الإستـــــــدلال بالتـــــــــراجع MEBARKI2016

$P(n)$ خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي n ، n_0 عدد طبيعي .
للبرهان عن صحة الخاصية $P(n)$ من اجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 يكفي أن :
1. التأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$ صحيحة .
2. نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n)$ صحيحة (فرضية التراجع) ونبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$ صحيحة

$P(n_0)$	إذا كانت $P(n)$	فإن	$P(n+1)$
صحيحة	صحيحة	$\Leftarrow$	صحيحة

المرحلةالأولـــى — المرحلة الثانيـــــــة

حل تمرين حول الاستدلال بالتراجع MEBARKI 2016

التمرين :

- برهن بالتراجع عن الخواص الآتية :

1. من أجل كل عدد طبيعي n : $0+1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{3n}-1$ يقبل القسمة على 7
3. من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $2^n \geq n$
4. من كل عدد طبيعي n اكبر من أو يساوي 2 : $5^n \geq 4^n+3^n$
5. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=2u_n+1 \end{cases}$
   - أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=2^n-1$

الحـــل:

1)- إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0+1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. نرمز لهذه الخاصية $p(n)$

المرحلة الأولى:

من أجل $n=0$: لدينا الطرف الأول $=0$ و الطرف الثاني $=\dfrac{0(0+1)}{2}=0$.
نلاحظ أن : الطرف الأول = الطرف الثاني .ومنه الخاصية الإبتدائية صحيحة .

المرحلة الثانية:

نفرض أن الخاصية $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي : $0+1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

- نبرهن صحة الخاصية $p(n+1)$ من أجل $n+1$ أي : $0+1+2+...+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

لدينا : $0+1+2+...+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$ لأن $0+1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ حسب فرضية التراجع ومنه : $0+1+2+...+n+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$

إذن نستنتج أن الخاصية $p(n+1)$ صحيحة .

الخلاصة : من اجل كل عدد طبيعي n : $0+1+2+.......+n=\frac{n(n+1)}{2}$

2)- إثبات من أجل كل عدد طبيعي n : $2^{3n}-1$ يقبل القسمة على 7. نرمز لهذه الخاصية $p(n)$

المرحلة الأولى:

من أجل $n=0$:

لدينا $2^{3(0)}-1=2^0-1=1-1=0$ ونعلم أن 0 يقبل القسمة على 7ومنه الخاصية الإبتدائية صحيحة .

المرحلة الثانية:

نفرض أن الخاصية $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $2^{3n}-1$ يقبل القسمة على 7 معناه يوجد طبيعي k بحيث $2^{3n}-1=7k$

- نبرهن صحة الخاصية $p(n+1)$ من أجل $n+1$ أي : $2^{3(n+1)}-1$ يقبل القسمة على7 أي هل يوجد عدد طبيعي k' بحيث $2^{3(n+1)}-1=7k'$

لدينا : $2^{3(n+1)}-1=2^{3n+3}-1=2^{3n}\times 2^3-1=2^{3n}\times 8-1$ ونعلم أن $8=7+1$ و منه :

$2^{3(n+1)}-1=2^{3n}\times(7+1)-1=2^{3n}\times 7+2^{3n}\times 1-1=2^{3n}\times 7+2^{3n}-1$ ولدينا حسب فرضية التراجع أن :

$2^{3n}-1=7k$ ومنه $2^{3(n+1)}-1=2^{3n}\times 7+7k=7(2^{3n}+k)$ بما أن 2^{3n} و k عددان طبيعيان فإن $k'=2^{3n}+k$ عدد طبيعي . في الأخير وجدنا عدد طبيعي k' بحيث $2^{3(n+1)}-1=7k'$ ومنه $2^{3(n+1)}-1$ يقبل القسمة على7 إذن نستنتج أن الخاصية $p(n+1)$ صحيحة .

الخلاصة: من اجل كل عدد طبيعي n : $2^{3n}-1$ يقبل القسمة على 7

3) - إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $2^n \geq n$ نرمز لهذه الخاصية $p(n)$

المرحلة الأولى:

من أجل $n=1$: لدينا $2^{(1)}=2\geq 1$ ومنه الخاصية الإبتدائية صحيحة .

المرحلة الثانية:

نفرض أن الخاصية $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $2^n \geq n$

- نبرهن صحة الخاصية $p(n+1)$ من أجل $n+1$ أي : $2^{n+1}\geq n+1$

بما أن حسب فرضية التراجع $2^n \geq n$ فإن $2\times 2^n \geq 2\times n$ و بما أن $n\geq 1$ فإن $n+n\geq n+1$ أي $2n\geq n+1$ وعليه $2\times 2^n \geq 2n\geq n+1$ في الأخير نجد أن $2^{n+1}\geq n+1$ إذن نستنتج أن الخاصية $p(n+1)$ صحيحة .

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $2^n \geq n$

4)- إثبات أنه من كل عدد طبيعي n اكبر من أو يساوي 2 : $5^n \geq 4^n+3^n$ نرمز لهذه الخاصية $p(n)$

المرحلة الأولى:

من أجل $n=2$: لدينا $5^{(2)}=25$ و $4^{(2)}+3^{(2)}=16+9=25$ وبما أن $25\geq 25$ فإن : $5^{(2)}\geq 4^{(2)}+3^{(2)}$ ومنه الخاصية الإبتدائية صحيحة .

المرحلة الثانية:

نفرض أن الخاصية $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $5^n \geq 4^n+3^n$

- نبرهن صحة الخاصية $p(n+1)$ من أجل $n+1$ أي : $5^{n+1}\geq 4^{n+1}+3^{n+1}$

بما أن حسب فرضية التراجع $5^n \geq 4^n+3^n$ فإن : $5^n\times 5\geq (4^n+3^n)\times 5$ ومنه $5^{n+1}\geq 4^n\times 5+3^n\times 5$

ونعلم ان $5=2+3=4+1$ ومنه $5^{n+1}\geq 4^n(4+1)+3^n(2+3)$

أي $5^{n+1}\geq 4^n\times 4+4^n\times 1+3^n\times 2+3^n\times 3$ ومنه : $5^{n+1}\geq 4^{n+1}+3^{n+1}+4^n+2\times 3^n$

وبما أن : $4^n+2\times 3^n\geq 0$ فإن $5^{n+1}\geq 4^{n+1}+3^{n+1}+4^n+2\times 3^n\geq 4^{n+1}+3^{n+1}$

ومنه نستنتج أن: $5^{n+1}\geq 4^{n+1}+3^{n+1}$ أي أن الخاصية $p(n+1)$ صحيحة .

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n اكبر من أو يساوي 2 : $5^n \geq 4^n+3^n$

5)- لدينا المتتالية (u_n) معرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=2u_n+1 \end{cases}$

- إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=2^n-1$ نرمز لهذه الخاصية $p(n)$

المرحلة الأولى:

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=0=1-1=2^{(0)}-1$ ومنه الخاصية الإبتدائية صحيحة .

المرحلة الثانية:

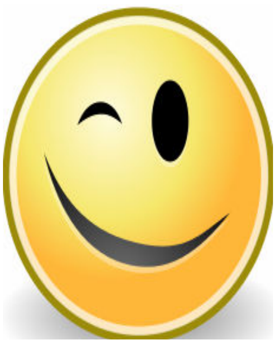
نفرض أن الخاصية $p(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n أي $u_n=2^n-1$

- نبرهن صحة الخاصية $p(n+1)$ من أجل $n+1$ أي : $u_{n+1}=2^{n+1}-1$

بما أن حسب فرضية التراجع $u_n=2^n-1$ ومنه $2\times u_n=2\times(2^n-1)$ أي $2u_n=2\times2^n-2\times1$ ومنه $2u_n+1=2^{n+1}-2+1=2^{n+1}-1$ وبما أن $u_{n+1}=2u_n+1$ (حسب تعريف المتتالية) ومنه $u_{n+1}=2^{n+1}-1$ أي أن الخاصية $p(n+1)$ صحيحة .

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=2^n-1$

MEBARKI2016



انتظروا الجديد