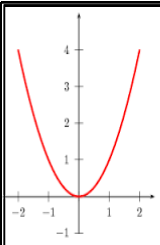

الأستاذ عبد الحميد بوقطوف

05 56 24 69 06

تخطيط... التزام... نجاح

هذه التمارين مقترحة من دورات البكالوريا من 2008 إلى 2015

التمرين 1: دورة جوان 2008 – الموضوع الأول

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - (1+2i)z - 1 + i = 0$

نرمز للحلين بـ z_1 و z_2 حيث: $|z_1| < |z_2|$

- بين أن $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2008}$ عدد حقيقي.

2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. لتكن النقط A، B، C، نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب: 1، z_1، z_2.

ليكن Z العدد المركب حيث: $Z = \frac{z_2 - 1}{z_1 - 1}$

أ- انطلاقا من التعريف: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ و من الخاصية: $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2}$

برهن أن: $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$ وأن: $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$ حيث: θ، θ_1، θ_2، أعداد حقيقية.

ب- أكتب Z على الشكل الأسي.

جـ- أكتب Z على الشكل المثلثي، واستنتج أن النقطة C هي صورة النقطة B بتشابه مباشر مركزه A، يطلب تعيين زاويته ونسبته.

التمرين 2: دورة جوان 2008 – الموضوع الثاني

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية: $z^2 + iz - 2 - 6i = 0$

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، النقطتين A و B اللتين لاحقتاهما z_A و z_B على الترتيب، حيث: $z_A = 2 + i$ و $z_B = -2 - 2i$

- عين z_ω لاحقة النقطة ω مركز الدائرة (Γ) ذات القطر $[AB]$.

3) لتكن النقطة C ذات اللاحقة z_C حيث: $z_C = \frac{4-i}{1+i}$

- أكتب z_C على الشكل الجبري، ثم أثبت أن النقطة C تنتمي إلى الدائرة (Γ).

4) أ- برهن أن عبارة التشابه المباشر S الذي مركزه $M_0(Z_0)$ ونسبته k $(k > 0)$ وزاويته θ والذي يرفق بكل نقطة $M(Z)$ النقطة $M'(Z')$ هي: $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$

ب- تطبيق: عين الطبيعة والعناصر المميزة للتحويل S المعرف بـ: $z' - \frac{1}{2}i = 2e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z + \frac{1}{2}i\right)$

التمرين 3: دورة جوان 2009 – الموضوع الأول

$P(Z)$ كثير حدود حيث: $P(Z) = (Z - 1 - i)(Z^2 - 2Z + 4)$ و Z عدد مركب.

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(Z) = 0$

2) نضع: $Z_1 = 1 + i$ و $Z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

أ- أكتب Z_1 و Z_2 على الشكل الأسي.

ب- أكتب $\frac{Z_1}{Z_2}$ على الشكل الجبري ثم الشكل الأسي.

جـ- استنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3) أ- n عدد طبيعي. عين قيم n بحيث يكون العدد $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n$ حقيقيا.

ب- أحسب قيمة العدد: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{456}$

التمرين 4: « دورة جوان 2009 – الموضوع الثاني »

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-2z+4=0$

2) نسمي z_1، z_2 حلي هذه المعادلة.

أ- أكتب العددين z_1 و z_2 على الشكل الأسي.

ب- A، B، C هي النقط من المستوي التي لواحقها على الترتيب:

$Z_A=1-i\sqrt{3}$ ، $Z_B=1+i\sqrt{3}$ ، $Z_C=\frac{1}{2}(5+i\sqrt{3})$

(i يرمز إلى العدد المركب الذي يحقق: $i^2=-1$)

- أحسب الأطوال AB، AC، BC، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC.

جـ- جد الطويلة وعمدة العدد المركب Z حيث: $Z=\frac{Z_C-Z_B}{Z_A-Z_B}$

د- أحسب Z^3 و Z^6، ثم استنتج أن Z^{3k} عدد حقيقي من أجل كل عدد طبيعي k.

التمرين 5: « دورة جوان 2010 – الموضوع الأول »

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما على الترتيب:
$z_A=1+i$ و $z_B=3i$

1) أكتب على الشكل الأسي z_A و z_B.

2) ليكن S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=2iz+6+3i$

أ- عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S.

ب- عين z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة A بالتشابه المباشر S.

جـ- استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) لتكن النقطة D مرجح الجملة: $\{(A\,;2),(B\,;-2),(C\,;2)\}$

أ- عين Z_D لاحقة النقطة D.

ب- عين مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

4) لتكن M نقطة من المستوي تختلف عن B وعن D لاحقتها z ولتكن (Δ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي يكون من أجلها $\frac{z_B-z}{z_D-z}$ عددا حقيقيا موجبا تماما.

أ- تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة: $z_E=6+3i$ تنتمي إلى (Δ).

ب- أعط تفسيرا هندسيا لعمدة العدد المركب $\frac{z_B-z}{z_D-z}$، عين حينئذ المجموعة (Δ).

التمرين 6: « دورة جوان 2010 – الموضوع الثاني »

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-6z+18=0$، ثم أكتب الحلين على الشكل الأسي.

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B، C و D لاحقاتها على الترتيب:

$z_A=3+3i$ ، $z_B=\overline{z_A}$ ، $z_C=-z_A$ و $z_D=-z_B$

أ- بين أن النقط A، B، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز O مبدأ المعلم.

ب- عين زاوية للدوران R الذي مركزه O ويحول النقطة A إلى النقطة B.

جـ- بين أن النقط A، O و C في استقامية، وكذلك النقط B، O و D.

د- استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

التمرين 7: « دورة جوان 2011 – الموضوع الأول »

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A = -i$ ، $z_B = 2+3i$ و $z_C = -4+i$

1) **أ- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب:** $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

ب- عين طويلة العدد المركب: $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ **وعمدة له، ثم استنتج طبيعة المثلث** ABC.

2) **نعتبر التحويل النقطي** T **في المستوي الذي يرفق بكل نقطة** M **ذات اللاحقة** z **النقطة** M' **ذات اللاحقة** z' **حيث:**

$z' = iz - 1 - i$

أ- عين طبيعة التحويل T **محددا عناصره المميزة.**

ب- ماهي صورة النقطة B **بالتحويل** T.

3) **لتكن** D **النقطة ذات اللاحقة:** $z_D = -6+2i$

أ- بين أن النقط A، C **و** D **في استقامية.**

ب- عين نسبة التحاكي h **الذي مركزه** A **ويحول النقطة** C **إلى النقطة** D.

جـ- عين العناصر المميزة للتشابه S **الذي مركزه** A **ويحول النقطة** B **إلى النقطة** D.

التمرين 8: « دورة جوان 2011 – الموضوع الثاني »

نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A = 3-2i$ ، $z_B = 3+2i$ و $z_C = 4i$

1) **أ- علم النقط** A، B **و** C.

ب- ما طبيعة الرباعي $OABC$**؟ علل إجابتك.**

جـ- عين لاحقة النقطة Ω **مركز الرباعي** $OABC$.

2) **عين ثم أنشئ** (E) **مجموعة النقط** M **من المستوي التي تحقق:** $\|\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = 12$

3) **أ- حل في مجموعة الأعداد المركبة** $\mathbb{C}$**، المعادلة ذات المجهول** z **التالية:** $z^2 - 6z + 13 = 0$

نسمي z_0 **و** z_1 **حلي هذه المعادلة.**

ب- لتكن M **نقطة من المستوي لاحقتها العدد المركب** z.

- عين مجموعة النقط M **من المستوي التي تحقق:** $|z - z_0| = |z - z_1|$

التمرين 9: « دورة جوان 2012 – الموضوع الأول »

1) **نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة** $\mathbb{C}$ **المعادلة ذات المجهول** z **التالية:** $z = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$ **(حيث:** $z \neq 2-3i$**)**

- حل في $\mathbb{C}$ **هذه المعادلة.**

2) **ينسب المستوي المركب إلى المعلم المتعامد والمتجانس** $(O;\vec{u},\vec{v})$. A **و** B **نقطتان لاحقتاهما على الترتيب:** z_A **و** z_B

حيث: $z_A = 1+i\sqrt{5}$ **و** $z_B = 1-i\sqrt{5}$

- تحقق أن A **و** B **تنتميان إلى دائرة مركزها** O **يطلب تعيين نصف قطرها.**

3) **نرفق بكل نقطة** M **من المستوي لاحقتها** z، $(z \neq 2-3i)$ **النقطة** M' **لاحقتها** z' **حيث:** $z' = \frac{3i(z+2i)}{z-2+3i}$،

النقط C، D، E **لواحقها على الترتيب:** $z_C = -2i$، $z_D = 2-3i$، **و** $z_E = 3i$ **و** (Δ) **محور القطعة** $[CD]$.

أ- عبر عن المسافة OM' **بدلالة المسافتين** CM **و** DM.

ب- استنتج أنه من أجل كل نقطة M **من** (Δ) **فإن النقطة** M' **تنتمي إلى دائرة** (γ) **يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.**

- تحقق أن E **تنتمي إلى** (γ).

التمرين 10: « دورة جوان 2012 – الموضوع الثاني »

1) $P(z)$ كثير الحدود للمتغير المركب z حيث: $P(z) = z^3 - 12z^2 + 48z - 72$

أ- تحقق أن 6 هو جذر لكثير الحدود $P(z)$.

ب- جد العددين الحقيقيين α و β بحيث من أجل كل عدد مركب z: $P(z) = (z-6)(z^2 + \alpha z + \beta)$

جـ- حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$، المعادلة: $P(z) = 0$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A، B، C نقط من المستوي المركب لواحقها على الترتيب: $z_A = 6$، $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ و $z_C = 3 - i\sqrt{3}$

أ- أكتب كلا من z_A، z_B و z_C على الشكل الأسي.

ب- أكتب العدد المركب $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$ على الشكل الجبري، ثم على الشكل الأسي.

جـ- استنتج طبيعة المثلث ABC.

3) ليكن S التشابه المباشر الذي مركزه C، نسبته $\sqrt{3}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ- جد الكتابة المركبة للتشابه S.

ب- عين $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالتشابه S.

جـ- بين أن النقط A، B، A' في استقامية.

التمرين 11: « دورة جوان 2013 – الموضوع الأول »

1) حل في $\mathbb{C}$ مجموعة الأعداد المركبة، المعادلة (I) ذات المجهول z التالية:

$z^2 - (4\cos\alpha)z + 4 = 0$ .... (I) حيث α وسيط حقيقي.

2) من أجل $\alpha = \frac{\pi}{3}$، نرمز إلى حلي المعادلة (I) بـ: z_1 و z_2.

- بين أن: $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = 1$

3) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ النقط A، B و C التي لاحقاتها: $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ و $z_C = 4 + i\sqrt{3}$ على الترتيب.

أ- أنشئ النقط A، B و C.

ب- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$، ثم استنتج أن C هي صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ويطلب تعيين نسبته وزاويته.

جـ- عين لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A\,;1),(B\,;-1),(C\,;2)\}$، ثم أنشئ G.

د- أحسب z_D لاحقة النقطة D، بحيث يكون الرباعي $ABDG$ متوازي أضلاع.

التمرين 12: « دورة جوان 2013 – الموضوع الثاني »

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) ذات المجهول z الآتية: $z^2 + 4z + 13 = 0$ ....(E)

1) تحقق أن العدد المركب $-2 - 3i$ حل للمعادلة (E)، ثم جد الحل الآخر.

2) A و B نقطتان من المستوي المركب لاحقتاهما $z_A = -2 - 3i$ و $z_B = i$ على الترتيب. S التشابه المباشر الذي مركزه A، نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{2}$ والذي يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

أ- بين أن: $z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$

ب- أحسب z_C لاحقة النقطة C، علما أن C هي صورة B بالتشابه S.

3) لتكن النقطة D، حيث: $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

أ- بين أن D هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما.

ب- أحسب z_D لاحقة النقطة D.

جـ- بين أن: $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$، ثم استنتج طبيعة المثلث ACD.

نجاح..التزام..تخطيط

التمرين 13: ﴿ دورة جوان 2014 – الموضوع الأول ﴾

1) **حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة:** $z^2-6\sqrt{2}z+36=0$

2) **المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس** $(O;\vec{u},\vec{v})$، **لتكن النقط** A، B، C **و** D **التي لاحقاتها على الترتيب:** $z_A=3\sqrt{2}(1+i)$، $z_B=\overline{z_A}$، $z_C=6\sqrt{2}$ **و** $z_D=\frac{z_C}{2}$.

أ- أكتب z_A، z_B **و** $(1+i)z_A$ **على الشكل الأسي.**

ب- أحسب: $\left(\frac{(1+i)z_A}{6\sqrt{2}}\right)^{2014}$

جـ- بين أن النقط O، A، B **و** C **تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها** D، **يطلب تعيين نصف قطرها.**

د- أحسب: $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$، **ثم جد قيسا للزاوية** $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$. **ماهي طبيعة الرباعي** $OACB$؟

3) **ليكن الدوران** R **الذي مركزه** O **وزاويته** $\frac{\pi}{2}$.

أ- أكتب العبارة المركبة للدوران R.

ب- عين لاحقة النقطة C' **صورة** C **بالدوران** R، **ثم تحقق أن النقط** C، A **و** C' **في استقامية.**

جـ- عين لاحقة النقطة A' **صورة** A **بالدوران** R، **ثم حدد صورة الرباعي** $OACB$ **بالدوران** R.

التمرين 14: ﴿ دورة جوان 2014 – الموضوع الثاني ﴾

1) **حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z حيث:** $(z-i)(z^2-2z+5)=0$

2) **في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس** $(O;\vec{u},\vec{v})$ **(وحدة الطول** $1\,cm$**)، تعطى النقط** A، B **و** C **التي لاحقاتها:** $z_A=i$، $z_B=1+2i$ **و** $z_C=1-2i$ **على الترتيب.**

أ- أنشئ النقط A، B **و** C.

ب- جد z_H **لاحقة النقطة** H **المسقط العمودي للنقطة** A **على المستقيم** (BC).

جـ- أحسب مساحة المثلث ABC.

3) **ليكن** S **التشابه المباشر الذي مركزه** A **ونسبته** $\frac{1}{2}$ **وزاويته** $\frac{\pi}{2}$.

أ- عين الكتابة المركبة للتشابه S.

ب- بين أن مساحة صورة المثلث ABC **بالتشابه** S **تساوي** $\frac{1}{2}cm^2$.

جـ- M **نقطة لاحقتها** z، **عين مجموعة النقط** M **حيث:** $|z|=|iz+1+2i|$

التمرين 15: ﴿ دورة جوان 2015 – الموضوع الأول ﴾

I) عين العددين المركبين α **و** β **حيث:** $\begin{cases}2\alpha-\beta=-3\\2\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-3-2i\sqrt{3}\end{cases}$ **مع** $\overline{\alpha}$ **مرافق** α **و** $\overline{\beta}$ **مرافق** β.

II) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. A، B **و** C **النقط التي لاحقاتها على الترتيب:**

$$z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\quad،\quad z_B=\overline{z_A}\quad\text{و}\quad z_A=z_C.e^{i\frac{\pi}{3}}$$

1) **أ- أكتب** z_A **و** z_C **على الشكل الأسي، ثم عين قيم العدد الطبيعي** n **حتى يكون** $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ **حقيقيا سالبا.**

ب- تحقق أن العدد المركب $\left(\frac{z_C}{\sqrt{3}}\right)^{1435}-\left(\frac{z_B}{\sqrt{3}}\right)^{1962}+2\left(\frac{z_A}{\sqrt{3}}\right)^{2015}$ **حقيقي.**

2) D **النقطة ذات اللاحقة:** $z_D=1+i$

أ- حدد النسبة وزاوية للتشابه المباشر S **الذي مركزه** O **ويحول** D **إلى** A.

ب- أكتب $\frac{z_A}{z_D}$ **على الشكل الجبري، ثم استنتج القيمة المضبوطة لكل من:** $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ **و** $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

3) **عين مجموعة النقط** M **ذات اللاحقة** z **التي تحقق:** $z=k(1+i)e^{i\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$ **حيث** k **يمسح** $\mathbb{R}^+$.

<u>التمرين 16:</u> ﴿ دورة جوان 2015 – الموضوع الثاني ﴾

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A، B و C التي لاحقاتها على الترتيب:

z_A، z_B و z_C حيث: $z_A = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = -\overline{z_A}$ و $z_C = -(z_A + z_B)$ ، ($\overline{z_A}$ هو مرافق z_A).

1) **أ- أكتب كلا من العددين المركبين z_B و z_C على الشكل الأسي.**
   ب- استنتج أن النقط A، B و C تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.
   جـ- أنشئ الدائرة (γ) والنقط A، B و C.

2) **أ- تحقق أن:** $\frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
   ب- استنتج أن المثلث ABC متقايس الأضلاع، وأن النقطة O مركز ثقل هذا المثلث.
   جـ- عين وأنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z| = \left|z - \sqrt{3} - i\right|$

3) **أ- عين زاوية للدوران r الذي مركزه O ويحول C إلى A.**
   ب- أثبت أن صورة (E) بالدوران r هي محور القطعة $[OB]$.