-4)$ فَإِذَنْ: y يُكْتَبُ مِنَ الشَّكْلِ $42m + 4$، وَبِتَعْوِيضِ عِبَارَةِ y فِي الْمُعَادَلَةِ (Σ) نَجِدُ أَنَّ: $42(x-1) = (42m + 4 - 4)$ أَيْ أَنَّ: $x = m + 1$، ، وَهَكَذَا فَإِنَّ حُلُولَ الْمُعَادَلَةِ هِيَ جَمِيعُ الثُّنَائِيَّاتِ **الصَّحِيحَةِ** مِنَ الشَّكْلِ: $(m + 1, 42m + 4)$

اَلسُّؤَالُ الثَّانِي:

أ- لِنُبَيِّنْ صِحَّةَ الْمُسَاوَاةِ: $113a = 3(c - 42b + 151)$:

طَرِيقَةُ الْعَمَلِ: لَدَيْكَ عَدَدٌ طَبِيعِيٌّ هُوَ الْعَدَدُ N: يُكْتَبُ فِي نِظَامَيْ تِعْدَادٍ مُخْتَلِفَتَيْنِ بِشَكْلَيْنِ مُخْتَلِفَيْنِ، مَا عَلَيْكَ إِلَّا أَنْ تُعِيدَ كِتَابَةَ الْعَدَدِ N فِي نِظَامِ الْعَدِّ الْعُشَرِيِّ:

فَنَكْتُبُ: $N = \overline{ab0cb}^5 = a \times 5^4 + b \times 5^3 + 0 \times 5^2 + c \times 5 + b$، وَهَذَا فِي نِظَامِ الْعَدِّ الَّذِي أَسَاسُهُ الْعَدَدُ 5، فَبَعْدَ النَّشْرِ والْجَمْعِ يَصِيرُ: $N = 625a + 126b + 5c$، وَهَذَا فِي نِظَامِ الْعَدِّ الَّذِي أَسَاسُهُ الْعَدَدُ 10، وَبِنَفْسِ الْكَيْفِيَّةِ نَكْتُبُ: $N = \overline{a7c5}^8 = 512a + 8c + 453$، وَبِمَا أَنَّ الْعِبَارَتَيْنِ مُتَسَاوِيَتَانِ فَيَجُوزُ لَنَا أَنْ نَكْتُبَ: $625a + 126b + 5c = 512a + 8c + 453$، وَمِنْهُ:

$$113a = 3c - 126b + 453 = 3(c - 42b + 151)$$

ثُمَّ_يَا أَخِي الطَّالِبُ_ رَكِّزْ لِتَلْحَظَ فِي الْعِبَارَةِ الْأَخِيرَةِ أَنَّ الْعَدَدَ 3 قَاسِمٌ لِلْعَدَدِ $113a$، وَحَسَبَ **مُبَرْهَنَةِ غُوص**: بِمَا أَنَّ الْعَدَدَ 3 أَوَّلِيٌّ مَعَ الْعَدَدِ 113 فَإِنَّهُ حَتْمًا قَاسِمٌ لِلْعَدَدِ a، وَلَكِنَّ الْعَدَدَ a أَصْغَرُ تَمَامًا مِنَ الْعَدَدِ 5 لِأَنَّهُ_إِذَا كُنْتَ تَذْكُرُ_ كَانَ ضِمْنَ كِتَابَةِ الْعَدَدِ N فِي نِظَامِ التِّعْدَادِ الَّذِي أَسَاسُهُ الْعَدَدُ 5، وَهَكَذَا نَسْتَنْتِجُ أَنَّ الْعَدَدَ a مُضَاعَفٌ لِلْعَدَدِ 3 وَأَصْغَرُ مِنَ الْعَدَدِ 5 فَتَعَيَّنَ أَنَّهُ هُوَ نَفْسُهُ الْعَدَدُ 3 أَيْ: $a = 3$

ب- هَيَّا بِنَا نَجِدْ قِيمَةَ الْعَدَدَيْنِ b وَc:

بِمَا أَنَّ $113a = 3(c - 42b + 151)$ وَثَبَتَ أَنَّ: $a = 3$، فَإِذَنْ: $42b - c = 38$، وَهِيَ مُعَادَلَةٌ نَعْرِفُ حُلُولَهَا، لِذَا فَإِنَّ: $(b, c) = (m + 1, 42m + 4)$، وَلَكِنَّ $b, c < 5$ أَيْ: $b, c \leq 4$ وَمِنْهُ :

$m \leq 4$ وَكَذَلِكَ: $42m + 4 \leq 4$، إِذَنْ: $m \leq 0$ فَإِذَنْ: $m = 0$، وَهَكَذَا يَنْتُجُ أَنَّ:

$b = 1$ وَ$c = 4$

ثُمَّ يَكْفِي تَعْوِيضُ الْعَدَدَيْنِ b وَc بِقِيمَتَيْهِمَا فِي عِبَارَةِ الْعَدَدِ N فَنَجِدُ أَنَّ: $N = 2021$

اَلسُّؤَالُ الثَّالِثُ:

أ- دِرَاسَةُ بَوَاقِي قِسْمَةِ الْعَدَدِ 5^n عَلَى الْعَدَدِ 6:

سَبَقَ وَأَنْ شَرَحْنَا **طَرِيقَةَ الْعَمَلِ**، وَأَنَّ الدَّوْرَ فِي الْعَادَةِ يَكُونُ هُوَ الْعَدَدَ 1، فَإِلَيْكَ الْمُحَصِّلَةَ:

n اَلْعَدَدُ	$2p$	$2p + 1$
اَلْبَاقِي	1	5

ب- هَيَّا نُبَيِّنْ أَنَّهُ مَهْمَا يَكُنِ الْعَدَدُ الطَّبِيعِيُّ n فَإِنَّ الْعَدَدَ $2021^{2n} + 1441^n + 4$ مُضَاعَفٌ لِلْعَدَدِ 6:

إِذَا وَافَقْتَنِي فِي أَنَّ: $2021 \equiv 5[6]$ وَفِي أَنَّ: $1441 \equiv 1[6]$ فَسَيَتَّضِحُ لَكَ بِسُهُولَةٍ أَنَّ:

$$2021^{2n} + 1441^n + 4 \equiv 5^{2n} + 1^n + 4 \equiv 1 + 1 + 4 \equiv 6 \equiv 0[6]$$

ج- وَهَا هُوَ السُّؤَالُ الْأَخِيرُ، وَنُرِيدُ أَنْ نَجِدَ قِيَمَ الْعَدَدِ الطَّبِيعِيِّ n بِحَيْثُ يَكُونُ $A_n \equiv 0[6]$:

سَبَقَ وَبَيَّنَّا ـأُخَيِّـ أَنَّ: $2021^{2n} \equiv 5[6]$ وَأَنَّ: $1441^n \equiv 1[6]$، ثُمَّ أَضِفْ إِلَى ذَلِكَ أَنَّ:

$1442 \equiv 2[6]$، وَمِنْهُ فَإِنَّ:

$$A_n = 2021^{2n} + 1441^n + 2 \times 1442^n \equiv 2 + 2^{n+1} \equiv 2(2^n + 1)[6]$$

تَأَمَّلْ ـأَخِيـ فِي هَذَا الشَّرْطِ، سَتَعْلَمُ أَنَّ الْعَدَدَ A_n لَا يَكُونُ قَابِلًا لِلْقِسْمَةِ عَلَى الْعَدَدِ 6 إِلَّا إِذَا كَانَ الْجُزْءُ:

$2(2^n + 1)$ مُضَاعَفًا لِلْعَدَدِ 6، وَلَا يَكُونُ هَذَا الْأَخِيرُ مُضَاعَفًا لِلْعَدَدِ 6 إِلَّا إِذَا كَانَ الْجُزْءُ: $2^n + 1$ مُضَاعَفًا لِلْعَدَدِ 3، وَبِدِرَاسَةِ بَوَاقِي قِسْمَةِ الْعَدَدِ 2^n عَلَى الْعَدَدِ 3 نَجِدُ أَنَّ: $2^{2k+1} \equiv 2[3]$، وَهَكَذَا نَسْتَنْتِجُ أَنَّ قِيَمَ الْعَدَدِ n الَّتِي يَتَحَقَّقُ مِنْ أَجْلِهَا التَّوَافُقُ هِيَ الْقِيَمُ الْفَرْدِيَّةُ أَيِ الْقِيَمُ الطَّبِيعِيَّةُ مِنَ الشَّكْلِ: $2k + 1$، وَاللهُ تَعَالَى أَعْلَمُ

تَمَّ حَلُّ تَمْرِينِ الْمَوْضُوعِ الْأَوَّلِ

اَلْمَوْضُوعُ الثَّانِي: يَضُمُّ أَرْبَعَ أَسْئِلَةٍ، كُلٌّ مِنَ اَلْأَوَّلِ وَالثَّانِي وَالرَّابِعِ يَنْدَرِجُ تَحْتَهُ سُؤَالَانِ فَرْعِيَّانِ: "أ" وَ"ب"، وَالْمَجْمُوعُ سَبْعُ أَسْئِلَةٍ جُزْئِيَّةٍ، وَاللهُ وَلِيُّ التَّوْفِيقِ

اَلسُّؤَالُ الْأَوَّلُ:

أ- طُلِبَ مِنْكَ حَلُّ الْمُعَادَلَةِ: $7x - 6y = 1$:

مِنَ الْوَاضِحِ أَنَّ الثُّنَائِيَّةَ $(1,1)$ حَلٌّ لِلْمُعَادَلَةِ (وَهُوَ مُعْطَى عَلَى كُلِّ حَالٍ)، وَطَرِيقَةُ السَّيْرِ أَحْسَبُ أَنَّكَ قَدْ أَتْقَنْتَهَا بَعْدَ أَنْ عَلَّمْتُكَهَا فِي تَمْرِينٍ سَابِقٍ، وَلَكِنَّ فِي التَّكْرَارِ إِفَادَةً وَلَا شَكَّ:

طَرِيقَةُ الْعَمَلِ: بَعْدَ عِلْمِكَ **بِالْحَلِّ الْخَاصِّ** اجْعَلْ هَذَا الْحَلَّ مُسَاعِدًا لَكَ فِي الْعَمَلِ، وَبِمَا أَنَّ الثُّنَائِيَّةَ $(1,1)$ حَلٌّ لِلْمُعَادَلَةِ فَهَذَا يَعْنِي أَنَّ: $7(1) - 6(1) = 1$، وَمِنْهُ: وَبِطَرْحِ هَذِهِ الْمُسَاوَاةِ مِنْ عِبَارَةِ الْمُعَادَلَةِ نَجِدُ سَتَجِدُ أَنَّ: $7(x-1) - 6(y-1) = 0$، وَهَكَذَا: $7(x-1) = 6(y-1)$، ثُمَّ مَاذَا بَعْدُ؟ هَلْ تَذْكُرُ **مُبَرْهَنَةَ غوص؟** إِنْ كُنْتَ نَسِيتَهَا فَعُدْ إِلَى أَوَّلِ الْكِتَابِ، فَبِاسْتِعْمَالِ **مُبَرْهَنَةِ غوص**، وَبِمَا أَنَّ الْعَدَدَ 6 يَقْسِمُ الْعَدَدَ $x-1$ وَالْعَدَدُ 7 يَقْسِمُ الْعَدَدَ $y-1$ فَيَسَعُنَا الْآنَ كِتَابَةُ الْحُلُولِ الَّتِي هِيَ جَمِيعُ الثُّنَائِيَّاتِ الصَّحِيحَةِ مِنَ الشَّكْلِ: $(6k+1, 7k+1)$

ب- طُلِبَ مِنَّا الْآنَ أَنْ نُبَيِّنَ أَنَّهُ إِذَا كَانَتِ الثُّنَائِيَّةُ الصَّحِيحَةُ (x, y) حَلًّا لِلْمُعَادَلَةِ السَّابِقَةِ فَهَذَا يَعْنِي أَنَّ الْجُدَاءَ xy هُوَ عَدَدٌ طَبِيعِيٌّ لَيْسَ بِمَعْدُومٍ (أَيْ أَكْبَرُ تَمَامًا مِنَ الصِّفْرِ):

مَا عَلَيْكَ إِلَّا أَنْ تَنْظُرَ إِلَى إِشَارَةِ الْجُدَاءِ xy الَّذِي هُوَ نَفْسُهُ الْجُدَاءُ $(6k+1)(7k+1)$، ثُمَّ بِدِرَاسَةِ إِشَارَةِ هَذَا الْجُدَاءِ تَجِدُ أَنَّهُ لَا يَكُونُ سَالِبًا إِلَّا عَلَى الْمَجَالِ $\left[-\frac{1}{6}, -\frac{1}{7}\right]$ وَلَيْسَتْ بِقِيَمٍ صَحِيحَةٍ، فَيَتَبَيَّنُ لَكَ أَنَّ $xy > 0$

اَلسُّؤَالُ الثَّانِي:

أ- هَذَا السُّؤَالُ يَتَكَرَّرُ مَعَنَا كَثِيرًا وَالْجَوَابُ عَنْهُ سَهْلٌ وَهَاكَ الْجَدْوَلَ:

قِيَمُ الْعَدَدِ n	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
اَلْبَاقِي	1	4	2

ب- وَهَذَا السُّؤَالُ أَيْضًا مِنَ الْأَسْئِلَةِ النَّمَطِيَّةِ الَّتِي تَتَكَرَّرُ فِي تَمَارِينِ الْبَاكَالُورِيَّةِ، وَهَاكَ الْجَوَابَ فَافْهَمْ يَا لَبِيبُ ! لِنُبَيِّنْ أَنَّ الْعَدَدَ: $4 \times 2019^{2021} + 2022^{2022}$ قَابِلٌ لِلْقِسْمَةِ عَلَى الْعَدَدِ 7:

مَا هُوَ إِلَّا أَنْ تَرَى أَنَّ: $2019 \equiv -4[7]$ وَأَنَّ $2022 \equiv -1[7]$، وَمِنْهُ نَجِدُ أَنَّ:

$4 \times 2019^{2021} + 2022^{2022} \equiv 4 \times (-4)^{2021} + (-1)^{2022}[7]$، وَمِن مَّا سَبَقَ:

$4 \times (-4)^{2021} + (-1)^{2022}[7] \equiv -4^{2022} + 1 \equiv -4^{3(674)} + 1 \equiv 0[7]$

اَلسُّؤَالُ الثَّالِثُ: هَذَا سُؤَالٌ مِنْ نَوْعٍ لَمْ يَمُرَّ عَلَيْنَا مِنْ قَبْلُ، وَهُوَ **الْبُرْهَانُ بِالتَّرَاجُعِ**، فَمَا هُوَ يَا تُرَى؟

اَلْبُرْهَانُ بِالتَّرَاجُعِ: لَوْ طُلِبَ مِنْكَ أَنْ تُبَرْهِنَ عَلَى صِحَّةِ عِبَارَةٍ P_n فَيَجِبُ أَنْ تَخْتَبِرَ صِحَّتَهَا بِالنِّسْبَةِ لِكُلِّ قِيَمِ الْعَدَدِ n اِبْتِدَاءً مِنَ الصِّفْرِ، أَيْ يَجِبُ عَلَيْكَ أَنْ تَتَحَقَّقَ مِنْ أَنَّ P_0 صَحِيحَةٌ وَ P_1 صَحِيحَةٌ وَ P_2 صَحِيحَةٌ، وَهَكَذَا، وَلَكِنَّ هَذِهِ الْعَمَلِيَّةَ مُتَعَذِّرَةٌ لِأَنَّ الْأَعْدَادَ الطَّبِيعِيَّةَ غَيْرُ مُنْتَهِيَةٍ، وَلَكِنَّ لِلْأَعْدادِ الطَّبِيعِيَّةِ خَاصِّيَّةً هِيَ: **خَاصِّيَّةُ التَّرَاجُعِ**، أَوْ سَمِّهَا إِنْ شِئْتَ: خَاصِّيَّةَ الْبِطَاقَةِ الرَّابِحَةِ: مَا عَلَيْكَ إِلَّا أَنْ تُثْبِتَ أَنَّهُ لَوْ كَانَتِ الْعِبَارَةُ P_k صَحِيحَةً فَإِنَّ الْعِبَارَةَ P_{k+1} صَحِيحَةٌ، ثُمَّ بِاسْتِعْمَالِ هَذِهِ الْبِطَاقَةِ الرَّابِحَةِ تَكُونُ قَدْ شَمَلْتَ كُلَّ الْأَعْدَادِ الطَّبِيعِيَّةِ ! لِمَ؟ لِأَنَّكَ ـ يَا صَاحِبِي ـ يَكْفِيكَ أَنْ تُثْبِتَ أَنَّ الْعِبَارَةَ P_0 صَحِيحَةٌ، ثُمَّ بِاسْتِعْمَالِ الْبِطَاقَةِ الرَّابِحَةِ: بِمَا أَنَّ الْعِبَارَةَ P_0 صَحِيحَةٌ فَإِنَّ الْعِبَارَةَ P_1 صَحِيحَةٌ ! وَبِمَا أَنَّ الْعِبَارَةَ P_1 صَحِيحَةٌ فَإِنَّ الْعِبَارَةَ P_2 صَحِيحَةٌ، وَهَكَذَا حَتَّى تَشْمَلَ كُلَّ عَدَدٍ طَبِيعِيٍّ بَعْدَ الْعَدَدِ 0

اَلْآنَ دَعْنَا نُلَخِّصْ خُطُوَاتِ **الْبُرْهَانِ بِالتَّرَاجُعِ** بَعْدَ أَنْ قَرَّرْنَا مَبْدَأً هَذَا الْبُرْهَانِ:

طَرِيقَةُ الْبُرْهَانِ بِالتَّرَاجُعِ: نُرِيدُ أَنْ نُبَرْهِنَ أَنَّ الْعِبَارَةَ P_n صَحِيحَةٌ مَهْمَا يَكُنِ الْعَدَدُ الطَّبِيعِيُّ n، وَذَلِكَ اِبْتِدَاءً مِنْ عَدَدٍ طَبِيعِيٍّ n_0 قَدْ يَكُونُ هُوَ الصِّفْرَ وَقَدْ لَا يَكُونُ ، وَلَيْسَ شَرْطًا أَنْ يَكُونَ الْعَدَدُ الَّذِي نَبْتَدِئُ بِهِ هُوَ الْعَدَدَ 0، لِكَيْ نُبَرْهِنَ بِالتَّرَاجُعِ عَلَى صِحَّةِ الْعِبَارَةِ P_n **بِالتَّرَاجُعِ** يَكْفِي اِتِّبَاعُ خُطْوَتَيْنِ (أَوْ قُلْ ثَلَاثَ خُطْوَاتٍ كَمَا فِي الْمَنْهَجِ الدِّرَاسِيِّ الْمُعْتَمَدِ): هُمَا:

1) نَتَحَقَّقُ مِنْ أَنَّ الْعِبَارَةَ P_0 صَحِيحَةٌ
2) ثُمَّ نُبَرْهِنُ أَنَّهُ: **لَوْ** كَانَتِ الْعِبَارَةُ P_n صَحِيحَةً فَإِنَّ الْعِبَارَةَ P_{n+1} صَحِيحَةٌ، وَكَأَنَّ هَذِهِ الْخُطْوَةِ هِيَ فِي ذَاتِهَا يُمْكِنُ تَقْسِيمُهَا إِلَى خُطْوَتَيْنِ اثْنَتَيْنِ هُمَا:

- **نَفْرِضُ** أَنَّ الْعِبَارَةَ P_n صَحِيحَةٌ اِبْتِدَاءً مِنَ الْعَدَدِ الَّذِي يَلِي الْعَدَدَ n_0 أَيِ اِبْتِدَاءً مِنَ الْعَدَدِ $n_0 + 1$ أَيْ مَهْمَا يَكُنِ الْعَدَدُ $n > n_0$
- ثُمَّ **بِاسْتِعْمَالِ الْفَرَضِ السَّابِقِ**: نُبَرْهِنُ أَنَّ الْعِبَارَةَ P_{n+1} صَحِيحَةٌ مَهْمَا يَكُنِ الْعَدَدُ $n > n_0$

بَعْدَ أَنْ فَهِمْتَ مَعِي مَبْدَأَ وَطَرِيقَةَ الْبُرْهَانِ بِالتَّرَاجُعِ، هَيَّا بِنَا نُبَيِّنْ بِالتَّرَاجُعِ أَنَّهُ مَهْمَا يَكُنِ الْعَدَدُ الطَّبِيعِيُّ غَيْرُ الْمَعْدُومِ n، فَإِنَّ: $4^n \equiv 4[6]$:

كَمَا أَسْلَفْنَا أَيُّهَا الْإِخْوَةُ الْكِرَامُ، فَالْخُطْوَةُ الْأُولَى هِيَ أَنْ نَتَحَقَّقَ مِنْ أَنَّ $4^1 \equiv 4[6]$، وَكَمَا لَاحَظْتَ فَقَدِ ابْتَدَأْنَا بِالْعَدَدِ 1، ثُمَّ الْخُطْوَةُ الثَّانِيَةُ: لِنَفْرِضْ أَنَّ: $4^n \equiv 4[6]$ مَهْمَا يَكُنِ الْعَدَدُ $n > 1$، ثُمَّ بَعْدَ أَنْ فَرَضْنَا صِحَّةَ الْعِبَارَةِ هَاتِهِ عَلَيْنَا أَنْ نُبَرْهِنَ أَنَّ: $4^{n+1} \equiv 4[6]$ بِاسْتِعْمَالِ الْفَرَضِ السَّابِقِ:

بِاسْتِعْمَالِ الْفَرَضِ السَّابِقِ: لَدَيْنَا: $4^n \equiv 4[6]$، وَبِضَرْبِ طَرَفَيِ الْمُوَافَقَةِ فِي الْعَدَدِ 4 نَجِدُ أَنَّ:

$4^n \times 4 = 4^{n+1} \equiv 16 \equiv 16 - 2(6) \equiv 16 - 12 \equiv 4[6]$، وَهُوَ الْمَطْلُوبُ يَا صَاحِ!

أَرْجُو أَنَّكَ فَهِمْتَ الْبُرْهَانَ، وَإِلَّا فَاسْتَعِنْ بِاللهِ وَعُدْ مَرَّةً أُخْرَى وَاقْرَأْهُ مِنْ جَدِيدٍ عَلَّ اللهَ يَفْتَحُ لَكَ أَبْوَابَ الْفَهْمِ

اَلسُّؤَالُ الرَّابِعُ:

أ- لِنُبَيِّنْ أَنَّ: $A=\underbrace{\overline{333..330}}_{ab\text{ مَرَّةً}}^{4}=4^{ab}-4$:

سَبَقَ وَأَنْ عَرَفْنَا مَا **نِظَامُ الْعَدِّ**، فَالْعَدَدُ A مَكْتُوبٌ كَمَا تَرَى بِهَذِهِ الطَّرِيقَةِ فِي النِّظَامِ ذِي الْأَسَاسِ 4، فَإِذَنْ يُمْكِنُ كِتَابَتُهُ عَلَى الشَّكْلِ: $3\times4^{ab-1}+3\times4^{ab-2}+3\times4^{ab-3}+\cdots+3\times4^{1}+0\times4^{0}$، مَا يَعْنِي أَنَّ: $A=3(4^{ab-1}+4^{ab-2}+4^{ab-3}+\cdots+4^{1})$، ثُمَّ لَاحِظْ_أُخَيَّ_ أَنَّ مَا بَيْنَ الْقَوْسَيْنِ هُوَ مَجْمُوعُ حُدُودِ مُتَتَالِيَةٍ هَنْدَسِيَّةٍ أَسَاسُهَا الْعَدَدُ 4 وَعَدَدُ حُدُودِهَا الْعَدَدُ $ab-1$، وَمِنْ هَذَا نَجِدُ أَنَّ:

$$A=3(4\times\frac{4^{ab-1}-1}{4-1})=4\times(4^{ab-1}-1)=4^{ab}-4$$

ب- ثُمَّ هَا هُوَ السُّؤَالُ الْأَخِيرُ الَّذِي يَكُونُ عَادَةً مُمَيَّزًا وَيَحْتَاجُ لِإِمْعَانِ نَظَرٍ وَتَرْكِيزٍ، طُلِبَ مِنَّا أَنْ نَتَحَقَّقَ أَنَّ: $A\equiv0[6]$ ثُمَّ بَعْدَهَا أَن نُعَيِّنَ الثُّنَائِيَّاتِ (a,b) الَّتِي تُحَقِّقُ أَنَّ الْعَدَدَ A قَابِلٌ لِلْقِسْمَةِ عَلَى الْعَدَدِ 42:

اَلتَّحَقُّقُ سَهْلٌ، لِأَنَّهُ كَمَا عَلِمْنَا مِنْ جَوَابِ سُؤَالٍ سَابِقٍ أَنَّ $4^{n}\equiv4[6]$ مَهْمَا كَانَ الْعَدَدُ n غَيْرُ الْمَعْدُومِ، وَمِنْهُ نَسْتَنْتِجُ أَنَّ: $A=4^{n}-4\equiv4-4\equiv0[6]$، اَلْآنَ لِنَبحَثْ عَنِ الثُّنَائِيَّاتِ الطَّبِيعِيَّةِ (a,b) حَتَّى يَكُونَ $A\equiv0[42]$: هَلْ لَاحَظْتَ أَنَّ $42=6\times7$، وَحَتَّى يَكُونَ الْعَدَدُ A قَابِلًا لِلْقِسْمَةِ عَلَى الْعَدَدِ 42 فَيَلْزَمُ أَنْ يَكُونَ قَابِلًا لِلْقِسْمَةِ عَلَى الْعَدَدِ 6 وَعَلَى الْعَدَدِ 7، وَبِمَا أَنَّنَا عَلِمْنَا أَنَّ $A\equiv0[6]$ أَيْ أَنَّ الْعَدَدَ A قَابِلٌ لِلْقِسْمَةِ عَلَى الْعَدَدِ 6 عَلَى كُلِّ حَالٍ، فَالْمَطْلُوبُ إِذَنْ أَنْ نَبْحَثَ مَتَى يَكُونُ قَابِلًا لِلْقِسْمَةِ عَلَى الْعَدَدِ 7 أَيْ مَتَى يَكُونُ $A\equiv0[7]$ أَيْ مَتَى يَكُونُ $4^{n}-4\equiv0[7]$ أَيْ: $4^{n}\equiv4[7]$، وَهَكَذا مِنَ الْجَدْوَلِ السَّابِقِ يَتَبَيَّنُ لَنَا أَنَّ الْقِيَمَ الْمَطْلُوبَةَ لِلْعَدَدِ الطَّبِيعِيِّ n هِيَ كُلُّ الْقِيَمِ الطَّبِيعِيَّةِ مِنَ الشَّكْلِ $3k+1$، وَاللهُ تَعَالَى أَعْلَمُ

تَمَّ حَلُّ تَمْرِينِيْ بَاكَالُورِيَّة سنة 2021 وَلِلَّهِ الْحَمْدُ وَالْمِنَّةُ

بَاكَالُورِيَّة سَنَةِ 2020

اَلْمَوْضُوعُ الْأَوَّلُ: وَيَشْتَمِلُ عَلَى أَرْبَعِ أَسْئِلَةٍ، الثَّالِثُ وَ الرَّابِعُ يَنْدَرِجُ تَحْتَهُمَا سُؤَالَانِ فَرْعِيَّانِ: "أ" وَ"ب"، وَالْمَجْمُوعُ سِتُّ أَسْئِلَةٍ جُزْئِيَّةٍ، وَاللهُ الْمُسْتَعَانُ

اَلسُّؤَالُ الْأَوَّلُ: هَيَّا نُثْبِتْ أَنَّ الْعَدَدَيْنِ a وَb أَوَّلِيَّانِ فِيمَا بَيْنَهُمَا، وَسَبَقَ أَنْ عَرَّفْنَا مَا مَعْنَى أَنْ يَكُونَ عَدَدَانِ صَحِيحَانِ أَوَّلِيَّيْنِ فِيمَا بَيْنَهُمَا، وَهُوَ أَلَّا يَكُونَ بَيْنَهُمَا قَوَاسِمُ مُشْتَرَكَةٌ سِوَى الْعَدَدِ 1، وَفِي هَذَا السُّؤَالِ سَأُذَكِّرُكَ بِمُبَرْهَنَةٍ هَامَّةٍ تُدْعَى **مُبَرْهَنَةَ بيزو**:

مُبَرْهَنَةُ بيزو: إِذَا اسْتَطَعْتَ أَنْ تَجِدَ عَدَدَيْنِ صَحِيحَيْنِ α وَβ بِحَيْثُ: $\alpha x+\beta y=1$ فَاعْلَمْ أَنَّ الْعَدَدَيْنِ x وَy أَوَّلِيَّانِ فِيمَا بَيْنَهُمَا

وَلْنَسْتَعْمِلِ الْمُبَرْهَنَةَ فِي سُؤَالِنَا هَذَا وَلْنُحَاوِلْ أَن نَّجِدَ عَدَدَيْنِ صَحِيحَيْنِ α وَβ بِحَيْثُ $\alpha a+\beta b=1$، لَاحِظْ_أُخَيِّ_ أَنَّ: $3a=3(4n+1)=12n+3$ وَ$2b=2(6n+1)=12n+2$، وَهَكَذَا فَإِنَّ:

$3a-2b=1$، فَنَسْتَنْتِجُ أَنَّ الْعَدَدَيْنِ a وَb أَوَّلِيَّانِ فِيمَا بَيْنَهُمَا

اَلسُّؤَالُ الثَّانِي: لِنُبَيِّنْ أَنَّ الْقَاسِمَ الْمُشْتَرَكَ الْأَكْبَرَ لِلْعَدَدَيْنِ a وَb هُوَ قَاسِمٌ لِلْعَدَدِ 5:

لَدَيْنَا: $\alpha=PCGD(a,c)$ كَمَا سُمِّيَ فِي السُّؤَالِ، بِمَا أَنَّ الْعَدَدَ α قَاسِمٌ مُشْتَرَكٌ لِلْعَدَدَيْنِ a وَc فَهُوَ إِذَنْ يَقْسِمُ أَيَّ تَرْكِيبٍ مُمْكِنٍ بَيْنَهُمَا: بِمَعْنَى أَنَّهُ يَقْسِمُ الْمَجْمُوعَ $20a+90b$ عَلَى سَبِيلِ الْمِثَالِ، وَسَمِّهَا إِنْ شِئْتَ **خَاصِّيَّةَ الْقَاسِمِ الْمُشْتَرَكِ**:

خَاصِّيَّةُ الْقَاسِمِ الْمُشْتَرَكِ: إِذَا كَانَ الْعَدَدُ الصَّحِيحُ d يَقْسِمُ الْعَدَدَيْنِ الصَّحِيحَيْنِ x وَy جَمِيعًا فَهُوَ إِذَنْ يَقْسِمُ أَيَّ تَرْكِيبٍ مُمْكِنٍ بَيْنَ الْعَدَدَيْنِx وَy: أَيْ يَقْسِمُ الْعَدَدُ $ax+by$ مَهْمَا كَانَ الْعَدَدَانِ الصَّحِيحَانِ a وَb

بِاسْتِعْمَالِ هَذِهِ الْخَاصِّيَّةِ نَجِدُ أَنَّهُ مَا دَامَ الْعَدَدُ α يَقْسِمُ الْعَدَدَيْنِ a وَc جَمِيعًا فَهُوَ إِذَنْ يَقْسِمُ الْعَدَدَ $4c+(-3)a$، أَيْ أَنَّهُ يَقْسِمُ الْعَدَدَ $4(3n+2)+(-3)(4n+1)$ الَّذِي يُسَاوِي الْعَدَدَ 5، فَنَسْتَنْتِجُ أَنَّ الْعَدَدَ α وَهُوَ الْقَاسِمُ الْمُشْتَرَكُ الْأَكْبَرُ بَيْنَ الْعَدَدَيْنِ a وَc قَاسِمٌ لِلْعَدَدِ 5، إِذَنْ إِمَّا أَنْ يَكُونَ $\alpha=1$ أَوْ $\alpha=5$

وَمَتَى يَكُونُ $\alpha=5$؟ اَلْجَوَابُ: كَذَلِكَ بِاسْتِعْمَالِ الْخَاصِّيَّةِ السَّابِقَةِ الذِّكْرِ، بِمَا أَنَّ الْعَدَدَ α قَاسِمٌ مُشْتَرَكٌ لِلْعَدَدَيْنِ a وَc فَهُوَ إِذَنْ يَقْسِمُ الْفَرْقَ: $3a-2c$، وَمِنْهُ فَهُوَ يَقْسِمُ الْعَدَدَ: $n+4$، فَإِذَا أَرَدْنَا جَعْلَ $\alpha=5$ فَيَجِبُ إِذَنْ أَن يَّكُونَ الْعَدَدُ 5 يَقْسِمُ الْعَدَدَ $n+4$، مَا يَعْنِي أَنَّ $n+4$ يَكُونُ قَابِلًا لِلْقِسْمَةِ عَلَى الْعَدَدِ 5 أَيْ: $n+4\equiv 0[5]$، وَمِنْهُ،

$n\equiv 1[5]$، فَنَسْتَنْتِجُ إِذَنْ أَنَّ الْقِيَمَ الْمَطْلُوبَةَ لِلْعَدَدِ الطَّبِيعِيِّ n حَتَّى يَكُونَ $PCGD(a,c)=5$ هِيَ كُلُّ الْقِيَمِ الطَّبِيعِيَّةِ مِنَ الشَّكْلِ $5k+1$

اَلسُّؤَالُ الثَّالِثُ:

أ- هَيَّا نُبَيِّنْ أَنَّ الْعَدَدَ α يَقْسِمُ الْعَدَدَ β:

بِسُهُولَةٍ، أُنْظُرْ إِلَى الْعَدَدِ α اَلَّذِي هُوَ الْقَاسِمُ الْمُشْتَرَكُ الْأَكْبَرُ بَيْنَ الْعَدَدَيْنِ a وَ c، فَهُوَ إِذَنْ يَقْسِمُ الْعَدَدَ c وَمِنْهُ فَهُوَ يَقْسِمُ الْعَدَدَ bc، فَيَنْتُجُ أَنَّ الْعَدَدَ α يَقْسِمُ الْعَدَدَيْنِ a وَ bc جَمِيعًا، وَهُنَاكَ مُبَرْهَنَةٌ نَحْتَاجُهَا هُنَا:

مُبَرْهَنَةٌ: إِذَا كَانَ الْعَدَدُ n يَقْسِمُ عَدَدَيْنِ a وَ b فَهُوَ إِذَنْ يَقْسِمُ الْقَاسِمَ الْمُشْتَرَكَ الْأَكْبَرَ بَيْنَهُمَا أَيْ يَقْسِمُ الْعَدَدَ $PGCD(a,b)$

بِاسْتِعْمَالِ هَذِهِ الْمُبَرْهَنَةِ هَلِ اسْتَنْتَجْتَ أَنَّ الْعَدَدَ α يَقْسِمُ إِذَنِ الْعَدَدَ $PGCD(a,bc)$ وَهُوَ الْعَدَدُ β

ب- لِنُبَرْهِنِ الْآنَ أَنَّ الْعَدَدَيْنِ β وَ b أَوَّلِيَّانِ فِيمَا بَيْنَهُمَا:

أَرَى مِنَ الْحَسَنِ أَنْ أُذَكِّرَكَ بِمُبَرْهَنَةٍ تُنَاسِبُ مَسْأَلَتَنَا هَاتِهِ:

مُبَرْهَنَةٌ: إِذَا كَانَ الْعَدَدُ الصَّحِيحُ n أَوَّلِيًّا مَعَ عَدَدٍ صَحِيحٍ m فَإِنَّهُ كَذَلِكَ أَوَّلِيٌّ مَعَ جَمِيعِ قَوَاسِمِ الْعَدَدِ m !

وَهَكَذَا، وَبِسُهُولَةٍ وَيُسْرٍ، لَاحِظْ مِنْ جَوَابِ السُّؤَالِ الْأَوَّلِ أَنَّ الْعَدَدَ b أَوَّلِيٌّ مَعَ الْعَدَدِ a فَهُوَ إِذَنْ أَوَّلِيٌّ مَعَ جَمِيعِ قَوَاسِمِهِ، وَنَحْنُ نَعْلَمُ أَنَّ الْعَدَدَ β قَاسِمٌ لِلْعَدَدِ a فَالْعَدَدُ β إِذَنْ أَوَّلِيٌّ مَعَ الْعَدَدِ b

اَلْآنَ، لَاحِظْ وَرَكِّزْ، وَدَعْنِي أُنْعِشْ ذَاكِرَتَكَ بِمُبَرْهَنَةٍ مَرَّتْ سَابِقًا مَعَنَا:

مُبَرْهَنَةٌ: إِذَا كَانَ الْعَدَدُ n يَقْسِمُ الْجُدَاءَ ab، وَهُوَ أَوَّلِيٌّ مَعَ الْعَدَدِ a، فَإِنَّ الْعَدَدَ n حَتْمًا يَقْسِمُ الْعَدَدَ b

بِمَا أَنَّ الْعَدَدَ β يَقْسِمُ الْجُدَاءَ bc وَهُوَ أَوَّلِيٌّ مَعَ الْعَدَدِ b، فَهُوَ إِذَنْ يَقْسِمُ الْعَدَدَ c، فَيَنْتُجُ أَنَّ الْعَدَدَ β يَقْسِمُ الْعَدَدَيْنِ a وَ c جَمِيعًا، فَهُوَ إِذَنْ يَقْسِمُ $PGCD(a,c)$ اَلَّذِي هُوَ الْعَدَدُ α، فَيَنْتُجُ عَنْ هَذَا كُلِّهِ أَنَّ الْعَدَدَ β يَقْسِمُ الْعَدَدَ α وَالْعَدَدَ α يَقْسِمُ الْعَدَدَ β، وَهُنَاكَ مُبَرْهَنَةٌ تَقُولُ:

مُبَرْهَنَةٌ: إِذَا كَانَ الْعَدَدُ n يَقْسِمُ الْعَدَدَ m، وَالْعَدَدُ m يَقْسِمُ الْعَدَدَ n فَالْعَدَدَانِ n وَ m مُتَسَاوِيَانِ

وَهَكَذَا، بِمَا أَنَّ الْعَدَدَ β يَقْسِمُ الْعَدَدَ α وَالْعَدَدَ α يَقْسِمُ الْعَدَدَ β، فَإِنَّ $\alpha = \beta$

اَلسُّؤَالُ الرَّابِعُ:

أ- هَيَّا نُبَيِّنْ أَنَّ كُلًّا مِنَ الْعَدَدَيْنِ A وَ B مُضَاعَفٌ لِلْعَدَدِ $n-1$:

لَاحِظْ مَعِي أَخِي الطَّالِبُ أَنَّ الْعَدَدَ 1 هُوَ حَلٌّ ظَاهِرٌ لِلْمُعَادَلَتَيْنِ $A=0$ وَ $B=0$، وَمِنْهُ، يُمْكِنُ كِتَابَةُ كُلٍّ مِنْهُمَا مِنَ الشَّكْلِ $(n-1)Q(n)$ بِحَيْثُ $Q(n)$ هُوَ كَثِيرُ حُدُودٍ، وَمِنْهُ فَكُلٌّ مِنَ الْعَدَدَيْنِ A وَ B مُضَاعَفٌ لِلْعَدَدِ $(n-1)$

ب- فِي هَذَا السُّؤَالِ الْأَخِيرِ، طُلِبَ مِنْكَ_أَخِي الطَّالِبُ_ أَنْ تَكْتُبَ عِبَارَةَ الْعَدَدِ $PGCD(A,B)$ بِدَلَالَةِ الْعَدَدِ الطَّبِيعِيِّ n، حَسَبَ قِيَمِ الْعَدَدِ α:

اَلْآنَ لَاحِظْ مَعِيَ أَنَّ $A=(n-1)a$ وَ $B=(n-1)bc$، ثُمَّ هَاكَ هَاتِهِ الْخَاصِّيَّةَ الْمُفِيدَةَ:

خَاصِّيَّةٌ: إِذَا كَانَ الْعَدَدُ d هُوَ الْقَاسِمَ الْمُشْتَرَكَ الْأَكْبَرَ بَيْنَ الْعَدَدَيْنِ a وَ b، فَإِنَّ الْقَاسِمَ الْمُشْتَرَكَ الْأَكْبَرَ بَيْنَ الْعَدَدَيْنِ ka وَ kb هُوَ الْعَدَدُ kd، بِاخْتِصَارٍ: $PGCD(ka,kb)=kPGCD(a,b)$

هَلَّا اسْتَعْمَلْتَ هَذِهِ الْخَاصِّيَّةَ لِتَسْتَنْتِجَ أَنَّ:

$PGCD((n-1)a,(n-1)bc)=(n-1)PGCD(a,bc)$، وَمَعَ عِلْمِنَا أَنَّ:

$PGCD(a,bc)=\beta=\alpha$ وَأَنَّ $PGCD((n-1)a,(n-1)bc)=d$ يَنْتُجُ أَنَّ:

$d=(n-1)\alpha$، فَالْعَدَدُ d إِذَنْ تَتَعَلَّقُ قِيمَتُهُ بِقِيمَةِ الْعَدَدِ α، فَنَكْتُبُ:

$d=n-1$ إِذَا كَانَ $\alpha=1$، وَ $d=5n-5$ إِذَا كَانَ $\alpha=5$ وَاللهُ تَعَالَى أَعْلَمُ

تَمَّ حَلُّ تَمْرِينِ الْمَوْضُوعِ الْأَوَّلِ

اَلْمَوْضُوعُ الثَّانِي: وَيَشْتَمِلُ عَلَى أَرْبَعِ أَسْئِلَةٍ، الثَّانِي وَ الرَّابِعُ يَنْدَرِجُ تَحْتَهُمَا سُؤَالَانِ فَرْعِيَّانِ: "أ" وَ"ب"، وَالْمَجْمُوعُ سِتُّ أَسْئِلَةٍ جُزْئِيَّةٍ، واللهُ الْمُوَفِّقُ

اَلسُّؤَالُ الْأَوَّلُ: هَذَا السُّؤَالُ النَّمَطِيُّ يَتَكَرَّرُ كَثِيرًا وَسَبَقَ أَنْ شَرَحْنَا طَرِيقَتَيْنِ لِحَلِّ هَذَا النَّوْعِ مِنَ الْمُعَادَلَاتِ وَفِي الْإِعَادَةِ إِفَادَةٌ:

لَدَيْنَا الْمُعَادَلَةُ $3x - 5y = 2$، لَاحِظْ أَنَّ: $3x = 5y + 2$، وَمِنْهُ: $3x \equiv 2[5]$، وَمِنْهُ كَذَلِكَ:

$3x \equiv 2 + 5 + 5 \equiv 12[5]$، وَبِقِسْمَةِ طَرَفَيِ الْمُوَافَقَةِ عَلَى الْعَدَدِ 3 نَجِدُ أَنَّ $x \equiv 4[5]$، وَهَكَذَا، يَنْتُجُ أَنَّ الْعَدَدَ الصَّحِيحَ x مِنَ الشَّكْلِ $5m + 4$، وَبِالتَّعْوِيضِ فِي الْمُعَادَلَةِ سَتَجِدُ أَنَّ الْعَدَدَ y هُوَ مِنَ الشَّكْلِ $3m + 2$، فَنَسْتَنْتِجُ إِذَنْ أَنَّ حُلُولَ الْمُعَادَلَةِ هِيَ جَمِيعُ الثُّنَائِيَّاتِ الصَّحِيحَةِ مِنَ الشَّكْلِ: $(5m + 4, 3m + 2)$

اَلسُّؤَالُ الثَّانِي:

أ- وَهَذَا أَيْضًا سُؤَالٌ لَا يَكَادُ يَخْلُو مِنْهُ تَمْرِينٌ فِي الْقِسْمَةِ، فَلْنَدْرُسْ بَوَاقِيَ قِسْمَةِ الْعَدَدِ الطَّبِيعِيِّ 9^n عَلَى الْعَدَدِ 7:

اَلطَّرِيقَةُ مَعْرُوفَةٌ وَقَدْ شَرَحْنَاهَا فِي مَوَاضِيعَ سَابِقَةٍ بِمَا فِيهِ الْكِفَايَةُ وَلِلَّهِ الْحَمْدُ، وَهَاكَ الْخُلَاصَةَ:

قِيمَةُ الْعَدَدِ n	$3k$	$3k + 1$	$3k + 2$
اَلْبَاقِي عَلَى 7	1	2	4

ب- وهَذَا سُؤَالٌ مِن نَّفْسِ النَّوْعِ، فَنُجِيبُ كَالْعَادَةِ بِجَدْوَلٍ لَطِيفٍ:

قِيمَةُ الْعَدَدِ n	$5k$	$5k + 1$	$5k + 2$	$5k + 3$	$5k + 4$
اَلْبَاقِي عَلَى 11	1	4	5	9	3

اَلسُّؤَالُ الثَّالِثُ: هَيَّا نُعَيِّنِ الْأَعْدَادَ الطَّبِيعِيَّةَ n اَلَّتِي تُحَقِّقُ أَنَّ $14 \times 4^n + 11 \times 9^n - 4 \equiv 0[77]$:

إِلَيْكَ خَاصِّيَّةً تُسَاعِدُكَ فِي حَلِّ هَذَا السُّؤَالِ:

خَاصِّيَّةٌ: إِذَا كَانَ الْعَدَدُ a قَابِلًا لِلْقِسْمَةِ عَلَى الْعَدَدِ n وَقَابِلًا لِلْقِسْمَةِ كَذَلِكَ عَلَى الْعَدَدِ m، فَإِنَّ الْعَدَدَ a يَكُونُ قَابِلًا لِلْقِسْمَةِ عَلَى جُدَائِهِمَا nm، وَالْعَكْسُ صَحِيحٌ، بِعِبَارَةٍ أَحْصَرَ: إِذَا كَانَ $a \equiv 0[n]$ وَ $a \equiv 0[m]$، فَهَذَا يُكَافِئُ أَنَّ $a \equiv 0[nm]$

بِاسْتِعْمَالِ الْخَاصِّيَّةِ، هَلِ اسْتَنْتَجْتَ أَنَّهُ حَتَّى يَكُونَ $14 \times 4^n + 11 \times 9^n - 4 \equiv 0[77]$ فَيَجِبُ أَنْ يَكُونَ $\begin{cases} 14 \times 4^n + 11 \times 9^n - 4 \equiv 0[7] \\ 14 \times 4^n + 11 \times 9^n - 4 \equiv 0[11] \end{cases}$

اَلْآنَ مَاذَا؟ اَلْآنَ لَاحِظْ مَعِي فِي السَّطْرِ الْأَوَّلِ أَنَّ $14 \times 4^n = 7 \times (2 \times 4^n) \equiv 0[7]$، وَكَذَلِكَ فِي الْجُمْلَةِ الثَّانِيَة لَاحِظْ أَنَّ $11 \times 9^n \equiv 0[11]$، وَهَكَذَا:

فَحَتَّى يَكُونَ $14 \times 4^n + 11 \times 9^n - 4 \equiv 0[77]$ فَيَجِبُ أَنْ يَكُونَ:

$\begin{cases} 11 \times 9^n - 4 \equiv 0[7] \\ 14 \times 4^n - 4 \equiv 0[11] \end{cases}$، أَيْ: $\begin{cases} 11 \times 9^n \equiv 4 \equiv 11[7] \\ 14 \times 4^n \equiv 4 \equiv -7[11] \end{cases}$، وَبِقِسْمَةِ طَرَفَيِ الْمُوَافَقَةِ عَلَى الْعَدَدِ 11 فِي السَّطْرِ الْأَوَّلِ نَجِدُ أَنَّ $9^n \equiv 1[7]$، وَمِنْهُ وَمِنَ الْجَدْوَلِ يَنْتُجُ أَنَّ الْعَدَدَ n مِنَ الشَّكْلِ $3k$، وَبِقِسْمَةِ طَرَفَيِ الْمُوَافَقَةِ عَلَى الْعَدَدِ 7 نَجِدُ أَنَّ $2 \times 4^n \equiv -1 \equiv 10[11]$، ثُمَّ نَقْسِمُ كَذَلِكَ عَلَى الْعَدَدِ 2 لِنَجِدَ أَنَّ $4^n \equiv 5[11]$، وَمِنْهُ وَمِنَ الْجَدْوَلِ نَسْتَنْتِجُ أَنَّ الْعَدَدَ n مِنَ الشَّكْلِ $5t + 2$، أَنَّ الْعَدَدَ الطَّبِيعِيُّ n مِنَ الشَّكْلِ $3k$ وَمِنَ الشَّكْلِ $5t + 2$، فَيَلْزَمُ مِنْهُ أَنْ يَكُونَ $5t + 2 = 3k$ أي $3k - 5t = 2$ وَهِيَ مُعَادَلَةٌ قَدْ عَرَفْنَا حُلُولَهَا الَّتِي هِيَ كُلُّ الثُّنَائِيَّاتِ مِنَ الشَّكْلِ $(5m + 4, 3m + 2)$ مِمَّا يَعْنِي أَنَّ:

$n = 3k = 3(3m + 2)$، وَمِنْهُ: $n = 3k = 3(5m + 4) = 15m + 12$،

اَلسُّؤَالُ الرَّابِعُ:

أ- هَيَّا بِنَا نَحْسُبِ الْمَجْمُوعَ S_n:

لَدَيْنَا هُنَا الْمُتَتَالِيَةُ (u_n) اَلَّتِي عِبَارَتُهَا: $u_n = 3 \times 4^n + 4 \times 9^n$، وَالْمَجْمُوعُ S_n هُوَ فِي الْحَقِيقَةِ مَجْمُوعُ حُدُودِ الْمُتَتَالِيَةِ (u_n) مِنَ الْحَدِّ u_1 إِلَى الْحَدِّ u_{15n}، وَهَكَذَا:

$$S_n = [(3 \times 4^1) + (4 \times 9^1)] \dots + [(3 \times 4^{15n}) + (4 \times 9^{15n})]$$

وَبِمَا أَنَّ الْجَمْعَ تَبْدِيلِيٌّ فَإِنَّ:

$$S_n = [(3 \times 4^1) + \dots + (3 \times 4^{15n})] + [(4 \times 9^1) + \dots + (4 \times 9^{15n})]$$

وَمِنْهُ:

$$S_n = 3(4^1 + \dots + 4^{15n}) + 4(9^1 + \dots + 9^{15n})$$

وَمَا بَيْنَ الْقَوْسَيْنِ مِنْ جِهَةِ الشِّمَالِ هُوَ مَجْمُوعُ حُدُودِ مُتَتَالِيَةٍ هَنْدَسِيَّةٍ أَسَاسُهَا الْعَدَدُ 4 وَحَدُّهَا الْأَوَّلُ الْعَدَدُ 4، وَيُحْسَبُ كَمَا ذَكَرْنَاهُ فِي تَمْرِينٍ سَابِقٍ بِالْقَانُونِ الْمَعْهُودِ وَنَاتِجُهُ:

$$4^1 + \dots + 4^{15n} = 4\frac{4^{15n} - 1}{3}$$

وَأَمَّا بَيْنَ الْقَوْسَيْنِ مِنْ جِهَةِ الْيَمِينِ فَهُوَ مَجْمُوعُ حُدُودِ مُتَتَالِيَةٍ هَنْدَسِيَّةٍ أَسَاسُهَا الْعَدَدُ 9 وَحَدُّهَا الْأَوَّلُ الْعَدَدُ 9، وَنَاتِجُهُ:

$$9^1 + \dots + 9^n = 9\frac{9^{15n} - 1}{8}$$

فَيَنْتُجُ إِذَنْ أَنَّ:

$$S_n = 3 \times 4\frac{4^{15n}-1}{3} + 4 \times 9\frac{9^{15n}-1}{8} = 4(4^{15n}-1) + 9\frac{9^{15n}-1}{2}$$

ب- اَلْآنَ هَيَّا نُثْبِتْ أَنَّ الْعَدَدَ S_n مُضَاعَفٌ لِلْعَدَدِ 77:

لِكَيْ نُثْبِتَ أَنَّ الْعَدَدَ S_n مُضَاعَفٌ لِلْعَدَدِ 77 فَيَجِبُ أَن نُّثْبِتَ أَنَّهُ قَابِلٌ لِلْقِسْمَةِ عَلَى 7 وَعَلَى 11، وَلِهَذَا أَنَا أَدْعُوكَ لِأَنْ تُلَاحِظَ أَنَّ $4^{15n} - 1 \equiv 0[11]$ وَمِنْهُ:

$$S_n = 4(4^{15n}-1) + 9\frac{9^{15n}-1}{2} \equiv 9\frac{9^{15n}-1}{2}[11]$$

وَبِدِرَاسَةِ بَوَاقِي قِسْمَةِ الْعَدَدِ 9^n عَلَى 11 نَجِدُ أَنَّ $9^{15n} \equiv 1[11]$، وَمِنْهُ:

$$S_n = 4(4^{15n}-1) + 9\frac{9^{15n}-1}{2} \equiv 9\frac{9^{15n}-1}{2} \equiv 0[11]$$

ثُمَّ بِنَفْسِ الطَّرِيقَةِ: لَاحِظْ أَنَّ: $9^{15n} - 1 \equiv 0[7]$، وَمِنْهُ:

$$S_n = 4(4^{15n}-1) + 9\frac{9^{15n}-1}{2} \equiv 4(4^{15n}-1)[7]$$

وَبِدِرَاسَةِ بَوَاقِي قِسْمَةِ الْعَدَدِ 4^n عَلَى 7 نَجِدُ أَنَّ $4^{15n} \equiv 1[11]$، وَمِنْهُ:

$$S_n = 4(4^{15n}-1) + 9\frac{9^{15n}-1}{2} \equiv 4(4^{15n}-1) \equiv 0[7]$$

فَنَسْتَنْتِجُ إِذَنْ أَنَّ الْعَدَدَ S_n مُضَاعَفٌ لِلْعَدَدِ 77، وَاللهُ تَعَالَى أَعْلَمُ

تَمَّ حَلُّ تَمْرِينِ بَاكَالُورِيَّةْ سنة 2020 وَلِلَّهِ الْحَمْدُ أَوَّلًا وَآخِرًا

تَمَّتْ بِتَوْفِيقِ اللهِ عَزَّ وَجَلَّ كِتَابَةُ حُلُولِ أَسْئِلَةِ تَمْرِينِ الْحِسَابِ لِبَاكَالُورِيَّةْ سَنَةِ 2020 لِشُعْبَةِ الرِّيَاضِيَاتِ، وَذَلِكَ بِوَاسِطَةِ بَرْمَجِيَّةِ "الوارد" (word)، لَيْلَةَ الْإِثْنَيْنِ السَّابِعِ وَالْعِشْرِينَ مِنْ شَهْرِ جُمَادَى الثَّانِي عَامَ خَمْسٍ وَأَرْبَعِينَ وَأَرْبَعِمِئَةٍ وَأَلْفٍ هِجْرِيَّةً، اَلْمُوَافِقِ لِلَيْلَةِ التَّاسِعِ مِنْ يَنَايِرَ مِنْ سَنَةِ 2024 بِالتَّقْوِيمِ الْمِيلَادِيِّ.

إِنْ أَصَبْتُ فَمِنَ اللهِ وَإِنْ أَخْطَأْتُ فَمِن نَّفْسِي وَمِنَ الشَّيْطَانِ، ﴿**وَمَا تَوْفِيقِي إِلَّا بِاللهِ عَلَيْهِ تَوَكَّلْتُ وَإِلَيْهِ أُنِيبُ**﴾

﴿**رَبَّنَا اغْفِرْ لِي وَلِوَالِدَيَّ وَلِلْمُؤْمِنِينَ يَوْمَ يَقُومُ الْحِسَابُ**﴾

كَتَبَهُ الْعَبْدُ الْفَقِيرُ إِلَى اللهِ: علي سماعيل، فِي التَّارِيخِ الْمَذْكُورِ أَعْلَاهُ

اَلْمُصْطَلَحَاتُ وَالتَّعْرِيفَاتُ وَالْمُبَرْهَنَاتُ وَالْخَوَاصُّ وَالطَّرَائِقُ

مُبَرْهَنَةُ غوص: الصَّفْحَةُ رَقْمُ 1

تعْرِيفُ الْقِيمَةُ الْمُطْلَقَةُ: اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 2

تَعْرِيفُ نِظَامِ الْعَدِّ: اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 2

تَعْرِيفُ الْعَدَدِ الْأَوَّلِيّ: اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 3

طَرِيقَةُ تَحْلِيلِ عَدَدٍ صَحِيحٍ إِلَى جُدَاءِ عَوَامِلَ أَوَّلِيَّةٍ: اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 3

طَرِيقَةُ الْبَحْثِ عَنْ بَوَاقِي قِسْمَةِ الْعَدَدِ a^n عَلَى عَدَدٍ مَا b: اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 5

قَانُونُ مَجْمُوعِ حُدُودٍ مُتَتَالِيَةٍ هَنْدَسِيَّةٍ: اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 6

قَانُونُ مَجْمُوعِ الْأَعْدَادِ الطَّبِيعِيَّةِ مِنَ الصِّفْرِ إِلَى الْعَدَدِ n: اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 7

مُبَرْهَنَةٌ مَفَادُهَا أَنَّ $PGCD(A,B) = PGCD(B,R_{A/B})$، بِحَيْثُ $R_{A/B}$ هُوَ بَاقِي قِسْمَةِ الْعَدَدِ A عَلَى الْعَدَدِ B: اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 12

طَرِيقَةُ إِجْرَاءِ الْقِسْمَةِ الْإِقْلِيدِيَّةِ لِكَثِيرِ حُدُودٍ عَلَى كَثِيرِ حُدُودٍ أَقَلَّ دَرَجَةً مِنْهُ: اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 12

طَرِيقَةُ حَلِّ مُعَادَلَةٍ مِنَ الشَّكْلِ $ax + by = c$ بِاسْتِعْمَالِ طَرِيقَةِ الْحَلِّ الْخَاصِّ: اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 18

تَعْرِيفُ الْبُرْهَانِ بِالتَّرَاجُعِ: اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 19

طَرِيقَةُ الْبُرْهَانِ بِالتَّرَاجُعِ: اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 19

تَعْرِيفُ مُبَرْهَنَةِ بيزو: اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 21

خَاصِّيَّةُ الْقَاسِمِ الْمُشْتَرَكِ أَنَّهُ إِذَا كَانَ الْعَدَدُ d يَقْسِمُ x وَ y فَإِنَّهُ إِذَنْ يَقْسِمُ التَّرْكِيبَ $\alpha x + \beta y$: اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 21

مُبَرْهَنَةٌ مَفَادُهَا أَنَّهُ إِذَا كَانَ d يَقْسِمُ x وَ y فَإِنَّهُ يَقْسِمُ $PGCD(x,y)$: اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 22

مُبَرْهَنَةٌ أَنَّهُ إِذَا كَانَ الْعَدَدُ n أَوَّلِيًّا مَعَ عَدَدٍ m فَهُوَ أَوَّلِيٌّ مَعَ جَمِيعِ قَوَاسِمِ الْعَدَدِ m: اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 22

مُبَرْهَنَةٌ إِذَا كَانَ الْعَدَدُ n يَقْسِمُ الْجُدَاءَ ab وَهُوَ أَوَّلِيٌّ مَعَ الْعَدَدِ a، فَهُوَ إِذَنْ حَتْمًا يَقْسِمُ الْعَدَدِ b: اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 22

مُبَرْهَنَةٌ إِذَا كَانَ الْعَدَدَانِ n وَ m كُلٌّ مِنْهُمَا يَقْسِمُ الْآخَرَ فَهُمَا مُتَسَاوِيَانِ: اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 22

خَاصِّيَّةٌ مَفَادُهَا أَنَّ $PGCD(ka,kb) = kPGCD(a,b)$: اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 23

خَاصِّيَّةٌ إِذَا كَانَ عَدَدٌ n قَابِلًا لِلْقِسْمَةِ عَلَى عَدَدَيْنِ n وَ m فَإِنَّهُ قَابِلٌ لِلْقِسْمَةِ عَلَى جُدَائِهِمَا nm، وَالْعَكْسُ صَحِيحٌ: اَلصَّفْحَةُ رَقْمُ 24

وَصَلَّى اللهُ وَسَلَّمَ وَبَارَكَ عَلَى نَبِيِّنَا مُحَمَّدٍ وَعَلَى آلِهِ وَأَصْحَابِهِ وَأَتْبَاعِهِ إِلَى يَوْمِ الدِّينِ

كَتَبَهُ: "علي سماعيل"، الطَّالِبُ بِالْقُطْبِ الْجَامِعِيِّ الْجَدِيدِ لِمَدِينَةِ "سيدي عبد الله"، بِالْمَدْرَسَةِ الْوَطَنِيَّةِ الْعُلْيَا فِي الرِّيَاضِيَاتِ، مَسَاءَ يَوْمِ الْإِثْنَيْنِ السَّابِعِ وَالْعِشْرِينَ مِنْ شَهْرِ جُمَادَى الْآخِرِ مِنْ سَنَةِ خَمْسٍ وَأَرْبَعِينَ وَأَرْبَعِمِئَةٍ وَأَلْفٍ مِنْ هِجْرَةِ رَسُولِ اللهِ صَلَّى اللهُ عَلَيْهِ وَسَلَّمَ، اَلْمُوَافِقِ لِلتَّاسِعِ مِنْ يَنَايِر مِنْ سَنَةِ 2024م، وَالْحَمْدُ لِلَّهِ أَوَّلًا وَآخِرًا