# مفاتيح الرياضيات

## الدوال العددية - الأسية - اللوغاريتمية

السنة الثالثة ثانوي
جميع الشعب

قواعد أساسية لدراسة الدوال
كثيرات الحدود - ناطقة - صماء
أسية و لوغاريتمية

155 تمرين محلول في دراسة الدوال
جميع مسائل الدوال في البكالوريا
مع حلولها المفصلة

عبد الكريم واضحي

# مفاتيح الرياضيات

# الدوال العددية

# السنة الثالثة ثانوي

# جميع الشعب

## قواعد أساسية في دراسة الدوال

## 155 تمرين نموذجي

## جميع مواضيع الدوال في البكالوريا

## من 2008 إلى 2017

## مع حلولها المفصّلة

الأستاذ عبد الكريم واضحي

﴿ فَلَمَّا رَءَاهُ مُسْتَقِرًّا عِندَهُۥ قَالَ هَٰذَا مِن فَضْلِ رَبِّي لِيَبْلُوَنِيٓ ءَأَشْكُرُ أَمْ أَكْفُرُ ۖ
وَمَن شَكَرَ فَإِنَّمَا يَشْكُرُ لِنَفْسِهِۦ ۖ وَمَن كَفَرَ فَإِنَّ رَبِّي غَنِيٌّ كَرِيمٌ ﴿٤٠﴾ ﴾

﴿ رَبِّ أَوْزِعْنِيٓ أَنْ أَشْكُرَ نِعْمَتَكَ ٱلَّتِيٓ أَنْعَمْتَ عَلَيَّ وَعَلَىٰ وَٰلِدَيَّ وَأَنْ أَعْمَلَ صَٰلِحًا
تَرْضَىٰهُ وَأَصْلِحْ لِي فِي ذُرِّيَّتِيٓ ۖ إِنِّي تُبْتُ إِلَيْكَ وَإِنِّي مِنَ ٱلْمُسْلِمِينَ ﴿١٥﴾ ﴾

إلى روح والدي رحمه الله الذي ضحّى بالنفس و النفيس من أجل وطنه أولا ثمّ من أجل أبنائه ثانيا و مضى إلى ربه دون أن يقطف أيّ من الثمرتين رحمه الله رحمة واسعة وأسكنه فسيح جنته.

إلى الحضن الدافئ و اللمسة الحانية أمي الحبيبة حفظها الله ورعاها وجزاها عني خير ما جزى والدة عن ولدها وألبسها لباس الصحة والعافية.

إلى حبيبة العمر ورفيقة الدرب ومهجة الفؤاد زوجتي وأم أبنائي أكرمها الله وأحسن مثوبتها.

إلى رياحين الدنيا أبنائي وأحبابي وقرة عيني أسامة، محسن ووائل، وإلى كنتي ريمة وحفيدي سامي حفظهم الله جميعا ورزقهم الهُدى والنُقى والعفاف والغِنى والعلم النافع والعمل الصالح وجعلهم ذخرا لأمتهم ووطنهم.

إلى صهري العزيز "عمي براهيم" وحماتي الغالية "الحاجّة خيثمة" حفظهما الله ومتّعهما بالصحة والعافية ورزقهما حسن الخاتمة بعد طول عمر وحسن عمل.

إلى كل حرّ أبيّ يسعى لرفع الغبن والجهل والتخلف عن أمته حتى يعود لهذه الأمة مجدها وعزها التي كانت ترفل فيه يوم كانت خير أمة أُخرجت للناس.

إلى هؤلاء جميعا أهدي هذا العمل المتواضع، سائلا المولى ﷻ أن ينفع به كاتبه وناشره وقارئه.

عبد الكريم واضحي

# مُقَدِّمَة

الحمد لله على نعمائه والشكر له على آلائه والصلاة والسلام على نبيه وخاتم رسله سيدنا محمد ﷺ وعلى آله وأصحابه ومن تبعهم بإحسان إلى يوم لقائه.

يسرني أن أضع بين يدي إخواني الأساتذة وأبنائي الطلبة هذه السلسلة التي تضم عددا هائلا من مسائل الرياضيات للأقسام النهائية (العلمية والرياضية) التي جمعتها من مصادر شتى (كتب ، سلاسل ، اختبارات ومواضيع بكالوريا) ، مرفقة بحلولها المفصّلة بلا اختصار مخلّ ولا إطالة مملّة ، لتكون عونا للأستاذ لاختيار مواضيع الفروض والاختبارات ، ومنارة للطلاب يهتدون بها خلال تحضيرهم لشهادة البكالوريا التي نسأل الله العلي القدير أن يوفقهم للحصول عليها بتقديرات تسرّهم وتمهّد لهم الطريق نحو النجاح في حياتهم العلمية والعملية.

وتضم هذه السلسلة خمسة أجزاء هي:

1. القسمة والموافقات في $\mathbb{Z}$
2. الدوال (العددية ، الأسية واللوغاريتمية) (وهو الكتاب الذي بين يديك)
3. الهندسة الفضائية
4. الأعداد المركبة والتحويلات النقطية
5. المتتاليات العددية

في الأخير، وعملا بقول المصطفى ﷺ "من لا يشكر الناس لا يشكر الله" أحمد الله على توفيقه وامتنانه وفضله وكرمه فله الحمد أولا وله الحمد آخرا، كما أتقدم بالشكر الجزيل لكل إخواني الأساتذة الذين استفدت من أعمالهم الرائعة ومواضيعهم المتميزة سواءً كانت سلاسل أواختبارات نموذجية أوحلول لمواضيع البكالوريا ، فلهم مني جزيل الشكر.

وبما أنّ الله جلّ جلاله أبى العصمة إلا لنبيّه ﷺ ، فلا شك أنّ هذا العمل قد يعتريه الخطأ فرجائي لكل من وقف على خطأ أوسهو أونقص أن ينبهني لتصحيحه على البريد الإلكتروني ouailmaths@gmail.com ورحم الله امرئ أهدى إليّ عيوبي.

عبد الكريم واضحي

# تمهيد

إنّ الناظر في مواضيع الرياضيات لامتحانات البكالوريا يدرك مدى أهمية موضوع دراسة الدوال في السنة النهائية ، حيث أنّ العلامة المخصّصة لموضوع الدوال في هذه الامتحانات لا تقلّ عن 06 نقاط وقد تصل لغاية 10 نقاط (بكالوريا شعبة العلوم التجريبية دورة جوان 2010) ممّا يعني أنّ دراسة هذا المحور الهام دراسة جيّدة ومتقنة واستيعابه والتمكّن من حل مختلف المسائل المتعلقة بالدوال (سواء كانت كثيرات الحدود ، ناطقة ، صمّاء ، مثلثية ، قيمة مطلقة ، أسّية أم لوغاريتمية) تحقق ثلث العلامة أو نصفها على أقصى تقدير في اختبار مادة الرياضيات لشهادة البكالوريا، كما أنّه تحقق العلامة الكاملة في فروض واختبارات الفصل الأول ، مما يعطي للطالب دفعا قويا وهمّة عالية وتذوقا لطعم النجاح لا يفارقه حتى تجتاز آخر اختبار في هذا الامتحان المصيري وكلّه أمل في تحقيق نتائج ممتازة .

وإذا كان موضوع دراسة الدوال يكتسي هذه الأهمّية، لا بدّ لكل راغب في النجاح وحريص على تحقيق أعلى المعدلات أن يولي هذا الموضوع اهتماما بالغا وعناية فائقة من مدارسة ومراجعة وحلّ المسائل والأهم من ذلك الاستمرارية في دراسته لغاية نهاية السنة ، لأنّ معظم الطلبة يغفل عن دراسة الدوال خلال الفصلين الثاني والثالث وينشغل بالمحاور الأخرى (الحساب ، الهندسة ، الأعداد المركّبة والمتتاليات)، ممّا تجعل نتائج هذين الفصلين متدنية مقارنة مع نتائج الفصل الأول .

ولمساعدة الطلبة على دراسة هذا المحور واستيعابه بشكل جيّد ، جاء هذا الكتاب الذي تحمل في ثناياه ملخصات لأهمّ القواعد المتعلقة بدراسة الدوال مع إعطاء أمثلة توضح كيفية تطبيق هذه القواعد ، كما تحوي هذا الكتاب على 215 تمرين نموذجي لدراسة الدوال على اختلاف أشكالها من بينها جميع مواضيع دراسة الدوال في الدورات السابقة لامتحان شهادة التعليم الثانوي (من 2008 إلى 2017) مع حلولها المفصّلة بلا إطالة مملة ولا اختصار مخل .

وحتى تكتمل الفائدة من هذا الكتاب، أنصح أبنائي الطلبة وبناتي الطالبات بحلّ معظم المسائل الواردة فيه (حتى لا أقول كل المسائل) بصفة منتظمة ومستمرة وعدم الرجوع إلى الحلول إلا بعد الانتهاء من حل المسألة للتأكد من صحة الإجابة، أو في حالة ما استعصى عليكم سؤال بعد بذل المجهود اللازم للإجابة عنه، لأنّ تقليب صفحات الكتاب باستمرار والتنقل بين السؤال والجواب لا يُجدي نفعا ولا يُكسب علما ولا يُحقق نتيجة إيجابية.

كما أنصحكم بحلّ كل المسائل الواردة في امتحانات البكالوريات السابقة لأنّها المؤشر الحقيقي على مدى جاهزيتكم لخوض غمار هذا الامتحان المصيري الذي أتمنى لكم من أعماق قلبي النجاح فيه بتقدير يسمح لكم بتحقيق أمانيكم في مواصلة مشواركم الدراسي في التخصصات التي ترغبونها أنتم، لا تلك التي تُفرض عليكم بسبب ضعف معدلات النجاح في البكالوريا.

ورغم حرصي كل الحرص على أن يكون محتوى هذا الكتاب سالما من الأخطاء، إلاّ أنّ الإنسان لا ينفك عن طباعه التي جُبِل عليها كالخطأ والنسيان والعجلة، لذا أرجو من كل من وقع على خطأ في هذا الكتاب أن يتكرم عليّ بتصويبه على عنوان البريد الالكتروني الوارد في مقدمة الكتاب وله من الله عظيم الأجر ومني جزيل الشكر.

عبد الكريم واضحي

الجزء الأول
الدوال العددية

# قواعد أساسية في دراسة الدوال العددية

## I- النهايات

### 1. بعض نهايات الدوال المرجعية

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ | |
| $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = +\infty$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ |
| $\lim\limits_{x\to0^>} \frac{1}{x} = +\infty$ | $\lim\limits_{x\to0^<} \frac{1}{x} = -\infty$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ | $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ |

### 2. نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$

النهاية عند $\infty$ $(\pm)$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدّها الأعلى درجة عند $\infty$ $(\pm)$

النهاية عند $\infty$ $(\pm)$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدّين الأعلى درجة عند $\infty$ $(\pm)$

**مثال 1:** $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 + 2x + 7 = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 = \boxed{+\infty}$

**مثال 2:** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+4x+4}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = \boxed{+\infty}$

### 3. حالات عدم التعيين

① $\infty - \infty$ ; ② $0 \times \infty$ ; ③ $\frac{\infty}{\infty}$ ; ④ $\frac{0}{0}$

### 4. طرق إزالة حالات عدم التعيين

#### أ. التحليل والاختزال

غالبا نستعمل هذه الطريقة عند حساب $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ حيث $f(x_0) = g(x_0) = 0$

في هذه الحالة نقوم بتحليل العبارتين $f$ و $g$ وكتابتهما على الشكل $(x - x_0)Q(x)$

ثم نختزل الكسر ونحسب النهاية من جديد.

**مثال 1:** $\lim\limits_{x\to1} \frac{4x^2+3x-7}{x^2+2x-3} = \lim\limits_{x\to1} \frac{(x-1)(4x+7)}{(x-1)(x+3)} = \lim\limits_{x\to1} \frac{4x+7}{x+3} = \boxed{\frac{11}{4}}$

**مثال 2:** $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^3+8}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to-2} \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)} = \lim\limits_{x\to-2} \frac{x^2-2x+4}{x-2} = \frac{12}{-4} = \boxed{-3}$

**ملاحظة** : توجد ثلاث طرق لإيجاد عبارة $Q(x)$ وهي:

**1) المطابقة :**

مثال: كتابة العبارة $4x^2 + 3x - 7$ على الشكل $(x - 1)Q(x)$

بما أنّ $Q(x)$ من الدرجة الأولى فهو يُكتب على شكل $ax + b$ ، منه :

$$(x-1)Q(x) = (x-1)(ax+b) = ax^2 + (b-a)x - b$$
$$\begin{cases} a = 4 \\ b - a = 3 \\ -b = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{4x^2 + 3x - 7 = (x-1)(4x+7)}$$

لاحظ أنّه لمّا يكون كثير الحدود من **الدرجة الثانية** ، يمكن تحليله مباشرة إلى جداء عاملين من الدرجة الأولى على النحو التالي: نقسم $4x^2$ على $x$ فنحصل على $4x$ ونقسم $-7$ على $-1$ فنحصل على $+7$ ، فتكون النتيجة : $4x^2 + 3x - 7 = (x-1)(4x+7)$

**2) القسمة الإقليدية :**

| | |
|---|---|
| $x^3 + 8$ | $x + 2$ |
| $-x^3 - 2x^2$ | $x^2 - 2x + 4$ |
| $-2x^2 + 8$ | |
| $2x^2 + 4x$ | |
| $4x + 8$ | |
| $-4x - 8$ | |
| $0$ | |

**3) هورنر:** وهي أسهل الطرق على الإطلاق خاصة لمّا يكون كثير الحدود من الدرجة الثالثة فما فوق.

**مثال 1:** $P(x) = 4x^2 + 3x - 7$ ، $x_0 = 1$

| | $a = 4$ | $b = 3$ | $c = -7$ | معاملات $P(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_0 = 1$ | $\downarrow$ | | | الجذر $x_0$ |
| | $a' = 4$ | $b' = 7$ | $c' = \mathbf{0}$ | معاملات $Q(x)$ |

$$\begin{cases} a' = a = 4 \\ b' = x_0.a' + b = 1(4) + 3 = 7 \Rightarrow 4x^2 + 3x - 7 = (x-1)(4x+7) \\ c' = x_0.b' + c = 1(7) - 7 = \mathbf{0} \end{cases}$$

**مثال 2:** $P(x) = x^3 + 8$ ، $x_0 = -2$

| | $a = 1$ | $b = 0$ | $c = 0$ | $d = 8$ | معاملات $P(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_0 = -2$ | $\downarrow$ | | | | الجذر $x_0$ |
| | $a' = 1$ | $b' = -2$ | $c' = 4$ | $d' = \mathbf{0}$ | معاملات $Q(x)$ |

$$\begin{cases} a' = a = 1 \\ b' = x_0.a' + b = -2(1) + 0 = -2 \\ c' = x_0.b' + c = -2(-2) + 0 = 4 \\ d' = x_0.c' + d = -2(4) + 8 = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$$

لاحظ أنّ المعامل الأخير يكون دائما معدوما $(c' \text{ و } d')$

**ب. استعمال المرافق (خاصة بالجذور التربيعية)**

**مثال 1:**

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

**مثال 2:**

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x+8}-3}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{5-x}-2\right)\left(\sqrt{5-x}+2\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}=\lim_{x\to 1}-\frac{\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(\sqrt{5-x}+2\right)}=\boxed{-\frac{3}{2}}$$

**ملاحظة :** لمّا يؤول $x$ إلى $\infty$ ، إمّا أنّ نستعمل المرافق في حالة تساوي معاملات $x$ داخل الجذر وخارجه (المثال 1) أو نستعمل التحليل في حالة عدم تساوي المعاملات (المثال 2)

**مثال 1:**

$$\lim_{x\to+\infty}\boldsymbol{x}+1-\sqrt{\boldsymbol{x^2}+x-2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x+1-\sqrt{x^2+x-2}\right)\left(x+1+\sqrt{x^2+x-2}\right)}{\left(x+1+\sqrt{x^2+x-2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)^2-(x^2+x-2)}{x+1+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3}{x+1+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)}\left(x\to+\infty\Rightarrow|x|=x\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

**مثال 2:**

$$\lim_{x\to-\infty} 2x+1+\sqrt{x^2+x-2} = \lim_{x\to-\infty} 2x+1+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 2x+1+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 2x+1-x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} \; (x\to-\infty \Rightarrow |x|=-x)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} x\underbrace{\left(2+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)}_{\to 1} = \boxed{-\infty}$$

**ج. استعمال العدد المشتق**

لاستعمال هذه الطريقة لا بدّ أن تكون النهاية من الشكل : $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ،

وهذه النهاية تساوي العدد المشتق $f'(x_0)$

**مثال 1:**

$$\lim_{x\to2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$$

$$f(x)=\sqrt{x-1}\,; f(2)=1\,; f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\,; f'(2)=\boxed{\frac{1}{2}}$$

**مثال 2:**

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$$

$$f(x)=\sin x\,; f(0)=0\,; f'(x)=\cos x\,; f'(0)=\boxed{1}$$

**5. نهاية دالة مركّبة**

$$f = v\,o\,u\,; \begin{cases} \lim_{x\to a} u(x) = \boldsymbol{b} \\ \lim_{x\to \boldsymbol{b}} v(x) = c \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = c$$

**مثال:**

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\sqrt{\frac{4x^2-2x-1}{x^2-5x+3}}}_{f(x)}\,; \begin{cases} \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{4x^2-2x-1}{x^2-5x+3}}_{u(x)} = \boldsymbol{4} \\ \lim_{x\to \boldsymbol{4}} \underbrace{\sqrt{x}}_{v(x)} = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2}$$

### 6. النهايات بالمقارنة

**الحالة الأولى:**

$$\begin{cases} g(x) \le f(x) \le h(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = l}$$

**مثال:**

$$\begin{cases} \dfrac{2x-1}{1+x} \le \dfrac{2x+\cos x}{1+x} \le \dfrac{2x+1}{1+x} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-1}{1+x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+1}{1+x} = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\cos x}{1+x} = 2}$$

**الحالة الثانية:**

$$\begin{cases} f(x) \ge g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

**مثال:**

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2-\sin x} \ge \dfrac{x}{3} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{3} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2-\sin x} = +\infty}$$

**الحالة الثالثة:**

$$\begin{cases} f(x) \le g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

**مثال:**

$$\begin{cases} -2x^2 + x\cos x \le -2x^2 - x \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -2x^2 - x = -\infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} -2x^2 + x\cos x = -\infty}$$

**ملاحظة** : غالبا ما نستعمل المقارنة لحساب نهايات الدوال المثلثية $(\sin x\,;\cos x)$ لمّا $x$ يؤول إلى $\infty(\pm)$ ، حيث أنّ هذه الدوال لا تقبل نهاية عند $\infty(\pm)$.

ولحصر $f(x)$ دائما ننطلق من حصر الدالة المثلثية $(\sin x\,;\cos x)$ بين $(-1)$ و$(+1)$

### 7. المستقيمات المقاربة

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Rightarrow$ المستقيم $\boldsymbol{x = a}$ مستقيم مقارب عمودي (يوازي محور التراتيب)

2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b \Rightarrow$ المستقيم $\boldsymbol{y = b}$ مستقيم مقارب أفقي (يوازي محور الفواصل)

3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - (ax+b) = 0 \Rightarrow$ المستقيم $\boldsymbol{y = ax + b}$ مستقيم مقارب مائل

**ملاحظة :**

1) إذا كانت $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ و$\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$ ، فإنّ المستقيم $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

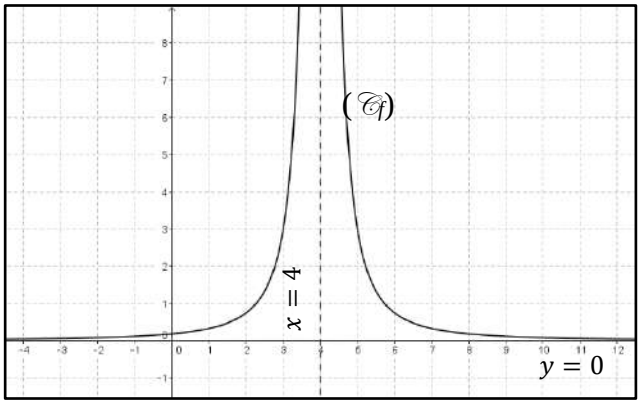
2) قد يكون للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مستقيمين مقاربين أحدهما بجوار $(-\infty)$ والآخر بجوار $(+\infty)$

**مثال 1:** $f(x) = \frac{3}{(x-4)^2}$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{3}{(x-4)^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 4 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 4 \\ <}} \frac{3}{(x-4)^2} = +\infty \; ; \lim_{\substack{x\to 4 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 4 \\ >}} \frac{3}{(x-4)^2} = +\infty$$

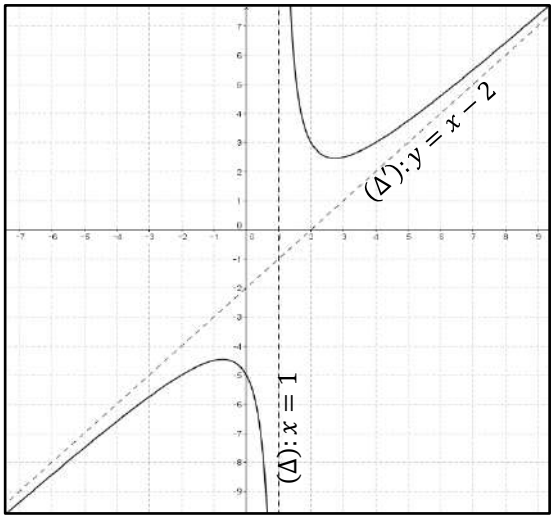
يقبل المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ مستقيما مقاربا عموديا معادلته : $\boxed{x = 4}$ وآخر أفقيا معادلته : $\boxed{y = 0}$




**مثال 2:** $f(x) = x - 2 + \frac{3}{x-1}$

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} f(x) = -\infty \; ; \lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x) = +\infty \; ; \lim_{|x|\to+\infty} f(x) - (x-2) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{3}{x-1} = 0$$

يقبل المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ مستقيما مقاربا عموديا $\boxed{(\Delta): x = 1}$ وآخر مائلا $\boxed{(\Delta'): y = x - 2}$



## II- الاستمرارية والاشتقاقية

### 1. الاستمرارية

تكون الدالة $f$ مستمرة عند $x_0$ إذا وفقط إذا : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} f(x) = f(x_0)$

**مثال :** $x_0 = 1$ ، $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3}{x+1} & ; \quad x > 1 \\ \sqrt{x^2+3} & ; \quad x \leq 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} \sqrt{x^2+3} = \boxed{2}$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{x^2+3}{x+1} = \boxed{2}$

$f(1) = \sqrt{1+3} = \boxed{2}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = f(1) \Rightarrow$ $\boxed{\text{الدالة } f \text{ مستمرة عند } x_0 = 1}$

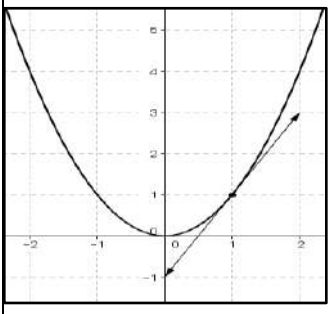
### 2. الاشتقاقية

تكون الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0$ إذا وفقط إذا :

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l \ (l \neq \infty)$$

### 3. التفسير الهندسي

- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ : يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ مماسا معادلته : $\boldsymbol{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$
- $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$; $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l'$ : يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ نصفي مماسين ميليهما $l$ و $l'$ على الترتيب
- $f'(x_0) = 0$ : يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ مماسا أفقيا معادلته : $\boldsymbol{y = f(x_0)}$
- $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \infty$ : يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ نصف مماس عمودي (يوازي محور التراتيب)
- $f''(x_0) = 0$ : يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) نقطة انعطاف $\boldsymbol{\omega(x_0; f(x_0))}$ وتتغير وضعية ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة للمماس عند هذه النقطة.

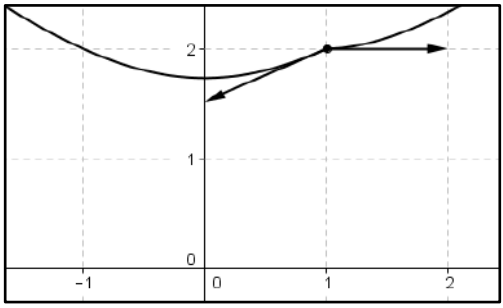


**مثال 1:** $f(x) = x^2$ ، $x_0 = 1$ ، $f'(x_0) = 2$ ، $(T): y = 2x - 1$

**مثال 2:** $x_0 = 1$ ، $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3}{x+1} & ; \quad x > 1 \\ \sqrt{x^2+3} & ; \quad x \leq 1 \end{cases}$

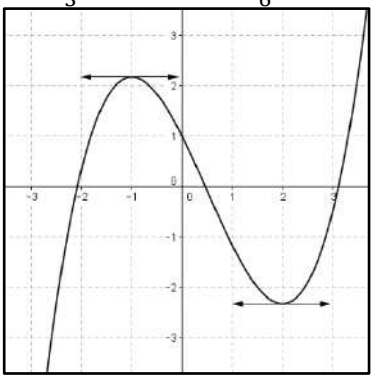
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \mathbf{\frac{1}{2}} \; ; \; \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \mathbf{0}$$

**التفسير البياني للنتيجة :** يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة 1




**مثال 3:** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ ، $f'(x) = x^2 - x - 2$ ،

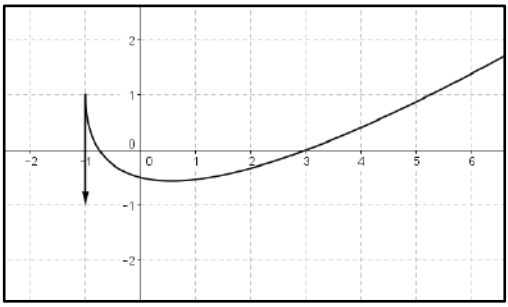
$f'(-1) = 0$ ، $f'(2) = 0$ ، $(T_{-1}): y = \frac{13}{6}$ ، $(T_2): y = -\frac{7}{3}$



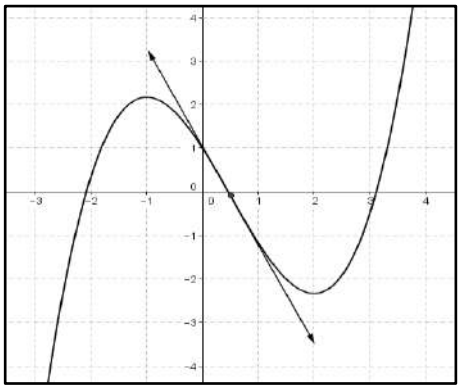
**مثال 4:** $Dg = [-1; +\infty[$ ، $g(x) = x + 2 - \frac{5}{2}\sqrt{x+1}$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{g(x)-1}{x+1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{x+1-\frac{5}{2}\sqrt{x+1}}{x+1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} 1 - \frac{5}{2\sqrt{x+1}} = \boxed{-\infty}$$

تفسير النتيجة بيانيا : الدالة $g$ غير قابلة للاشتقاق عند النقطة ذات الفاصلة (-1) ويقبل المنحنى ($\mathscr{C}_g$) نصف مماس عمودي.



**مثال 5:** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ ، $f'(x) = x^2 - x - 2$ ، $f''(x) = 2x - 1$ ، $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ، $\omega\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{12}\right)$ نقطة انعطاف.



**4. مبرهنة القيم المتوسطة**

**أ. لبيان أنّ المعادلة $g(x) = c$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]a; b[$**

نبيّن أنّ الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]a; b[$ وأنّ $g(a) < c < g(b)$ إذا كانت $g$ متزايدة أو $g(b) < c < g(a)$ إذا كانت $g$ متناقصة.

إذا كانت المعادلة $g(x) = 0$ ، يكفي أن نبيّن أنّ الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]a; b[$ وأنّ $g(a) \times g(b) < 0$.

**ب. لتعيين حصر للحل $\alpha$**

نقوم بتقسيم المجال $]a; b[$ من خلال حساب $g\left(\frac{a+b}{2}\right)$ فنأخذ نصف المجال الذي يشمل $\alpha$ ونلغي النصف الثاني ، ثمّ نواصل العملية حتى نصل إلى الحصر المطلوب.

(انظر الملحق الخاص بكيفية استعمال الحاسبة لحصر الحل $\alpha$ في نهاية الكتاب)

**ج. لكتابة $f(\alpha)$ بدلالة $\alpha$ وتعيين حصر للعدد $f(\alpha)$**

ننطلق دائما من المعادلة $g(\alpha) = 0$ لكتابة $\alpha^3$ أو $e^\alpha$ أو $\ln \alpha$ بدلالة $\alpha$ ، ثمّ نعوّض العبارة المتحصل عليها في الدالة $f$.

**مثال:** $g(x) = x^3 - 3x - 4$ ، $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$

**1. بيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ ، حيث $\alpha \in ]2;3[$**

$g(2) = -2$ ، $g(3) = 14$ . الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]2;3[$ ،

$g(2) \times g(3) < 0$ منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]2;3[$

**2. تعيين حصر للعدد $\alpha$ بالتقريب إلى $10^{-1}$**

$$\begin{cases} \boldsymbol{g(2) = -2} \\ \boldsymbol{g(2,5) \approx 4,13} \\ g(3) = 14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{g(2) = -2} \\ \boldsymbol{g(2,25) \approx 0,64} \\ g(2,5) \approx 4,13 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} g(2) = -2 \\ \boldsymbol{g(2,1) \approx -1,04} \\ \boldsymbol{g(2,2) \approx 0,05} \end{cases}$$

من النتائج السابقة ، نستنتج أنّ : $\boxed{2,1 < \alpha < 2,2}$

**3. بيان أنّ: $f(\alpha) = \frac{3\alpha+4}{2}$**

$g(\alpha) = \alpha^3 - 3\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha^3 = 3\alpha + 4$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha^3\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right)}{\frac{\alpha^3}{\alpha} - 1} = \frac{(3\alpha + 4)\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right)}{\frac{3\alpha+4}{\alpha} - 1} = \frac{3\alpha^2 + 10\alpha + 8}{2\alpha + 4}$$

$$f(\alpha) = \frac{(\alpha + 2)(3\alpha + 4)}{2(\alpha + 2)} = \boxed{\frac{3\alpha + 4}{2}}$$

**4. تعيين حصر لـ $f(\alpha)$**

$2,1 < \alpha < 2,2 \Rightarrow 6,3 < 3\alpha < 6,6 \Rightarrow 10,3 < 3\alpha + 4 < 10,6$

$$\Rightarrow \frac{10,3}{2} < \frac{3\alpha + 4}{2} < \frac{10,6}{2} \Rightarrow \boxed{5,15 < f(\alpha) < 5,3}$$

## III- الشفعية والتناظر

- لبيان أنّ الدالة $f$ زوجية نتحقّق أولا أنّ $Df$ متناظر بالنسبة إلى 0 ، ثمّ نبيّن أنّه من أجل كل $x \in Df$ فإنّ : $f(-x) = f(x)$. في هذه الحالة يقبل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ محور تناظر.
- لبيان أنّ الدالة $f$ فردية نتحقّق أولا أنّ $Df$ متناظر بالنسبة إلى 0 ، ثمّ نبيّن أنّه من أجل كل $x \in Df$ فإنّ : $f(-x) = -f(x)$. في هذه الحالة يقبل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مركز تناظر.

**1. لبيان أنّ المستقيم ذي المعادلة $x = a$ محور تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$**

نتحقّق أولا أنّه من أجل كل $x \in Df$ فإنّ $(2a - x) \in Df$ ، ثمّ نبيّن أنّ : $f(2a - x) = f(x)$.

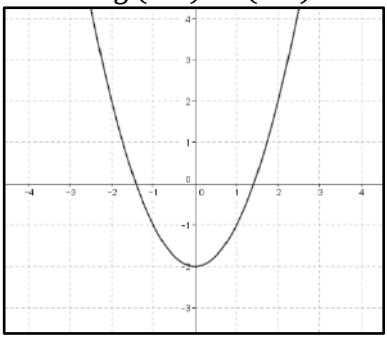
**2. لبيان أنّ النقطة $\omega(a;b)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$**

نتحقّق أولا أنّه من أجل كل $x \in Df$ فإنّ $(2a - x) \in Df$ ، ثمّ نبيّن أنّ : $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

**مثال 1:** $g(x) = x^2 - 2$ ، $Dg = \mathbb{R}$

$Dg$ متناظر بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإنّ :

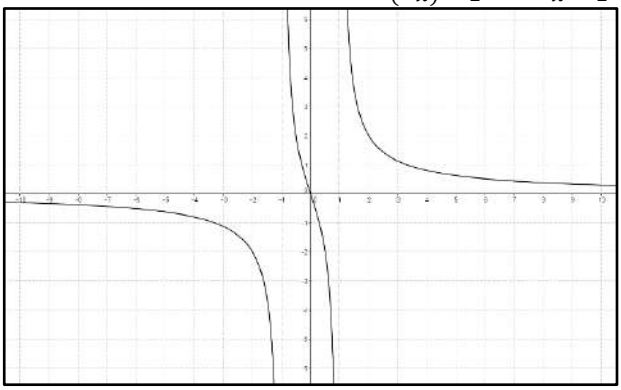
$g(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = g(x)$ ، منه الدالة $g$ زوجية



**مثال 2:** $f(x) = \frac{3x}{x^2-1}$ ، $Df = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$Df$ متناظر بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل $x \in Df$ فإنّ :

$f(-x) = \frac{3(-x)}{(-x)^2-1} = -\frac{3x}{x^2-1} = -f(x)$ ، منه الدالة $f$ فردية



**مثال 3:** $f(x) = \frac{2x^2-8x+7}{x^2-4x+3}$ ، $Df = \mathbb{R} - \{1; 3\}$

بيان أنّ المستقيم $(\Delta): x = 2$ محور تناظر لـ $(\mathscr{C}_f)$

يكون المستقيم $(\Delta): x = 2$ محور تناظر لـ $(\mathscr{C}_f)$ إذا وفقط إذا : $\begin{cases} (4-x) \in Df \\ f(4-x) = f(x) \end{cases}$

$x \in Df \Rightarrow x \notin \{1; 3\} \Rightarrow -x \notin \{-1; -3\} \Rightarrow 4 - x \notin \{3; 1\} \Rightarrow 4 - x \in Df$

$$f(4-x) = \frac{2(4-x)^2 - 8(4-x) + 7}{(4-x)^2 - 4(4-x) + 3}$$

$$= \frac{2x^2 - 16x + 32 - 32 + 8x + 7}{x^2 - 8x + 16 - 16 + 4x + 3} = \frac{2x^2 - 8x + 7}{x^2 - 4x + 3} = f(x)$$

**مثال 4:** $f(x) = \frac{x^2+4x+2}{x-1}$ ، $Df = \mathbb{R} - \{1\}$

بيان أنّ النقطة $\omega(1; 6)$ مركز تناظر لـ $(\mathscr{C}_f)$

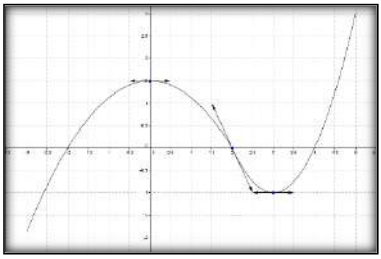
تكون $\omega(1;6)$ مركز تناظر لـ $(\mathscr{C}_f)$ إذا وفقط إذا : $\begin{cases} (2-x) \in Df \\ f(2-x)+f(x)=12 \end{cases}$

$x \in Df \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow -x \neq -1 \Rightarrow 2-x \neq 1 \Rightarrow 2-x \in Df$

$$f(2-x)+f(x)=\frac{(2-x)^2+4(2-x)+2}{2-x-1}+\frac{x^2+4x+2}{x-1}$$

$$=\frac{x^2-4x+4+8-4x+2}{1-x}+\frac{x^2+4x+2}{x-1}$$

$$=\frac{-x^2+8x-14+x^2+4x+2}{x-1}=\frac{12x-12}{x-1}=\frac{12(x-1)}{x-1}=\boxed{12}$$



## IV- استعمال التمثيل البياني وجدول التغيّرات

### 1. القراءة البيانية

**مثال:**

من المنحنى من المقابل يمكننا استنتاج ما يلي:

1. تعيين : $f(2)\ ;\ f'(2)\ ;\ f'(3)\ ;\ (f\circ f)'(2)\ ;\ f''(2)$

$f(2)=0\ ;\ f'(2)=-2\ ;\ f'(3)=0$ (مماس أفقي)؛ $f"(2)=0$ (نقطة انعطاف)

$(f\circ f)'(2)=(f'\circ f)(2)\times f'(2)=f'(0)\times f'(2)=0(-2)=0$

2. حل بيانيا المتراجحتين:

أ) $f(x)<0 : S=[-3;-2[\cup]2;4[$

ب) $f'(x)\geq 0 : S=[-3;0]\cup[3;5]$

3. كتابة معادلة المماس $(T)$ للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة 2

$y=f'(2)(x-2)+f(2)=-2(x-2)\Rightarrow \boxed{(T): y=-2x+4}$

4. جدول تغيرات الدالة $f$

| $x$ | $-3$ | | $0$ | | $3$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-1,8$ | ↗ | $1,5$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $3$ |

5. بيان أنّ المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[3;5]$

الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على المجال $[3;5]$ و $f(3) < 2 < f(5)$ ، منه المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[3;5]$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

6. جدول تغيرات الدالة $g$ :

$$g(x) = 2\sqrt{f(x)} \Rightarrow Dg = [-2;2] \cup [4;5] \; ; \; g'(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$$

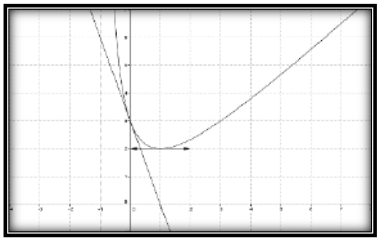
$$g(-2) = 2\sqrt{f(-2)} = 0 \; ; \; g'(0) = \frac{f'(0)}{\sqrt{f(0)}} = \frac{0}{\sqrt{1,5}} = 0$$

$$g(0) = 2\sqrt{f(0)} = 2\sqrt{1,5} \approx 2,45 \; ; g(2) = 2\sqrt{f(2)} = 0$$

$$g(4) = 2\sqrt{f(4)} = 0 \; ; \; g(5) = 2\sqrt{f(5)} = 2\sqrt{3} \approx 3,46$$

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $4$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | | | $+$ | |
| $g(x)$ | $0$ | ↗ | $2,45$ | ↘ | $0$ | | $0$ | ↗ | $3,46$ |

**2. استنتاج عبارة دالة من خلال تمثيلها البياني أو جدول تغيّراتها**



**مثال 1:** $g(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

$$g'(x) = a - \frac{c}{(x+1)^2}$$

$$\begin{cases} g(0) = 3 \\ g'(1) = 0 \\ g'(0) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = 3 \\ a - \frac{c}{4} = 0 \\ a - c = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -c + 3 \\ \frac{3c}{4} = 3 \\ a = c - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = 4 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{g(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}}$$

**مثال 2:** $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+d}$ ، $f'(x) = a - \frac{c}{(x+d)^2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $f(-3)$ | ↘ | ‖ | ↘ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $0$ | ↗ | |

$$Df = \mathbb{R} - \{-1\} \Rightarrow -1 + d = 0 \Rightarrow \boldsymbol{d = 1}$$

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - \dfrac{c}{4} = 0 \\ b + c = 0 \\ a + b + \dfrac{c}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{c}{4} \\ b = -c \\ -\dfrac{c}{4} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a = 1} \\ \boldsymbol{b = -4} \\ \boldsymbol{c = 4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = x - 4 + \frac{4}{x+1}}$$

### 3. المناقشة البيانية

لمناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول معادلة ما **لا بدّ** من استخراج عبارة الدالة المُمثّلة بيانيا من المعادلة ، وتكون المعادلة النهائية على أحد الأشكال التالية:

- $m = f(x)$ : في هذه الحالة ندرس تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيم المتحرك الموازي لمحور الفواصل.
- $ax + m = f(x)$ : في هذه الحالة ندرس تقاطع $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيم المتحرك الموازي للمستقيم الذي ميله $a$ (غالبا ما يكون مستقيما مقاربا مائلا أو مماسا).
- $m^2 = f(x)$ أو $|m| = f(x)$ : في هذه الحالة ندرس تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيم المتحرك الموازي لمحور الفواصل مع مراعاة أن تكون بداية الدراسة من محور الفواصل وليس من الأسفل كما هو الحال في المناقشتين السابقتين.
- $mx = f(x)$ : في هذه الحالة ندرس تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيم الذي يدور حول المبدأ.

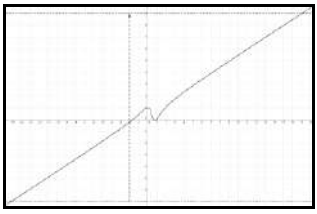
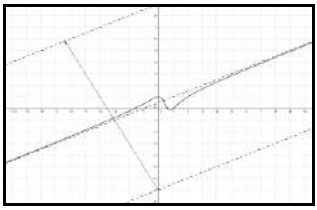
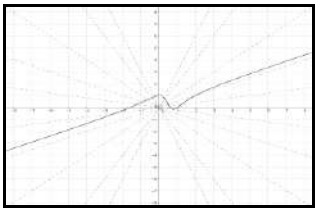
**ملاحظات :**

1. تُحدّد قيم $m$ من خلال تقاطع المستقيم المتحرك مع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$
2. يكون الحل موجبا إذا كانت نقطة التقاطع على يمين محور التراتيب ، ويكون سالبا إذا كانت نقطة التقاطع على يسار محور التراتيب.
3. إذا كان المستقيم المتحرك مماسا للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يكون الحل مضاعفا.

**مثال 1:** انظر التمرين 32
**مثال 2:** انظر التمرين 35
**مثال 3:** انظر التمرين 46
**مثال 4:** انظر التمرين 63

# جدول تلخيصي للتفسير الهندسي

| | |
|---|---|
| $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ | ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x = a$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ | ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y = b$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ | ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = ax + b$ |
| $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$ | ($\mathscr{C}_f$) يقبل مماسا أفقيا عند النقطة $(a; f(a))$ |
| $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$ | ($\mathscr{C}_f$) يقبل نصف مماس عند النقطة $(a; f(a))$ |
| $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ | المنحنيان ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_g$) متقاربان بجوار $\infty$ |
| $f(-x) + f(x) = 0$ | الدالة $f$ فردية و ($\mathscr{C}_f$) يقبل مركز تناظر (المبدأ) |
| $f(-x) - f(x) = 0$ | الدالة $f$ زوجية و ($\mathscr{C}_f$) يقبل محور تناظر (التراتيب) |
| $f(a - x) = f(x)$ | المستقيم : $x = \dfrac{a}{2}$ محور تناظر لـ ($\mathscr{C}_f$) |
| $f(a - x) + f(x) = b$ | النقطة $\omega\left(\dfrac{a}{2}; \dfrac{b}{2}\right)$ مركز تناظر لـ ($\mathscr{C}_f$) |
| $g(x) = f(x)$ | المنحنيان ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_g$) متطابقان |
| $g(x) = f(-x)$ | ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_g$) متناظران بالنسبة لمحور التراتيب |
| $g(x) = -f(x)$ | ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_g$) متناظران بالنسبة لمحور الفواصل |
| $g(x) = -f(-x)$ | ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_g$) متناظران بالنسبة للمبدأ |
| $g(x) = f(x + a) + b$ | ($\mathscr{C}_g$) صورة ($\mathscr{C}_f$) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}$ |
| $g(x) = f(\lvert x\rvert)$ | • الدالة $g$ زوجية<br>• من أجل $x > 0$ : $g(x) = f(x)$ ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_g$) متطابقان<br>• من أجل $x < 0$ : نكمل رسم ($\mathscr{C}_g$) بالتناظر المحوري (بالنسبة لمحور التراتيب) |

| | |
|---|---|
| $g(x) = \lvert f(x) \rvert$ | • من أجل $f(x) > 0$ : $g(x) = f(x)$ ($\mathcal{C}_f$) و ($\mathcal{C}_g$) متطابقان<br>• من أجل $f(x) < 0$ : $g(x) = -f(x)$ ($\mathcal{C}_f$) و ($\mathcal{C}_g$) متناظران بالنسبة لمحور الفواصل (المنحنى ($\mathcal{C}_g$) دائما فوق محور الفواصل) |
| تعيين تقاطع ($\mathcal{C}_f$) مع محور الفواصل | نحلّ المعادلة $f(x) = 0$ |
| تعيين تقاطع ($\mathcal{C}_f$) مع محور التراتيب | نحسب $f(0)$ |
| كتابة معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ | $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ |
| كتابة معادلة المماس الذي معامل توجيهه $a$ | نعيّن $x_0$ حيث $f'(x_0) = a$ ثمّ نكتب معادلة المماس |
| كتابة معادلة المماس عند النقطة ذات الترتيبة $y_0$ | نعيّن $x_0$ حيث $f(x_0) = y_0$ ثمّ نكتب معادلة المماس |
| كتابة معادلة المماس الذي يشمل النقطة $(a; b)$ | نعيّن $x_0$ حيث $b = f'(x_0)(a - x_0) + f(x_0)$ ثمّ نكتب معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة $x_0$ |
| المناقشة البيانية للمعادلة $f(x) = m$ |  |
| المناقشة البيانية للمعادلة $f(x) = ax + m$ |  |
| المناقشة البيانية للمعادلة $f(x) = mx$ |  |

## I- النهايات والمستقيمات المقاربة

**تمرين 01 :**

احسب النهايات للدالة $f$ عند حدود مجموعة تعريفها وعيّن معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathscr{C})$

$①f(x)=3x^2+2|x|+7$ ; $②f(x)=-x^3+2x^2$ ; $③f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x-2}$

$④f(x)=1+\dfrac{3+4x}{1-2x}$ ; $⑤f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2+x+1}$ ; $⑥f(x)=\dfrac{x^2-4x+5}{x^2-4x-5}$

$⑦f(x)=1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}$ ; $⑧f(x)=\dfrac{3}{(x-4)^2}$ ; $⑨f(x)=\dfrac{-3x^3+6x+4}{x^2+2}$ ;

$⑩f(x)=1+\dfrac{3x}{1-4x^2}$ ; $⑪f(x)=3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{1-x}$ ;

$⑫f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ ; $⑬f(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}$ ;

$⑭f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$ ; $⑮f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2x-3}$

$⑯\ f(x)=x-\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$ ; $⑰\ f(x)=x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

**تمرين 02 :**

احسب النهايات التالية:

$① \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+1-\dfrac{4}{x}\right)$ ; $② \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^3}{(x+1)^2}$ ; $③ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2+7x-3}{x^2}$;

$④ \lim\limits_{\substack{x\to-3\\ >}}\dfrac{x+2}{x^2+3x}$ ; $⑤ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x^2+4x}\right)$ ; $⑥ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{3x^2+9}}{x}$ ;

$⑦ \lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-4x}{x-2}$ ; $⑧ \lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+2x-15}{x-3}$ ; $⑨ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^2+3x-7}{x^2+2x-3}$;

$⑩ \lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{x^2-4}$; $⑪ \lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2-x-2}$ ; $⑫ \lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^4+x^3-7x^2+8x-12}{x-2}$ ;

$⑬ \lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$ ; $⑭ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x+8}-3}$ ;

$⑮ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+2}-2}$ ; $⑯ \lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-4x-21}{x-4-\sqrt{x+2}}$ ; $⑰ \lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x^2+x-2}$ ;

⑱ $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-6x+10}+x+2$ ;

⑲ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2-7x+3}$;

⑳ $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)$ ; ㉑ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x+2}}$ ;

㉒ $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{2007}-1}{x-1}$ ; ㉓ $\lim\limits_{x\to3}\frac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}$ ; ㉔ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$ ;

㉕ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 6x}{3x}$ ; ㉖ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 3x}{\tan 2x}$ ; ㉗ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin \alpha x}{\sin x}$; ㉘ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{6x-\pi}$;

㉙ $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\sin(4x-2)}{2x-1}$; ㉚ $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+3x}{x^2+\sin x}$; ㉛ $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}\pi}\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$;

㉜ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}$ ; ㉝ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos 2x+1}$ ;

**تمرين 03 :**

احسب النهايات التالية باستعمال مبرهنة المقارنة:

① $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2+1+\sin x$ ; ② $\lim\limits_{x\to-\infty}3x+\sin 2x$ ; ③ $\lim\limits_{x\to-\infty}-2x^2+x\cos x$;

④ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{2-\sin x}$ ; ⑤ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\sin 2x^2}{x^2+1}$ ; ⑥ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+\cos x}{1+x}$ ;

⑦ $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ; ⑧ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin 3x-\cos 2x}{x}$ ; ⑨ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\sin x}{x-\sqrt{x^2+1}}$ ;

**تمرين 04 :**

لتكن $f$ دالة معرّفة على $Df=[0;+\infty[$ حيث: $f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x+1}}$

1. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب تماما لدينا: $x<\sqrt{x^2+x+1}<x+1$
2. استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب تماما لدينا: $1-\frac{1}{x+1}<f(x)<1+\frac{1}{\sqrt{x}}$
3. استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

**تمرين 05 :**

لتكن $f$ الدالة المعرّفة على $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x^2-x}-2x$

1. قارن بين العددين $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ و $x^2-x$
2. استنتج أنّه من أجل كل $x\geq 1$ لدينا: $f(x)\leq -\frac{1}{2}-x$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
3. نقبل أنّه من أجل كل $x\geq 1$ لدينا: $f(x)\geq -1-x$ . احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$
4. بيّن أنّه من أجل كل $x\geq 1$ لدينا: $f(x)+x=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}$ ، ثمّ استنتج أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=-x-\frac{1}{2}$ مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة $f$ بجوار $+\infty$

**تمرين 06:**

لتكن $f$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بـ: $f(x)=\frac{-x^2+5x+5}{x-3}$ و $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.

1. عيّن الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ حيث من أجل كل $x\neq 3$ فإنّ:
$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-3}$$
2. احسب نهايات الدالة $f$ عند حدود مجال تعريفها
3. بيّن أنّ $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين يُطلب تعيين معادلتيهما
4. ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم المقارب المائل $(\Delta)$

**تمرين 07:**

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{2x^3-11x^2+25x-27}{x^2-4x+4}$ ، و $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. عيّن الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ ، $c$ و $d$ حيث من أجل كل $x\neq 2$ فإنّ:
$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}+\frac{d}{(x-2)^2}$$
2. احسب نهايات الدالة $f$ عند حدود مجال تعريفها
3. بيّن أنّ $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين يُطلب تعيين معادلتيهما
4. ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة للمستقيم المقارب المائل $(\Delta)$

**تمرين 08:**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]-\infty;0] \cup [2;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} - 2x + 1$$

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) + x]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (-3x + 2)]$
3. استنتج وجود مستقيمين مقاربين للمنحنى ($\mathscr{C}$) الممثل للدالة $f$.

## II- الاستمرارية و الاشتقاقية

**تمرين 09:**

لتكن الدالة $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{|x|} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

ادرس استمرارية الدالة $f$ عند $x_0 = 0$

**تمرين 10:**

لتكن الدالة $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x^2 - 4|}{x + 2} & x \neq -2 \\ -4 & x = -2 \end{cases}$$

1. ادرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ عند $x_0 = -2$
2. ادرس استمرارية الدالة $f$ عند $x_0 = -2$

**تمرين 11:**

لتكن الدالة $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3}{x + 1} & x > 1 \\ \sqrt{x^2 + 3} & x \leq 1 \end{cases}$$

1. بيّن أنّ الدالة $f$ مستمرة عند $x_0 = 1$
2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ عند $x_0 = 1$. أعط تفسيرا بيانيا للنتيجة

**تمرين 12:**

لتكن الدالة $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}; & x>0\\ \dfrac{1-x^2}{x-2} \quad ; & x\leq 0\end{cases}$$

1. ادرس استمرارية الدالة $f$ عند $x_0=0$
2. استنتج أنّ الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$

**تمرين 13:**

نعتبر $g$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2+3x}{x+1}; & x>0\\ \sqrt{-x}-x \quad ; & x\leq 0\end{cases}$$

1. بيّن أنّ الدالة $g$ مستمرة عند $0$
2. هل الدالة $g$ مستمرة على $\mathbb{R}$؟
3. هل الدالة $g$ قابلة للاشتقاق عند $0$؟ فسّر النتيجة هندسيا

**تمرين 14:**

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ كما يلي:

$$\begin{cases}f(x)=\dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|}; & x\neq 0\\ f(0)=-1\end{cases}$$

1. بيّن أنّ الدالة $f$ زوجية
2. اكتب $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة
3. ادرس استمرارية الدالة $f$ على مجموعة تعريفها
4. احسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ، ثمّ فسّر النتائج هندسيا

**تمرين 15:**

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-8}{2x-8}; & x\in\,]-\infty;0[\\ \dfrac{1}{2}\sqrt{-x^2+3x+4}; & x\in[0;4]\\ x-5+\dfrac{4}{x}\,; & x\in\,]4;+\infty[\end{cases}$$

بيّن أنّ الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$

**تمرين 16:**

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x+a}{x-2} & x>2\\ \dfrac{2x+b}{3} & x\le 2\end{cases}$$

عيّن قيمة العددين الحقيقيين $a$ و $b$ حتى تكون الدالة $f$ مستمرة عند $x_0=2$

**تمرين 17:**

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\sin 2x+1\,; & x\le 0\\ \sqrt{x^2+2}+3\alpha\,; & 0<x\le 1\\ x^2+4x+2\beta\,; & x>1\end{cases}$$

عيّن قيمة العددين الحقيقيين $\alpha$ و $\beta$ حتى تكون الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$

**تمرين 18:**

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1-\cos(\pi x)}{x}\,; & x<0\\ \sqrt{x^2+x+1}-x\,; & x\ge 0\end{cases}$$

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. بيّن أنّ من أجل كل $x\in\,]-\infty;0[$، لدينا: $1\le f(x)\le\frac{x+2}{x}$ ، ثمّ استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3. بيّن أنّ $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$

4. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا $\alpha$ في المجال $\left]-\frac{1}{2};0\right[$
5. استنتج أنّ $\sin(\pi\alpha)=-\sqrt{-\alpha^2-2\alpha}$

**تمرين 19:**

احسب مشتقة الدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية وذلك بعد تحديد $D_f$ و $D_{f'}$:

1) $f(x)=x^3-4x+5$ ; 2) $f(x)=(x^2-1)^3$ ; 3) $f(x)=\frac{x^2+3x-4}{x^2+3x+4}$ ;

4) $f(x)=\frac{3x^2+4x-5}{2x+1}$ ; 5) $f(x)=\frac{4}{(2x+3)^2}$ ; 6) $f(x)=\frac{4}{(2\sin x+3)^2}$

7) $f(x)=\sqrt{3x-6}$ ; 8) $f(x)=\sqrt{2+\cos 2x}$ ; 9) $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$ ;

10) $f(x)=x+\sin^3(\pi x)$ ; 11) $f(x)=\sqrt{x^2+4x}$ ; 12) $f(x)=|x^2+4x-5|$

**تمرين 20:**

$f$ دالة معرّفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـ: $f(x)=\frac{x^2+\alpha x+\beta}{x+2}$

عيّن العددين الحقيقيين $\alpha$ و $\beta$ بحيث يقبل المنحنى الممثل للدالة $f$ عند النقطة $(-3;1)$ مماسا ميله $\frac{2}{3}$

**تمرين 21:**

الدالة $f$ معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=ax^2+bx+c$

عيّن الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ بحيث يشمل المنحنى الممثل للدالة $f$ النقطة $(0;3)$ و يقبل مماسا في $(\frac{5}{4};-\frac{1}{8})$ موازيا لحامل محور الفواصل.

**تمرين 22:**

$f$ دالة معرّفة على $\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$ بـ: $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{2x-3}$ و $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس

1. بيّن أنّ الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها
2. بيّن أنّ المنحنى$(\mathscr{C}_f)$ يقبل عند نقطتين A و B مماسين ميل كل منهما يساوي 4- ، ثمّ اكتب معادلتي هذين المماسين
3. عيّن نقطتين C و D من $(\mathscr{C}_f)$ بحيث يقبل عندهما المنحنى$(\mathscr{C}_f)$ مماسا يشمل النقطة $(-3;\frac{4}{25})$

**تمرين 23:**

الدالة $f$ معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 + mx + 1$

1. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ وجود وعدد القيم الحدّية للدالة $f$
2. عيّن قيمة $m$ بحيث يقبل المنحنى الممثل للدالة $f$ مماسا معادلته $y = 3x + 1$ عند $x_0 = 0$

## III- مبرهنة القيم المتوسطة والتناظر

**تمرين 24:**

لتكن الدالة $f$ معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 1$

1. ادرس تغيرات الدالة $f$ واستنتج أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $\left]-\frac{1}{2}; 0\right[$
2. هل المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلولا أخرى في $\mathbb{R}$ ؟
3. استنتج إشارة $f(x)$

**تمرين 25:**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]-\infty; 1[ \cup ]1; 2]$ بـ: $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x+2}$

1. احسب النهايات عند حدود مجال تعريف الدالة $f$
2. أنشئ جدول تغيرات الدالة $f$
3. بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]1; 2]$ ، ثمّ استنتج إشارة $f(x)$
4. أعط حصرا للعدد $\alpha$ بتقريب $10^{-1}$.

**تمرين 26:**

لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$ ، و $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. عيّن الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ حيث من أجل كل $x \neq 1$ فإنّ:

$$f(x) = x + a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$$

2. ادرس تغيرات الدالة $f$ وبيّن أنّ المنحنى ($\mathscr{C}$) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يُطلب تعيين معادلته
3. ادرس وضعية ($\mathscr{C}$) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل
4. بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $\left]\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right[$
5. باستعمال طريقة التنصيف أوجد حصرا للعدد $\alpha$ سعته 0,05 ، ثمّ ارسم المنحنى ($\mathscr{C}$).

**تمرين 27:**

نعتبر الدالتين $f$ و $g$ المعرفتين على $\mathbb{R}^*$ و $\mathbb{R}$ على الترتيب بـ:

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ ، } g(x) = x^2 - x + 2$$

1. بيّن أنّه من أجل كل $x \neq 0$، المعادلة $f(x) = g(x)$ تكافئ المعادلة :
$$x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$$
2. نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1$
   أ. ادرس اتجاه تغيّر الدالة $h$ على $\mathbb{R}$. احسب $h(0)$ و $h(1)$
   ب. بيّن أنّ المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على $\mathbb{R}$. ماذا يمثل بيانيا العدد $\alpha$
   ج. أعط حصرا للعدد $\alpha$ بتقريب $10^{-1}$.

**تمرين 28:**

نعتبر الدالتين $f$ و $g$ حيث: $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = -x^3$
بيّن أنّ المنحنيين ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_g$) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها $x_0$ حيث :
$$-\frac{7}{8} < x_0 < -\frac{3}{4}$$

**تمرين 29:**

نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 3x - \sin x - 1$

1. بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا: $3x - 2 \leq f(x) \leq 3x$
2. استنتج نهاية $f(x)$ عند كل من $-\infty$ و $+\infty$
3. احسب $\lim\limits_{x \to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$
4. بيّن أنّ المعادلة $3x = \sin x + 1$ تقبل على الأقل حلا $\alpha$ حيث $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. هل الحل $\alpha$ وحيد ؟
5. بيّن أنّ: $\cos\alpha = \sqrt{6\alpha - 9\alpha^2}$

**تمرين 30:**
لتكن $f$ دالة عددية و $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني. بيّن أنّ المستقيم ذي المعادلة $x = \alpha$ محور تناظر للمنحنى$(\mathscr{C}_f)$ في كل حالة من الحالات التالية:

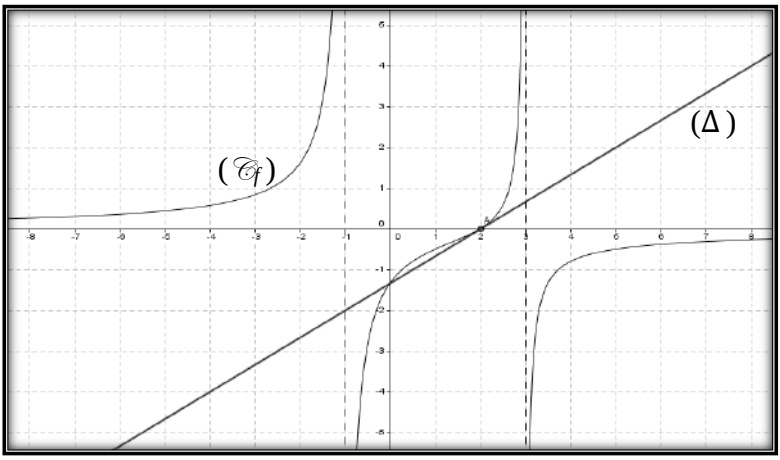
1) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8x + 7}{x^2 - 4x + 3}$ ; $\alpha = 2$
2) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ ; $\alpha = 1$
3) $f(x) = 2x^2 - 12x + 2|x - 3| - 7$ ; $\alpha = 3$

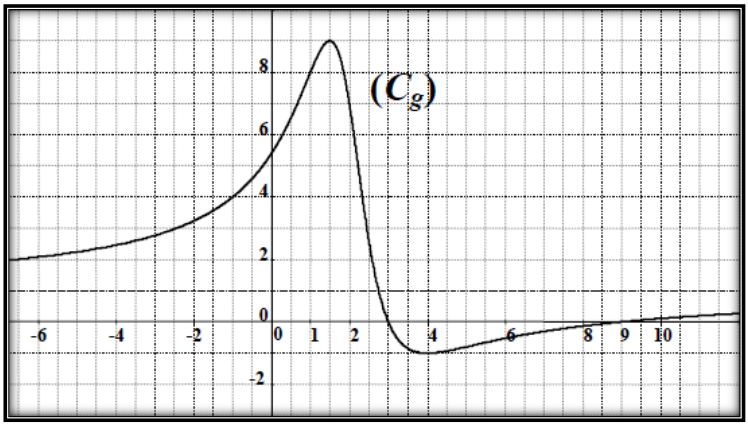
**تمرين 31:**
لتكن $f$ دالة عددية و $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني. بيّن أنّ النقطة $\omega$ مركز تناظر للمنحنى$(\mathscr{C}_f)$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x) = x^3 - 3x - 2$ ; $w(0; -2)$
2) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 2}{x - 1}$ ; $w(1; 6)$
3) $f(x) = [x + \pi + \tan 3x] \cos x$ ; $w(-\pi; 0)$

## IV- استعمال جدول التغيرات و القراءة البيانية في دراسة الدوال

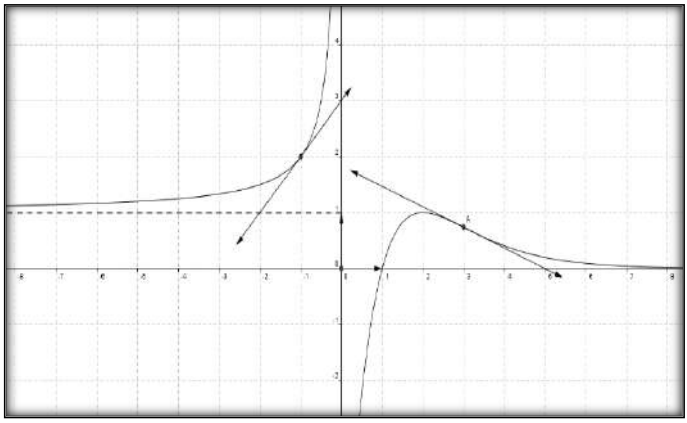
**تمرين 32:**
لتكن الدالتين $f$ و $g$ المعرفتين بتمثيليهما البيانيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ التاليين:






1. خمّن النهايات عند حدود مجال تعريف كل دالة
2. عيّن بيانيا: $f(2)$ , $f'(2)$ , $g(4)$ , $g'(4)$
3. أنشئ لكل دالة جدول تغيراتها ثمّ ادرس إشارة $f(x)$
4. اكتب معادلة المماس $(\Delta)$ للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة $A$
5. ادرس وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة للمماس $(\Delta)$
6. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة: $g(x) = m$

**تمرين 33:**



ليكن الشكل المقابل المنحنى البياني للدالة $f$ و A نقطة ذات الإحداثيات (3 ; 0,74).

1. احسب $f'(3)$ و $f'(-1)$ و $f'(2)$.
2. شكل جدول تغيرات الدالة $f$ ثم عين إشارة $f(x)$.

3. نضع : $h(x) = \frac{-1}{f(x)} + 2$.

أ- عين مجموعة تعريف الدالة $h$.

ب- احسب نهايات الدالة $h$ على أطراف مجموعة تعريفها.

ج- احسب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة $h$.

د- بين أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]2 ; 1[$.

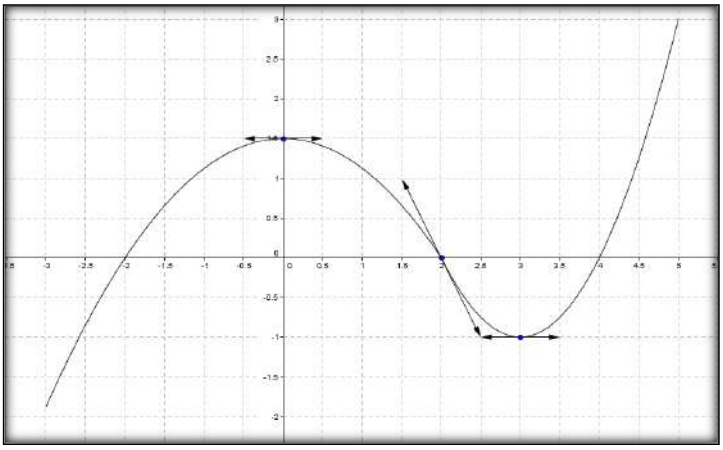
ه- أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_h)$.

4. نضع : $k(x) = \sqrt{f(x)}$.

أ- احسب نهايات الدالة $k$ على أطراف مجموعة تعريفها.

ب- احسب $k'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة $k$ وانشئ المنحنى $(\mathscr{C}_k)$.

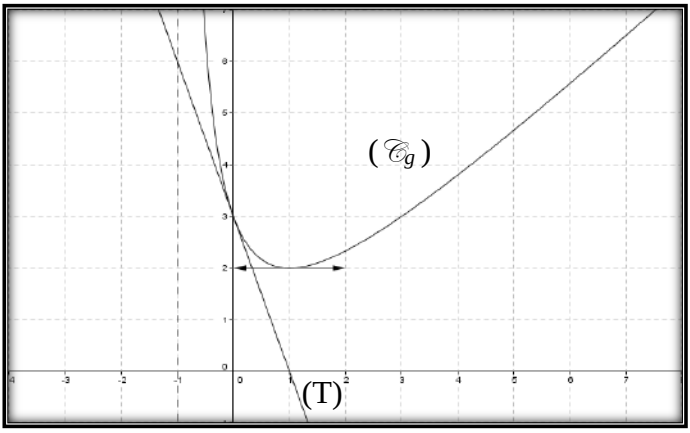
**تمرين 34:**



الشكل الموالي هو التمثيل البياني لدالة $f$ معرّفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[-3; 5]$

1. بقراءة بيانية عيّن : $f(2)$ ; $f'(2)$ ; $f'(3)$ ; $(f \circ f)'(2)$ ; $f''(2)$
2. حل بيانيا في المجال $[-3; 5]$ المتراجحتين التاليتين : $f(x) < 0$ ، $f'(x) \geq 0$
3. اكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة 2
4. شكل جدول تغيرات الدالة $f$
5. بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[3; 5]$
6. $g$ دالة معرّفة كما يلي: $g(x) = 2\sqrt{f(x)}$. شكل جدول تغيرات الدالة $g$

**تمرين 35:**

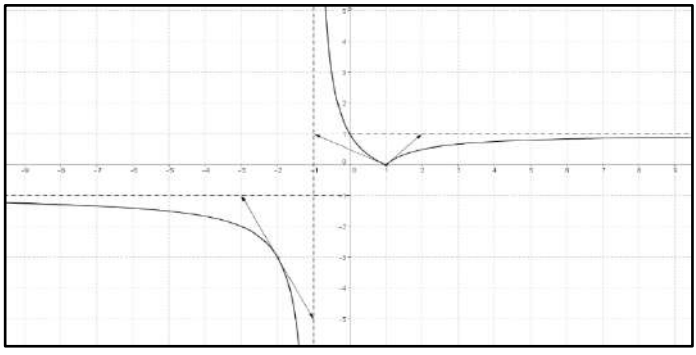



الرسم المقابل يمثل منحنى الدالة g المعرّفة والقابلة للاشتقاق على المجال $]-1;+\infty[$ ، $(T)$ المماس للمنحنى $(\mathscr{C}_g)$ عند النقطة $A(0;3)$.

1. باستعمال المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ عيّن معامل توجيه المماس (T)
2. نضع: $g(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$
   أ. عيّن الأعداد الحقيقية $a$، $b$، $c$ مستعينا بمعطيات المنحنى
   ب. عيّن معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathscr{C}_g)$
   ج. اكتب معادلة المماس (T)
3. ناقش بيانيا وحسب قيم المتغير الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = -2m$

**تمرين 36:**

لتكن الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بتمثيلها البياني $(\mathscr{C}_f)$:



1. عيّن نهايات الدالة $f$ عند حدود مجال تعريفها $D_f$ والمستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$
2. اكتب معادلة المماس للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة التي فاصلتها 2-
3. هل الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند 1 ؟ علل إجابتك
4. عيّن إشارة $f'(x)$ حسب قيم $x$ من $D_f$
5. ماهي المجالات من $D_f$ التي تكون عليها $f$ مستمرة
6. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة: $f(x) = m$
7. أ. عيّن إشارة $f(x)$ حسب قيم $x$ من $D_f$

ب. اشرح كيفية رسم $(\mathscr{C}_h)$ المنحنى البياني للدالة $h$ المعرّفة كما يلي: $h(x) = |f(x)|$

ج. ارسم $(\mathscr{C}_h)$ في نفس المعلم.

**تمرين 37:**

إليك جدول تغيرات دالة $g$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R} - \{0\}$. نرمز بـ $(\mathscr{C}_g)$ إلى المنحنى البياني للدالة $g$

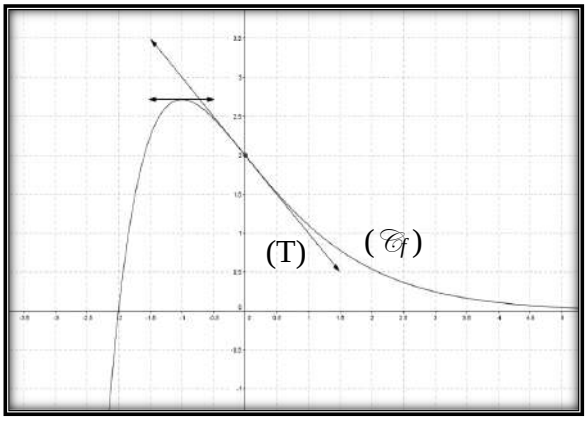
| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $1$ | ↗ | $2$ | ↘ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $3$ | ↘ | $-\infty$ |

أجب بصحيح أو خاطئ مع التبرير

1. المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب لـ $(\mathscr{C}_g)$
2. محور التراتيب مقارب لـ $(\mathscr{C}_g)$
3. للمعادلة $g(x) = 0$ ثلاثة حلول
4. $(\mathscr{C}_g)$ يقبل مماسا معادلته $y = 1$ عند النقطة ذات الفاصلة 1
5. أ) $g(5) > g(2)$ ب) $g\left(-\frac{1}{4}\right) < g(-\frac{3}{4})$ ج) $g\left(\frac{1}{4}\right) < g(\frac{3}{4})$

**تمرين 38:**

المنحنى المقابل هو لدالة $f$ معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $(T)$ المماس لـ $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة $A(0; 2)$.




بقراءة بيانية عيّن:

1. $f'(0)\,,f(0)\,,f'(-1)\,,f(-1)$
2. حلول المتراجحة $f(x) \leq 0$
3. جدول تغيرات الدالة $f$
4. معادلة المماس $(T)$
5. وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة لمماسه. ماذا تستنتج ؟

**تمرين 39:**

$f$ دالة عددية معرّفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بجدول تغيراتها التالي:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $f(-3)$ | ↘ | ‖ | ↘ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $0$ | ↗ | |

1. إذا علمت أنّ $f(-3) < 0$، أوجد إشارة $f(x)$
2. نقبل أن الدالة $f$ معرّفة بالعبارة $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+d}$ وليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني
   أ. احسب $f'(x)$ بدلالة $d, c, b, a$
   ب. بالاستعانة بجدول التغيرات أثبت أن: $d = 1\ ,\ c = 4\ ,\ b = -4\ ,\ a = 1$
   ج. أتمم جدول التغيرات بحساب النهايات و $f(-3)$
   د. بيّن أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ يُطلب تعيين معادلته
   ه. أوجد المماسات للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ التي معامل توجيهها يساوي 3-

**تمرين 40:**

**تمرين 40:**

جدول التغيرات الموالي هو لدالة $u$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u'(x)$ | | $+$ | $\|\|$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $u(x)$ | $0$ | ↗ | $+\infty$ $\|\|$ $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $0$ |

1. عيّن مجموعة تعريف الدالة $u$
2. عيّن معادلات المستقيمات المقاربة لـ $(\mathscr{C}_u)$ التمثيل البياني للدالة $u$
3. عيّن إشارة $u(x)$
4. بيّن أنّ المعادلة $u(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[2; +\infty[$
5. نعتبر الدالة $v$ المعرّفة كما يلي: $v = u^2$
   أ. عيّن مجموعة تعريف الدالة $v$
   ب. عبّر عن $v'(x)$ بدلالة $u(x)$ و $u'(x)$، ثمّ ادرس تغيرات الدالة $v$ و شكل جدول تغيراتها.

**التمرين 41 :**

$f$ دالة معرّفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ ، $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني وجدول تغيراتها معطى كما يلي:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $2$ | ↗ | $+\infty$ $\|\|$ $+\infty$ | ↘ | $2$ |

أجب بصحيح أو خطأ على كل سؤال مما يلي مع تبرير الإجابة:

1. المستقيم الذي معادلته $y = 2$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$
2. المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا
3. مجموعة حلول المتراجحة $f(x) > 0$ هي $S = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$
4. في المجال $]-\infty; -1[$ يكون $f(-2) > f(x)$ عندما يكون $x < -2$
5. النقطة $A(-3; 1)$ تنتمي إلى المنحنى $(\mathscr{C}_f)$
6. الدالة $f$ زوجية.

## V- دراسة الدوال العددية

**التمرين 42 :**

لتكن $g$ دالة عددية معرفة على $]-1;+\infty[$ و $(\mathscr{C}_g)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ :

$$g(x)=x+2-\frac{5}{2}\sqrt{x+1}$$

1. احسب $\lim\limits_{x\to -1^{>}} \frac{g(x)-1}{x+1}$ . فسّر النتيجة بيانيا
2. احسب نهاية $g$ عند $+\infty$
3. عيّن حلول المتراجحة : $4\sqrt{x+1}-5\geq 0$
4. ادرس اتجاه تغيّر الدالة $g$ ثمّ شكل جدول تغيراتها
5. اكتب معادلة المماس $(\Delta)$ عند النقطة ذات الفاصلة 3
6. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و المماس $(\Delta)$
7. لتكن $h$ دالة عددية و $(\mathscr{C}_h)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ :

$$h(x)=5-|x-3|-\frac{5}{2}\sqrt{4-|x-3|}$$

أ- بيّن أنّ $D_h=[-1;7]$

ب- بيّن أنّ المستقيم : $x=3$ محور تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_h)$

ج- بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x$ حيث : $x\in[-1;3]$ : $h(x)=g(x)$

د- استنتج رسم المنحنى $(\mathscr{C}_h)$ في نفس المعلم بلون مغاير.

**التمرين 43 :**

I- لتكن $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=x^3-3x^2+3x-5$

1- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2- ادرس تغيرات الدالة $g$

3- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ ، حيث $\alpha\in\,]\,2\,;\,3\,[$.

4- استنتج إشارة $g(x)$

II- لتكن $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=\frac{x^3-3x^2+3x+1}{(x-1)^2}$ و $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=1\ cm$

1- احسب نهاية الدالة $f$ على أطراف مجال تعريفها

2- بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}-\{1\}$ : $f'(x)=\frac{g(x)}{(x-1)^3}$

3- استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ و شكل جدول تغيراتها

4- بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}-\{1\}$ : $f(x)=x-1+\frac{2}{(x-1)^2}$

- بيّن أن المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة : $y=x-1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $-\infty$ ، $+\infty$
- ادرس وضعية المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$

5- ارسم المستقيم $(\Delta)$ و المنحنى $(\mathscr{C}_f)$. نأخذ $\alpha \approx 2{,}5$ ، $f(\alpha) \approx 2{,}6$

**التمرين 44:**

$f$ دالة عددية معرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ حيث: $f(x)=\frac{3x+2}{(x+1)^2}$ و $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. احسب النهايات للدالة $f$ ثمّ فسّر النتائج هندسيا
2. ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ ثمّ ضع جدول تغيراتها
3. عيّن تقاطع $(\mathscr{C}_f)$ مع حاملي المحورين
4. اكتب معادلة المماس لـ $(\mathscr{C}_f)$ و الذي يشمل النقطة $A(-1{,}3)$
5. ارسم بكل عناية $(\mathscr{C}_f)$
6. ادرس بيانيا تبعا لقيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة الآتية:

$$mx^2+(2m-3)x+m-2=0.$$

**التمرين 45:**

I- أجب بصحيح أم خطأ مع التبرير :

1. معادلة المماس للتمثيل البياني للدالة $x \to \sqrt{x^2+3}$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي: $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$
2. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=1$
3. الدالة $u(x)=e^{|x|}$ قابلة للاشتقاق عند 0

II- $f$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\frac{\cos x}{x^2}+x+1$. اختر الجواب الصحيح مع التعليل

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ هي : أ) $+\infty$ ب) $-\infty$ جـ) 0
2. يقبل منحنى الدالة $f$ مستقيما مقاربا $(\Delta)$ معادلته :

أ) $y = x + 1$ ب) $y = -x - 1$ جـ) $y = 2$

**التمرين 46:**

نعرّف الدالة $f$ على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي : $f(x) = |x - 3| - \frac{2}{x-1}$ ، و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحناها البياني.

1. هل $f$ قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 3$ ؟ ماذا تستنتج بالنسبة لـ $(\mathscr{C}_f)$ ؟
2. ادرس تغيرات الدالة $f$.
3. أثبت أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين مائلين $(\Delta)$ و $(\Delta')$ معادلتهما $y = x - 3$ و $y = -x + 3$.
4. أنشئ $(\Delta)$ ، $(\Delta')$ و $(\mathscr{C}_f)$.
5. ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة : $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 2 + \frac{2-mx+m}{x-1}$ .

**التمرين 47:**

نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{|x^2-3x|}{x+1}$ ، و $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. اكتب الدالة $f$ دون رمز القيمة المطلقة
2. بيّن أنّه يمكن كتابة الدالة $f$ على الشكل: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ في كل حالة
3. احسب $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$. ماذا تستنتج؟
4. احسب $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(3+x)}{x}$. ماذا تستنتج؟
5. ادرس تغيرات الدالة $f$
6. عيّن المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathscr{C})$
7. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيمات المقاربة
8. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط $m$ عدد حلول المعادلة: $|x^2 - 3x| = m(x + 1)$

**التمرين 48:**

1. نعرّف الدالة $f$ على $[-2; 2]$ بـ: $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ ، وليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحناها البياني (الوحدة $2cm$)

أ. احسب $\lim\limits_{\substack{x\to -2 \\ >}} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ <}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة لـ $f$ و بالنسبة لـ ($\mathscr{C}_f$) ؟

ب. ادرس تغيرات الدالة $f$.

ج. أنشئ المنحنى ($\mathscr{C}_f$).

2. نعرّف الدالة $g$ على $[-2;2]$ كما يلي : $g(x) = -x\sqrt{4-x^2}$ .
أنشئ ($\mathscr{C}_g$) انطلاقا من ($\mathscr{C}_f$).

3. ناقش بيانيا حسب قيم العدد الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة :
$g(x) = -2m + 1$

4. لتكن $h$ دالة معرّفة على $[-2;2]$ بـ: $h(x) = |x|\sqrt{4-x^2}$. بيّن أنّ $h$ دالة زوجية، ثمّ استنتج إنشاء ($\mathscr{C}_h$).

**التمرين 49:**

نعرّف على $\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ الدالة $f$ كما يلي : $f(x) = \frac{\alpha x^2+\beta x-1}{2x-3}$ ، و ليكن ($\mathscr{C}_f$) منحناها البياني.

I- عيّن α و β حتى يكون المستقيم (T) ذو المعادلة $y = -3x + 3$ مماسا لـ ($\mathscr{C}_f$) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

II- نضع : α = 2 و β = -1

1. عيّن $a$ ، $b$ ، $c$ حيث من أجل كل $x$ من $\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ فإنّ : $f(x) = ax + b + \frac{c}{2x-3}$.
2. ادرس تغيرات الدالة $f$.
3. أثبت أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيما مقاربا مائلا ($\Delta$) معادلته $y = x + 1$.
4. ادرس وضعية ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة لـ ($\Delta$).
5. أثبت أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقبل كمركز تناظر له نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين.
6. أثبت وجود مماسين لـ ($\mathscr{C}_f$) معامل توجيه كل منهما هو (-3) ، ثمّ اكتب معادلة كل منهما.
7. أنشئ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) و المماسات.
8. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد نقط تقاطع ($\mathscr{C}_f$) مع المستقيم ($\Delta_m$) ذي المعادلة $y = -3x + m$

III- نعرّف الدالة $g$ حيث : $g(x) = \frac{2x^2-|x|-1}{2|x|-3}$ ، و ليكن ($\mathscr{C}_g$) منحناها البياني.

1. أثبت أنّ $g$ دالة زوجية.
2. بيّن كيف يمكن إنشاء ($\mathscr{C}_g$) انطلاقا من ($\mathscr{C}_f$).
3. أنشئ في نفس المعلم السابق ($\mathscr{C}_g$).

**التمرين 50:**

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = 2cm$

I- نعرّف الدالة $f$ على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ، و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحناها البياني

1. ادرس تغيرات الدالة $f$ مستنتجا إشارة $f(x)$
2. استنتج المستقيمات المقاربة لـ $(\mathscr{C}_f)$
3. أثبت أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف $\omega$ يُطلب تعيين إحداثياتها
4. اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0
5. أنشئ المماس (T) و المنحنى $(\mathscr{C}_f)$

II- نعرّف على $\mathbb{R}$ الدالة $g$ حيث : $g(x) = -x + 2 + \sqrt{x^2+1}$ ، و ليكن $(\mathscr{C}_g)$ منحناها البياني.

1. أثبت أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ فإنّ : $g'(x) = f(x)$
2. ادرس تغيرات الدالة $g$
3. أثبت أنّ $(\mathscr{C}_g)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ معادلته $y = -2x + 2$
4. ادرس وضعية $(\mathscr{C}_g)$ بالنسبة لـ $(\Delta)$
5. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_g)$.

**التمرين 51:**

I- نعرّف الدالة $f$ على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$ ، و ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحناها البياني.

1. ادرس تغيرات الدالة $f$.
2. عيّن المستقيمات المقاربة لـ $(\mathscr{C}_f)$.
3. ليكن (T) مماسا لـ $(\mathscr{C}_f)$ موازيا للمستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y = x$. عيّن معادلة المماس (T).
4. أنشئ (T) و$(\mathscr{C}_f)$.

II- 1. عيّن العددين الحقيقيين $\alpha$ و $\beta$ حتى يكون $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{(x+1)^2}$

2. نعرّف الدالة $g$ على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي : $g(x) = \frac{-4}{x^2+2x+1}$ ، و ليكن $(\mathscr{C}_g)$ منحناها البياني.

- عيّن $\gamma$ حتى يكون من أجل كل $x$ من $\mathbb{R} - \{-1\}$: $g(x) = f(x) + \gamma$
- استنتج جدول تغيرات الدالة $g$ ، ثمّ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_g)$

III- نعرّف الدالة $h$ كما يلي : $h(x) = 1 - \frac{4}{(\sin x+1)^2}$

1. عيّن مجموعة تعريف الدالة $h$.
2. بيّن أنّه يمكن اعتبار الدالة $h$ كمركب دالتين إحداهما هي $f$ و الأخرى يُطلب تعيينها.
3. احسب $h'(x)$ و استنتج أنّ الدالة $h$ متزايدة تماما على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

**التمرين 52:**

I- نعتبر الدالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1. ادرس تغيرات الدالة $g$
2. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ ، حيث $\alpha \in ]\ 2\ ;\ 3\ [$ ، ثمّ عيّن حصرا للعدد $\alpha$ بالتقريب إلى $10^{-1}$
3. استنتج إشارة $g(x)$.

II- نعرّف الدالة $f$ على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$

1. عيّن الأعداد الحقيقية $a, b, c, d$ حيث من أجل كل $x \in D_f$:
$$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-1}$$
2. بيّن أنّ من أجل كل $x \in D_f$: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$ ، ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة $f$
3. بيّن أنّ: $f(\alpha) = \frac{3\alpha+4}{2}$ ، ثمّ عيّن حصرا لـ $f(\alpha)$.

III- نسمي $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

1. برهن أنّ للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مستقيم مقارب مائل $(\Delta)$
2. ادرس وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$
3. برهن أنّ للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مماسين $(D)$ و $(D')$ يوازيان $(\Delta)$ يُطلب تعيين معادلتيهما
4. أنشئ $(D)$ ، $(D')$ ، $(\Delta)$ و $(\mathscr{C}_f)$
5. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة:
$x^3 - mx^2 + m + 2 = 0$ .

**التمرين 53:**

لتكن الدالة $f$ المعرّفة بالعبارة : $f(x) = x\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}$

1. عيّن مجموعة تعريف الدالة $f$ ، ثمّ ادرس تغيراتها
2. احسب $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ وفسّر النتيجة هندسيا

3. اكتب معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0
4. ارسم $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$
5. لتكن E مجموعة النقط $M(x;y)$ التي تحقق المعادلة :
$(x-1)x^2+(x+1)y^2=0$.
أ. بيّن أنّ المجموعة E هي اتحاد منحنيين يُطلب تعيين معادلتيهما
ب. أنشئ المجموعة E في نفس المعلم السابق

**التمرين 54:**

$f$ دالة معرّفة على المجال $]-\infty;-4]\cup[0;+\infty[$ بالعبارة :
$f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x}$. $(\mathscr{C}_f)$ منحنى الدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. ادرس قابلية الاشتقاق عند القيمتين 0 و 4- ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا
2. ادرس تغيرات الدالة $f$
3. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+3)]$ . ماذا تستنتج ؟
4. ارسم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$
5. لتكن الدالة $g$ المعرّفة على المجال $]-\infty;-4]\cup[0;+\infty[$ بـ:
$g(x)=x+1-\sqrt{x^2+4x}$. نسمي $(\mathscr{C}_g)$ تمثيلها البياني.
برهن أنّ المنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ متناظران بالنسبة للنقطة $\omega(-2;-1)$
6. عيّن $(\Gamma)$ مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق :
$y^2-2y(x+1)-2x+1=0$
7. أنشئ المجموعة $(\Gamma)$.

**التمرين 55:**

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ ، نعتبر الدالة $f_n$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$f_n(x)=(x^2-2x)^n$.

1. ادرس تغيرات الدالة $f_n$ (ميّز الحالتين $n$ زوجي ثمّ فردي)
2. تحقق أنّ المستقيم ذي المعادلة $x=1$ هو محور تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_n)$
3. برر أنّ $(\mathscr{C}_n)$ يمرّ من أربع نقاط إحداثياتها مستقلة عن العدد الطبيعي $n$
4. ارسم في نفس المعلم المنحنيين $(\mathscr{C}_1)$ و $(\mathscr{C}_2)$

**التمرين 56:**

$f$ الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 1 + 2\cos x + \cos 2x$

1. أثبت أنّ الدالة $f$ زوجية وأنّ دورها $2\pi$ ثمّ ادرس تغيراتها في مجال كافي
2. أوجد نقط تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مع حامل محور الفواصل
3. ارسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$) على المجال $[-\pi;\pi]$ ، ثمّ استنتج كيفية رسمه على $\mathbb{R}$
4. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط $m$ عدد حلول الجملة: $\begin{cases}\cos^2 x + \cos x = \frac{m}{2} \\ -\pi \leq x \leq \pi\end{cases}$

**التمرين 57:**

I- نعتبر الدالة $f_m$ للمتغير الحقيقي $x$ و الوسيط الحقيقي $m$ المعرّفة كما يلي:

$f_m(x) = \frac{-x^2-2x+7}{x^2-2x+m}$. وليكن ($\mathscr{C}_m$) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. عيّن حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ مجموعة تعريف الدالة $f_m$
2. بيّن أنّ جميع المنحنيات ($\mathscr{C}_m$) تشمل نقطتين ثابتتين يُطلب تعيين إحداثييها
3. عيّن $m$ حتى يشمل المنحنى ($\mathscr{C}_m$) النقطة $A(3;-2)$

II- نفرض في هذا الجزء أنّ $m = 1$

1. ادرس تغيرات الدالة $f_1$
2. عيّن المستقيمات المقاربة واكتب معادلة المماس للمنحنى ($\mathscr{C}_1$) عند النقطة ذات الفاصلة -1
3. ارسم المماس والمنحنى ($\mathscr{C}_1$)
4. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $k$ عدد وإشارة حلول المعادلة: $(k-1)x^2 - 2(k+1)x + k + 7 = 0$

III- لتكن $g$ دالة معرّفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ: $g(x) = \frac{x^2+2x-7}{|x-1|(x-1)}$. نسمي $(\gamma)$ تمثيلها البياني

1. اكتب عبارة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة
2. فسّر كيف يمكن رسم المنحنى $(\gamma)$ انطلاقا من المنحنى ($\mathscr{C}_1$)، ثمّ ارسم المنحنى $(\gamma)$ في نفس المعلم السابق.

**التمرين 58:**

I- نعتبر الدالة $f_m$ للمتغير الحقيقي $x$ و الوسيط الحقيقي $m$ المعرّفة على $\mathbb{R} - \{3\}$ بـ: $f_m(x) = \frac{3x^2 - mx}{x-3}$ وليكن $(\mathscr{C}_m)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. بيّن أنّه توجد نقطة وحيدة A تنتمي إلى كل المنحنيات $(\mathscr{C}_m)$
2. ما هي قيم $m$ التي تجعل الدالة $f_m$ تتغير دوما في نفس الاتجاه ؟
3. ما هي قيم $m$ التي تجعل الدالة $f_m$ تقبل قيمة حدية عظمى و قيمة حدية صغرى ؟

II- نعتبر الدالة $g$ المعرّفة بـ: $g(x) = f_5(x)$ ، وليكن $(\mathscr{C}_g)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق

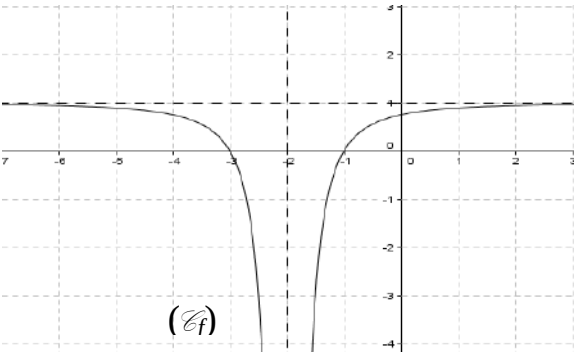
1. ادرس تغيرات الدالة $g$
2. برهن أنّه توجد نقطتين من $(\mathscr{C}_g)$ يكون عندهما ميل المماس يساوي 2 ، ثمّ اكتب معادلة هذين المماسين
3. عيّن الأعداد الحقيقية $\gamma$ ، $\beta$ ، $\alpha$ حيث من أجل كل $x \neq 3$ : $g(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x-3}$
4. بيّن أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ يقبل مستقيمين مقاربين يُطلب تعيين نقطة تقاطعهما $\omega$
5. بيّن أنّ النقطة $\omega$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_g)$
6. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_g)$
7. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $\lambda$ عدد وإشارة حلول المعادلة: $3x^2 - (2\lambda + 5)x + 6\lambda = 0$
8. نعتبر الدالة $h$ المعرّفة بالشكل : $h(x) = \frac{3x^2 - 5|x|}{|x|-3}$
   أ. عيّن مجموعة تعريف الدالة $h$
   ب. ادرس قابلية الاشتقاق للدالة $h$ عند $x_0 = 0$
   ج. ادرس شفعية الدالة $h$
   د. برهن أنّ $h(x) = g(x)$ على مجال I يُطلب تعيينه ، ثمّ استنتج كيفية رسم المنحنى $(\mathscr{C}_h)$
   ه. ارسم المنحنى $(\mathscr{C}_h)$ في نفس المعلم السابق.

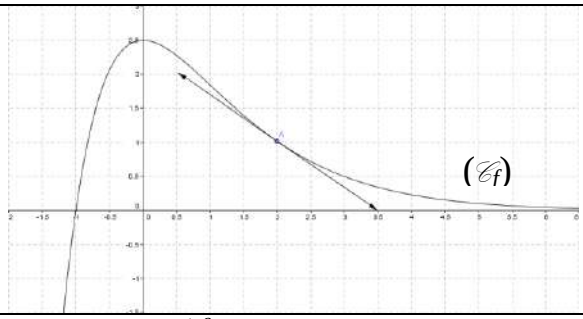
## التمرين 59:

اختر في كل حالة الإجابة الصحيحة مع التبرير:

| الأسئلة المقترحة | الإجابة الصحيحة | |
|---|---|---|
| $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2x-3}$ | $Df=]-\infty;-3]\cup[1;+\infty[$ | $Df=[0;+\infty[$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-x-6}}$ | $0$ | $1$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-1\right)$ | $+\infty$ | $-\dfrac{1}{2}$ |
| $f(x)=x+\cos^2 x$ | $f'(x)=1-2\sin x$ | $f'(x)=1-\sin 2x$ |
| $f'(x)=\sqrt{x}$ | $f(x)=2x\sqrt{x}$ | $f(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+1$ |
| $f(x)=-1$ المعادلة | تقبل حلا وحيدا على $\mathbb{R}$ | تقبل حلين على الأقل على $\mathbb{R}$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ | $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ | $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ |
| $f(x)=-\dfrac{1}{(x+2)^2}$ | $f(x)=1-\dfrac{1}{(x+2)^2}$ | |
| المستقيم $y=2$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ | المستقيم $x=-2$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ | |
| $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ | $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ | |
| الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ تحقق: $f(1-x)+f(x)=1$ | $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ | $(\Delta): y=2$ محور تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ |
| $f'(0)=-\dfrac{3}{2}$ | $f'(0)=-\dfrac{3}{2}$ | $f'(2)=-\dfrac{2}{3}$ |
| $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ | $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ | |
| $f'(0)=0$ | $f'(0)=2{,}5$ | |
| الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\begin{cases}x^2-1; x\le 0\\ x+m; x>0\end{cases}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ من أجل | $m=0$ | $m=-1$ |

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |



## V مواضيع الدوال العددية في البكالوريا

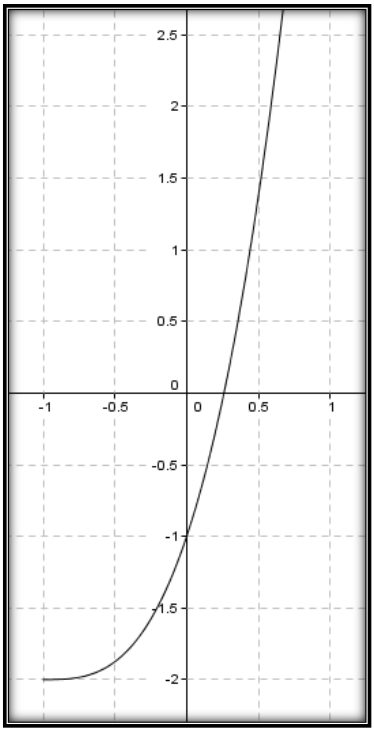
**التمرين 60 : بكالوريا 2008 ر**

نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على المجال $]1\,;+\infty[$ بالعبارة: $f(x)=3+\sqrt{x-1}$. يرمز $(\mathscr{C}_f)$ إلى منحنى $f$ في المستوي المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. (الوحدة على المحورين $2cm$)

1. احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ وفسّر النتيجة هندسيا
2. ادرس تغيرات الدالة $f$
3. باستعمال منحنى دالة العدد المركّبالجذر التربيعيالعدد المركّب ، أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

**التمرين 61 : بكالوريا 2008 ع ت**

المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية $g$ المعرّفة على المجال $]-1\,;+\infty[$ كما يأتي : $g(x)=x^3+3x^2+3x-1$.




1. أ. بقراءة بيانية شكّل جدول تغيرات الدالة $g$ وحدّد $g(0)$ وإشارة $g\left(\frac{1}{2}\right)$
   ب. علّل وجود عدد حقيقي $\alpha$ من المجال $]0\,;\frac{1}{2}[$ يحقق $g(\alpha)=0$
   ج. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1\,;+\infty[$
2. $f$ هي الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1\,;+\infty[$ بما يأتي: $f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$ وليكن $(\Gamma)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$
   أ. تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-1\,;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^3}$
   ب. عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسّر النتيجة بيانيا

ج. احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} -1} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)]$ وفسّر النتيجتين بيانيا

د. شكّل جدول تغيرات الدالة $f$

3. نأخذ $\alpha = 0{,}26$

أ. عيّن مدوّر $f(\alpha)$ إلى $10^{-2}$

ب. ارسم المنحنى $(\Gamma)$

4. اكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2}$، حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان.

**التمرين 62 : بكالوريا 2008 ت إ**

لتكن $f$ دالة عددية قابلة للاشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها. لها جدول التغيرات التالي:

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↘ | $3$ | ↗ | $+\infty$ |

تُكتب عبارة $f(x)$ على الشكل: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$، حيث $a$ ، $b$ ، $c$ أعداد حقيقية.

1. احسب $f'(x)$

2. اعتمادا على جدول تغيرات الدالة $f$ :

أ. عيّن الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ ، $c$

ب. عيّن $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)$ وفسّر النتيجة بيانيا

ج. قارن بين صورتي العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ بالدالة $f$ معللا إجابتك

3. نأخذ فيما يلي: $a = 1\,, b = 1\,, c = \frac{1}{4}$ وليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحنى البياني الممثل لتغيرات الدالة $f$ في معلم متعامد ومتجانس.

أ. بيّن أنّه عندما يؤول $x$ إلى $(+\infty)$ أو $(-\infty)$ ، فإنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا $(\Delta)$ معادلته: $y = x + 1$

ب. ادرس وضعية المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$

ج. أثبت أنّ النقطة $\omega(1\,;2)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

د. عيّن نقط تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مع حامل محور الفواصل

4. $\lambda$ عدد حقيقي. عيّن بيانيا حسب قيم $\lambda$ عدد حلول المعادلة $f(x) = |\lambda|$

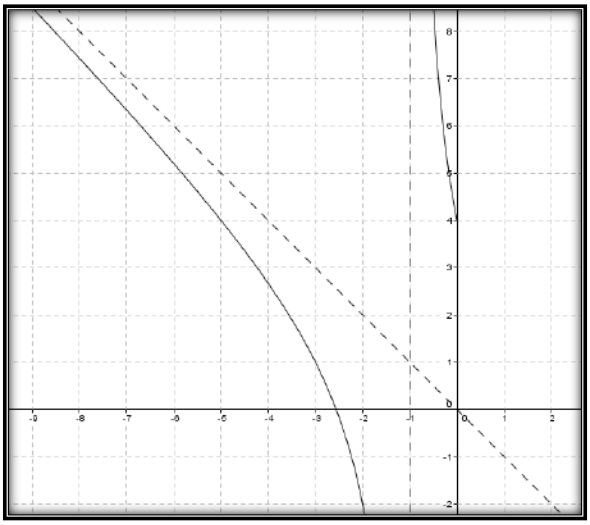
**التمرين 63 : بكالوريا 2009 ر**

$f$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1\ ;+\infty[$ كما يأتي: $f(x)=x-\frac{2}{\sqrt{x+1}}$.

$(\mathscr{C}_f)$ منحنى الدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\ ;\vec{\imath}\ ;\vec{\jmath})$.

1. ادرس تغيرات الدالة $f$
2. أ. بيّن أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته: $y=x$
   ب. ادرس الوضعية النسبية للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و (D)
3. أ. بيّن أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $x_0$ حيث $1{,}3<x_0<1{,}4$
   ب. عيّن معادلة $(\Delta)$ مماسا للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب
   ج. ارسم $(\Delta)$ و $(\mathscr{C}_f)$ في نفس المعلم
4. $g$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1\ ;+\infty[$ بالعبارة: $g(x)=|f(x)|$.
   $(\mathscr{C}_g)$ منحنى الدالة $g$ في المعلم السابق.
   - بيّن كيف يمكن إنشاء $(\mathscr{C}_g)$ انطلاقا من $(\mathscr{C}_f)$ ، ثمّ ارسمه في نفس المعلم السابق
5. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول $x$ : $g(x)=m^2$

**التمرين 64 : بكالوريا 2009 ع ت**



I- $f$ دالة معرّفة على $I=]-\infty\ ;-1[\cup]-1\ ;0]$ بـ: $f(x)=-x+\frac{4}{x+1}$. $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مبيّن في الشكل.

1. أ. احسب نهايات $f$ عند الحدود المفتوحة لـ I
   ب. بقراءة بيانية ودون دراسة اتجاه تغيرات $f$ ، شكّل جدول تغيراتها

2. $g$ دالة معرّفة على المجال $]0\ ;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+\frac{4}{x+1}$. ($\mathscr{C}_g$) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس
   أ. احسب نهاية $g$ عند $+\infty$
   ب. تحقق من أنّ ($\mathscr{C}_g$) يقبل مستقيما مقاربا مائلا ($\Delta$) عند $+\infty$ يُطلب تعيين معادلة له
   ج. ادرس تغيرات $g$

II- $k$ دالة معرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $k(x)=|x|+\frac{4}{x+1}$

1. أ. احسب $\lim\limits_{h\to 0^{>}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$ ، $\lim\limits_{h\to 0^{<}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$. ماذا تستنتج ؟
   أ. أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة
2. اكتب معادلتي المماسين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$
3. ارسم $(\Delta_1)$ ، $(\Delta_2)$ و ($\mathscr{C}_k$).

**التمرين 65 : بكالوريا 2010 ت ر**

$f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ ، و ($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\ ;\vec{\imath}\ ;\vec{\jmath})$.

1. أ. أثبت أنّ الدالة $f$ فردية
   ب. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا: $f'(x)=1+\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$
   ج. ادرس تغيرات الدالة $f$
2. أ. اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) في النقطة ذات الفاصلة 0
   ب. ادرس وضعية ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة للمماس (T) واستنتج أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيينها
   ج. بيّن أنّ المستقيم $(d)$ ذي المعادلة: $y=x+1$ مقارب للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) في جوار $+\infty$ ، ثمّ استنتج معادلة $(d')$ المستقيم المقارب الآخر
   د. ارسم $(d')$ ، $(d)$ و ($\mathscr{C}_f$) في المعلم السابق
3. $g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=|x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$
   أ. بيّن أنّ الدالة $g$ زوجية
   ب. انطلاقا من ($\mathscr{C}_f$) ارسم ($\mathscr{C}_g$) منحنى الدالة $g$ في نفس المعلم السابق.

**التمرين 66 : بكالوريا 2014 ع ت**

I- لتكن $g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$

1. أ. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

   1. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ على $\mathbb{R}$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها

2. أ. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $0,7 < \alpha < 0,8$

   ب. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$.

II- نعتبر الدالة العددية $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$ ، و $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. أ. بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$

   ب. استنتج أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ يُطلب تعيين معادلة له

   ج. ادرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و$(\Delta)$

3. أ. بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x) = \frac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$

   ب. استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم $x$ ، ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة $f$. (نأخذ $f(\alpha) \approx -0,1$)

4. احسب $f(1)$ ، ثمّ حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = 0$

5. أنشئ المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

6. لتكن الدالة العددية $h$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = \frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$ ، و $(\mathscr{C}_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق

   أ. تحقّق أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $h(x) = f(x) - 2$

   ب. استنتج أنّ $(\mathscr{C}_h)$ هو صورة $(\mathscr{C}_f)$ بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه ، ثمّ أنشئ $(\mathscr{C}_h)$.

**التمرين 67 : بكالوريا 2017 ت ر**

I- نعتبر الدالة العددية $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^3 + 6x + 12$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$

2. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $\alpha \in ]-1,48\,;-1,47[$ ، ثمّ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$.

II- نعتبر الدالة العددية $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^3-6}{x^2+2}$ ، وليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

1. أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x) = \frac{x.g(x)}{(x^2+2)^2}$ ، ثمّ ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ وشكّل جدول تغيراتها

2. أ. بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

ب. ادرس وضعية المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$

3. بيّن أنّ $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

4. ارسم المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

5. نرمز بـ $S$ إلى مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها : $x = \alpha$ ، $x = 0$ و $y = 0$

اثبت أنّ من أجل كل $x \in [\alpha\,;0]$ ، $-3 \le f(x) \le f(\alpha)$ ، ثمّ بيّن أنّ : $\frac{3}{2}\alpha^2 \le S \le -3\alpha$.

الجزء الثاني
الدوال الأسّية

# قواعد أساسية في دراسة الدوال الأسّية

1. توجد دالة وحيدة $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ تحقّق $f' = f$ و $f(0) = 1$ نرمز إليها بالرمز $f(x) = e^x$ وتُسمى الدالة الأسّية.
2. العدد $e$ هو صورة العدد 1 بالدالة الأسّية حيث $f(1) = e$. $(e \approx 2{,}718)$
3. **خواص الدالة الأسّية :**

$$e^0 = 1 \;;\; e^{-x} = \frac{1}{e^x} \;;\; e^x.e^y = e^{x+y} \;;\; \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \;;\; (e^x)^n = e^{nx}$$

**مثال :**

$$(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x.e^{-x} = e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}} + 2 = \boxed{\frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{e^{2x}}}$$

4. **نهايات الدالة الأسّية :**

$$① \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \;;\; ② \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \;;\; ③ \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$④ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \;;\; ⑤ \lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

**مثال :**

$$1) \lim_{x\to+\infty} e^{2x} - 2e^x = \lim_{x\to+\infty} e^x(e^x - 2) = \boxed{+\infty}$$

$$2) \lim_{x\to-\infty} e^{2x} + e^x - 4 = \boxed{-4}$$

$$3) \lim_{x\to0^-} (1-x)e^{\frac{1}{x}} + 2 = \boxed{2} \left(\lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty \;;\; \lim_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0\right)$$

$$4) \lim_{x\to0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} ;\; X = 2x \;;\; \lim_{X\to0} \frac{e^X - 1}{X} = \boxed{1}$$

$$5) \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} e^{x+1} = \boxed{+\infty}$$

$$6) \lim_{x\to-\infty} (x^2 + 2x + 2)e^x = \lim_{x\to-\infty} x^2e^x + 2xe^x + 2e^x = \boxed{0}$$

5. **اتجاه تغيّر الدالة الأسّية :**

الدالة الأسّية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ : $(e^x)' = e^x$ ، $\left[e^{u(x)}\right]' = u'(x)e^{u(x)}$

الدالة الأسّية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ، منه نستنتج أنّ :

- المعادلة $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ تكافئ المعادلة $u(x) = v(x)$
- المتراجحة $e^{u(x)} > e^{v(x)}$ تكافئ المتراجحة $u(x) > v(x)$
- المتراجحة $e^{u(x)} < e^{v(x)}$ تكافئ المتراجحة $u(x) < v(x)$

**مثال 1: حساب المشتقات**

1) $f(x) = e^x + 3e^{-x+2} - x$ ; $\boxed{f'(x) = e^x - 3e^{-x+2} - 1}$

2) $f(x) = e^{-2x} - e^{-3x} + 4$ ; $\boxed{f'(x) = -2e^{-2x} + 3e^{-3x}}$

3) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x} - 3}$ ; $f'(x) = \dfrac{e^x(e^{2x} - 3) - 2e^{2x}.e^x}{(e^{2x} - 3)^2} = \boxed{-\dfrac{e^x(e^{2x} + 3)}{(e^{2x} - 3)^2}}$

4) $f(x) = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$ ; $f'(x) = \dfrac{2e^{-2x}(1 + e^{-2x}) + 2e^{-2x}(1 - e^{-2x})}{(1 + e^{-2x})^2}$

$$= \boxed{\frac{4e^{-2x}}{(1 + e^{-2x})^2}}$$

**مثال 2: حل المعادلات والمتراجحات**

1) $e^{-5x} = e \Rightarrow -5x = 1 \Rightarrow \boxed{x = -\dfrac{1}{5}}$

2) $e^{2x+1} - (e^x)^3 = 0 \Rightarrow e^{2x+1} = e^{3x} \Rightarrow 2x + 1 = 3x \Rightarrow \boxed{x = 1}$

3) $e^{2x} - e^x - 20 = 0$ ; $X = e^x$; $X^2 - X - 20 = 0 \Rightarrow X = -4$ أو $X = 5$

$\Rightarrow e^x = 5 \Rightarrow \boxed{x = \ln 5}$ $\left(e^x > 0$ لأنّ $-4$ الحل مرفوض$\right)$

4) $e^{2x^2} \leq e^{5x+3} \Rightarrow 2x^2 \leq 5x + 3 \Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 \leq 0$

$\Delta = 49$ ; $x' = -\dfrac{1}{2}$ ; $x'' = 3$ ; $\boxed{S = \left[-\dfrac{1}{2}; 3\right]}$

**6. المعادلات التفاضلية:**

- حلول المعادلة التفاضلية $y' = ay$ هي: $y = ce^{ax}$ ، $c \in \mathbb{R}$
- حلول المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ هي: $y = ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$ ، $c \in \mathbb{R}$

**مثال:**

1. $f' = 3f$ و $f(0) = 1$

$f' = 3f \Rightarrow f(x) = ce^{3x}$ ; $f(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \boxed{f(x) = e^{3x}}$

2. $f' - 2f = 4$ و $f(1) = 0$

$f' - 2f = 4 \Rightarrow f' = 2f + 4 \Rightarrow f(x) = ce^{2x} - \dfrac{4}{2} = ce^{2x} - 2$

$f(1) = 0 \Rightarrow ce^2 - 2 = 0 \Rightarrow c = \dfrac{2}{e^2} = 2e^{-2}$

$\boxed{f(x) = 2e^{-2}e^{2x} - 2 = 2(e^{2x-2} - 1)}$

**تمرين 01:**

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

① $e^{2x}=1$ ; ② $e^{-5x}=e$ ; ③ $e^{x^2}=e^{-3(x+1)}$ ; ④ $e^{\frac{x+4}{6-x}}=e^{\frac{1}{x}}$ ;

⑤ $e^{2x+1}-(e^x)^3=0$ ; ⑥ $e^{2x}-e^x-20=0$ ; ⑦ $e^x+18e^{-x}=9$

⑧ $e^{2x+1}-3\sqrt{e^{2x+2}}=-e^{1+ln2}$ ; ⑨ $2e^{5x}-13e^{3x}-7e^x=0$

⑩ $e^{3x}-3e^{2x}-e^x+3=0$ ; ⑪ $e^x-(5+e)e^{\frac{x}{2}}+5e=0$

**تمرين 02:**

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

① $e^{2x^2}\leq e^{5x+3}$ ; ② $e^{x+1}>e^{-\frac{1}{x}}$ ; ③ $e^{x^2}>(e^3)^4e^{-x}$ ; ④ $e^{x-x^2}\geq 1$ ;

⑤ $e^x-3\leq 0$ ; ⑥ $(1-e^x)(e^x-e^2)>0$ ; ⑦ $e^{2x}-4e^x+3<0$

⑧ $\dfrac{e^x-1}{3e^x-6}\geq 0$

**تمرين 03:**

تحقق من صحة المساواة المعطاة من أجل كل $x$ في كل حالة من الحالات التالية:

① $\dfrac{e^x}{2+e^x}=\dfrac{1}{2e^{-x}+1}$ ② $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

③ $(e^x+e^{-x})^2=\dfrac{e^{4x}+1}{e^{2x}}+2$ ④ $\dfrac{e^x}{e^x-x}=\dfrac{1}{1-xe^{-x}}$

**تمرين 04:**

عيّن في كل حالة مجموعة تعريف الدالة $f$ واحسب دالتها المشتقة $f'$:

① $f(x)=e^x+3e^{-x+2}-x$ ; ② $f(x)=e^{-2x}-e^{-3x}+4$ ;

③ $f(x)=\dfrac{e^x}{e^{2x}-3}$; ④ $f(x)=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$;

⑤ $f(x)=(x-1)e^x-x^2$ ; ⑥ $f(x)=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ ;

⑦ $f(x)=\dfrac{e^{2x}-2e^x+2}{e^x-1}$; ⑧ $f(x)=(x^2+x+1)e^{-\frac{x}{2}}$ ;

⑨ $f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ ; ⑩ $f(x)=\sqrt{-4e^{2x}+4e^x+3}$ ;

**تمرين 05:**

احسب النهايات التالية:

① $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)e^x$ ; ② $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}x+e^{\frac{2x}{x-1}}$ ; ③ $\lim\limits_{x\to0^-}(1-x)e^{\frac{1}{x}}+2$ ;

④ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}-2e^x$ ; ⑤ $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}+e^x-4$ ; ⑥ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x-x+1$ ;

⑦ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}-1}{x}$ ; ⑧ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)e^x}{x}$ ; ⑨ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{xe^x}{x+1}$ ;

⑩ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{e^x+1}$; ⑪ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}+2}{e^{2x}-1}$; ⑫ $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{2x}-2e^x+3}{e^x-1}$ ;

⑬ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+x-1}{x}$ ; ⑭ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x+1}}{x}$; ⑮ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+2x+2)e^x$ ;

⑯ $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x^2-4x)e^{-x}$ ; ⑰ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^{-x}$ ; ⑱ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-2e^x$ ;

⑲ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+1}{x^2+x+1}$ ; ⑳ $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)e^{-\frac{x}{2}}$ ; ㉑ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-2}{e^x-2x}$ ;

㉒ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}$; ㉓ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{x^2}$; ㉔ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{-x}}{x}$;

㉕ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x^2+2x}$ ; ㉖ $\lim\limits_{x\to ln3}\dfrac{e^x-3}{x-ln3}$; ㉗ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4x}-2e^{2x}+1}{4x^2}$ ;

㉘ $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{\frac{1}{x}}-x+1$ ;

**تمرين 06:**

$f$ دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{e^{4x}-3}{e^{4x}+1}$. $(\mathscr{C}_f)$ منحنى الدالة $f$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

1. احسب من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ : $f(-x)+f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة بيانيا
2. بيّن أنّه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ : $f(x)=\frac{1-3e^{-4x}}{1+e^{-4x}}$

**تمرين 07:**

نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. بيّن أنّ الدالة $f$ فردية
2. بيّن أنّه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ : $f(2x) = \frac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}$

**تمرين 08:**

نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^{2x} - 2e^x$. وليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحنى الدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. ادرس تغيرات الدالة $f$ والفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$
2. عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مع محوري الإحداثيات
3. أثبت أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف $\omega$ يُطلب تعيينها
4. ارسم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$

**تمرين 09:**

نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x^2 e^{-x}$. وليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحنى الدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. ادرس تغيرات الدالة $f$
2. ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$
3. ارسم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$
4. استنتج رسم المنحنى $(\Gamma)$ الممثل للدالة $h$ حيث: $h(x) = x^2 e^{-|x|}$

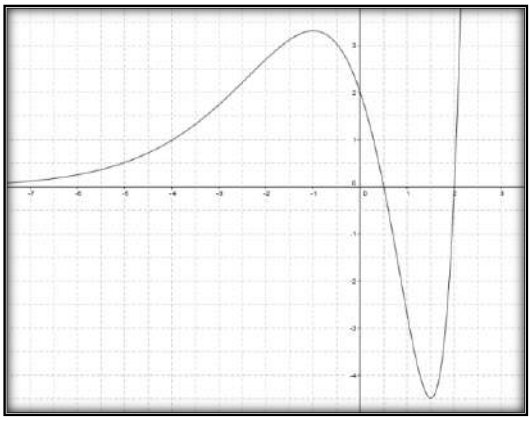
**تمرين 10:**

$f$ دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}$. وليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحنى الدالة $f$ في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. احسب النهايتين عند $-\infty$ و $+\infty$
2. احسب $f(x) + f(-x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا
3. ادرس تغيرات الدالة $f$
4. تحقق أنّه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإنّ المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلا وحيدا ، حيث $m$ وسيط حقيقي

5. بيّن أنّه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x+1}$
6. بيّن أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يُطلب تعيينهما
7. ارسم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

**تمرين 11:**



$f$ دالة عددية معرّفة على $\mathbb{R}$. تمثيلها البياني $(\mathscr{C}_f)$ يشمل النقطتين $\left(-1;\frac{9}{e}\right)$، $\left(\frac{3}{2};-e^{\frac{3}{2}}\right)$ ويُعطى على الشكل التالي:

1. ادرس إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$
2. شكّل جدول تغيرات الدالة $f$
3. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) = m$
4. إذا علمت أنّ $f'(0) = -3$ ، أوجد معادلة المماس $(\Delta)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0
5. من بين الدوال التالية عيّن الدالة التي تمثل $f(x)$:

$$f_1(x) = (2x^2 - 5x + 2)e^{-x} \quad ; \quad f_2(x) = (2x^2 - 5x + 2)e^{2x}$$
$$f_3(x) = (2x^2 - 5x + 2)e^{x}$$

**تمرين 12:**

نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{3e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$. $(\mathscr{C}_f)$ منحنى الدالة $f$ في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. عيّن العددين الحقيقيين $a$ و $b$ حيث من أجل كل $x \neq 0$ : $f(x) = a + \frac{be^{2x}}{e^{2x}-1}$
2. ادرس تغيرات الدالة $f$
3. بيّن أنّ النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$
4. بيّن أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مماسين ميل كل منهما $(-6)$ عند نقطتين يُطلب تعيين إحداثييها
5. ارسم المماسين والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

**تمرين 13:**

$f$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{2e^x}{e^x-1}$. $(\mathscr{C}_f)$ منحنى الدالة $f$ في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. ادرس تغيرات الدالة $f$ واثبت أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل ثلاثة مستقيمات مقاربة يُطلب تعيين معادلاتهم
2. بيّن أنّ النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ وارسم $(\mathscr{C}_f)$
3. لتكن الدالة $g$ المعرّفة بـ: $g(x) = \frac{2e^x}{|e^x-1|}$ ، وليكن $(\mathscr{C}_g)$ منحناها البياني
   أ. اكتب $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة
   ب. باستخدام المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ ، ارسم $(\mathscr{C}_g)$
   ج. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة:
   $$(m-3)|e^x-1| = 2e^x$$

**تمرين 14:**

نعتبر الدالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = \begin{cases} -1-\sqrt{-x} & ; \ x<0 \\ e^x-2 & ; \ x\geq 0 \end{cases}$

1. هل الدالة $g$ مستمرة عند $0$ ؟
2. هل الدالة $g$ قابلة للاشتقاق عند $0$ ؟
3. عيّن المجالات التي تكون عليها الدالة $g$ قابلة للاشتقاق، ثمّ احسب $g'(x)$ حسب قيم $x$ من $D_g$
4. نعتبر الدالة $k$ المعرّفة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ كما يلي: $k(x) = e^{\sin x} - 2$
   أ- بيّن أنّ الدالة $k$ هي مركب دالتين يُطلب تعيينهما
   ب- تحقق أنّ الدالة $k$ قابلة للاشتقاق على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$
   ج- عيّن اتجاه تغير الدالة $k$ على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

**تمرين 15:**

نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (ax^2+bx+c)e^{-x}$ ، حيث $c,b,a$ أعداد حقيقية. $(\mathscr{C}_f)$ التمثيل البياني للدالة $f$ في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. احسب $f'(x)$ بدلالة $c,b,a$
2. عيّن الأعداد الحقيقية $c,b,a$ إذا علمت أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مماسا يوازي محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة 1 وميل المماس عند النقطة $A(0;1)$ يساوي 6-

3. فيما يلي نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = (x^2 - 5x + 1)e^{-x}$
   أ. ادرس تغيرات الدالة $f$ وشكل جدول تغيراتها
   ب. عيّن إشارة $f(x)$ واستنتج وضعية المنحنى ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة للمستقيم المقارب الأفقي
   ج. ارسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$)
   د. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة:
   $me^x + 3x = (x-1)^2$

**تمرين 16:**

لتكن الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = ae^{2x} + be^x + c$ ، حيث $c, b, a$ أعداد حقيقية. ($\mathscr{C}_f$) التمثيل البياني للدالة $f$ في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. عيّن $c, b, a$ حيث يشمل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) النقطة O والدالة المشتقة $f'$ تنعدم من أجل $x = \ln\frac{3}{4}$ والمستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)
2. نأخذ : $c = 1\ , b = -3\ , a = 2$
   أ. ادرس تغيرات الدالة $f$ وشكل جدول تغيراتها
   ب. عيّن نقط تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مع حامل محور الفواصل
   ج. اكتب معادلة المماس ($\Delta$) للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) عند النقطة ذات الفاصلة 0
   د. برهن أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه محور التراتيب
   ه. ارسم المماس ($\Delta$) والمنحنى ($\mathscr{C}_f$)

**تمرين 17:**

نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{2-e^{2x}}{1+e^{2x}}$. ($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. احسب نهايات الدالة $f$ عند حدود مجال تعريفها
2. اكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)
3. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ وشكّل جدول تغيراتها
4. بيّن أنّ النقطة $\omega(0; \frac{1}{2})$ مركز تناظر للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)
5. اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) عند النقطة $\omega$
6. ارسم المماس (T) والمنحنى ($\mathscr{C}_f$)

7. نعتبر الدالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = f(x) + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

أ. بيّن أنّه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإنّ : $g'(x) = \frac{3(e^{2x}-1)^2}{2(1+e^{2x})^2}$

ب. احسب $g(0)$ ، ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة $g$

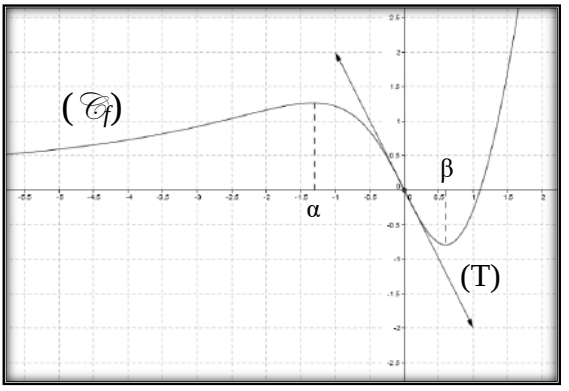
ج. ادرس إشارة $g(x)$ واستنتج وضعية المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة للمماس (T)

**تمرين 18:**

I- نعتبر الدالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^x - x$.

ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ وشكّل جدول تغيراتها ثم بيّن أنّه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ : $g(x) > 0$

II- نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{e^{2x}-4e^x+3}{e^x-x}$ ، وليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ المبيّن أسفله.




1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $e^{2x} - 4e^x + 3 > 0$
ثمّ استنتج إشارة $f(x)$

3. باستعمال القراءة البيانية :

أ. أعط حصرا سعته 0,2 للعددين α و β

ب. عيّن قيم كل من:
$f'(\beta), f'(0), f'(\alpha)$

ج. ادرس وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة للمماس (T)

4. لتكن الدالة $h$ المعرّفة على $]-\infty;0[$ بـ: $h(x) = \frac{1}{f(x)}$

أنشئ جدول تغيرات الدالة $f$ على المجال $]-\infty;0[$ ثمّ استنتج جدول تغيرات الدالة $h$.

**تمرين 19:**

نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x) = (x^2 + x + 2)e^{-x}$.

$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (نذكّر أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x} = 0$ حيث $n$ عدد طبيعي)،
ثمّ استنتج أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا يُطلب كتابة معادلته

2. أ. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ وشكّل جدول تغيراتها
ب. اكتب معادلة المماس (T) لـ ($\mathscr{C}_f$) عند $x_0 = 0$
ج. بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 3$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $[-1; 0]$.
أعط حصرا للعدد $\alpha$ بتقريب $10^{-1}$

3. أ. بيّن أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل نقطتي انعطاف يُطلب تعيينهما
ب. ارسم المماس (T) والمنحنى ($\mathscr{C}_f$)

4. لتكن الدالة $g$ المعرّفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = [f(x)]^2$.
أ. بيّن أنّ $g = uof$ ، حيث $u$ دالة يُطلب تعيينها
ب. احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$
ج. أنشئ جدول تغيرات $g$ انطلاقا من جدول تغيرات $f$

5. $m$ وسيط حقيقي. نعتبر الدالة $f_m$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:
$f_m(x) = (x^2 + mx + 2)e^{-x}$. عيّن قيم $m$ حتى تقبل الدالة $f_m$ قيمتين حدّيتين محليتين.

**تمرين 20:**

I- $a$ و $b$ عددان حقيقيان ولتكن الدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (ax + b)e^x - 1$.
تُعطى تغيرات الدالة g في الجدول التالي:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-1$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |

1. باستغلال الجدول بيّن أنّ $a = 1$ و $b = -1$
2. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]1{,}27; 1{,}28[$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II- نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{e^{x-2x+1}}{x}$ وليكن ($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أثبت أنّه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ فإنّ $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ على $\mathbb{R}^*$
2. احسب النهايات عند حدود مجال تعريف الدالة $f$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها
3. أثبت أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيمين مقاربين، وأنّه يقبل فرعا لا نهائيا باتجاه حامل محور التراتيب

4. بيّن أنّ $f(\alpha) = -2 + \frac{1}{\alpha - 1}$ ، ثمّ اعط حصرا لـ $f(\alpha)$
5. اكتب معادلة المماس (T) لـ ($\mathscr{C}_f$) عند $x_0 = 1$
6. احسب $f(-3)\ ,f(-1)\ ,f\left(\frac{1}{2}\right)\ ,f(2)\ ,f(3)$ ، ثمّ ارسم المماس (T) و($\mathscr{C}_f$)

**تمرين 21:**

نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$. ($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. احسب نهايات الدالة $f$ عند $-\infty$ ثمّ عند $+\infty$ (يمكن كتابة $xe^{x-1} = \frac{1}{e}xe^{x}$)
2. أثبت أنّ المستقيم ($\Delta$) ذي المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) عند $-\infty$ ، ثمّ ادرس وضعية المنحنى ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة للمستقيم ($\Delta$)
3. أ. احسب المشتقة $f'$ والمشتقة الثانية $f''$ للدالة $f$
   ب. شكّل جدول تغيرات $f'$ مع تحديد نهاية $f'$ عند $-\infty$
   ج. احسب $f'(1)$ واستنتج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$
   د. أنشئ جدول تغيرات الدالة $f$
4. بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ حيث : $1{,}9 < \alpha < 2$ و $-0{,}6 < \beta < -0{,}5$
5. ارسم المستقيم ($\Delta$) والمنحنى ($\mathscr{C}_f$) (وحدة الرسم : $2cm$)

**تمرين 22:**

نعتبر الدالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} + 1$.

1. احسب النهايات عند حدود مجال تعريف الدالة $g$
2. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها
3. بيّن أنّه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ فإنّ $g(x) > 0$

II- نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} \ ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

وليكن ($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. ادرس استمرارية الدالة $f$ عند $x_0 = 0$
2. ادرس قابلية اشتقاق $f$ عند $x_0 = 0$ ، ثمّ بيّن أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقبل نصفي مماسين $\Delta$ و $\Delta'$ يُطلب كتابة معادلتيهما

3. أثبت أنّه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ فإنّ $f'(x) = \frac{g(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$.

استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ على $\mathbb{R}$

4. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة $f$

5. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ (ضع $X = \frac{1}{x}$).

استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)

6. ارسم $\Delta$ ، $\Delta'$ والمنحنى ($\mathscr{C}_f$) (وحدة الطول : $4cm$)

7. نعتبر الدالة $h$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $\begin{cases} h(x) = \frac{x}{1+e^{-\frac{1}{x}}} \; ; x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$

وليكن ($\mathscr{C}_h$) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ. تحقق أنّ $h(x) = -f(-x)$ ، ثمّ بيّن أنّ ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_h$) متناظران بالنسبة للمبدأ.

ب. استنتج رسم المنحنى ($\mathscr{C}_h$).

**المعادلات التفاضلية:**

**تمرين 23:**

في كل حالة من الحالات التالية ، عيّن الدالة الوحيدة $f$ القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

1. $f' = 3f$ و $f(0) = 1$
2. $f' + 2f = 0$ والمنحنى ($\mathscr{C}_f$) يشمل النقطة $A(-3;2)$
3. $2f' - 3f = 0$ و $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-2}$
4. $2f' + f = 0$ و $f(\ln 4) = 1$
5. $f' - 2f = 3$ و $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^2$

**تمرين 24:**

1. حل المعادلة التفاضلية التالية: $2y' + 3y = 0$ ، ثمّ عيّن الحل $f$ الذي يحقق $f(0) = 8$
2. عيّن الدالة $h$ حلا للمعادلة التفاضلية التالية: $y' - 2y + 4 = 0$ والتي تنعدم عند $-\ln 3$

**تمرين 25:**

1. حل المعادلة التفاضلية التالية: $(E) \dots y' - 2y = 0$
2. نعتبر المعادلة التفاضلية التالية: $(F) \dots y' - 2y = e^x$. عيّن العددين الحقيقيين $a$ و $b$ حتى تكون الدالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = ae^x + b$ حلا للمعادلة $(F)$
3. بيّن أنّ $h$ هي حل للمعادلة $(E)$ إذا وفقط إذا $f = g + h$ هي حل للمعادلة $(F)$.
   استنتج حلول المعادلة $(F)$
4. من بين حلول المعادلة $(F)$ عيّن تلك التي تمثيلها البياني في معلم يمرّ من المبدأ

**تمرين 26:**

1. حل المعادلة التفاضلية التالية: $(E) \dots y' + 2y = 0$
2. نعتبر المعادلة التفاضلية التالية: $(F) \dots y' + 2y = 5\cos x$.
   عيّن العددين الحقيقيين $a$ و $b$ حتى تكون الدالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:
   $g(x) = a\cos x + b\sin x$ حلا للمعادلة $(F)$
3. بيّن أنّ $f$ هي حل للمعادلة $(F)$ إذا وفقط إذا $f - g$ هي حل للمعادلة $(E)$
   استنتج حلول المعادلة $(F)$

**تمرين 27:**

1. حل المعادلة التفاضلية التالية: (I) $\dots 2y' + y = 0$
2. نعتبر المعادلة التفاضلية التالية: (II) $\dots 2y' + y = x^2 + 3x$. بيّن أنّ الدالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^2 - x + 2$ حل للمعادلة (II)
3. بيّن أنّ $h$ هي حل للمعادلة (II) إذا وفقط إذا $h - g$ هي حل للمعادلة (I)
   استنتج حلول المعادلة (II)
4. من بين حلول المعادلة (II) عيّن تلك التي تمثيلها البياني يقبل مماسا عند $x_0 = 0$ موازيا للمستقيم ذي المعادلة $y = x$

**تمرين 28:**

I- نعتبر المعادلة التفاضلية (E) حيث: $3y' + 2y = 0$. عيّن جميع حلول المعادلة (E)

II- لتكن المعادلة التفاضلية (F) حيث: $3y' + 2y = 2x^2 - 1$

1. عيّن الدالة $h$ كثير حدود من الدرجة الثانية حلا للمعادلة (F)
2. بيّن أنّه إذا كانت الدالة $g$ حلا للمعادلة (F) فإنّ الدالة $(g - h)$ حل للمعادلة (E)
3. عكسيا، بيّن أنّه إذا كانت الدالة $(g - h)$ حلا للمعادلة (E) فإنّ الدالة $g$ حل للمعادلة (F)
4. استنتج حلول المعادلة (F) ، ثمّ عيّن الحل الذي يحقق : $g(0) = 3$.

**تمرين 29:**

نعتبر المعادلة التفاضلية: $-y' + 3y = 9x + 5e^{-2x+3}$ ... (1)

1. حل المعادلة التفاضلية: $3y - y' = 0$ ... (2)
2. بيّن أنّ الدالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 3x + 1 + e^{-2x+3}$ حل للمعادلة التفاضلية (1)
3. بيّن أنّ $f$ هي حل للمعادلة (1) إذا وفقط إذا $f - g$ هي حل للمعادلة (2)
4. حل المعادلة التفاضلية (1).

**تمرين 30:**

نعتبر المعادلة التفاضلية: $y' = -3y + 4e^{-2x}$ ... (E)

1. عيّن العدد الحقيقي λ حتى تكون $g(x) = \lambda e^{-2x}$ حلا للمعادلة (E)
2. نضع: $\lambda = 4$ و $h(x) = f(x) - g(x)$ حيث $f$ هي حل للمعادلة (E)
   - أ- تأكد أنّ $h$ حل المعادلة التفاضلية: $y' + 3y = 0$ ... (E′)
   - ب- حل المعادلة (E′) ، ثمّ استنتج حلول المعادلة (E)
   - ج- من بين حلول المعادلة (E) ، عيّن الدالة $f_0$ التي يشمل منحناها البياني مبدأ المعلم
   - د- ادرس تغيرات الدالة $f_0$ ، ثمّ أنشئ جدول تغيراتها
   - ه- ارسم منحنى الدالة $f_0$
3. لتكن الدالة $k(x) = 3e^{-2x} - 4$

جد معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ حيث تكون الدالة $k$ حلا لها.

**تمرين 31:**

نعتبر المعادلتين التفاضليتين المعرفتين على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ بـ:

$y' + y = 1$ ... $(E_0)$ ، $y' + (1 + \tan x)y = \cos x$ ... $(E)$

1. عيّن مجموعة حلول المعادلة $(E_0)$
2. $f$ و $g$ دالتان قابلتان للاشتقاق على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ حيث : $f(x) = g(x)\cos x$

   بيّن أنّ $f$ هي حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا $g$ هي حل للمعادلة $(E_0)$.
3. عيّن الحل $f$ للمعادلة (E) حيث $f(0) = 0$

**تمرين 32:**

لتكن $y(t)$ عدد ذرات الراديوم لمادة مشعّة في اللحظة $t$ (مقدرة بالسنوات) حيث:

$y'(t) = -4{,}33 \times 10^{-4} y(t)$ و $y(0) = y_0$

1. اكتب عبارة $y(t)$ بدلالة $y_0$ و $t$
2. احسب زمن نصف العمر للراديوم (أي الزمن اللازم لتناقص نصف عدد ذرات الراديوم)

**تمرين 33:**

لتكن $y(t)$ عدد الجراثيم في اللحظة $t$ (مقدرة بالساعات) و $y'(t)$ سرعة تكاثر عدد الجراثيم في اللحظة $t$ حيث: $y'(t) = 3y(t)$

1. إذا علمت أنّ عدد الجراثيم في اللحظة $t = 0$ هو $N_0 = 1000$. ما هو عددها في اللحظة $t = 1h30mn$ ؟
2. متى يصبح عدد الجراثيم مليون مرّة عددها في اللحظة $t = 0$ ؟

**تمرين 34:**

نعتبر الدالة $m$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ التي ترفق بالعدد $t$ ، العدد $m(t)$ حيث $m(t)$ هي كتلة الملح بالغرام المحتواة في محلول ملحي (ماء + ملح) عند اللحظة t بالدقائق. نقبل أنّ الدالة $m$ هي حل للمعادلة التفاضلية: (E) ... $5y' + y = 0$ وأنّ الشرط الابتدائي هو: $m(0) = 300$

1. حل المعادلة (E)
2. عيّن العدد $t_0$ حيث يكون: $m(t_0) = 150$
3. نقبل أنّه لا يمكن الكشف عن وجود الملح خلال اللحظة $t$ إلا إذا كان $m(t) \leq 10^{-2}$. ابتداءً من أي لحظة يكون ممكنا الكشف عن وجود الملح ؟

**تمرين 35:**

نعتبر للمعادلة التفاضلية (1) ... $y' + 2y = 3e^{-3x}$

1. بوضع: $y = z - 3e^{-3x}$ ، أوجد المعادلة التفاضلية (2) التي تحققها الدالة z
2. حل المعادلة التفاضلية (2) ، ثمّ استنتج حل المعادلة التفاضلية (1)
3. عيّن الحل $f$ للمعادلة (1) حيث: $f(0) = \frac{3}{2}$
4. تحقق أنّ الدالة $f$ تُكتب على الشكل: $f(x) = 3e^2 - x\left(\frac{3}{2} - e^{-x}\right)$
5. ادرس تغيرات الدالة $f$
6. عيّن نقط تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مع محوري الإحداثيات
7. احسب $f(1)$ ، ثمّ ارسم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$

**دراسة الدوال الأسّية:**

**تمرين 36:**

I- نعتبر المعادلة التفاضلية التالية: $y' - 2y = xe^x$ ... (1)

1. حل المعادلة التفاضلية $y' - 2y = 0$ ... (2) حيث y دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
2. $a$ و $b$ عددان حقيقيان و $u$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $u(x) = (ax + b)e^x$
   أ- عيّن $a$ و $b$ حتى تكون $u$ حلا للمعادلة (1)
   ب- بيّن أنّ الدالة $v$ تكون حلا للمعادلة (2) إذا وفقط إذا كانت $u + v$ حلا للمعادلة (1)
   ج- استنتج مجموعة حلول المعادلة (1)
3. عيّن الحل الخاص $f$ للمعادلة (1) الذي ينعدم عند 0

II- لتكن الدالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2e^x - x - 2$

1. ادرس تغيرات الدالة $g$ وشكّل جدول تغيراتها
2. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر $\alpha$ حيث:
   $-1{,}6 < \alpha < -1{,}5$
3. اكتب معادلة المماس لمنحنى الدالة $g$ عند 0
4. عيّن إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$

III- نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^{2x} - (x + 1)e^x$. ($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. احسب نهايات الدالة $f$ عند حدود مجال تعريفها
2. احسب $f'(x)$ وبيّن أنّ $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة
3. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ وشكّل جدول تغيراتها
4. بيّن أنّ $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$ ، ثمّ استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$
5. ارسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$) (الوحدة: $2cm$).

**تمرين 37:**

I- لتكن $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2e^x + 2x - 5$

1. ادرس تغيرات الدالة $g$.
2. بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ بحيث: $0{,}62 < \alpha < 0{,}63$
3. عيّن إشارة $g(x)$.

II- لتكن $f$ دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ و ($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ، حيث: $f(x) = (2x - 3)(1 - e^{-x})$

1. عين إشارة $f(x)$
2. بين أن: $f'(x) = e^{-x}.g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f$

3. احسب نهايات الدالة $f$ عند $+\infty$ و $-\infty$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة $f$
4. بين أن: $f(\alpha) = \frac{(2\alpha-3)^2}{2\alpha-5}$
5. بين أن المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ معادلته: $y = 2x - 3$ عند $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي لهما. ملاحظة: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^x}{x}\right) = +\infty$
6. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و $(\Delta)$. يعطى: $f(\alpha) \approx -0{,}81$.

**تمرين 38:**

I- نعتبر الدالة العددية $f$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $f(x) = -x + 2\sqrt{x} - 1$
1. احسب نهايات الدالة $f$
2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة $f$ على يمين 0
3. احسب $f'(x)$ ثمّ شكل جدول تغيرات $f$

II- نعتبر الدالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = -e^x + 2\sqrt{e^x} - 1$ و $(\mathscr{C}_g)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$
1. ادرس تغيرات الدالة $g$
2. بيّن أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيينها
3. عيّن نقط تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ مع المستقيم (D) ذي المعادلة: $y = -1$
4. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ والمستقيم (D)
5. بيّن أنّ الدالة $g$ حل للمعادلة التفاضلية: $2y'' + y' - y = -2e^x + 1$

**تمرين 39:**

I- $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 1 - x - e^x$
1. احسب النهايات $g$ عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$
2. ادرس تغيرات الدالة $g$ ، ثم شكل جدول التغيرات
3. احسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

II- لتكن $f$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ و $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$

$$f(x) = xe^{-x} - x + 1$$

1. بيّن أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. أثبت أن: $f'(x) = e^{-x}g(x)$ ، ثم استنتج اتجاه تغير $f$
3. شكل جدول تغيرات الدالة $f$

4. بين أن المستقيم $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$، ثم ادرس وضعيته بالنسبة للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$
5. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين في المجالين $[-1; 0]$ و $[1; 2]$ ، ثم أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$

**تمرين 40:**

لتكن $f$ دالة لمتغير حقيقي $x$ معرفة على $\mathbb{R}$ و $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$: $f(x) = \frac{x}{2} + e^{-|x|}$

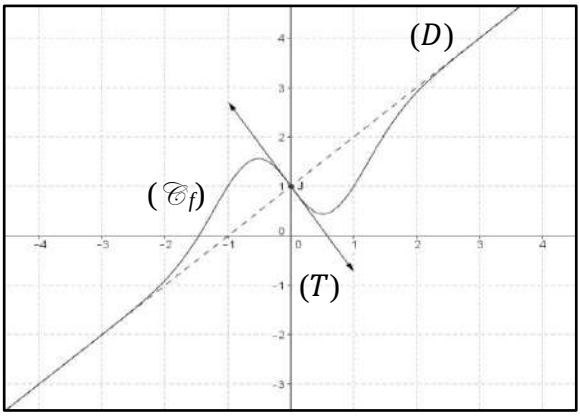
1. احسب نهايات الدالة $f$ عند $+\infty$ و $-\infty$
2. اكتب $f$ دون رمز القيمة المطلقة
3. بيّن أنّ: $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = -\frac{1}{2}$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x)-1}{x}$.
   فسّر النتيجة بيانيا $(\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{e^{\alpha}-1}{\alpha} = 1)$
4. بيّن أنّ $f$ متزايدة تماما على المجال $]-\infty, 0]$ ، ثمّ ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ على المجال $]0, +\infty[$
5. شكّل جدول تغيّرات الدالة $f$
6. بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ ، ثمّ ادرس وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$
7. اكتب معادلة نصفي المماس عند النقطة ذات الفاصلة $0$
8. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ ، حيث $\alpha \in ]-0{,}9; -0{,}8[$
9. أنشئ نصفي المماس، المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بدقة.

**تمرين 41:**

$f$ دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني ، $(D)$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند $(+\infty)$ و $(-\infty)$ ، $(T)$ مماس للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند الفاصلة $0$ معادلته $y = (1-e)x + 1$ والنقطة $J(0; 1)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$. (انظر الشكل)

نضع : $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ ، حيث : $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \varphi(x) = 0$

1. بقراءة بيانية، عيّن معادلة $(D)$
2. من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f(-x) + f(x) = 2$ . لماذا ؟
3. تحقّق أنّ الدالة $f'$ زوجية، ثمّ استنتج أنّ الدالة $\varphi$ فردية
4. نضع : $\varphi(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x^2}$ . عيّن $\alpha$ و $\beta$ مستعينا بالنتائج السابقة.




**تمرين 42:**

اختر في كل حالة من الحالات الآتية الإجابة الصحيحة من بين المقترحات المعطاة مع التبرير الكافي:

1) $f$ دالة متناقصة تماما على $\mathbb{R}$. الدالة $h$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $h(x) = e^{f(-x)}$ هي دالة:

أ- متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ب- متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ جـ- غير رتيبة على $\mathbb{R}$

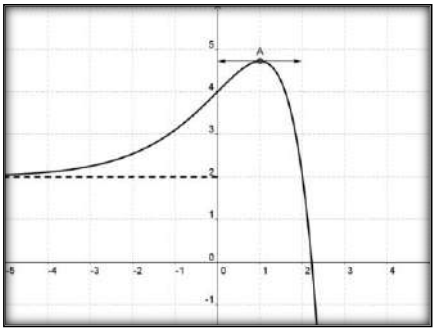
2) نعتبر الدالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = xe^{-x} + 1$. التقريب التآلفي للدالة $g$ في جوار 0 يُعطى بالعلاقة:

أ- $g(x) \approx x + 1$ ب- $g(x) \approx -x + 1$ جـ- $g(x) \approx -x - 1$

3) $\alpha$ عدد حقيقي غير معدوم. الحل العام للمعادلة التفاضلية $6y = 3y' + 2$ هو:

أ- $y = \alpha e^{2x} + \frac{1}{3}$ ب- $y = \alpha e^{2x} - \frac{1}{3}$ جـ- $y = \alpha e^{3x} - \frac{1}{2}$

**تمرين 43:**




I- $a$ ، $b$ ، $c$ أعداد حقيقية ، $h$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = (ax + b)e^x + c$$

1. احسب $h'(x)$ بدلالة العددين $a$ و $b$

الشكل الموالي هو التمثيل البياني للدالة $h$ في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. من خلال المعطيات الموجودة على الشكل، بيّن أنّ:

$$h(x) = (-x + 2)e^x + 2$$

3. بقراءة بيانية، عيّن حصرا للعدد α الذي يحقق: $h(\alpha) = 0$
4. عيّن إشارة $h(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x$.

II- نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^2}{e^x+1}$، و $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. احسب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. تأكد أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$: $f'(x) = \frac{xh(x)}{(e^x+1)^2}$
3. شكل جدول تغيرات الدالة $f$
4. بين أنّ: $f(\alpha) = \alpha(\alpha - 2)$ واستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$
5. أنشئ بعناية المنحنى $(\mathscr{C})$.

**تمرين 44:**

أجب بصحيح أو خاطئ على كل جملة من الجمل التالية مع التعليل:

1. إذا كانت الدالة $u$ موجبة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$، فإنّ الدالة $v$ حيث: $v(x) = u(x)e^x$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$
2. الدالة $h$ المعرّفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $h(x) = \sqrt{x}e^{1-x}$ قابلة للاشتقاق عند الصفر على اليمين
3. المستقيم ذي المعادلة $x = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحنى الممثل للدالة $f$ المعرّفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$
4. من أجل عدد حقيقي $a$، المعادلة: $e^x + 2x = a$ تقبل دوما حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$.

**تمرين 45:**

I- نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (1 - x)e^x + 1$

1. ادرس تغيرات الدالة $g$ ثمّ شكل جدول تغيراتها
2. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1{,}27 < \alpha < 1{,}28$
3. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (2 - x)e^x + x + 1$ ، و $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. ادرس تغيرات الدالة $f$ ثمّ شكل جدول تغيراتها
2. بين أنّ للمنحنى $(\mathscr{C})$ مستقيم مقارب مائل $(\Delta)$ عند $(-\infty)$ يُطلب تعيين معادلته
3. ادرس الوضعية النسبية لـ $(\Delta)$ و $(\mathscr{C})$

4. احسب $f(\alpha)$ بدلالة α، ثمّ بين أنّ: $f(\alpha) = \frac{\alpha^2-\alpha+1}{\alpha-1}$ و استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$
5. احسب $f(-1,7)$ ، $f(2)$ و $f(2,4)$ ، ثمّ أنشئ (𝒞 ).

**تمرين 46:**

I- نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (2x-1)e^{2x} - 1$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها
2. احسب نهاية الدالة $g$ عند $+\infty$ و $-\infty$
3. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين 0,63 و 0,64
4. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (x-1)e^{2x} + 2 - x$ ، و (𝒞 ) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. احسب نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ و $-\infty$
2. اكتب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ ، ثمّ استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ وشكل جدول تغيراتها
3. بيّن أنّ المنحنى (𝒞 ) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $-\infty$، ثمّ ادرس وضعية (𝒞 ) بالنسبة لـ (Δ)
4. احسب $f(0)$، ثمّ أنشئ (Δ) و(𝒞 ). $(\alpha \approx 0,64)$
5. عيّن حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة: $f(x) = m$.

**تمرين 47:**

أجب بصحيح أم خطأ مع التبرير:

1. $f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (-x+3)e^x$ ، و (𝒞 ) تمثيلها البياني
   أ. من أجل كل $x > 0$ لدينا: $f(x) \geq -x + 3$
   ب. المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب لـ (𝒞 )
   ج. الدالة $f$ تقبل قيمة حدّية وحيدة
   د. $m$ وسيط حقيقي حيث: $m \neq e^2$. المعادلة $f(x) = m$ لا تقبل حلا أو تقبل حلين
2. حلول المتراجحة $e^{2x} - 3e^x - 4 \geq 0$ هي: $S = [\ln 4\,; +\infty[$
3. $g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x) = \frac{\sin 3x}{x}$. $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$

**تمرين 48:**

I- نعتبر الدالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (3-2x)e^x + 2$

1. ادرس تغيرات الدالة $g$
2. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\alpha \in ]1{,}68\ ;\ 1{,}69[$
3. استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$

II- لتكن الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{e^x+4x-1}{e^x+1}$ ، و $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ حيث $\|\vec{\imath}\| = 2cm$

1. أثبت أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ فإنّ: $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x+1)^2}$
2. أثبت أنّ $f(\alpha) = 4\alpha - 5$ ، ثمّ اعط حصرا للعدد $f(\alpha)$
3. ادرس تغيرات الدالة $f$
4. بيّن أنّ $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل $(\Delta)$، ثمّ ادرس وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ $(\Delta)$
5. اكتب معادلة المماس $(d)$ للمنحنى $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة 0 ، ثمّ أنشئ $(\Delta)$ ، $(d)$ و $(\mathscr{C})$
6. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة:
$$me^x - 4x + m + 2 = 0.$$

**تمرين 49:**

I- أجب بصحيح أم خطأ مع التبرير :

1. معادلة المماس للتمثيل البياني للدالة $x \to \sqrt{x^2+3}$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
2. $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi} = 1$
3. الدالة $u(x) = e^{|x|}$ قابلة للاشتقاق عند 0

II- $f$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{\cos x}{x^2} + x + 1$. اختر الجواب الصحيح مع التعليل

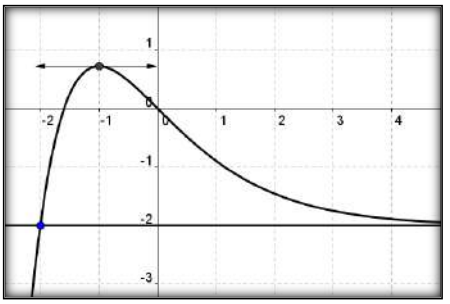
1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ هي: أ) $+\infty$ ب) $-\infty$ جـ) 0
2. يقبل منحنى الدالة $f$ مستقيما مقاربا $(\Delta)$ معادلته:
أ) $y = x + 1$ ب) $y = -x - 1$ جـ) $y = 2$

**تمرين 50:**

I- $f$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x+a)e^{-x} + b$ حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان، و $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. بقراءة بيانية للمنحنى $(\mathscr{C})$

أ. عيّن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ; $f'(-1)$ ; $f(0)$ ; $f(-2)$



ب. عيّن معادلة المستقيم المقارب لـ $(\mathscr{C})$ عند $+\infty$

ج. عيّن حسب قيم $x$ إشارة $f'(x)$

د. شكّل جدول تغيرات الدالة $f$

ه. من بين المنحنيات الثلاثة 1، 2، 3، عيّن مع التبرير المنحنى الممثل للدالة $f'$ مشتقة الدالة $f$

2. بيّن أنّ $f(x) = (x+2)e^{-x} - 2$

3. بيّن أنّ المعادلة $f(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ محصورا بين 1 و 2

4. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة:

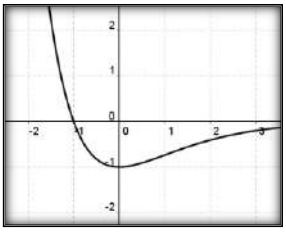
$$(x+2)e^{-x} - 2 - m = 0$$

II- $g$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\begin{cases} g(x) = f(x) \; ; x \geq 0 \\ g(x) = \cos(\pi x + \frac{\pi}{2}) \; ; x < 0 \end{cases}$

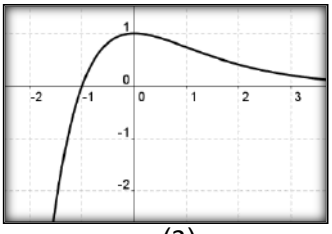
1. احسب $\lim\limits_{x\to0} g(x)$

2. بيّن أنّ الدالة g مستمرة عند 0

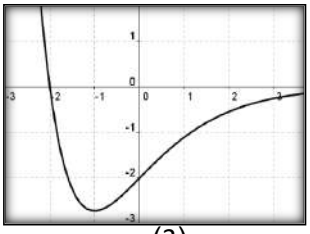
3. بيّن أنّ الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-\infty;0[$ وعلى $]0;+\infty[$ ثمّ احسب $g'(x)$ على هذين المجالين



(1)



(2)



(3)

**تمرين 51:**

I- نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x+2}$ ، و $(\mathscr{C}_g)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

عيّن قيمتي $a$ و $b$ بحيث يشمل المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ النقطة $A(\ln 2 \; ; \ln 2)$

II- نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+2}$ ، و $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1. بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x$: $f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x+2}$
2. بيّن أنّ المنحنى ($\mathscr{C}$) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين ($\Delta$) و ($\Delta'$) يُطلب تعيين معادلة لكل منهما.
3. حدد وضعية المنحنى ($\mathscr{C}$) بالنسبة لكل من ($\Delta$) و ($\Delta'$)
4. ادرس تغيرات الدالة $f$ ثمّ أنشئ جدول تغيراتها
5. بين أنّ المنحنى ($\mathscr{C}$) يقبل نقطة انعطاف I يُطلب تعيين إحداثييها
6. أثبت أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $-2 < \alpha < -1{,}5$
7. ارسم ($\Delta$) ، ($\Delta'$) و ($\mathscr{C}$)
8. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة:
$f(x) = x + m$

**تمرين 52:**

I- نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{3e^x-1}{e^x+1}$ ، و ($\mathscr{C}$) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا: $f(-x) + f(x) = 2$. فسّر النتيجة بيانيا
2. احسب نهايات الدالة $f$ واستنتج المستقيمات المقاربة للمنحنى ($\mathscr{C}$)
3. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها
4. عيّن معادلة المماس (T) للمنحنى ($\mathscr{C}$) عند النقطة ذات الفاصلة 0

II- نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = f(x) - (x + 1)$.

1. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا: $g'(x) = -\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$
2. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ ثمّ استنتج إشارتها بعد حساب $g(0)$
3. استنتج الوضع النسبي للمماس (T) والمنحنى ($\mathscr{C}$) ، ثمّ أنشئ في نفس المعلم (T) و($\mathscr{C}$).
4. بيّن أنّه إذا كان: $f(x) = x$ فإنّ: $g(x) = -1$
5. بيّن أنّ المستقيم ذي المعادلة $y = x$ يقطع المنحنى ($\mathscr{C}$) في نقطة وحيدة $\alpha$ حيث: $2 < \alpha < 3$.

**تمرين 53:**

لتكن $f$ دالة معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$\begin{cases} 4f' - 3f = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

أجب بصحيح أم خطأ مع التعليل:

1. المنحنى الممثل للدالة $f$ يشمل النقطة $A(1;\frac{3}{4})$
2. المنحنى الممثل للدالة $f$ يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا معامل توجيهه 1
3. $f$ دالة متزايدة على $\mathbb{R}$
4. $f$ حل للمعادلة التفاضلية: $16f'' - 9f = 0$

**تمرين 54:**

I- نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$ كما يلي: $f(x) = e^x - 5 + \frac{2e^x}{e^x-2}$ ، و $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. ادرس تغيرات الدالة $f$
2. ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C})$
3. جد معادلة المماس للمنحنى $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة 0
4. احسب $f(-\ln 5); f(\ln 5); f(\ln 3)$ ، ثمّ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$

II- نعتبر الدالة $g$ المعرّفة بـ: $g(x) = e^{|x|} - 5 + \frac{2e^{|x|}}{e^{|x|}-2}$.

1. عيّن مجموعة تعريف الدالة $g$
2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة $g$ عند 0
3. بيّن أنّ الدالة $g$ زوجية
4. انطلاقا من المنحنى $(\mathscr{C})$ اشرح كيفية رسم المنحنى $(\Gamma)$ الممثل للدالة g ثمّ ارسم $(\Gamma)$ نفس المعلم السابق
5. $m$ وسيط حقيقي موجب تماما، ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة:

$$e^{2x} - (5 + 2\ln m)e^x + 10 + 4\ln m = 0$$

**تمرين 55:**

I- نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x + 1 + e^x$

1. ادرس تغيرات الدالة $g$
2. أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $-1.28 < \alpha < -1.27$
3. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1}$ ، و $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. وحدة الطول على المحورين $2\ cm$.

1. بيّن أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$، فإن: $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$ . ادرس تغيرات الدالة $f$
2. بيّن أنّ: $f(\alpha) = \alpha + 1$ واستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

3. أ. ليكن (T) المماس لـ ($\mathscr{C}$) في النقطة O. اكتب معادلة للمستقيم (T)

ب. أثبت أنّ ($\mathscr{C}$) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (Δ) معادلته: $y = x$ ، ثمّ ادرس الوضعية النسبية لـ (Δ) و ($\mathscr{C}$)

ج. احسب صور الأعداد 2- ، 1- ، 1 ، 2 ، 3 بالدالة $f$ ، ثمّ أنشئ (Δ) (T) و($\mathscr{C}$).

**تمرين 56:**

I- نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 1 + (1 - 2x)e^{2x}$

1. ادرس تغيرات الدالة $g$
2. أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.6 < \alpha < 0.7$
3. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{2}[x + (1 - x)e^{2x}]$ ، و ($\mathscr{C}$) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. احسب نهايات الدالة $f$ عند $-\infty$ و $+\infty$
2. بين أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = \frac{1}{2}x$ مقارب للمنحنى ($\mathscr{C}$) بجوار $-\infty$ ، ثمّ ادرس وضعية ($\mathscr{C}$) بالنسبة لـ (Δ)
3. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها. عيّن حصرا للعدد $f(\alpha)$
4. احسب $f(\frac{3}{2})$ ، $f(-1)$ و $f(1)$ ، ثمّ استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]-\infty\ ;\ -1[$
5. أنشئ في نفس المعلم المستقيم (Δ) والمنحنى ($\mathscr{C}$).

**تمرين 57:**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$ ، و ($\mathscr{C}$) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. احسب نهايات الدالة $f$ عند $-\infty$ و $+\infty$
2. أثبت أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب للمنحنى ($\mathscr{C}$) عند $-\infty$ ، ادرس وضعية ($\mathscr{C}$) بالنسبة لـ (Δ)
3. أ. احسب المشتقة $f'$ و المشتقة الثانية $f''$ للدالة $f$

ب. شكّل جدول تغيرات $f'$

ج. احسب $f'(1)$ واستنتج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$

4. أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1{,}9 < \alpha < 2$
5. أنشئ في نفس المعلم المستقيم (Δ) والمنحنى ($\mathscr{C}$) (وحدة الطول $2\ cm$).

**تمرين 58:**

I- لتكن $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (2-x)e^x - 1$

1. ادرس تغيرات الدالة $g$
2. أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين $\alpha$ و$\beta$ حيث: $-1{,}15 < \alpha < -1{,}14$ و $1{,}84 < \beta < 1{,}85$
3. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة $f$ المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ ، و $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. ادرس اتجاه تغير الدالة $u(x) = e^x - x$ وعيّن إشارتها
2. استنتج مجموعة تعريف الدالة $f$
3. بين أنّ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$ ، ثمّ استنتج اتجاه تغير الدالة $f$
4. احسب نهايات الدالة $f$ عند حدود مجموعة تعريفها ، ثمّ شكل جدول تغيراتها
5. بين أنّ : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ و استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$
6. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$.

## الدوال الأسية في البكالوريا

**تمرين 59: بكالوريا 2008 ر**

I- $f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$. $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. ادرس تغيرات الدالة $f$
2. بيّن أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف $\omega$ واكتب معادلة لمماس $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة $\omega$
   - بيّن أنّ $\omega$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$
3. احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)]$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x+3)]$
   - استنتج أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين يُطلب إعطاء معادلة لكل منهما
4. بيّن أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $x_0$ من المجال $]-2{,}77; -2{,}76[$
   - احسب $f(1)$ و $f(-1)$ (تُدوّر النتائج إلى $10^{-2}$) ، ثمّ ارسم $(\mathscr{C}_f)$ ومستقيميه المقاربين

II- $g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g(x) = -x + 3 - \frac{4}{e^x + 1}$. $(\mathscr{C}_g)$ منحنى الدالة $g$

1. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ فإنّ: $g(x) = f(-x)$
   استنتج أنّه يوجد تحويل نقطي بسيط يحوّل $(\mathscr{C}_f)$ إلى $(\mathscr{C}_g)$
2. أنشئ في نفس المعلم السابق $(\mathscr{C}_g)$ (دون دراسة الدالة $g$)

**تمرين 60 : بكالوريا 2008 ع ت**

I- نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي:
$f(x) = (ax+b)e^{-x} + 1$ ، حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان. $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ وحدة الطول $1cm$.
عيّن قيمتي $a$ و $b$ بحيث تكون النقطة $A(-1,1)$ تنتمي إلى $(\mathscr{C}_f)$ ومعامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$

II- نعتبر الدالة العددية $g$ للمتغير الحقيقي $x$ المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي:
$g(x) = (-x-1)e^{-x} + 1$ ، و $(\mathscr{C}_g)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1. بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$ وفسّر هذه النتيجة بيانيا (نذكّر أنّ $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^u = 0$)
2. ادرس تغيرات الدالة $g$ ثمّ أنشئ جدول تغيراتها
3. بيّن أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ يقبل نقطة انعطاف I يُطلب تعيين إحداثييها
4. اكتب معادلة المماس للمنحنى $(\mathscr{C}_g)$ عند النقطة I
5. ارسم $(\mathscr{C}_g)$
6. $H$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي:
   $H(x) = (\alpha x+\beta)e^{-x}$ ، حيث $\alpha$ و $\beta$ عددان حقيقيان
   عيّن $\alpha$ و $\beta$ بحيث تكون $H$ دالة أصلية للدالة: $x \to g(x) - 1$
   استنتج الدالة الأصلية للدالة $g$ والتي تنعدم عند القيمة 0

III- لتكن $k$ الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي: $k(x) = g(x^2)$
باستعمال مشتقة دالة مركبة، عيّن اتجاه تغير الدالة $k$ ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

**تمرين 61 : بكالوريا 2009 ت ر**

نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + \frac{2}{e^x+1}$. ليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. احسب $f(x) + f(-x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، ثمّ استنتج أنّ النقطة $\omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$
2. ادرس تغيرات الدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$ ، ثمّ استنتج جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$

3. بيّن أنّ المستقيم ذي المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) عند $+\infty$
احسب $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (x+2)]$ ، استنتج المستقيم المقارب للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) عند $-\infty$
4. بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $-1{,}7 < \alpha < -1{,}6$
5. ارسم ($\mathscr{C}_f$) من أجل $x \in \mathbb{R}$
6. بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$، $f(x) = x + \frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$
7. احسب $A(\alpha)$ مساحة الحيّز من المستوي المحدّد بالمنحنى ($\mathscr{C}_f$) والمستقيمات ذات المعادلات: $y = x + 2$ و $x = 0$ و $x = \alpha$
بيّن أنّ $A(\alpha) = 2\ln(-\alpha)$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $A(\alpha)$.

**تمرين 62 : بكالوريا 2010 ر**

I- $g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (3-x)e^x - 3$
1. ادرس تغيرات الدالة $g$
2. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر $\alpha$ حيث $2{,}82 < \alpha < 2{,}83$
3. استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$

II- $f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3}{e^x-1} \; ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$
($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
1. بيّن أنّ الدالة $f$ تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ ، اكتب معادلة لـ (T) مماس ($\mathscr{C}_f$) عند المبدأ $O$
2. أ. بيّن أنّ $\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x} = 0$ ثمّ احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
ب. بيّن أنّه من أجل $x \neq 0$ فإنّ : $f'(x) = \frac{x^2}{(e^x-1)^2}g(x)$
ج. تحقق أنّ $f(\alpha) = \alpha^2(3-\alpha)$ ثمّ عيّن حصرا له
د. أنشئ جدول تغيرات الدالة $f$
3. احسب $f(x) + x^3$ واستنتج الوضعية النسبية لـ ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}$) منحنى الدالة $x \to -x^3$
بيّن أنّ $\lim_{x\to-\infty}[f(x) + x^3] = 0$ وفسّر النتيجة هندسيا
4. أنشئ في نفس المعلم المماس (T) والمنحنيين ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}$).

**تمرين 63 : بكالوريا 2010 ت ر**

$f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x) = \frac{3xe^x - 3x - 4}{3(e^x - 1)}$. ليكن $(\mathscr{C}_f)$ منحنى الدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. عيّن العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث: $f(x) = ax + \frac{b}{3(e^x - 1)}$ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}^*$
2. احسب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجالات تعريفها
3. بيّن أنّ $f$ متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها ثمّ شكّل جدول تغيراتها
4. أ. $(D)$ و $(D')$ المستقيمان اللذان معادلتهما على الترتيب: $y = x$ و $y = x + \frac{4}{3}$
   بيّن أنّ $(D)$ و $(D')$ مقاربان للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ ، ثمّ حدد وضعيته بالنسبة لكل منهما
   ب. بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين $x_0$ و $x_1$ حيث $0{,}9 < x_0 < 0{,}91$ و $-1{,}66 < x_1 < -1{,}65$
   ج. احسب من أجل كل عدد حقيقي $x$ غير معدوم $f(x) + f(-x)$. فسّر النتيجة هندسيا
   د. ارسم $(D)$ ، $(D')$ و $(\mathscr{C}_f)$
   ه. $m$ عدد حقيقي ، $(D_m)$ المستقيم المعرّف بالمعادلة $y = x + m$
   ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$
5. نعتبر الدالة $g$ المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يأتي: $g(x) = [f(x)]^2$
   ادرس تغيرات الدالة $g$ دون حساب $g(x)$ بدلالة $x$

**تمرين 64 : بكالوريا 2010 ع ت**

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$. $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أ. احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
   ب. احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ وفسّر هندسيا النتيجة
2. ادرس تغيرات الدالة $f$ على كل مجال من مجالي تعريفها ثمّ شكّل جدول تغيراتها
3. أ. بيّن أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين مائلين $(\Delta)$ و $(\Delta')$ معادلتيهما على الترتيب : $y = x$ و $y = x + 1$
   ب. ادرس وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى كل من $(\Delta)$ و $(\Delta')$
4. أثبت أنّ النقطة $\omega(0; \frac{1}{2})$ هي مركز تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

5. أ. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ حيث $\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1{,}4 < \beta < -1{,}3$

ب. هل توجد مماسات لـ $(\mathscr{C}_f)$ توازي المستقيم $(\Delta)$ ؟

ج. ارسم $(\Delta)$ ، $(\Delta')$ ثمّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$

د. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة:

$$(m-1)e^{-x}=m$$

**تمرين 65 : بكالوريا 2011 ع ت**

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^x-ex-1$. $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. أ. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب. احسب $f'(x)$ ثمّ ادرس إشارتها

ج. شكّل جدول تغيرات الدالة $f$

2. أ. بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $(-\infty)$

ب. اكتب معادلة للمستقيم $(T)$ مماس المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة $0$

ج. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]1{,}75\ ;\ 1{,}76[$ حلا وحيدا $\alpha$

د. ارسم المستقيمين $(\Delta)$ و $(T)$ ثمّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ على المجال $]-\infty;2[$

3. أ. احسب بدلالة $\alpha$ المساحة $A(\alpha)$ للحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=\alpha$

ب. أثبت أنّ : $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$ ($ua$ هي وحدة المساحات).

**تمرين 66 : بكالوريا 2012 ر**

I- $g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=2-xe^x$

1. ادرس تغيرات الدالة $g$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها

2. بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على $\mathbb{R}$ ، ثمّ تحقق أنّ : $0{,}8 < \alpha < 0{,}9$

3. عيّن حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$

II- $f$ هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\frac{2x+2}{e^x+2}$

$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا

2. أ. احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

ب. بيّن أنّ المستقيم $(\Delta')$ ذا المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

3. ادرس وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى كل من $(\Delta')$ و $(\Delta)$ حيث $(\Delta)$ هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$

4. أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$ ثمّ استنتج اتجاه تغير الدالة $f$

ب. بيّن أنّ $f(\alpha) = \alpha$ ، ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة $f$

5. ارسم $(\Delta)$ ، $(\Delta')$ و $(\mathscr{C}_f)$

6. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة: $f(x) = f(m)$

III) $(u_n)$ هي المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = f(u_n)$

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0 \leq u_n < \alpha$

2. باستعمال $(\Delta)$ و $(\mathscr{C}_f)$ مثل على محور الفواصل الحدود: $u_0$ ، $u_1$ و $u_2$ ، ثمّ خمّن اتجاه تغيّر $(u_n)$

3. برهن أنّ المتتالية $(u_n)$ متقاربة، ثمّ احسب نهايتها.

**تمرين 67 : بكالوريا 2012 ت ر**

I- $g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = -4 + (4 - 2x)e^x$

1. ادرس تغيرات الدالة $g$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها

2. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر $\alpha$ حيث: $1{,}59 < \alpha < 1{,}60$

3. استنتج إشارة $g(x)$

II- $f$ هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{2x-2}{e^x-2x}$

$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ (وحدة الطول $2cm$)

1. بيّن أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل عند $-\infty$ و $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتهما على الترتيب: $y = -1$ و $y = 0$

2. أ. برهن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$

ب. استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثمّ شكّل جدول تغير الدالة $f$

ج. احسب $f(1)$ ، ثمّ استنتج حسب قيم $x$ إشارة $f(x)$

3. أ. بيّن أنّ $f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha - 1}$ حيث $\alpha$ هو العدد المعرّف في السؤال 2 من الجزء I
ب. استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$
ج. ارسم $(\mathscr{C}_f)$
4. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة:
$$2x - 2 = (e^x - 2x)(m + 1)$$
5. $h$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = [f(x)]^2$
أ. احسب $h'(x)$ بدلالة كل من $f'(x)$ و $f(x)$ ، ثمّ استنتج إشارة $h'(x)$
ب. شكّل جدول تغير الدالة $h$

**تمرين 68 : بكالوريا 2012 ع ت**

I- لتكن $g$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 1 - xe^x$
1. احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$
2. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها
3. أ. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]-1; +\infty[$
ب. تحقق أنّ $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II- نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على المجال $]-\infty; 2]$ كما يلي : $f(x) = (x - 1)e^x - x - 1$
$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$
1. احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
2. لتكن $f'$ مشتقة الدالة $f$. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-\infty; 2]$ فإنّ:
$f'(x) = -g(x)$.
استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty; 2]$ ، ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة $f$
3. بيّن أنّ $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}\right)$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$. (تُدوّر النتائج إلى $10^{-2}$)
4. أ. بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $-\infty$
ب. ادرس وضعية المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$
5. أ. بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين $x_1$ و $x_2$ حيث $-1{,}6 < x_1 < -1{,}5$ و $1{,}5 < x_2 < 1{,}6$
ب. أنشئ $(\Delta)$ و $(\mathscr{C}_f)$

6. لتكن $h$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = (ax + b)e^x$
أ. عيّن العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث تكون $h$ دالة أصلية للدالة $x \to xe^x$ على $\mathbb{R}$
ب. استنتج دالة أصلية للدالة $g$ على $\mathbb{R}$.

**تمرين 69 : بكالوريا 2013 ر**

I- الدالة $g$ معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + (x^2 - 1)e^{-x}$

1. أ. احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$
ب. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها
نأخذ $g(1 - \sqrt{2}) \approx -0{,}25$ ، $g(1 + \sqrt{2}) \approx 1{,}43$
2. أ. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ ، ثمّ تحقق أنّ أحدهما معدوم والآخر $\alpha$ حيث : $-0{,}8 < \alpha < -0{,}7$
ب. استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي $x$

II- الدالة $f$ معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - (x + 1)^2 e^{-x}$
$(\mathscr{C}_f)$ منحنى الدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

1. أ. احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
ب. بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = x$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند $+\infty$
ج. ادرس وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$
2. أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x) = g(x)$
ب. شكّل جدول تغير الدالة $f$ على $\mathbb{R}$ (نأخذ $f(\alpha) \approx -0{,}9$)
3. أ. بيّن أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مماسين معامل توجيه كل منهما يساوي 1 ، يُطلب تعيين معادلة لكل منهما
ب. مثّل $(\Delta)$ ، المماسين والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$
ج. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة ذات المجهول $x$: $(x + 1)^2 + me^x = 0$
4. الدالة $H$ معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $H(x) = (-x^2 - 4x - 5)e^{-x}$
أ. بيّن أنّ $H$ دالة أصلية للدالة: $x \to (x + 1)^2 e^{-x}$ على $\mathbb{R}$
ب. احسب بالسنتيمتر المربع، مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = -1$ و $x = 0$

III) $(u_n)$ المتتالية العددية المعرّفة بـ : $u_0 = \alpha$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_{n+1} = f(u_n)$ (تذكّر أنّ العدد $\alpha$ يحقق $g(\alpha) = 0$)

1. برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $-1 \leq u_n \leq \alpha$
2. بيّن أنّ المتتالية $(u_n)$ متناقصة
3. استنتج أنّ المتتالية $(u_n)$ متقاربة، ثمّ احسب نهايتها.

**تمرين 70 : بكالوريا 2013 ت ر**

I- الدالة $g$ معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x-1)e^x + 1$.

1. ادرس تغيرات $g$
2. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $(x-1)e^x + 1 \geq 0$

II- الدالة $f$ معرّفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1. أ. بيّن أنّ $f$ مستمرة على $]0; +\infty[$
   ب. احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
2. أ. تحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]0; +\infty[$ : $f'(x) = \frac{1+(x-1)e^x}{x^2}$
   ب. استنتج اتجاه تغيّر الدالة $f$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها

III- $n$ عدد طبيعي حيث $n \geq 1$ ؛ $f_n$ الدالة المعرّفة على $]0; +\infty[$ بـ :

$f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n \ln x$ و $(\mathscr{C}_n)$ منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة $f_n$ على $]0; +\infty[$
2. احسب $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$
3. ادرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_n)$ و $(\mathscr{C}_{n+1})$
4. بيّن أنّ جميع المنحنيات تمرّ من نقطة ثابتة B يُطلب تعيين إحداثيتيها.
5. أ. بيّن أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_1$ من $]0{,}3; 0{,}4[$ بحيث $f_1(\alpha_1) = 0$
   ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n \geq 1$ فإنّ: $f_n(\alpha_1) < 0$ ،
   ثمّ برهن أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_n$ من $]\alpha_1; 1[$ بحيث $f_n(\alpha_n) = 0$
6. أ. بالاعتماد على الجزء II ، بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $]0; 1]$ : $\frac{e^x - 1}{x} \leq e - 1$
   ب. استنتج أنّه، من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n \geq 1$ : $\ln(\alpha_n) \geq \frac{1-e}{n}$ ،
   ثمّ $\alpha_n \geq e^{\frac{1-e}{n}}$
   جـ. جد نهاية المتتالية $(\alpha_n)$.

**تمرين 71 : بكالوريا 2013 ع ت**

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0,20 | 0,037 |
| 0,21 | 0,016 |
| 0,22 | $-0,005$ |
| 0,23 | $-0,026$ |
| 0,24 | $-0,048$ |
| 0,25 | $-0,070$ |

I- $f$ الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ: $f(x)=\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$. ($\mathscr{C}$) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$ ، ثمّ استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى ($\mathscr{C}$)
2. احسب $f'(x)$. بيّن أنّ الدالة $f$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها
3. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا $\alpha$. باستعمال جدول القيم أعلاه جِد حصرا للعدد $\alpha$.
4. ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى ($\mathscr{C}$) ، ثمّ ارسم المنحنى ($\mathscr{C}'$) الممثل للدالة $|f|$.
5. عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية $m$ التي من أجلها يكون للمعادلة: $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II- $g$ الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x)=f(2x-1)$. (عبارة $g(x)$ غير مطلوبة)

1. ادرس تغيرات الدالة $g$ على $]-\infty;1[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها
2. أ. تحقق من أنّ: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$ ، ثمّ بيّن أنّ : $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$

ب. استنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$

ج. تحقق من أنّ : $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T).

**تمرين 72 : بكالوريا 2014 ر**

I- لتكن $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(2-x)e^x-1$

1. ادرس تغيرات الدالة $g$
2. أثبت أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين $\alpha$ و$\beta$ حيث: $-1,2<\alpha<-1,1$ و $1,8<\beta<1,9$
3. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$

II- $f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ ، و $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. احسب نهاية الدالة $f$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$ وفسّر النتيجتين هندسيا
2. بين أنّ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$ واستنتج اتجاه تغير الدالة $f$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها
3. بين أنّ : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ و استنتج حصرا للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$
4. احسب $f(1)$ ، ثمّ ارسم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$.
5. $\lambda$ عدد حقيقي أكبر أو يساوي 1
   أ. احسب بدلالة $\lambda$ العدد $a(\lambda)$ حيث: $a(\lambda) = \int_1^{\lambda} [f(x) - 1]\, dx$
   ب. احسب نهاية $a(\lambda)$ عندما يؤول $\lambda$ إلى $+\infty$.

**تمرين 73 : بكالوريا 2014 ت ر**

$f$ هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x - 1)e^x$

$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. عيّن نهاية $f$ عند كل من $-\infty$ و $+\infty$
2. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ على $\mathbb{R}$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها
3. أ. بيّن أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على $\mathbb{R}$، ثمّ تحقق أنّ : $1{,}27 < \alpha < 1{,}28$

   ب. اكتب معادلة لـ $(T)$ مماس المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 وحدّد وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى $(T)$

   جـ. ارسم $(T)$ و $(\mathscr{C}_f)$.
4. عيّن قيم العدد الحقيقي $m$ التي من أجلها تقبل المعادلة: $(x - 1)e^x - (m - 1)e^m = -1$ حلا واحدا في $\mathbb{R}$
5. $h$ هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = (|x| + 1)e^{-|x|}$ و $(\mathscr{C}_h)$ تمثيلها البياني
   أ. بيّن أنّ الدالة $h$ زوجية
   ب. ارسم $(\mathscr{C}_h)$ مستعينا بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$
6. $g$ دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (ax + b)e^x$ حيث $a$ ، $b$ عددان حقيقيان عيّن $a$ ، $b$ حتى يكون من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $g'(x) = f(x)$

**تمرين 74 : بكالوريا 2011 ر**

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (3x + 4)e^x$

$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. أ. احسب $f'$ ، $f''$ ، ثمّ برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ غير معدوم فإنّ: $f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4)e^x$ حيث $f'$ ، $f''$ ،...، $f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة $f$

   ب. استنتج حل المعادلة التفاضلية $y'' = (3x + 16)e^x$

2. أ. بيّن أنّ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ ، وفسّر النتيجة هندسيا

   ب. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها

3. أ. اكتب معادلة للمماس $(\Delta)$ للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة $\omega$ التي فاصلتها $-\frac{10}{3}$

   ب. بيّن أنّ $\omega$ هي نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

   جـ. ارسم $(\Delta)$ و $(\mathscr{C}_f)$ على المجال $]-\infty; 0]$

4. أ. $x$ عدد حقيقي من المجال $]-\infty; 0]$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_{-1}^{x} te^t\, dt$

   ثمّ استنتج دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]-\infty; 0]$

   ب. $\lambda$ عدد حقيقي أصغر تماما من $-\frac{4}{3}$

   احسب بدلالة $\lambda$ المساحة $A(\lambda)$ للحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها: $y = 0$ و $x = -\frac{4}{3}$ و $x = \lambda$ ، ثمّ جد $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$ .

**تمرين 75 : بكالوريا 2011 ت ر**

I) $f$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$

$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. ادرس تغيرات الدالة $f$
2. عيّن المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$
3. بيّن أنّ للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ نقطة انعطاف $\omega$ يُطلب تعيينها، ثمّ اكتب معادلة لمماس $(\mathscr{C}_f)$ عندها

   ب. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها

4. لتكن $g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = f(x) - x$

   أ. ادرس تغيرات الدالة $g$

   ب. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $2{,}7 < \alpha < 2{,}8$

5. أ. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x) = 0$
ب. ارسم المماس والمستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته: $y = x$ والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

II) $(u_n)$ المتتالية العددية المعرّفة كما يلي: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = f(u_n)$

1. استخدام $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ ، مثّل $u_0$ ، $u_1$ و $u_2$ على حامل محور الفواصل
2. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $1 \leq u_n < \alpha$
3. بيّن أنّ المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما
4. استنتج أنّ $(u_n)$ متقاربة وبيّن أنّ: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$ .

**تمرين 76 : بكالوريا 2015 ع ت**

I) $g$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ على $\mathbb{R}$
2. بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $\mathbb{R}$، ثمّ تحقق أنّ : $0{,}36 < \alpha < 0{,}37$
3. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) $f$ هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$
$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1. أ. بيّن أنّ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x) = e^{2x+2}\, g(-x)$
ب. استنتج أنّ الدالة $f$ متناقصة تماما على $]-\infty; -\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[-\alpha; +\infty[$
2. احسب نهاية $f$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ، ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة $f$
3. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) + x - 1]$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا
4. ادرس وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y = -x + 1$
5. أنشئ $(\Delta)$ و $(\mathscr{C}_f)$ على المجال $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ ، نأخذ $f(-\alpha) \approx 0{,}1$
6. أ. تحقق أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$:
$2f(x) + f'(x) - f''(x) = 1 - 2x - 3e^{2x+2}$
ب. استنتج دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$.

**تمرين 77 : بكالوريا 2015 ر**

$f$ الدالة المعرّفة بـ: $f(0) = 0$ ومن أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-\infty; 0[$ :

$f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}$

$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. ادرس استمرارية الدالة $f$ عند 0 من اليسار
2. احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)}{x}$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا
3. أ. احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

   ب. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها
4. أ. بيّن أنّ $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = 0$

   ب. استنتج أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ بجوار $-\infty$ ، يُطلب تعيين معادلة له
5. $g$ الدالة المعرّفة على المجال $]-\infty; 0[$ بـ: $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

   أ. احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$

   ب. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها
6. أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-\infty; 0[$ : $f(x) > x$

   ب. استنتج وضعية المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$

   ج. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$
7. $(u_n)$ المتتالية المعرّفة بـ: $u_0 = -3$ ومن أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_{n+1} = f(u_n)$

   أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $u_n < 0$

   ب. حدد اتجاه تغيّر المتتالية $(u_n)$

   ج. بيّن أنّ المتتالية $(u_n)$ متقاربة، ثمّ عيّن $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$
8. $m$ عدد حقيقي. $h_m$ الدالة ذات المتغيّر الحقيقي $x$ المعرّفة على المجال $]-\infty; 0[$ بـ:

   $h_m(x) = xe^{\frac{1}{x}} - mx$

   أ. احسب $h'_m(x)$ حيث $h'_m$ هي الدالة المشتقة للدالة $h_m$

   ب. باستعمال المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ ، ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ ، عدد حلول المعادلة $h'_m(x) = 0$.

**تمرين 78 : بكالوريا 2015 ت ر**

I) $g$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = (x+2)e^x - 2$

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$
2. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها
3. احسب $g(0)$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$

II) $f$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = 2x + 3 - (x+1)e^x$

($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x) = -g(x)$

ب. استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة $f$

ج. بيّن أنّ المستقيم ($\Delta$) ذا المعادلة $y = 2x + 3$ مقارب مائل للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) عند $-\infty$ ، ثمّ ادرس وضعية ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة إلى المستقيم ($\Delta$)

3. أ. بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ حيث: $0{,}92 < \alpha < 0{,}93$ و $-1{,}56 < \beta < -1{,}55$

ب. ارسم المستقيم ($\Delta$) والمنحنى ($\mathscr{C}_f$) على المجال $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$

4. أ. بيّن أن الدالة $x \to xe^x$ هي دالة أصلية للدالة $x \to (x+1)e^x$ على $\mathbb{R}$

ب. احسب $A$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى ($\mathscr{C}_f$) والمستقيم ($\Delta$) والمستقيمين $x = 0$ ، $x = \alpha$ (حيث $\alpha$ هي القيمة المعرّفة في السؤال 3.أ)

ج. جد حصرا للعدد $A$.

**تمرين 79 : بكالوريا 2016 ع ت**

I) $g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$

1. أ. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

ب. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها

2. أ. بيّن أن للمعادلة $g(x) = 0$ حلين في $\mathbb{R}$ أحدهما معدوم والآخر $\alpha$ حيث : $-1{,}52 < \alpha < -1{,}51$

ب. استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) $f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = -x + (x^2 + 3x + 2)e^{-x}$

($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $1cm$)

1. أ. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x) = -g(x)$

ج. شكل جدول تغيرات الدالة $f$ على $\mathbb{R}$ ، نأخذ $f(\alpha) \approx 0{,}38$

د. عيّن دون حساب: $\lim\limits_{h\to0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا

2. أ. بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = -x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) عند $+\infty$

ب. ادرس وضعية المنحنى ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$

ج. بيّن أنّ للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) نقطتي انعطاف يُطلب تعيين إحداثييهما

د. ارسم $(\Delta)$ و ($\mathscr{C}_f$) على المجال $]-2;+\infty[$

هـ. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة:

$(m-x)e^x + (x^2+3x+2) = 0$ على المجال $]-2;+\infty[$

III) $h$ و $H$ الدالتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ بـ :

$h(x) = x + f(x)$ و $H(x) = (ax^2+bx+c)e^{-x}$

1. عيّن الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ حتى تكون الدالة $H$ دالة أصلية للدالة $h$ على $\mathbb{R}$

2. أ. احسب التكامل التالي: $A(\lambda) = \int_0^\lambda h(x)\,dx$ ، حيث $\lambda$ عدد حقيقي موجب تماما وفسّر النتيجة هندسيا

ب. احسب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$ .

**تمرين 80 : بكالوريا 2016 ع ت**

I) لتكن $g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 2e^x - x^2 - x$

1. أ. احسب $g'(x)$ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$، ثمّ ادرس اتجاه تغير الدالة $g'$

ب. بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$، $g'(x) > 0$

جـ. احسب نهايتي الدالة $g$ عند كل من $-\infty$ و $+\infty$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها

2. بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $-1{,}38 < \alpha < -1{,}37$

3. استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي $x$

II) لتكن $f$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{x^2e^x}{e^x-x}$

($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب. بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\frac{xe^x g(x)}{(e^x-x)^2}$

جـ. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ على $\mathbb{R}$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها

2. أ. بيّن أنّ $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\frac{2}{\alpha-1}$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

ب. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x^2]$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا

جـ. أنشئ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) . نُعطى $f(\alpha)\approx 0{,}29$.

**تمرين 81 : بكالوريا 2016 ر**

I) $\varphi$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $\varphi(x)=(x^2-x+1)e^{-x+1}-1$

1. أ. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$

ب. ادرس اتجاه تغير الدالة $\varphi$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها

2. بيّن أن المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا $\alpha$ يختلف عن 1 ، ثمّ تحقق أنّ : $2{,}79<\alpha<2{,}80$

3. استنتج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$

II) $f$ و $g$ الدالتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=(2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+1}$. ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_g$) تمثيلاهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. أ. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب. ادرس اتجاه تغيّر الدالة $f$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها

2. بيّن أنّ للمنحنيين ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_g$) مماسا مشتركا $(T)$ في النقطة ذات الفاصلة 1 ، ثمّ جد معادلة له

3. ارسم المماس $(T)$ والمنحنى ($\mathscr{C}_f$)

4. أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f(x)-g(x)=\frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$

ب. ادرس إشارة الفرق $f(x)-g(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ثمّ استنتج الوضع النسبي للمنحنيين ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_g$)

جـ. باستعمال مكاملة بالتجزئة، احسب بدلالة العدد الحقيقي $x$ : $\int_1^x f(t)\,dt$

د. احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 1$ و $x = 2$

III)

1. احسب $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$. أعط تخمينا لعبارة $f^{(n)}(x)$ ، حيث $n$ عدد طبيعي غير معدوم
2. برهن بالتراجع أنّه من أجل عدد طبيعي غير معدوم $n$ :
$f^{(n)}(x) = (-1)^n[2x - (2n+1)]e^{1-x}$
3. $(u_n)$ المتتالية العددية المعرّفة من أجل عدد طبيعي غير معدوم $n$ كما يلي:
$u_n = f^{(n)}(1)$

أ. احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم $k$ ، المجموع: $u_k + u_{k+1}$

ب. استنتج بدلالة $n$ ، المجموع: $u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n}$.

**تمرين 82 : بكالوريا 2017 ع ت**

I) نعتبر الدالة العددية $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 2 - x^2e^{1-x}$

وليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1. بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ واعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة، ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
2. أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$

ب. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها

3. اكتب معادلة لـ $(T)$ المماس للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1

II) نعتبر الدالة العددية $h$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = 1 - xe^{1-x}$

1. بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ فإنّ: $h(x) \geq 0$ ، ثمّ ادرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمماس $(T)$
2. بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $-0{,}7 < \alpha < -0{,}6$
3. أنشئ المماس $(T)$ والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ على المجال $]-1; +\infty[$
4. $F$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$
تحقق أنّ $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$، ثمّ احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 0$ و $x = 1$.

**تمرين 83 : بكالوريا 2017 ر**

I) نعتبر الدالة العددية $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1}$

$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. أ. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يُطلب تعيين معادلة له

   ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x) = x(x^2 - 5x + 4)e^{-x+1}$ ، ثمّ استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ وشكل جدول تغيراتها

2. اكتب معادلة $(T)$ مماس المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 2

3. $h$ الدالة المعرّفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $h(x) = x^2e^{-x+2} - 4$

   ادرس اتجاه تغير الدالة $h$ ثمّ استنتج إشارة $h(x)$. حدّد عندئذ وضعية المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى $(T)$ على المجال $]0; +\infty[$

4. ارسم المماس $(T)$ والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ على المجال $]0; +\infty[$

5. نعتبر $m$ وسيط حقيقي والمعادلة ذات المجهول الحقيقي $x$ الموجب:

   $f(x) = m(x - 2) \dots (E)$

   ناقش بيانيا حسب قيم $m$ عدد حلول المعادلة $(E)$

6. $g$ الدالة المعرّفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

   اعتمادا على السؤال رقم (1)، شكل جدول تغيرات الدالة $g$.

الجزء الثالث
الدوال اللوغاريتمية

# قواعد أساسية في دراسة الدوال اللوغاريتمية

1. من أجل كل عدد حقيقي $a$ موجب تماما ، يوجد عدد حقيقي وحيد $x$ حيث : $e^x = a$
يُسمّى العدد $x$ اللوغاريتم النيبيري للعدد $a$ حيث : $x = \ln a$
2. الدالة اللوغاريتمية $f(x) = \ln x$ مُعرّفة على المجال $]0;+\infty[$
3. **خواص الدالة اللوغاريتمية :**

$\textcircled{1}\ \ln x = y \Rightarrow x = e^y$ ; $\textcircled{2}\ e^{\ln x} = x\ (x > 0)$ ; $\textcircled{3}\ \ln e^x = x\ (x \in \mathbb{R})$

$\textcircled{4}\ \ln(xy) = \ln x + \ln y$ ; $\textcircled{5}\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$ ; $\textcircled{6}\ \ln x^n = n \ln x$

$\textcircled{7}\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ ; $\textcircled{8}\ \ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$

**مثال :**

$$1)\ \ln\sqrt{e} - \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2}\ln e + \ln e = \frac{1}{2} + 1 = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$2)\ e^{\ln 3 - \ln 5 + \ln 15} = e^{\ln\frac{3}{5} + \ln 15} = e^{\ln\left(\frac{3}{5}\times 15\right)} = e^{\ln 9} = \boxed{9}$$

4. **نهايات الدالة اللوغاريتمية :**

$\textcircled{1}\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$ ; $\textcircled{2}\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ ; $\textcircled{3}\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\textcircled{4}\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x = 0$ ; $\textcircled{5}\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ ; $\textcircled{6}\ \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

**ملاحظة:** العبارة $x \ln x$ تؤول بالضبط إلى $0^-$ لما $x$ يؤول إلى $0^+$

**مثال :**

$$1)\ \lim_{x\to+\infty} x\ln x - x = \lim_{x\to+\infty} x(\ln x - 1) = \boxed{+\infty}$$

$$2)\ \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\ln x}{x^2} \begin{matrix}\to -\infty \\ \to 0^+\end{matrix} = \boxed{-\infty}$$

$$3)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+3)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left[x\left(x+\frac{3}{x^2}\right)\right]}{x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\ln\left(x+\frac{3}{x^2}\right)}{x}}_{\to 0} = \boxed{0}$$

$$4)\ \lim_{x\to 0^+} x\ln x^2 - x = \lim_{x\to 0^+} 2\underbrace{x\ln x}_{\to 0} - x = \boxed{0}$$

$$5)\ \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{X\to 0^+} \frac{1}{X}\ln(1+X) = \lim_{X\to 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = \boxed{1}\ ;\ \left(X = \frac{1}{x}\right)$$

6) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\underbrace{x\ln x}_{\to 0^-}} = \boxed{-\infty}$

### 5. اتجاه تغيّر الدالة اللوغاريتمية :

الدالة اللوغاريتمية قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ : $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ، $[\ln u(x)]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

الدالة اللوغاريتمية متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ ، منه نستنتج أنّ :

- المعادلة $\ln u(x) = \ln v(x)$ تكافئ المعادلة $u(x) = v(x)$
- المتراجحة $\ln u(x) > \ln v(x)$ تكافئ المتراجحة $u(x) > v(x)$
- المتراجحة $\ln u(x) < \ln v(x)$ تكافئ المتراجحة $u(x) < v(x)$

**مثال 1: حساب المشتقات**

1) $f(x) = \ln(x^2+4x-5)\,;\, f'(x) = \frac{2x+4}{x^2+4x-5}$

2) $f(x) = x\ln x - \ln(\ln x)\ ;\ f'(x) = \ln x + \dfrac{x}{x} - \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \ln x + 1 - \dfrac{1}{x\ln x}$

3) $f(x) = x + \ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)\ ;\ f'(x) = 1 + \dfrac{\frac{4}{(2x+1)^2}}{\frac{2x-1}{2x+1}} = 1 + \dfrac{4}{(2x+1)(2x-1)} = \dfrac{4x^2+3}{4x^2-1}$

4) $f(x) = \sqrt{\ln x} + (\ln x)^2\ ;\ f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}} + \dfrac{2\ln x}{x} = \dfrac{\sqrt{\ln x}}{2x\ln x} + \dfrac{2\ln x}{x}$

**مثال 2: حل المعادلات والمتراجحات**

1) $\ln(2x-3) = \ln(x-3) + \ln 5$

$\begin{cases} 2x-3>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2} \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{D} = \boldsymbol{]3;+\infty[}$

$\ln(2x-3) = \ln(x-3) + \ln 5 \Rightarrow \ln(2x-3) = \ln 5(x-3)$

$\Rightarrow 2x-3 = 5x-15 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4\ ;\ 4 \in D \Rightarrow \boxed{S = \{4\}}$

2) $\ln(x^2-5) - \ln(4-x) = 2\ln 2$

$\begin{cases} x^2-5>0 \\ 4-x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in ]-\infty;-\sqrt{5}[ \cup ]\sqrt{5};+\infty[ \ldots D_1 \\ x \in ]-\infty;4[ \ldots D_2 \end{cases} \Rightarrow x \in D_1 \cap D_2$

$\Rightarrow \boldsymbol{D} = \boldsymbol{]-\infty;-\sqrt{5}[ \cup ]\sqrt{5};4[}$

$\ln(x^2-5)-\ln(4-x)=2\ln 2 \Rightarrow \ln\dfrac{x^2-5}{4-x}=\ln 4 \Rightarrow \dfrac{x^2-5}{4-x}=4$

$\Rightarrow x^2-5=16-4x \Rightarrow x^2+4x-21=0 \Rightarrow (x-3)(x+7)=0$

$\Rightarrow x=3$ أو $x=-7; \begin{cases} -7\in D \\ 3\in D \end{cases} \Rightarrow \boxed{S=\{-7;3\}}$

3) $(\ln x)^2-\ln x-6=0$

$x>0 \Rightarrow \boldsymbol{D}=]\mathbf{0};+\infty[$ ; $\ln x=X$

$(\ln x)^2-\ln x-6=0 \Rightarrow X^2-X-6=0 \Rightarrow (X-3)(X+2)=0$

$\Rightarrow X=3$ أو $X=-2 \Rightarrow x=e^3$ أو $x=e^{-2}; \begin{cases} e^{-2}\in D \\ e^3\in D \end{cases} \Rightarrow \boxed{S=\{e^{-2};e^3\}}$

4) $\ln(2x+3)<4$ ; $\boldsymbol{D}=\left]-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}};+\infty\right[$

$\ln(2x+3)<4 \Rightarrow 2x+3<e^4 \Rightarrow x<\dfrac{e^4-3}{2} \Rightarrow \boxed{S=\left]-\dfrac{3}{2};\dfrac{e^4-3}{2}\right[}$

5) $(\ln x)^2-1\leq 0$ ; $\boldsymbol{D}=]\mathbf{0};+\infty[$

$(\ln x)^2-1\leq 0 \Rightarrow (\ln x-1)(\ln x+1)\leq 0 \Rightarrow -1\leq \ln x\leq 1$

$\Rightarrow e^{-1}\leq x\leq e \Rightarrow \boxed{S=[e^{-1};e]}$

**تمرين 01 :**

بسّط ما يلي :

① $\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)-\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)$ ; ② $\ln\sqrt{e}-\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ ;

③ $\exp(\ln 3-\ln 5+\ln 15)$ ; ④ $\ln 2+\ln(8e)-\ln(4e^2)$ ;

⑤ $\ln\left(\frac{1}{e}\right)^2-\ln^2\left(\frac{1}{e}\right)$

**تمرين 02 :**

عيّن مجموعة تعريف الدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية :

① $f(x)=\ln(x^2+2x-3)$ ; ② $f(x)=\ln(x+2)^2$ ;

③ $f(x)=\ln|x+1|$ ; ④ $f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$ ;

⑤ $f(x)=\ln(x+2)-\ln(x-1)$ ; ⑥ $f(x)=\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|$ ;

⑦ $f(x)=\ln|x+1|-\ln|x|$ ; ⑧ $f(x)=\ln(-2x+3)$ ;

⑨ $f(x)=\frac{x}{\ln x-1}$ ; ⑩ $f(x)=\ln[ln(x)]$ ; ⑪ $f(x)=\frac{\ln(x+2)}{\ln(x-2)}$ ;

⑫ $f(x)=\sqrt{\ln x}$ ; ⑬ $f(x)=\sqrt{1-(\ln x)^2}$ ;

⑭ $f(x)=\sqrt{1+\ln x}$ ; ⑮ $f(x)=\frac{1+\ln x}{1-|\ln x|}$ ;

⑯ $f(x)=\ln(-x^2-x+2)$ ; ⑰ $f(x)=\sqrt{1-\ln x}-\ln(x^2+1)$

**تمرين 03 :**

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

① $\ln(2x-3)=\ln(x-3)+\ln 5$ ; ② $\ln(x^2-5)-\ln(4-x)=2\ln 2$

③ $2\ln x=\ln(x+4)+\ln 2x$ ; ④ $\ln(4-x)=\ln(x-12)-\ln(x+2)$

⑤ $\ln(3-x)-\ln\sqrt{x+1}=\frac{1}{2}\ln 2x$ ; ⑥ $\ln|x-4|+\ln(7-3x)=\ln 2$

⑦ $\ln(4x-10)+\ln(2x-2)^2-2\ln(4x-4)=0$

⑧ $(\ln x)^2-\ln x-6=0$ ; ⑨ $\ln x^2-\ln\sqrt{x}-6=0$

⑩ $2(\ln x)^3-7(\ln x)^2+3\ln x=0$ ; ⑪ $(\ln x)^4-10(\ln x)^2+9=0$

⑫ $(\ln x)^3+3(\ln x)^2-4=0$ ; ⑬ $\ln(\sin x)+\ln(\cos x)=\ln\frac{\sqrt{3}}{4}$

**تمرين 04 :**

حل في $\mathbb{R}$ جمل المعادلات التالية :

① $\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln 10 \\ x + y = 7 \end{cases}$

② $\begin{cases} \ln x + \ln y = 1 \\ \frac{3}{\ln x} - \frac{2}{\ln y} = 2 \end{cases}$ ; ③ $\begin{cases} \ln(x+1) + 2\ln(y-2) = 4 \\ 3\ln(x+1) - \ln(y-2) = 5 \end{cases}$

④ $\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln\sqrt{3} - 2\ln 2 \\ 2(x+y) = \sqrt{3} + 1 \end{cases}$

⑤ $\begin{cases} \ln x + \ln y = 2\ln 2 + \ln 15 \\ x + y = 19 \end{cases}$

⑥ $\begin{cases} \ln\left(\frac{x}{y}\right) = -\ln 3 \\ x^2 + 2y = 16 \end{cases}$

**تمرين 05 :**

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2 - 4x - 5 = 0$
2. استنتج حلول المعادلات التالية :

$a)\ (\ln x)^2 - 4\ln x - 5 = 0$

$b)\ \ln(x-3) + \ln(x-1) = 3\ln 2$

$c)\ e^x - 4 = 5e^{-x}$

**تمرين 06 :**

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :

① $\ln x^2 - 1 \leq 0$ ; ② $(\ln x)^2 - 1 \leq 0$ ; ③ $\ln(2x+3) < 4$

④ $\ln(x^2 - 2x) > \ln(4x - 5)$ ; ⑤ $\ln(x-2)^2 \geq 1$

⑥ $2\ln(x) + \ln(2x+5) \leq \ln(2-x)$ ;

⑦ $\ln(2x-3) + 2\ln(x+1) < \ln(x-3)$ ; ⑧ $\ln\left(\frac{2x-1}{x+3}\right) \leq 0$

**تمرين 07 :**

ادرس إشارة العبارات التالية :

① $(\ln x - 1)\ln x$ ; ② $2x\ln(1-x)$ ; ③ $\dfrac{2-\ln x}{1+\ln x}$ ; ④ $\ln^2 x - \ln x - 6$

**تمرين 08 :**

عيّن الدالة المشتقة للدالة $f$ في المجموعة التي تكون فيها قابلة للاشتقاق :

① $f(x) = \ln(x^2+4x-5)$ ; ② $f(x) = 2x - 1 + \ln|2x-1|$

③ $f(x) = \ln(-x) + \ln\sqrt{2x+3}$ ; ④ $f(x) = x\ln x - \ln(\ln x)$

⑤ $f(x) = \frac{1+2\ln x}{x+1}$ ; ⑥ $f(x) = \frac{1+\ln x^2}{x+1}$

⑦ $f(x) = x + \ln\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)$ ; ⑧ $f(x) = \sqrt{\ln x} + (\ln x)^2$

**تمرين 09 :**

احسب النهايات التالية :

① $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \ln(2x+3)$ ; ② $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(x^2+x-2)$

③ $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x - x$ ; ④ $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1+\ln x}{x^2}$ ; ⑤ $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x - 1 + \ln(-x)$

⑥ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\ln x}{x+1}$ ; ⑦ $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{x+1}{x} + \ln x$ ; ⑧ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

⑨ $\lim\limits_{x\to-\infty} x + \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$ ; ⑩ $\lim\limits_{x\to2^+} x + \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$ ; ⑪ $\lim\limits_{x\to2^-} x + \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$

⑫ $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left|\frac{x+1}{x^2-4}\right|$ ; ⑬ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+2)}{x}$ ; ⑭ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+3)}{x}$

⑮ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}$ ; ⑯ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^2}$ ; ⑰ $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln x - \sqrt{x}$

⑱ $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x^2 - x$ ; ⑲ $\lim\limits_{x\to1^-} (1-x)\ln(1-x)$

⑳ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2-1) - \ln(x+2)$ ; ㉑ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 2 - \ln(x-1)$

㉒ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x-\ln x}{x+\ln x}$ ; ㉓ $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln(x+1)}{x^2}$ ; ㉔ $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln(2x+1)}{x}$

㉕ $\lim\limits_{x\to2^-} \frac{\ln(x-1)}{x-2}$ ; ㉖ $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ ; ㉗ $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

㉘ $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln(1+3x-x^2)}{x}$ ; ㉙ $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln(1+3x)}{\sqrt{x}}$ ; ㉚ $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{x^2+2x-2\ln(1-2x)}{x}$

**تمرين 10 :**

$f$ دالة عددية للمتغير الحقيقي $x$ معرّفة بالعبارة : $f(x) = \ln x + (\ln x)^2$

1. ادرس تغيرات الدالة $f$
2. عيّن إحداثيات نقط تقاطع ($\mathscr{C}_f$) مع حامل محور الفواصل
3. عيّن معادلة المماس للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) عند النقطة التي فاصلتها 1
4. ارسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$).

**تمرين 11 :**

$f$ الدالة العددية المعرّفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{x+\ln x}{x}$. ($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. ادرس تغيرات الدالة $f$ وشكّل جدول تغيراتها
2. اكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)
3. بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$
4. ارسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$)

**تمرين 12 :**

$f$ الدالة العددية المعرّفة على $]0; +\infty[$ بالعبارة: $f(x) = (\ln x)^2 - \ln x - 2$.

($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. ادرس تغيرات الدالة $f$ وشكّل جدول تغيراتها
2. عيّن نقط تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مع محوري الإحداثيات
3. ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)
4. ارسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$)

**تمرين 13 :**

$f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة: $f(x) = \frac{1+\ln(x^2)}{x}$. ($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. ادرس شفعية الدالة $f$
2. ادرس تغيرات الدالة $f$ على المجال $]0; +\infty[$
3. اكتب معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)
4. عيّن نقط تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مع محوري الإحداثيات
5. ارسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$)

**تمرين 14 :**

$f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^* - \{-2\}$ بـ: $f(x) = x + 2 + \ln\left|\frac{x}{x+2}\right|$. $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. ادرس تغيرات الدالة $f$ وشكّل جدول تغيراتها
2. بيّن أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ يُطلب إعطاء معادلته
3. عيّن النقطة $\omega$ تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيم $(\Delta)$ واثبت أنها مركز تناظر لـ $(\mathscr{C}_f)$
4. احسب $f(-\frac{5}{2})$ ; $f(-3)$ ; $f(-4)$ ، ثمّ ارسم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$

**تمرين 15 :**

$f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1|$.
$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. ادرس تغيرات الدالة $f$ والفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$
2. برهن أنّه توجد نقطتا انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يُطلب تعيين إحداثييها
3. جد معادلة كل من المماسين للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند نقطتي الانعطاف
4. ارسم المماسين والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

**تمرين 16 :**

I- نعتبر الدالة $g$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.

1. ادرس تغيرات الدالة $g$
2. احسب $g(1)$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$.

II- نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$. $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. ادرس تغيرات الدالة $f$
2. بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة : $y = x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$
3. ادرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$
4. ارسم المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

**تمرين 17 :**

I- نعتبر الدالة $g$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = 2x^2 - 3 + \ln x$.

1. ادرس تغيرات الدالة $g$
2. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $\left]1; \frac{3}{2}\right[$
3. استنتج إشارة $g(x)$.

II- نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x} + 2x - 5$.
($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. ادرس تغيرات الدالة $f$
2. بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة : $y = 2x - 5$ مقارب مائل للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)
3. ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى ($\mathscr{C}_f$)

**تمرين 18 :**

I- لتكن الدالة $g$ المعرّفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

1. ادرس تغيرات الدالة $g$
2. احسب $g(1)$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$.

II- لتكن الدالة $f$ المعرّفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = 3 - x + \frac{\ln x}{x}$. ($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. ادرس تغيرات الدالة $f$
2. بيّن أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يُطلب تعيين معادلته
3. ادرس وضعية المنحنى ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة إلى (Δ)
4. بيّن أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما $x_0$ و $x_1$ حيث :
$\frac{1}{4} < x_0 < 1$ و $3 < x_1 < 4$
5. ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى ($\mathscr{C}_f$)

**تمرين 19 :**

I- نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $]-3; 1[$ بـ :
$f(x) = a\ln(3 + x) + b\ln(1 - x) - 2$ ، حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان.
عيّن العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث يقبل منحنى الدالة $f$ عند النقطة $(0; -2 + 3\ln 3)$ مماسا موازيا لحامل محور الفواصل

II- لتكن الدالة $f$ المعرّفة على $]-3; 1[$ بـ : $f(x) = 3\ln(3 + x) + \ln(1 - x) - 2$ ،
و ($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أ. احسب $\lim\limits_{x\to -3^{>}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1^{<}} f(x)$، ثمّ استنتج أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين يُطلب كتابة معادلتيهما

ب. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها

ج. هل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف ؟ برّر إجابتك

2. (T) هو المماس للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة التي فاصلتها $x_0$

اكتب معادلة المماس (T) إذا كان معامل توجيهه يساوي 1

3. أ. بيّن أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما $\alpha$ و $\beta$ حيث :

$-2 < \alpha < -1$ و $0{,}5 < \beta < 0{,}9$

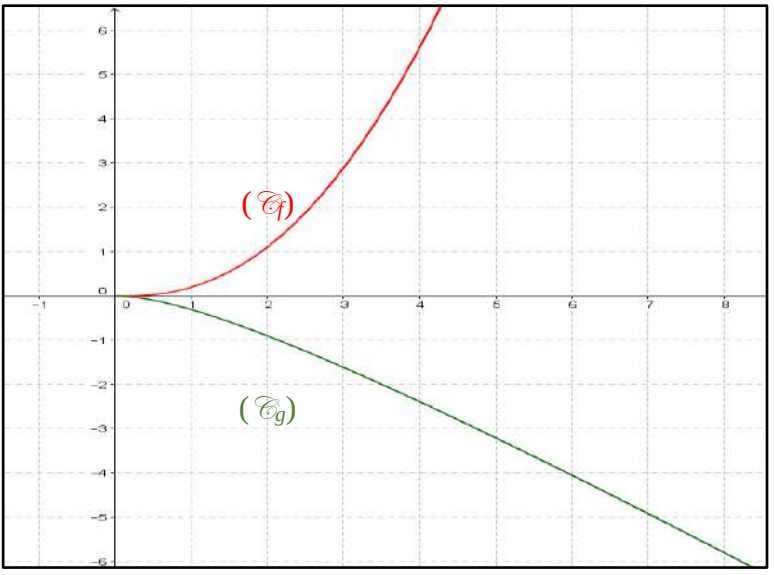
ب. ارسم المماس (T) والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

4. ناقش جبريا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ $(m > 0)$ عدد حلول المعادلة :

$f(x) = 2\ln(3+x) - 2 + \ln m$

**تمرين 20 :**

ليكن $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ بياني الدالتين $f$ و $g$ على المجال $]0;+\infty[$




1. بقراءة بيانية ، عيّن :

أ. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

ب. اتجاه تغيّر كل من $f$ و $g$ على المجال $]0;+\infty[$

ج. إشارة كل من $f(x)$ و $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

2. نعتبر الدالتين $f$ و $g$ المعرفتين على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي :

$f(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}$ و $g(x) = \ln(x+1) - x$

أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

ب. ادرس اتجاه تغيّر كل من $f$ و $g$ على المجال $]0;+\infty[$

ج. استنتج إشارة كل من $f$ و $g$ على المجال $]0;+\infty[$

3. استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب فإنّ : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x$

4. استنتج القيمة التقريبية إلى $10^{-3}$ بالزيادة للعدد $\ln(1{,}1)$.

**تمرين 21 :**

I- لتكن الدالة $g$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ بالعبارة : $g(x) = \frac{2e-x}{x} - \ln x$.

1. ادرس تغيرات الدالة $g$

2. احسب $g(e)$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$.

II- نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بالعبارة : $f(x) = (2e - |x|)(\ln|x|)$. ($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. برهن أنّ الدالة $f$ زوجية

2. ادرس تغيرات الدالة $f$

3. عيّن إحداثيات نقط تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مع حامل محور الفواصل

4. ارسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$)

**تمرين 22 :**

نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R} - \{0,1\}$ بالعبارة : $f(x) = -\frac{1}{2}x + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$.

($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. ادرس تغيرات الدالة $f$

2. بيّن أنّ : $(d): y = -\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)

3. ادرس وضعية المنحنى ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة إلى $(d)$

4. برهن أنّ النقطة $I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) واكتب معادلة المماس عند هذه النقطة

5. ارسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$)

6. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + m$$

**تمرين 23 :**

I- ليكن كثير الحدود $P(x)$ المعرّف كما يلي : $P(x) = 3x^3 - x - 2$

1. احسب $P(1)$ ، ثمّ حلل $P(x)$
2. استنتج إشارة كثير الحدود $P(x)$

II- لتكن الدالة $g$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^3 - x + 1 - 2\ln x$.

1. ادرس تغيرات الدالة $g$
2. استنتج إشارة $g(x)$.

III- نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ بالعبارة : $f(x) = x + 1 + \frac{x+\ln x}{x^2}$. ($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. ادرس تغيرات الدالة $f$
2. بيّن أنّ : $(d): y = x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)
3. بيّن أنّ المستقيم $(d)$ يقطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$ حيث : $0{,}56 < \alpha < 0{,}57$ ، ثمّ استنتج وضعية المنحنى ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة إلى $(d)$
4. ارسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$)

**تمرين 24 :**

نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على المجال $]-2;+\infty[$ بالعبارة : $f(x) = 1 + x\ln(x+2)$.
($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. احسب $f'(x)$ و $f''(x)$
2. عيّن إشارة $f''(x)$ ، ثمّ ادرس اتجاه تغير الدالة $f'$
3. بيّن أنّ المعادلة $f'(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-0{,}6;-0{,}5[$ ، ثمّ استنتج إشارة $f'(x)$
4. ادرس تغيرات الدالة $f$
5. بيّن أنّ $f(\alpha) = \frac{-\alpha^2+\alpha+2}{\alpha+2}$. استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$
6. ارسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$)

**تمرين 25 :**

I- لتكن الدالة $g$ المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ كما يلي :

$g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$.

1. ادرس تغيرات الدالة $g$
2. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]1 + e; e^3 + 1[$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$.

II- نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بالعبارة : $f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$. ($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. احسب $f'(x)$ ، ثمّ بيّن أنّ إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $g(x^2)$
2. ادرس تغيرات الدالة $f$ ، ثمّ استنتج إشارة $f(x)$

III- نعتبر الدالة $h$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة : $h(x) = f(e^x)$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^+} h(x)$
2. ادرس اتجاه تغير الدالة $h$
3. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي موجب لدينا : $h(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$
4. ارسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$). (نأخذ $\alpha = 10$)

**تمرين 26 :**

I- لتكن الدالة $g$ المعرّفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = x - (x+1)\ln(x+1)\,;\, x > -1 \\ g(-1) = -1 \end{cases}.$$

1. ادرس قابلية الاشتقاق للدالة $g$ عند $x_0 = -1$. فسّر النتيجة هندسيا
2. ادرس تغيرات الدالة $g$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$.

II- لتكن الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x) = e^{-x}\ln(e^x+1)$. ($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. برهن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا : $f'(x) = \frac{g(e^x)}{e^x(e^x+1)}$، ثمّ استنتج إشارة $f'(x)$.
2. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة $f$
3. ارسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$)

**تمرين 27 :**

I- نعتبر الدالة $g$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$.

1. ادرس تغيرات الدالة $g$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها
2. بيّن أنّه من أجل كل $x > 0$ فإنّ $g(x) > 0$ .

II- لتكن الدالة $f$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\ln x}{x}$. ($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ . استنتج أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما ($\Delta$) معادلته $y = \frac{x}{2}$ ، ثمّ ادرس وضعية المنحنى ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة إلى ($\Delta$)
2. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها
3. بيّن أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها $\alpha$ حيث : $0{,}7 < \alpha < 0{,}8$
4. أثبت أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقبل نقطة انعطاف $\omega$ يُطلب تعيينها
5. اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) والذي يوازي ($\Delta$)
6. هل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مماسا يشمل المبدأ ؟ علل
7. ارسم ($\Delta$) ، (T) والمنحنى ($\mathscr{C}_f$)
8. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة : $mx - \ln x = 0$

III- نعتبر الدالة $h$ المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x) = \frac{x}{2} + \frac{\ln|x|}{x}$. ($\mathscr{C}_h$) تمثيلها البياني في المعلم السابق

- أثبت أنّ الدالة $h$ فردية ، ثمّ ارسم ($\mathscr{C}_h$) في نفس المعلم.

**تمرين 28 :**

نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $]-4;+\infty[$ بـ :

ليكن ($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في $\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x - 2\ln(1-2x) \ ; \ -4 \le x \le 0 \\ f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) \ ; x > 0 \end{cases}$

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ . يمكن وضع $X = -2x$
   - أثبت أنّ $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{1}{2}$
   - ماذا يمكن قوله عن قابلية اشتقاق الدالة f عند الصفر ؟ أعط تفسيرا هندسيا للنتيجة المحصّل عليها

2. بيّن أنّ $f(x) = x - \ln 2 + \ln(1 + e^{-x})$ لمّا $x > 0$
   - استنتج أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y = x - \ln 2$ مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند $+\infty$
3. ادرس تغيرات الدالة $f$ على المجال $]-4; +\infty[$
   - بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين ، أحدهما معدوم والآخر $\alpha$ يُطلب حصره بـ $\frac{-n-1}{2}$ و $\frac{-n}{2}$ حيث $n$ عدد طبيعي
   - ارسم المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ (وحدة الرسم $2cm$)
4. نعتبر الدالة $g_m$ المعرّفة على $[-4; 0]$ بـ: $g_m(x) = 1 + mf(x)$ ، $m \in \mathbb{R}^*$
   - بيّن أنّ جميع المنحنيات $(\mathscr{C}_m)$ الممثلة للدالة $g_m$ تشمل نقطتين ثابتتين $(1 ; 0)$ و $(\alpha ; 1)$

**تمرين 29 :**

I- نعتبر الدالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1 + 2e^x)$.

1. احسب $g'(x)$ وبيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $g'(x) < 0$.
2. عيّن نهاية الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$
3. شكل جدول تغيرات الدالة $g$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$.

II- لتكن الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = e^{-2x}\ln(1 + 2e^x)$. $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ و $\|\vec{\imath}\| = 4cm$ و $\|\vec{\jmath}\| = 1cm$

1. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$
2. عيّن نهاية الدالة $f$ عند $-\infty$ و $+\infty$ (يمكن وضع $X = 1 + 2e^x$)
3. شكل جدول تغيرات الدالة $f$
4. ارسم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$

III- نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E): y' + 2y = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}$

1. تحقق أنّ الدالة $f$ المدروسة في الجزء الثاني حل للمعادلة (E)
2. بيّن أنّ $h$ هي حل للمعادلة (E) إذا وفقط إذا $h - f$ حل المعادلة التفاضلية: $(E'): y' + 2y = 0$
3. حل المعادلة التفاضلية $(E')$ ، ثمّ استنتج حلول المعادلة (E)

**تمرين 30:**

I- نعتبر دالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} - 4(x-1)e^{x} - 2$.

$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ (وحدة الطول $2cm$)

1. أ. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا

ب. بيّن أنّه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإنّ : $f(x) = (x-1)e^{x}(e^{x}-4) + \frac{1}{2}(e^{2x}-4)$

ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ،

2. ادرس تغيرات الدالة $f$
3. بيّن أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها $\alpha$ حيث : $-2 < \alpha < -1$ ، ثمّ ارسم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$

II- لتكن $g$ الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = (x^2-4x)\ln x - \frac{1}{2}x^2 + 4x - 2 \; ; x > 0 \\ g(0) = -2 \end{cases}$$

1. بيّن أنّه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإنّ : $g(x) = f(\ln x)$
2. ادرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة $g$ عند $0$ بقيم كبرى ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا
3. ادرس تغيرات الدالة $g$ ، ثمّ أنشئ جدول تغيراتها
4. بيّن أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها $\beta$ يُطلب تعيينها بدلالة $\alpha$
5. استنتج حصرا للعدد $\beta$ ، ثمّ ارسم المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ في نفس المعلم.

**تمرين 31 :**

I- لتكن $f$ دالة عددية لمتغير حقيقي $x$ معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = 1 + xe^{-x}$

1. ادرس تغيرات الدالة $f$.
2. بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\beta$ حيث $-0{,}6 < \beta < -0{,}5$ ، ثم استنتج إشارة $f(x)$.

II- لتكن $g$ دالة عددية لمتغير حقيقي $x$ معرّفة بـ : $g(x) = \ln(e^{x} + x)$، و $(\mathscr{C}_g)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. أثبت أنّ $g(x)$ تكتب على الشكل : $g(x) = \ln(1 + xe^{-x}) + x$
2. بيّن أنّ مجموعة تعريف الدالة $g$ هي : $Dg = ]\beta;+\infty[$
3. احسب النهايات حول أطراف مجموعة التعريف
4. احسب $g'(x)$ ثمّ شكل جدول تغيرات

5. بيّن أنّ المستقيم $(\Delta): y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى ($\mathscr{C}_g$) عند $+\infty$
6. بيّن أنّه يوجد مماس (T) للمنحنى ($\mathscr{C}_g$) يوازي ($\Delta$) يطلب تعيين عبارته
7. أنشئ المماس (T) و المنحنى ($\mathscr{C}_g$)
8. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_g$) مع المستقيم $y = x + m$

$\|i\| = 2cm$

**تمرين 32 :**

I- لتكن الدالة العددية $g$ المعرفة على $]0, +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln(x)$

1. احسب نهايات الدالة $g$ عند $+\infty$ و $0$
2. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0, +\infty[$ : $g'(x) = (\frac{x-1}{x})^2$ ، ثمّ كّل جدول تغيّرات الدالة $g$
3. احسب $g(1)$ ، ثمّ استنتج حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ و ($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$: $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln(x))^2 - 2$

1. بيّن أنّ : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\ln(x))^2}{x} = 0$ ( يمكن وضع $\sqrt{x} = t$ ) ، ثمّ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
2. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0, +\infty[$ : $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$
3. احسب $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ ( يمكن وضع $\frac{1}{x} = t$ )
4. بيّن أنّ : $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالة $f$
5. اكتب معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 5
6. أنشئ المماس والمنحنى ($\mathscr{C}_f$) بدقة
7. نعتبر الدالة $h$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $h(x) = f(|x|)$. بيّن كيف يمكن إنشاء ($\mathscr{C}_h$) انطلاقا من ($\mathscr{C}_f$) ، ثمّ أنشئ ($\mathscr{C}_h$) في نفس المعلم.

**تمرين 33 :**

I- لتكن المعادلة التفاضلية من الشكل : $y' - 3y + 3 = 0$ ... (I)

1. عيّن الحل العام للمعادلة التفاضلية (I)
2. عيّن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية (I) بحيث : $y'(0) = 3$

II- لتكن $f$ دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ و $(C_f)$ تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ :

$$f(x) = x - 4 + ln\,(1 + e^{3x})$$

1. احسب نهايات الدالة $f$ عند $+\infty$ و $-\infty$
2. احسب الفرق $f(x) - (x - 4)$ لمّا $x$ يؤول إلى $-\infty$
3. بيّن أنّه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل التالي :
$f(x) = 4x - 4 + ln\,(1 + e^{-3x})$ ، ثمّ استنتج معادلة المستقيم المقارب المائل بجوار $+\infty$
4. احسب $f'(x)$ ثمّ شكل جدول تغيرات $f$
5. اكتب معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0
6. بيّن أنّ المعادلة : $ln(1 + e^{-3x}) = 4 - 4x$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث :
$0,9 < \alpha < 1$. ماذا تستنتج ؟
7. أنشئ المنحنى $(C_f)$ و المماس (T) بدقة.

**تمرين 34:**

I- $g$ دالة معرفة على المجال $D = ]0\,;\,+\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 - 1 + 2\,ln(x)$

1. احسب نهايتي الدالة $g$ عند طرفي مجموعة تعريفها
2. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها
3. أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل العدد 1 كحلّ وحيد لها في المجال D ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة $f$ المعرفة المجال $D = ]0\,;\,+\infty[$ بـ : $f(x) = ln\,x - \frac{ln\,x}{x^2}$

1. احسب نهايتي الدالة $f$ عند طرفي مجموعة تعريفها
2. بين أنّه من أجل كل x من المجال D فإنّ : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$
3. استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها
4. ليكن التمثيلين البيانيين $(\mathscr{P})$ و $(\mathscr{C})$ للدالتين $ln\,x$ و $f$ على الترتيب في معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث وحدة الطول هي $2\,cm$.
   أ. ادرس الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathscr{P})$ و $(\mathscr{C})$
   ب. أنشئ في نفس المعلم $(\mathscr{P})$ و $(\mathscr{C})$.

**تمرين 35:**

I- لتكن الدالة $g$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $g(x) = x\ln x - x + 1$

1. ادرس تغيرات الدالة $g$
2. استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$.

II- نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{x-1} ; x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$

1. بيّن أنّ الدالة $f$ مستمرة عند 1
2. نقبل أنّ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-1}{x-1} = -\frac{1}{2}$. فسّر النتيجة بيانيا
3. بيّن أنّه من أجل كل $x \in ]0;1[ \cup ]1;+\infty[$ : $f'(x) = \frac{-g(x)}{x(x-1)^2}$
4. ادرس تغيرات الدالة $f$ وشكل جدول تغيراتها
5. اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) عند النقطة ذات الفاصلة 1 ، ثمّ ارسم (T) و($\mathscr{C}_f$)

III- نعتبر الدالة $h$ المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي : $h(x) = f(|x|)$

1. بيّن أنّ الدالة $h$ زوجية
2. اشرح كيف يمكن رسم ($\mathscr{C}_h$) التمثيل البياني للدالة $h$ اعتمادا على ($\mathscr{C}_f$) ، ثمّ ارسم ($\mathscr{C}_h$) في المعلم السابق.
3. بيّن أنّ المعادلة : $h(x) = 3x^2$ تقبل حلين متناظرين في $\mathbb{R}^*$.

**تمرين 36:**

$f$ و $h$ دالتان عدديتان لمتغير حقيقي $x$ معرفتان على المجال $]0 ; +\infty[$ كما يلي :

$f(x) = \frac{1+2\ln x}{x^2}$ ؛ $h(x) = \frac{1}{x}$ و ليكن ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_h$) تمثيليهما البيانيين في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. عيّن نهايات الدالة $f$ عندما يؤول $x$ إلى 0 ثمّ إلى $+\infty$. استنتج أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تحديدهما
2. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ثمّ شكل جدول تغيراتها
3. عين إحداثيي A نقطة تقاطع ($\mathscr{C}_f$) مع محور الفواصل.
4. من أجل كل $x$ من المجال $]0 ; +\infty[$ ، نضع : $g(x) = 1 - x + 2\ln x$
   أ. ادرس تغيرات الدالة $g$

ب. احسب $g(1)$ ، ثمّ برهن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]3;4[$. أعط حصرا للعدد $\alpha$ بتقريب $10^{-2}$

5. أ. برهن أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]0 ; +\infty[$ : $f(x) - \frac{1}{x} = \frac{g(x)}{x^2}$

ب. استنتج أنّ ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_h$) يتقاطعان في نقطتين يطلب تحديدهما

ج. برهن أنّه من أجل كل $x$ حيث $x \geq 4$ فإنّ : $0 < f(x) < \frac{1}{x}$

6. أنشئ ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_h$) في نفس المعلم السابق.

**تمرين 37:**

I- $f$ دالة معرّفة على $]0 ; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x^2 + 3 - 2\ln x$

1. ادرس تغيرات الدالة $f$
2. استنتج إشارة $f(x)$

II- نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $]0 ; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = \frac{x^2 - 1 + 2\ln x}{2x}$ ، و ($\mathscr{C}$) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. وحدة الطول على المحورين $2\ cm$.

1. بيّن أنّ : $g'(x) = \frac{f(x)}{2x^2}$
2. تحقّق أنّ : $g(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ و استنتج أنّ المنحنى ($\mathscr{C}$) يقبل مستقيما مقاربا مائلا ($\Delta$) معادلته : $y = \frac{1}{2}x$
3. ادرس وضعية المنحنى ($\mathscr{C}$) بالنسبة إلى المستقيم ($\Delta$)
4. ادرس تغيرات $g$ و ارسم ($\Delta$) و($\mathscr{C}$)
5. ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد و إشارة حلول المعادلة :

$x^2 - 2mx - 1 + 2\ln x = 0$.

**تمرين 38:**

I- لتكن $g$ دالة معرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$

1. احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ وادرس تغيرات الدالة $g$، ثمّ شكل جدول تغيراتها مستنتجا إشارة $g(x)$

II- نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $]0 ; +\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x+1) - x}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. احسب $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ . ماذا تستنتج ؟

2. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3. بين أنّ من أجل كل $x$ من المجال $]0\ ;\ +\infty[$ : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

4. نفرض أنّ من أجل كل $x$ من المجال $]0\ ;\ +\infty[$ :

$$x-\frac{x^2}{2}\le \ln(x+1)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

أ. عيّن حصرا لـ $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ ، ثمّ استنتج أنّ $f$ قابلة للاشتقاق عند $0$ على اليمين وأنّ $f'(0)=-\frac{1}{2}$

ب. اكتب معادلة نصف المماس لـ $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة التي فاصلتها $0$ ، ثمّ أنشئ $(\mathscr{C}_f)$.

## الدوال اللوغاريتمية في البكالوريا

**تمرين 39 : بكالوريا 2009 ت ر**

I- $g$ دالة معرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=2x+\ln x$.

1. احسب نهاية الدالة $g$ عندما يؤول $x$ إلى $+\infty$

2. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$

3. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ فإنّ $g(x)\neq 0$.

II- لتكن الدالة $f$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{6\ln x}{2x+\ln x}$

1. بيّن أنّه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{6\frac{\ln x}{x}}{2+\frac{\ln x}{x}}$ من أجل $x\in]0;+\infty[$

2. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ . ماذا تستنتج ؟

3. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$

4. شكّل جدول تغيرات الدالة $f$ . ما هي قيم العدد الحقيقي $k$ بحيث تقبل المعادلة $f(x)=k$ حلين متمايزين؟

5. جد معادلة للمماس $(\Delta_1)$ للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة التي فاصلتها 1 ، حيث $(\mathscr{C}_f)$ يرمز إلى التمثيل البياني للدالة $f$ في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

III- نعتبر الدالة $h$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ بالعبارة : $h(x)=f(e^x)$ و$(\mathscr{C}_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1. شكّل جدول تغيرات الدالة $h$ .

2. جد معادلة للمماس $(\Delta_2)$ للمنحنى $(\mathscr{C}_h)$ عند النقطة التي فاصلتها 1

3. ارسم كلا من $(\Delta_1)$ ، $(\Delta_2)$ ، $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_h)$

**تمرين 40 : بكالوريا 2009 ع ت**

I- $h$ دالة عددية معرّفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$.

1. احسب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.
2. بين أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-1\ ;\ +\infty[$ : $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$ استنتج اتجاه تغير الدالة $h$ ، ثمّ أنجز جدول تغيراتها
3. احسب $h(0)$ واستنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم $x$.

II- لتكن $f$ دالة معرّفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$. نسمي $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. أ. احسب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)$ ، ثمّ فسّر هذه النتيجة بيانيا

ب. باستخدام النتيجة $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ ، برهن أنّ $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$

ج. استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

د. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x-1)]$ واستنتج وجود مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

ه. ادرس وضعية المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل

2. بين أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-1\ ;\ +\infty[$ : $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$ ، ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة $f$
3. بيّن أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقطع المستقيم ذا المعادلة $y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4
4. ارسم $(\mathscr{C}_f)$
5. احسب مساحة الحيز المستوي المحدود بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها : $y = x - 1$ ، $x = 0$ و $x = 1$.

**تمرين 41 : بكالوريا 2010 ر**

$g$ الدالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = x - 1 - 2\ln x$ و$(\mathscr{C}_g)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ وحدة الطول $4cm$.

1. احسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}} g(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا
2. أ. بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

ب. ادرس تغيرات الدالة $g$

ج. احسب $g(1)$

د. برهن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما $\alpha$ حيث:
$3{,}5 < \alpha < 3{,}6$

ه. استنتج إشارة $g(x)$ ثمّ إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. $f$ الدالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + x + x^2 \ln x \ ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

أ. احسب $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}} \frac{f(x)}{x}$ وفسّر النتيجة هندسيا

ب. احسب نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$

ج. بين أنّ من أجل كل $x$ من $]0\ ;\ +\infty[$ فإنّ: $f'(x) = x\ g\left(\frac{1}{x}\right)$ ، واستنتج اتجاه تغير الدالة $f$

د. شكّل جدول تغيرات الدالة $f$. بيّن أنّ : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\alpha-1}{2\alpha^2}$ واستنتج حصرا للعدد $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

4. ارسم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ الممثل للدالة $f$ على المجال $[0;3]$

**تمرين 42 : بكالوريا 2010 ع ت**

I- لتكن $f$ الدالة المعرّفة على المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ : $I = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ وليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to\frac{1}{2}}} f(x)$

2. بيّن أنّ الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال I ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها

3. عيّن فاصلة النقطة من $(\mathscr{C}_f)$ التي يكون فيها المماس موازيا للمستقيم $(d)$ ذي المعادلة $y = x$

4. أ. أثبت أنّه من أجل كل $x$ من I يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل :
$f(x) = \ln(x+a) + b$ ، حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان يُطلب تعيينهما

ب. استنتج أنّه يمكن رسم $(\mathscr{C}_f)$ انطلاقا من $(\mathscr{C})$ منحنى الدالة اللوغاريتمية النيبيرية ln ، ثمّ ارسم $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}_f)$.

II- نعتبر الدالة $g$ المعرّفة على المجال I بـ : $g(x) = f(x) - x$.

1. احسب $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{2}\\ >}} g(x)$ ، ثمّ بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$
2. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ ، ثمّ شكّل جدول تغيراتها
3. أ. احسب $g(1)$ ، ثمّ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$ حلا وحيدا $\alpha$. تحقق أنّ $2 < \alpha < 3$

ب. ارسم $(\mathscr{C}_g)$ منحنى الدالة $g$ على المجال $\left]\frac{1}{2}; 5\right[$ في المعلم السابق

4. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال I ثمّ حدّد وضعية المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى $(d)$
5. برهن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1; \alpha[$ فإنّ : $f(x)$ تنتمي إلى المجال $]1; \alpha[$

III) نسمّي $(u_n)$ المتتالية العددية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يأتي: $u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$

1. عيّن قيمة العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها يكون : $u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$
2. احسب بدلالة $n$ المجموع $S_n$ حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

**تمرين 43 : بكالوريا 2011 ر**

I- $g$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + \ln x^2 - 1$.

1. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ ثمّ شكل جدول تغيراتها
2. احسب $g(1)$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ في المجال $]0; +\infty[$

II- $f$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\ln x$.

و$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أ. بيّن أنّ $f$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ وأنّ : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ ثمّ شكل جدول تغيراتها

2. $(\delta)$ المنحنى الممثل للدالة $x \to \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$

أ. ادرس وضعية المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى $(\delta)$ ثمّ جد $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\ln x$ .

ماذا تستنتج ؟

ب. ارسم $(\delta)$ و $(\mathscr{C}_f)$

3. أ. $x$ عدد حقيقي من المجال $]1; +\infty[$ ، باستعمال التكامل بالتجزئة جد $\int_1^x \frac{1}{t^2}\ln t\, dt$

- تحقق أنّ : $x \to x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \to \ln x$ على المجال $]1; +\infty[$

- استنتج دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]1;+\infty[$

ب. $\alpha$ عدد حقيقي أكبر تماما من 1

احسب بدلالة $\alpha$ المساحة $A(\alpha)$ للحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و$(\delta)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x=1$ و $x=\alpha$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$ .

**تمرين 44 : بكالوريا 2011 ت ر**

$f$ دالة عددية معرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{a+b\ln 2x}{4x^2}$ حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان و$(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. عيّن $a$ و $b$ بحيث يكون المماس في النقطة $A\left(\frac{1}{2};1\right)$ للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ موازيا لحامل محور الفواصل
2. $g$ الدالة العددية المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=\frac{1+2\ln 2x}{4x^2}$

و $(\mathscr{C}_g)$ المنحنى الممثل لها في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)$ وفسّر النتيجتين هندسيا

ب. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ ثمّ شكل جدول تغيراتها

ج. حل في $]0;+\infty[$ المعادلة $g(x)=0$

د. أنشئ $(\mathscr{C}_g)$

3. أ. $h$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=\frac{1+\ln 2x}{2x}$.

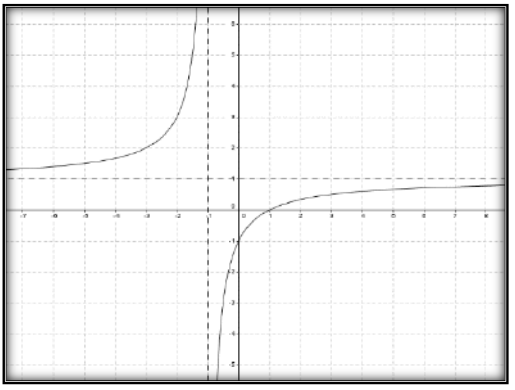
احسب $h'(x)$

ب. تحقق أنّ : $g(x)=\frac{1}{4x^2}+\frac{\ln 2x}{2x^2}$ ، ثمّ استنتج دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$

**تمرين 45 : بكالوريا 2011 ع ت**

I- نعتبر الدالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ : $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$ و$(\mathscr{C}_g)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. (الشكل المقابل)

**بقراءة بيانية :**



أ. شكّل جدول تغيرات الدالة $g$

ب. حل بيانيا المعادلة $g(x) > 0$

ج. عيّن بيانيا قيم $x$ التي يكون من أجلها $0 < g(x) < 1$.

II- لتكن الدالة $f$ المعرّفة على $]1;+\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ و $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا

2. أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1;+\infty[$ : $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$

ب. احسب $f'(x)$ وادرس إشارتها ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة $f$

3. أ. باستعمال الجزء I) السؤال جـ ، عيّن إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$

ب. $\alpha$ عدد حقيقي.

بيّن أنّ الدالة : $x \to (x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \to \ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$

جـ. تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1;+\infty[$ ،

$g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$ ، ثمّ عيّن دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]1;+\infty[$.

**تمرين 46 : بكالوريا 2012 ر**

I- $g$ هي الدالة المعرّفة على المجال $]-1;3]$ كما يلي : $g(x) = 2\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$.

1. ادرس تغيرات الدالة $g$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها

2. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر $\alpha$ يحقق : $-0{,}8 < \alpha < -0{,}7$

3. عيّن حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$

4. $h$ هي الدالة المعرّفة على المجال $]-1;3]$ بـ : $h(x) = [g(x)]^2$.
أ. احسب $h'(x)$ بدلالة $g(x)$ و $g'(x)$
ب. عيّن إشارة $h'(x)$ ، ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة $h$

II- $f$ هي الدالة المعرّفة على المجال $]-1;3]$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{\ln(x+1)} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. بيّن أنّ الدالة $f$ تقبل الاشتقاق عند الصفر ، ثمّ اكتب معادلة لـ (T) مماس $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 0
2. أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-1;0[ \cup ]0;3]$ : $f'(x) = \frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}$ ، ثمّ استنتج اتجاه تغيرات الدالة $f$
ب. بيّن أنّ : $f(\alpha) = 2\alpha(\alpha+1)$ ، ثمّ عيّن حصرا لـ $f(\alpha)$
ج. احسب $f(3)$ و $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ ، ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة $f$
3. أ. بيّن أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]-1;3]$ فإنّ : $x - \ln(x+1) \geq 0$
ب. ادرس وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى المماس (T)
4. عيّن معادلة للمستقيم (T') الموازي للمماس (T) والذي يتقاطع مع $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 3
5. ارسم (T) ، (T') و $(\mathscr{C}_f)$
6. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$

**تمرين 47 : بكالوريا 2012 ت ر**

I- $g$ هي الدالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^2 + a + b\ln x$ ، حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان.

1. عيّن $a$ و $b$ علما أنّ التمثيل البياني للدالة $g$ يقبل في النقطة $A(1;-1)$ مماسا معامل توجيهه 4
2. نضع $a = -2$ و $b = 2$
أ. ادرس تغيرات الدالة $g$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها
ب. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على $]0;+\infty[$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$.

II- $f$ هي الدالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=x-2-\frac{2\ln x}{x}$. ($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

1. أ. احسب $\lim\limits_{x\to 0^{>}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب. احسب $f'(x)$ ، ثمّ تحقق أنّ : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

ج. استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثمّ شكّل جدول تغيرات الدالة $f$

2. أ. بيّن أنّ المستقيم ($\Delta$) ذا المعادلة $y=x-2$ مقارب لـ ($\mathscr{C}_f$) ، ثمّ ادرس وضعية ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة إلى ($\Delta$)

ب. بيّن أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقبل مماسا (T) يوازي ($\Delta$) ، ثمّ جد معادلة له

ج. نأخذ $\alpha=1{,}25$. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $x_1$ و $x_2$ حيث : $0{,}6<x_1<0{,}7$ و $2{,}7<x_2<2{,}8$ ، ثمّ ارسم كلا من ($\Delta$) ، (T) و($\mathscr{C}_f$)

3. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة :

$$(m+2)x+2\ln x=0$$

**تمرين 48 : بكالوريا 2012 ع ت**

لتكن الدالة $f$ المعرّفة على المجال $]0;-\infty[$ كما يلي : $f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$.

($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أ. احسب $\lim\limits_{x\to 0^{<}} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا

ب. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]0;-\infty[$ فإنّ : $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$ استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها

3. أ. بيّن أنّ المستقيم ($\Delta$) الذي معادلة له $y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) بجوار $-\infty$

ب. ادرس وضع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة للمستقيم ($\Delta$)

4. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ حيث $-3{,}5<\alpha<-3{,}4$ و $-1{,}1<\beta<-1$

5. أنشئ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) والمستقيم ($\Delta$)

6. أ. نعتبر النقطتين $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$
بيّن أنّ : $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)$ معادلة ديكارتية للمستقيم $(AB)$
ب. بيّن أنّ المستقيم $(AB)$ يمسّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في نقطة $M_0$ يُطلب تعيين إحداثيتيها
7. لتكن $g$ الدالة المعرّفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي :
$g(x)=\frac{x^2}{2}+5x+6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)+6\ln(1-x)$
بيّن أنّ $g$ دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]-\infty;0[$ .

**تمرين 49 : بكالوريا 2013 ر**

I- 1. الدالة $u$ معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $u(x)=e^x-3x+4-e$
أ. ادرس اتجاه تغير الدالة $u$
ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ : $e^x-e>3x-4$
2. الدالة $v$ معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $v(x)=-3x^3+4x^2-1+\ln x$
أ. بيّن أنّ $v'(1)=0$
ب. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ : $v(x)\leq 0$
ج. استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ :
$\frac{-1+\ln x}{x^2}\leq 3x-4$
3. أثبت أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ : $e^x-e+\frac{1-\ln x}{x^2}>0$

II- الدالة $f$ معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=e^x-ex+\frac{\ln x}{x}$. $(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
1. احسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .
2. بيّن أنّ الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها
3. احسب $f(1)$ ، ثمّ مثّل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ على المجال $\left]0;\frac{5}{2}\right[$
(نأخذ $f(2)\approx 2{,}3$ ، $f(1{,}64)\approx 1$ و $f\left(\frac{5}{2}\right)\approx 5{,}75$)
4. احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x=\frac{1}{2}$ و $x=2$ .

**تمرين 50 : بكالوريا 2013 ت ر**

I- الدالة $g$ معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة :

$g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$.

1. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ على المجال $]-1;+\infty[$
2. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $0{,}31 < \alpha < 0{,}32$ وأنّ $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$
3. استنتج حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$.

II- الدالة $f$ معرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة :

$f(x) = (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2$. $(\mathscr{C}_f)$ منحنى $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. أثبت أنّه من أجل كل $x$ من $]-1;+\infty[$ : $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$
3. ادرس اتجاه تغيرات الدالة $f$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها
4. بيّن أنّ: $f(\alpha) = (\alpha+1)^2(1+(\alpha+1)^2)$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$
5. مثّل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ على المجال $]-1;2[$

III- $(\Gamma)$ المنحنى الممثل للدالة $h$ المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة :

$h(x) = \ln(x+1)$.

A النقطة ذات الإحداثيتين $(-1;2)$ و M نقطة من $(\Gamma)$ فاصلتها $x$

1. أثبت أنّ المسافة $AM$ تُعطى بالعبارة $AM = \sqrt{f(x)}$
2. الدالة $k$ المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة : $k(x) = \sqrt{f(x)}$
   أ. بيّن أنّ للدالتين $f$ و $k$ نفس اتجاه التغيّر على المجال $]-1;+\infty[$
   ب. عيّن إحداثيتي النقطة B من $(\Gamma)$ ، بحيث تكون المسافة $AM$ أصغر ما يمكن
   ج. بيّن أنّ : $AB = (\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}$

**تمرين 51 : بكالوريا 2013 ع ت**

I- $g$ الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ :

$g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$.

1. ادرس تغيرات الدالة $g$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها
2. استنتج أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]-1;+\infty[$ : $g(x) > 0$

II- $f$ الدالة المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=x-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$
و$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.
(وحدة الطول $2cm$)

1. أ. احسب $\lim\limits_{x\to-1^{>}} f(x)$ . فسّر النتيجة بيانيا
   ب. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .
2. أ. بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $]-1;+\infty[$ : $f'(x)=\frac{g(x)}{(x+1)^2}$
   ب. ادرس اتجاه تغيرات الدالة $f$ على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها
   ج. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ تحقق أنّ : $0<\alpha<0{,}5$
3. أ. بيّن أن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة : $y=x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند $+\infty$
   ب. ادرس وضعية المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$
4. نقبل أنّ المستقيم (T) ذا المعادلة : $y=x+\frac{2}{\sqrt{e^3}}$ مماس للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في نقطة فاصلتها $x_0$
   أ. احسب $x_0$
   ب. ارسم المستقيمين المقاربين والمماس (T) ثمّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$
   ج. عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي $m$ بحيث تقبل المعادلة : $f(x)=x+m$ حلين متمايزين.

**تمرين 52 : بكالوريا 2014 ر**

1. $f$ الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=(1+2\ln x)(-1+\ln x)$.
$(\mathscr{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة $f$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$
   أ. ادرس تغيرات الدالة $f$
   ب. اكتب معادلة المماس $(\Delta)$ للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة $e$
   ج. عيّن فواصل تقاطع $(\mathscr{C}_f)$ مع حامل محور الفواصل ، ثمّ ارسم $(\mathscr{C}_f)$ على المجال $]0;e^2[$
2. $g$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $g(x)=1-\ln x$.
$(\mathscr{C}_g)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق
   أ. ادرس تغيرات الدالة $g$
   ب. عيّن الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ ، ثمّ ارسم $(\mathscr{C}_g)$ على المجال $]0;e^2[$

3. نعتبر الدالة العددية $h$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ :
$h(x) = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x$.
أ. احسب $h'(x)$ واستنتج دالة أصلية للدالة $x \to (\ln x)^2$ على المجال $]0;+\infty[$
ب. احسب العدد : $\int_{\frac{1}{e}}^{e}[f(x) - g(x)]\,dx$

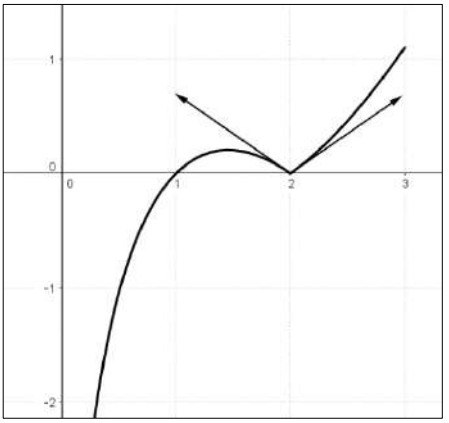
**تمرين 53 : بكالوريا 2014 ت ر**

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

I) $g$ الدالة المعرّفة على المجال $[0;3]$ بـ : $g(x) = x\ln x + x$

1. ادرس تغيّرات الدالة $g$
2. أ. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $[0;3]$ ، ثمّ تحقق أنّ :
$1{,}45 < \alpha < 1{,}46$
ب. استنتج إشارة $g(x) - 2$

II) التمثيل البياني المقابل $(\mathscr{C}_f)$ هو للدالة $f$ المعرّفة على المجال $[0;3]$ بـ :
$f(x) = |x-2|\ln x$




1. باستعمال $(\mathscr{C}_f)$ ضع تخمينا حول قابلية اشتقاق الدالة $f$ عند 2
2. أثبت صحة تخمينك
3. ادرس تغيّرات الدالة $f$

III) $h$ الدالة المعرّفة على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ بـ :
$h(x) = (2-\cos x)\ln(\cos x)$

1. بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_h)$
2. ادرس اتجاه تغيّر الدالة $h$ ، ثمّ شكل جدول تغيّراتها وارسم $(\Delta)$ و $(\mathscr{C}_h)$.

**تمرين 54 : بكالوريا 2014 ع ت**

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بالعبارة : $f(x) = 1 + \frac{2\ln x}{x}$. و $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ؛ فسّر النتيجتين هندسيا.

ب. ادرس اتجاه تغيرات الدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها

2. أ. ادرس وضعية المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته : $y=1$

ب. اكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 1

ج. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $e^{-0,4}<\alpha<e^{-0,3}$

3. أنشئ $(T)$ و $(\mathscr{C}_f)$

4. لتكن الدالة $h$ المعرّفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ كما يلي : $h(x)=1+\frac{2\ln|x|}{|x|}$.

وليكن $(\mathscr{C}_h)$ تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق

أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ غير معدوم ، $h(x)-h(-x)=0$ . ماذا تستنتج ؟

ب. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_h)$ اعتمادا على المنحنى $(\mathscr{C}_f)$

ج. ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة : $\ln x^2=(m-1)|x|$

**تمرين 55 : بكالوريا 2015 ر**

$f$ الدالة المعرّفة بـ : $f(0)=1$ ، ومن أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ : $f(x)=1-x^2\ln x$.

$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. أ. ادرس استمرارية الدالة $f$ عند 0 من اليمين

ب. احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-1}{x}$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا

2. أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها

3. أ. بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]0;+\infty[$

ب. تحقق أنّ $1,531<\alpha<1,532$

4. نعتبر الدالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=f(|x|)$

$(\mathscr{C}_g)$ تمثيلها البياني في نفس المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

أ. ادرس شفعية الدالة $g$

ب. أنشئ المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ على المجال $[-2;2]$

5. باستعمال المكاملة بالتجزئة ، عيّن الدالة الأصلية للدالة $x \to x^2 \ln x$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ والتي تنعدم من أجل القيمة 1

6. $t$ عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0;\alpha[$. نضع : $F(t) = \int_t^\alpha f(x)\,dx$

أ. اكتب العبارة $F(t)$ بدلالة $t$ و $\alpha$

ب. بيّن أنّه من أجل كل حقيقي $t$ من المجال $]0;\alpha[$ :

$$F(t) = \frac{-3tf(t)-t^3-6t+\alpha^3+6\alpha}{9}$$

ج. احسب $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ >}} F(t)$

7. $m$ عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0;\alpha[$.

$\mathbb{S}(m)$ مساحة الدائرة ذات المركز المبدأ $O$ ونصف القطر $m$

نفرض أنّ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathscr{C}_g)$ ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = -\alpha$ و $x = \alpha$ هي $\mathcal{A}$ حيث :

$$\mathcal{A} = \frac{2}{9}(\alpha^3 + 6\alpha)\ ua$$

أ. عيّن القيمة المضبوطة للعدد $m$ حتى يكون : $\mathbb{S}(m) = 2\mathcal{A}$

ب. علما أنّ $3{,}140 < \pi < 3{,}142$ ، أعط حصرا للعدد $m$.

**تمرين 56 : بكالوريا 2015 ت ر**

I) $h$ الدالة المعرّفة على المجال $]-2;+\infty[$ بما يلي :

$$h(x) = (x+2)^2 + 2 - 2\ln(x+2)$$

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} h(x)$

2. ادرس اتجاه تغير الدالة $h$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها

3. استنتج أنّه من أجل كل $x$ من $]-2;+\infty[$ : $h(x) > 0$

II) $f$ الدالة المعرّفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ: $f(x) = x + 1 + \frac{2}{x+2}\ln(x+2)$

$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (وحدة الطول $1cm$)

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وفسّر النتيجة هندسيا، ثمّ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x)$

2. أ. بيّن أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]-2;+\infty[$ : $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+2)^2}$

ب. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ على المجال $]-2;+\infty[$، ثمّ شكل جدول تغيراتها

3. أ. بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$

ب. ادرس وضعية المنحنى ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة إلى المستقيم ($\Delta$)

4. أ. أثبت أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل نقطة انعطاف $A$ يُطلب تعيين إحداثييها

ب. ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى ($\mathscr{C}_f$)

جـ. احسب بالسنتيمتر المربع ، مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى ($\mathscr{C}_f$) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = 0$ ، $x = -1$ و $x = 1$

III) $g$ الدالة المعرّفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ: $g(x) = |x+1| + \frac{2}{x+2}|\ln(x+2)|$

1. احسب $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ <}} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$ . ماذا تستنتج بالنسبة إلى $g$ ؟

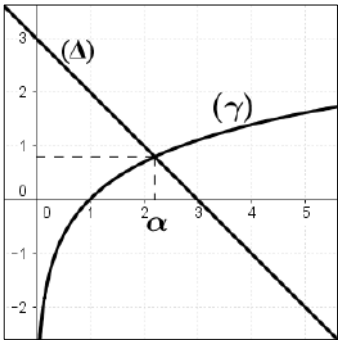
2. أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة

3. انطلاقا من المنحنى ($\mathscr{C}_f$) ارسم المنحنى ($\mathscr{C}_g$) الممثل للدالة $g$ في نفس المعلم السابق.

**تمرين 57 : بكالوريا 2015 ع ت**

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

I) $(\gamma)$ التمثيل البياني للدالة $x \to \ln x$ و $(\Delta)$ المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 3$ ؛ $\alpha$ هي فاصلة نقطة تقاطع $(\gamma)$ و $(\Delta)$.




1. بقراءة بيانية حدّد وضعية $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ على $]0;+\infty[$

2. $g$ الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x - 3 + \ln x$.

استنتج حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$

3. تحقق أنّ : $2{,}2 < \alpha < 2{,}3$

II) $f$ الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$

و($\mathscr{C}_f$) تمثيلها البياني.

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$
2. أثبت أنّه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة $f$
3. بيّن أنّ : $f(\alpha)=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$
4. ادرس وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى حامل محور الفواصل ، ثمّ أنشئ $(\mathscr{C}_f)$ على المجال $]0;e^2]$

III) $F$ الدالة الأصلية للدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$ والتي تحقق : $F(1)=-3$

1. بيّن أنّ منحنى الدالة $F$ يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين يُطلب تعيين فاصلتيهما
2. بيّن أنّ $x\to x\ln x-x$ هي دالة أصلية للدالة $x\to\ln x$ على $]0;+\infty[$ ، ثمّ استنتج عبارة الدالة $F$.

**تمرين 58 : بكالوريا 2016 ر**

I) $g$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=1+x^2+2\ln x$.

1. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$
2. بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في المجال $]0{,}52\ ;\ 0{,}53[$ حلا وحيدا $\alpha$
3. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$

II) $f$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x+\frac{3+2\ln x}{x}$

$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$
2. أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2}$

ب. ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة $f$

جـ. تحقق أنّ : $f(\alpha)=2\left(\frac{1}{\alpha}-\alpha\right)$ ، ثمّ عيّن حصرا له

3. أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]$ ، ثمّ فسّر النتيجة هندسيا

ب. ادرس وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى مستقيمه المقارب المائل $(\Delta)$

جـ. بيّن أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مماسا $(T)$ يوازي $(\Delta)$ يُطلب كتابة معادلة ديكارتية له

4. نقبل أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما $x_0$ و $x_1$ حيث :

$0{,}22<x_0<0{,}23$ و $2{,}11<x_1<2{,}13$

أنشئ $(T)$ ، $(\Delta)$ و $(\mathscr{C}_f)$

5. $m$ وسيط حقيقي.

ناقش بيانيا وحسب قيم $m$ ، عدد حلول المعادلة : $3 + 2\ln x - mx = 0$

III) من أجل كل عدد طبيعي $n$ نضع : $u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} [f(x) + x]\, dx$

1. بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n > 0$
2. أعط تفسيرا هندسيا للعدد $u_0$
3. احسب $u_n$ بدلالة $n$
4. نضع : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. احسب $S_n$ بدلالة $n$.

**تمرين 59 : بكالوريا 2016 ت ر**

I) $g$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln(x+1)$

1. أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} g(x)$

ب. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها

2. أ. بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

ب. استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$

II) $f$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = 1 + (x-1)\ln(x+1)$$

1. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وفسّر النتيجة هندسيا ، ثمّ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)$
2. أ. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها

ب. بيّن أنّ $f(\alpha) = -\alpha + 4 - \frac{4}{\alpha+1}$ ، ثمّ اعط حصرا لـ $f(\alpha)$.

(تُدوّر النتائج إلى $10^{-2}$)

3. ليكن $a$ عدد حقيقي من المجال $]-1;+\infty[$ ، نسمّي $(T_a)$ مماس المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ عند النقطة ذات الفاصلة $a$

نضع من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-1;+\infty[$ :

$$h(x) = f(x) - [f'(a)(x-a) + f(a)]$$

أ. تحقق أنّه من أجل كل $x$ من $]-1;+\infty[$ : $h'(x) = f'(x) - f'(a)$

ب. باستعمال اتجاه تغيّر الدالة $g$ ، عيّن إشارة $h'(x)$ حسب قيم $x$ واستنتج اتجاه تغيّر $h$ على $]-1;+\infty[$

ج. حدّد الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيم $(T_a)$

4. أ. بيّن أنّه يوجد مماسان $(T_a)$ يشملان النقطة $A(1;0)$ يُطلب تعيين معادلتيهما

ب. ارسم المماسين والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

5. نعتبر الدالة $H$ المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ:

$$H(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 3)\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$$

أ. بيّن أنّ $H$ دالة أصلية للدالة $x \to (x-1)\ln(x+1)$ على $]-1;+\infty[$

ب. احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها :

$y = 0$ و $x = 1$ و $x = 2$.

**تمرين 60 : بكالوريا 2016 ت ر**

I) نعتبر الدالة العددية $g$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x - x\ln x$

1. أ. احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

ب. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ على المجال $]0;+\infty[$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها

2. بيّن أن المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $3,5 < \alpha < 3,6$

3. استنتج إشارة العبارة $g(x) + 1$ على المجال $]0;+\infty[$

II) نعتبر الدالة العددية $f$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$

$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ ، حيث : $\|\vec{\imath}\| = 2cm$ و $\|\vec{\jmath}\| = 4cm$

1. بيّن أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $x = 0$ و $y = 0$

2. أ. برهن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ : $f'(x) = \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$

ب. بيّن أنّ الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha;+\infty[$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها

جـ. اكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1

د. احسب $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ ، فسّر النتيجة هندسيا

3. أ. بيّن أنّ $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$

ب. استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$. (تُدوّر النتائج إلى $10^{-2}$)

جـ. ارسم $(\mathscr{C}_f)$

4. نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي الموجب تماما $x$ و $m$ وسيط حقيقي :

$$x^2 + x - 2m(x+1) = \ln(x^2) \dots (E)$$

أ. تحقق أنّ المعادلة $(E)$ يؤول حلّها إلى حل المعادلة : $f(x) = \frac{1}{2}x - m$

ب. عيّن بيانيا قيم $m$ التي من أجلها تقبل المعادلة $(E)$ حلين متمايزين

5. $h$ هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $h(x) = \frac{\ln|x|}{-|x|-1}$ و$(\mathscr{C}_h)$ منحناها البياني في المستوي

أ. بيّن أنّ الدالة $h$ زوجية

ب. ارسم في نفس المعلم المنحنى $(\mathscr{C}_h)$ مستعينا بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

**تمرين 61 : بكالوريا 2016 ع ت**

I) $g$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$
2. احسب $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ، ثمّ بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ : $g(x) > 0$

II) $f$ الدالة العددية المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$

و $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1. احسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. أ. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب. شكل جدول تغيرات الدالة $f$

3. اكتب معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1
4. أ. بيّن أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ حيث : $y = x - 1$ معادلة له

ب. ادرس الوضع النسبي لـ $(\mathscr{C}_f)$ و$(\Delta)$

5. ارسم $(T)$ و $(\Delta)$ ثمّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$
6. $m$ عدد حقيقي. $(\Delta_m)$ المستقيم حيث : $y = mx - m$ معادلة له

أ. تحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي $m$ ، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى $(\Delta_m)$

ب. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة : $f(x) = mx - m$

7. أ. جد دالة أصلية للدالة $x \to \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$

ب. احسب $I_n$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ ، المستقيم $(\Delta)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x = 1$ و $x = n$ حيث $n$ عدد طبيعي $(n > 1)$

جـ. عيّن أصغر عدد طبيعي $n_0$ بحيث إذا كان $n > n_0$ فإنّ $I_n > 2$.

**تمرين 62 : بكالوريا 2016 ع ت**

I) لتكن الدالة العددية $g$ المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ:

$$g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها
2. بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $-0{,}34 < \alpha < -0{,}33$
3. استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي $x$ من المجال $]-1;+\infty[$

II) لتكن الدالة $f$ المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. أ. بيّن أنّ $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x) = -\infty$ واحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجتين هندسيا

ب. بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-1;+\infty[$ : $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$

جـ. ادرس اتجاه تغير الدالة $f$ على المجال $]-1;+\infty[$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها

د. ارسم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$. (نقبل أنّ $f(\alpha) \approx 3{,}16$)

2. أ. بيّن أنّ الدالة $x \to -\frac{1}{x+1}[1+\ln(x+1)]$ هي دالة أصلية للدالة $x \to \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1;+\infty[$

ب. احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما على التوالي: $x = 0$ و $x = 1$

3. نعتبر الدالة العددية $k$ المعرّفة على المجال $]-1;1[$ بـ: $k(x) = f(-|x|)$ و$(\mathscr{C}_k)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق

أ. بيّن أنّ الدالة $k$ زوجية

ب. بيّن كيف يمكن استنتاج المنحنى $(\mathscr{C}_k)$ انطلاقا من المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ ثمّ ارسمه (دون دراسة تغيّرات الدالة $k$ )

ج. ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة :

$$k(x) = m$$

**تمرين 63 : بكالوريا 2017 ر**

I) نعتبر الدالة العددية $g$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة $g$

2. بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ من المجال $]1,76; 1,77[$ ، ثمّ استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$

II) نعتبر الدالة العددية $f$ المعرّفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x+1}{x - \ln x} \; ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أثبت أنّ الدالة $f$ مستمرة عند العدد 0 على اليمين ، ثمّ احسب $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$ وفسّر النتيجة بيانيا
2. بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0; +\infty[$ : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x - \ln x)^2}$
3. احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ وفسّر ذلك بيانيا ، ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة $f$
4. لتكن الدالة $h$ المعرّفة على $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = x - \ln x$
   أ. بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب تماما : $h(x) > 0$ ، واستنتج وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y = 1$
   ب. ارسم $(\mathscr{C}_f)$. (نأخذ $f(\alpha) \approx 2,31$)
5. لتكن الدالة $F$ المعرّفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$
   أ. بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x$ حيث $x \geq 1$ : $\frac{1}{x} + 1 \leq f(x) \leq f(\alpha)$
   ب. اعط تفسيرا هندسيا للعدد $F(e)$ ، ثمّ استنتج حصرا له.

**تمرين 64 : بكالوريا 2017 ت ر**

لتكن الدالة العددية $f$ المعرّفة على $D_f$ حيث $D_f = ]-\infty; 1[ \cup ]2; +\infty[$ كما يلي :

$f(x) = -2x + 3 + 2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$.

وليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أ. احسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x)$ ، ثمّ فسّر النتيجتين بيانيا
2. بيّن أنّ من أجل كل $x$ من $D_f$ : $f'(x) = -2 - \frac{2}{(x-1)(x-2)}$ ، ثمّ شكل جدول تغيرات الدالة $f$
3. أ. تحقق أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $D_f$ :

   $(3 - x) \in D_f$ و $f(3 - x) + f(x) = 0$

   ب. استنتج أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مركز تناظر يُطلب تعيين إحداثييه

4. أثبت أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]0,45; 0,46[$ ، ثمّ استنتج أنّها تقبل حلا آخر $\beta$ يُطلب تعيين حصر له
5. بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة : $y = -2x + 3$ مقارب مائل لـ $(\mathscr{C}_f)$ ، ثمّ ادرس وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$
6. ارسم $(\Delta)$ و $(\mathscr{C}_f)$
7. بيّن أنّ الدالة $h: x \to (x-1)\ln(x-1) - (x-2)\ln(x-2)$ أصلية للدالة $x \to \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ على $]2; +\infty[$ ، ثمّ احسب بدلالة $\beta$ مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيمات التي معادلاتها : $y = -2x + 3$ و $x = \beta$ و $x = 3$ .

**تمرين 65 : بكالوريا 2017 ع ت**

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرّفة على $D$ حيث $]1; +\infty[ \cup ]-\infty; -1[$ بـ : $D = ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$

$f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

$(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1. بيّن أنّ الدالة $f$ فردية ، ثمّ فسّر ذلك بيانيا
2. احسب النهايات التالية : $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
3. أ. بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $D$ : $f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة $f$ ، ثمّ شكل جدول تغيراتها

4. بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $1,8 < \alpha < 1,9$
5. بيّن أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة : $y = \frac{2}{3}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ ، ثمّ ادرس وضعية المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$
6. أنشئ المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$
7. $m$ وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة : $(2 - 3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$.

# ❁ قواعد أساسية في الدوال الأصلية والحساب التكاملي ❁

**I- الدوال الأصلية :**

**تعريف :**

لتكن $f$ دالة عددية معرّفة على مجال $I$. نقول إنّ الدالة $F$ هي دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $I$ إذا تحقّق الشرطان التاليان :

- $F$ قابلة للاشتقاق على المجال $I$
- من أجل كل $x \in I$ : $F'(x) = f(x)$

**خواص :**

- كل دالة مستمرة على مجال تقبل دالة أصلية على هذا المجال
- إذا كانت $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $I$ ، فإنّ جميع الدوال الأصلية للدالة $f$ معرّفة على $I$ بما يلي : $x \mapsto F(x) + k \; ; k \in \mathbb{R}$
- توجد دالة أصلية وحيدة $F$ للدالة $f$ على المجال $I$ تحقّق الشرط : $F(x_0) = y_0$ ، حيث $x_0 \in I$ و $y_0 \in \mathbb{R}$
- إذا كانت $F$ و $G$ دالتين أصليتين للدالتين $f$ و $g$ على الترتيب على المجال $I$ ، فإنّ :
  - ✓ $F + G$ دالة أصلية للدالة $f + g$ على المجال $I$
  - ✓ $kF$ دالة أصلية للدالة $kf$ على المجال $I$

**جدول الدوال الأصلية لبعض الدوال المألوفة :**

| الدالة $f(x)$ | الدالة الأصلية $F(x)$ | المجال $I$ |
|---|---|---|
| $0$ | $c \, , c \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}$ |
| $k$ | $kx + c$ | $\mathbb{R}$ |
| $x$ | $\frac{1}{2}x^2 + c$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n \, , n \neq -1$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ | $\mathbb{R}$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert + c$ | $]0; +\infty[$ أو $]-\infty; 0[$ |
| $\frac{1}{x^2}$ | $-\frac{1}{x} + c$ | $]0; +\infty[$ أو $]-\infty; 0[$ |

| | | |
|---|---|---|
| $]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$ | $-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$ | $\frac{1}{x^n}\ ,n\neq 1$ |
| $]0;+\infty[$ | $2\sqrt{x}+c$ | $\frac{1}{\sqrt{x}}$ |
| $\mathbb{R}$ | $-\cos x+c$ | $\sin x$ |
| $\mathbb{R}$ | $\sin x+c$ | $\cos x$ |
| $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ | $\tan x+c$ | $1+\tan^2 x$ |
| $\mathbb{R}$ | $e^x+c$ | $e^x$ |

**استعمال صيغ الاشتقاق لتحديد بعض الدوال الأصلية :**

| الدالة الأصلية $F(x)$ | الدالة $f(x)$ |
|---|---|
| $u+v+c$ | $u'+v'$ |
| $uv+c$ | $u'v+uv'$ |
| $\frac{u}{v}+c$ | $\frac{u'v-uv'}{v^2}$ |
| $\frac{u^{n+1}}{n+1}+c$ | $u'.u^n$ |
| $\ln\lvert u\rvert+c$ | $\frac{u'}{u}$ |
| $-\frac{1}{u}+c$ | $\frac{u'}{u^2}$ |
| $2\sqrt{u}+c$ | $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ |
| $e^u+c$ | $u'e^u$ |
| $\frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$ | $\cos(ax+b)$ |
| $-\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$ | $\sin(ax+b)$ |

**أمثلة على حساب الدوال الأصلية :**

**المجموعة الأولى :**

1) $f(x)=2x+1$ ; $\boxed{F(x)=x^2+x+c}$

2) $f(x)=10x^4+6x^3-1$

$F(x)=10\left(\frac{x^5}{5}\right)+6\left(\frac{x^4}{4}\right)-x+c=\boxed{2x^5+\frac{3}{2}x^4-x+c}$

3) $f(x)=(x-1)(x+3)=x^2+2x-3$

$\boxed{F(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+c}$

4) $f(x)=\frac{1}{x^2}-x^2$ ; $\boxed{F(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{3}x^3+c}$

5) $f(x)=-\frac{4}{3x^5}=-\frac{4}{3}x^{-5}$ ; $F(x)=-\frac{4}{3}\left(\frac{x^{-4}}{-4}\right)+c=\boxed{\frac{1}{3x^4}+c}$

6) $f(x)=x+\frac{1}{\sqrt{x}}$ ; $\boxed{F(x)=\frac{1}{2}x^2+2\sqrt{x}+c}$

7) $f(x)=\sin x-2\cos x$ ; $\boxed{F(x)=-\cos x-2\sin x+c}$

**المجموعة الثانية : من الشكل $u'.u^n$**

1) $f(x)=\underbrace{3}_{u'}\underbrace{(3x+1)}_{u}^{4}$ ; $\boxed{F(x)=\frac{(3x+1)^5}{5}+c}$

2) $f(x)=16(4x-1)^3=4\times\underbrace{4}_{u'}\underbrace{(4x-1)}_{u}^{3}$

$F(x)=4\frac{(4x-1)^4}{4}+c=\boxed{(4x-1)^4+c}$

3) $f(x)=(2x+7)^6=\frac{1}{2}\times\underbrace{2}_{u'}\underbrace{(2x+7)}_{u}^{6}$

$F(x)=\frac{1}{2}\times\frac{(2x+7)^7}{7}+c=\boxed{\frac{(2x+7)^7}{14}+c}$

4) $f(x)=\underbrace{(6x-2)}_{u'}\underbrace{(3x^2-2x+3)}_{u}^{5}$ ; $\boxed{F(x)=\frac{(3x^2-2x+3)^6}{6}+c}$

5) $f(x)=\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^4=-\left[\underbrace{-\frac{1}{x^2}}_{u'}\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)^4}_{u}\right]$

$$\boxed{F(x)=-\frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{x}\right)^5+c}$$

6) $f(x)=\underbrace{\sin x}_{u}.\underbrace{\cos x}_{u'}$ ; $\boxed{F(x)=\frac{1}{2}\sin^2 x+c}$

**المجموعة الثالثة : من الشكل $\frac{u'}{u^2}$**

1) $f(x)=\frac{4}{(1+4x)^2}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow u^2\end{matrix}$ ; $\boxed{F(x)=-\frac{1}{1+4x}+c}$

2) $f(x)=\frac{6}{(2x+1)^2}=3\frac{2}{(2x+1)^2}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow u^2\end{matrix}$ ; $\boxed{F(x)=-\frac{3}{2x+1}+c}$

3) $f(x)=\frac{1}{(4x+3)^2}=\frac{1}{4}\times\frac{4}{(4x+3)^2}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow u^2\end{matrix}$ $\boxed{F(x)=-\frac{1}{4(4x+3)}+c}$

4) $f(x)=\frac{-1}{(2-x)^2}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow u^2\end{matrix}$ ; $\boxed{F(x)=-\frac{1}{2-x}+c}$

5) $f(x)=\frac{2}{(4-3x)^2}=-\frac{2}{3}\times\frac{-3}{(4-3x)^2}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow u^2\end{matrix}$

$$F(x)=-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{4-3x}\right)=\boxed{\frac{2}{3(4-3x)}+c}$$

6) $f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow u^2\end{matrix}$ ; $\boxed{F(x)=-\frac{1}{x^2+x+1}+c}$

7) $f(x)=\frac{4x-10}{(x^2-5x+6)^2}=2\times\frac{2x-5}{(x^2-5x+6)^2}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow u^2\end{matrix}$

$$\boxed{F(x)=-\frac{2}{x^2-5x+6}+c}$$

8) $f(x)=\frac{\cos x}{\sin^2 x}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow u^2\end{matrix}$ ; $\boxed{F(x)=-\frac{1}{\sin x}+c}$

9) $f(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow u^2\end{matrix}$ ; $\boxed{F(x)=\frac{1}{\cos x}+c}$

**المجموعة الرابعة : من الشكل $\frac{u'}{\sqrt{u}}$**

1) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{3x+2}} \begin{matrix}\to u'\\ \to \sqrt{u}\end{matrix}$ ; $\boxed{F(x)=2\sqrt{3x+2}+c}$

2) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{2-5x}}=-\frac{2}{5}\times\frac{-5}{\sqrt{2-5x}} \begin{matrix}\to u'\\ \to \sqrt{u}\end{matrix}$

$F(x)=-\frac{2}{5}\times 2\sqrt{2-5x}+c=\boxed{-\frac{4}{5}\sqrt{2-5x}+c}$

3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-3}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{2x-3}} \begin{matrix}\to u'\\ \to \sqrt{u}\end{matrix}$

$F(x)=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2x-3}+c=\boxed{\sqrt{2x-3}+c}$

4) $f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} \begin{matrix}\to u'\\ \to \sqrt{u}\end{matrix}$ ; $\boxed{F(x)=2\sqrt{x^2+x+1}+c}$

5) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{2}\times\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} \begin{matrix}\to u'\\ \to \sqrt{u}\end{matrix}$

$F(x)=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{x^2-1}+c=\boxed{\sqrt{x^2-1}+c}$

6) $f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}} \begin{matrix}\to u'\\ \to \sqrt{u}\end{matrix}$ ; $\boxed{F(x)=2\sqrt{2+\sin x}+c}$

**المجموعة الخامسة : من الشكل $\frac{u'}{u}$**

1) $f(x)=x^2-5x+\frac{1}{x}$ ; $\boxed{F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+\ln|x|+c}$

2) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x}=x+1+\frac{1}{x}$ ; $\boxed{F(x)=\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x|+c}$

3) $f(x)=\frac{7}{x}+\frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$ ; $\boxed{F(x)=7\ln|x|+10\sqrt{x}-\frac{1}{x}+c}$

4) $f(x)=\frac{3}{3x-4}$ ; $\boxed{F(x)=\ln|3x-4|+c}$

5) $f(x)=\frac{1}{x+1}; I=]-\infty;-1[$

$F(x)=\ln\left|\underbrace{x+1}_{<0}\right|+c=\boxed{\ln(-x-1)+c}$

6) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}; I=]-1;+\infty[$

$F(x)=\ln\left|\underbrace{x+1}_{>0}\right|+c=\boxed{\ln(x+1)+c}$

7) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-4}; I=]-\infty;-2[$

$F(x)=\ln\left|\underbrace{x^2-4}_{>0}\right|+c=\boxed{\ln(x^2-4)+c}$

8) $f(x)=\dfrac{1}{3x-5}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{3x-5}; I=[2;+\infty[$

$F(x)=\dfrac{1}{3}\ln\left|\underbrace{3x-5}_{>0}\right|+c=\boxed{\dfrac{1}{3}\ln(3x-5)+c}$

9) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2(x+1)}{x^2+2x+2}$

$F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\underbrace{x^2+2x+2}_{>0}\right|+c=\boxed{\dfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+c}$

10) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2x}{x^2-1}; I=]-1;1[$

$F(x)=\dfrac{1}{2}\ln\left|\underbrace{x^2-1}_{<0}\right|+c=\boxed{\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2)+c}$

11) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}; I=\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[; F(x)=\ln\left|\underbrace{\sin x}_{>0}\right|+c=\boxed{\ln(\sin x)+c}$

12) $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}=\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}; I=]1;+\infty[$

$F(x)=\ln\left|\underbrace{\ln x}_{>0}\right|+c=\boxed{\ln(\ln x)+c}$

13) $f(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=-\dfrac{-\sin x}{\cos x}; I=\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$

$F(x)=-\ln\left|\underbrace{\cos x}_{<0}\right|+c=\boxed{-\ln(-\cos x)+c}$

**المجموعة السادسة : من الشكل $u'.e^u$**

1) $f(x)=\frac{1}{4}e^x$ ; $\boxed{F(x)=\frac{1}{4}e^x+c}$

2) $f(x)=e^{-x}=-(-e^{-x})$ ; $\boxed{F(x)=-e^{-x}+c}$

3) $f(x)=e^{2x+3}=\frac{1}{2}(2e^{2x+3})$ ; $\boxed{F(x)=\frac{1}{2}e^{2x+3}+c}$

4) $f(x)=xe^{x^2}=\frac{1}{2}\left(2xe^{x^2}\right)$ ; $\boxed{F(x)=\frac{1}{2}e^{x^2}+c}$

5) $f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}\begin{matrix}\rightarrow u'\\ \rightarrow u\end{matrix}$

$$F(x)=\ln\left|\underbrace{e^x+1}_{>0}\right|+c=\boxed{F(x)=\ln(e^x+1)+c}$$

**II- الحساب التكاملي :**

**1. تعريف :**

لتكن $f$ دالة مستمرة على مجال $[a;b]$ و $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $[a;b]$.

تكامل الدالة $f$ من $a$ إلى $b$ هو العدد الحقيقي :

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$$

**2. خواص التكامل :**

- **الخطّية :**

$$\int_a^a f(x)dx=0$$

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx\ ;k\in\mathbb{R}$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

- **علاقة شال :**

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

**3. التكامل والترتيب :**

$$\forall x \in [a;b]: f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$\forall x \in [a;b]: f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

**4. القيمة المتوسطة :**

- لتكن $f$ دالة مستمرة على مجال $[a;b]$. القيمة المتوسطة للدالة $f$ على المجال $[a;b]$ هي العدد الحقيقي :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

- إذا وُجد عددان حقيقيان $m$ و $M$ بحيث من أجل كل $x \in [a;b]$ ، $m \leq f(x) \leq M$ فإنّ :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

**5. المكاملة بالتجزئة :**

لتكن $f$ و $g$ دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال $[a;b]$ بحيث تكون $f'$ و $g'$ مستمرتين على المجال $[a;b]$

$$\int_a^b f'(x).g(x)dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b f(x).g'(x)dx$$

**أمثلة على الحساب التكاملي :**

1) $\int_0^3 (x-4)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 4x\right]_0^3 = \frac{9}{2} - 12 = \boxed{-\frac{15}{2}}$

2) $\int_1^2 \left(2x - 1 + \frac{1}{x^2}\right)dx = \left[x^2 - x - \frac{1}{x}\right]_1^2 = \left(4 - 2 - \frac{1}{2}\right) - (1 - 1 - 1)$

$$= \frac{3}{2} + 1 = \boxed{\frac{5}{2}}$$

3) $\int_{-1}^1 \frac{2}{(2x+3)^2}dx = \left[-\frac{1}{2x+3}\right]_{-1}^1 = -\frac{1}{5} - (-1) = -\frac{1}{5} + 1 = \boxed{\frac{4}{5}}$

4) $\int_2^4 \frac{dx}{(4-3x)^2} = -\frac{1}{3}\int_2^4 \frac{-3}{(4-3x)^2}dx = -\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{4-3x}\right]_2^4$

$$= -\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3x-4}\right]_2^4 = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{8}}$$

5) $\int_1^{-1} \frac{dx}{\sqrt{4-2x}} = -\frac{1}{2}\int_1^{-1} \frac{-2}{\sqrt{4-2x}}dx = -\frac{1}{2}\left[2\sqrt{4-2x}\right]_1^{-1}$

$= \left[\sqrt{4-2x}\right]_{-1}^{1} = \boxed{\sqrt{2}-\sqrt{6}}$

6) $\int_0^2 \frac{dx}{x+1} = \left[\ln\left|\underbrace{x+1}_{>0}\right|\right]_0^2 = [\ln(x+1)]_0^2 = \ln 3 - \ln 1 = \boxed{\ln 3}$

7) $\int_{-4}^{-3} \frac{3}{x+2}dx = 3\int_{-4}^{-3} \frac{1}{x+2}dx = 3\left[\ln\left|\underbrace{x+2}_{<0}\right|\right]_{-4}^{-3} = 3[\ln(-x-2)]_{-4}^{-3}$

$= 3(\ln 1 - \ln 2) = \boxed{-3\ln 2}$

8) $\int_1^2 \frac{x^2+x-2}{x^2}dx = \int_1^2 \left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx = \left[x+\ln|x|+\frac{2}{x}\right]_1^2$

$= 3 + \ln 2 - 3 = \boxed{\ln 2}$

9) $\int_3^4 \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2-x}-\frac{4}{x+2}\right)dx = \left[\frac{1}{4}x - \ln|2-x| - 4\ln|x+2|\right]_3^4$

$= (1 - \ln 2 - 4\ln 6) - \left(\frac{3}{4} - \ln 1 - 4\ln 5\right)$

$= \boxed{\frac{1}{4} - \ln 2 - 4\ln 6 + 4\ln 5}$

10) $\int_2^5 -e^{-x}dx = [e^{-x}]_2^5 = \boxed{e^{-5}-e^{-2}}$

11) $\int_2^1 (e^{2x}+2e^x-3)dx = -\int_1^2 (e^{2x}+2e^x-3)dx$

$= -\left[\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x-3x\right]_1^2 = -\left(\frac{1}{2}e^4+2e^2-6\right)+\left(\frac{1}{2}e^2+2e-3\right)$

$= \boxed{-\frac{1}{2}e^4-\frac{3}{2}e^2+2e+3}$

12) $\int_{\ln 3}^{\ln 10} e^x(e^x-3)dx = \left[\frac{(e^x-3)^2}{2}\right]_{\ln 3}^{\ln 10} = \frac{49}{2}-0 = \boxed{\frac{49}{2}}$

13) $\int_0^1 \frac{e^{-x}-2}{e^x}dx = -\int_0^1 -e^{-x}(e^{-x}-2)dx = -\left[\frac{(e^{-x}-2)^2}{2}\right]_0^1$

$= \boxed{-\frac{(e^{-1}-2)^2}{2}+\frac{1}{2}}$

14) $\int_{-1}^{0} \frac{\ln(1-x)}{x-1}dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x-1}\ln(1-x)\,dx = \left[\frac{\ln^2|1-x|}{2}\right]_{-1}^{0}$

$= 0 - \frac{\ln^2(2)}{2} = -\frac{\ln^2(2)}{2}$

15) $\int_0^3 |x-2|dx = \int_0^2 (-x+2)dx + \int_2^3 (x-2)dx$

$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_0^2 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_2^3 = 2 + \left(-\frac{3}{2} + 2\right) = \boxed{\frac{5}{2}}$

16) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \sin^2 x\,dx = \left[\frac{\sin^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3}{3} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{8}}$

17) $\int_{-2}^{0} (x+3)e^x dx\,;u = x+3 \Rightarrow u' = 1\,;v' = e^x \Rightarrow v = e^x$

$\int_{-2}^{0} (x+3)e^x dx = [(x+3)e^x]_{-2}^0 - \int_{-2}^{0} e^x dx$

$= [(x+3)e^x]_{-2}^0 - [e^x]_{-2}^0 = [(x+2)e^x]_{-2}^0 = \boxed{2}$

18) $\int_0^{\pi} (x+1)\sin x\,dx\,;u = x+1 \Rightarrow u' = 1\,;v' = \sin x \Rightarrow v = -\cos x$

$\int_0^{\pi} (x+1)\sin x\,dx = [-(x+1)\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos x\,dx$

$= [-(x+1)\cos x]_0^{\pi} + [\sin x]_0^{\pi} = \boxed{\pi + 2}$

19) $\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx = \int_0^1 x(1-x)^{\frac{1}{2}}dx$

$u = x \Rightarrow u' = 1\,;v' = (1-x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow v = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$

$\int_0^1 x\sqrt{1-x}dx = \left[-\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \int_0^{\pi} -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}dx$

$= \left[-\frac{2}{3}x(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \left[\frac{4}{15}(1-x)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \boxed{\frac{4}{15}}$

20) $\int_1^2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx\,u = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \Rightarrow u' = \frac{1}{x(x+1)}\,;v' = 1 \Rightarrow v = x$

$$\int_1^2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)dx = \left[x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x+1}dx$$

$$= \left[x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^2 - [\ln|x+1|]_1^2$$

$$= 2\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2} - \ln 3 + \ln 2 = 2\ln 2 - 2\ln 3 + 2\ln 2 - \ln 3$$

$$= \boxed{4\ln 2 - 3\ln 3}$$

21) $\int_{-1}^{0}(2x^2+3x)e^{-x}dx$

$u_1 = 2x^2+3x \Rightarrow u_1' = 4x+3\,;\, v_1' = e^{-x} \Rightarrow v_1 = -e^{-x}$

$$\underbrace{\int_{-1}^{0}(2x^2+3x)e^{-x}dx}_{I} = -[(2x^2+3x)e^{-x}]_{-1}^{0} - \underbrace{\int_{-1}^{0}-(4x+3)e^{-x}dx}_{J}$$

$u_2 = 4x+3 \Rightarrow u_2' = 4\,;\, v_2' = -e^{-x} \Rightarrow v_2 = e^{-x}$

$$J = [(4x+3)e^{-x}]_{-1}^{0} - 4\int_{-1}^{0}e^{-x}dx = [(4x+3)e^{-x}]_{-1}^{0} + 4[e^{-x}]_{-1}^{0}$$

$$= 7 - 3e$$

$I = -[(2x^2+3x)e^{-x}]_{-1}^{0} - (7-3e) = -e - 7 + 3e = \boxed{2e-7}$

22) $\int_1^e (\ln x)^2 dx\,;\, u_1 = (\ln x)^2 \Rightarrow u_1' = \frac{2\ln x}{x}\,;\, v_1' = 1 \Rightarrow v_1 = x$

$$\underbrace{\int_1^e (\ln x)^2 dx}_{I} = [x(\ln x)^2]_1^e - 2\underbrace{\int_1^e \ln x\,dx}_{J}$$

$u_2 = \ln x \Rightarrow u_2' = \frac{1}{x}\,;\, v_2' = 1 \Rightarrow v_2 = x$

$J = [x\ln x]_1^e - \int_1^e dx = [x\ln x]_1^e - [x]_1^e = e - (e-1) = 1$

$I = [x(\ln x)^2]_1^e - 2 = \boxed{e-2}$

**III- حساب المساحات :**

**1. وحدة المساحة :**

وحدة المساحة في مستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ هي مساحة الرباعي المحدّد بالنقطة $O$ والشعاعين $\vec{i}$ و $\vec{j}$

$$1u.A = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

### 2. حساب مساحة حيّز :

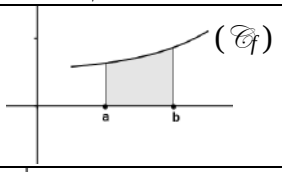
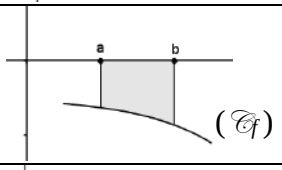
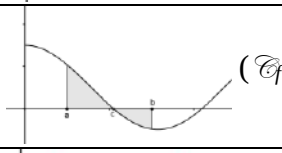
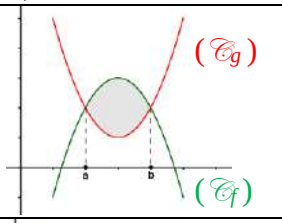
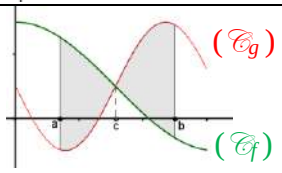
- لتكن $f$ دالة مستمرة على مجال $[a;b]$. مساحة الحيّز المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C}_f)$، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي :

$$\left(\int_a^b |f(x)|dx\right)u.A$$

- لتكن $f$ و $g$ دالتين مستمرتين على مجال $[a;b]$. مساحة الحيّز المحصور بين المنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ ، محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=a$ و $x=b$ هي :

$$\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\right)u.A$$

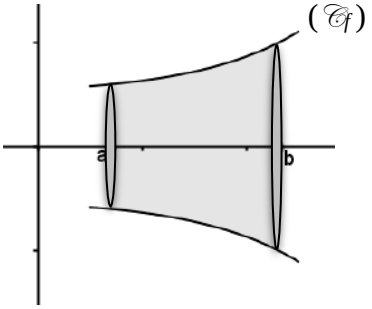
### 3. حالات خاصة :

| الرسم | مساحة الحيّز الرمادي في الرسم |
|---|---|
|   | $\left(\int_a^b f(x)dx\right)u.A$ |
|   | $\left(\int_a^b -f(x)dx\right)u.A$ |
|   | $\left(\int_a^c f(x)dx+\int_c^b -f(x)dx\right)u.A$ |
|   | $\left(\int_a^b [f(x)-g(x)]dx\right)u.A$ |
|   | $\left(\begin{array}{l}\int_a^c [f(x)-g(x)]dx \\ +\int_c^b [g(x)-f(x)]dx\end{array}\right)u.A$ |

**4. حساب الحجوم :**

حجم المجسّم المولّد بدوران المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ حول محور الفواصل دورة كاملة في مجال $[a;b]$ هو :

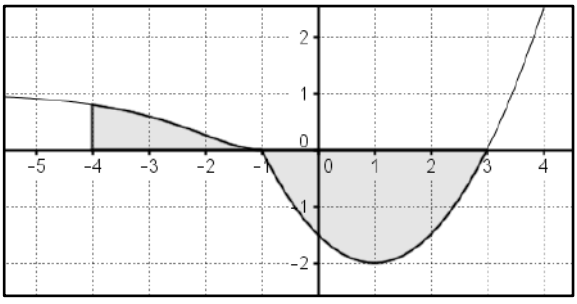
$$V = \left[\int_a^b \pi\big(f(x)\big)^2 dx\right] u.v$$




**مثال على حساب المساحات :**

لتكن الدالة $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x-3}{2} \; ; x \geq -1 \\ xe^{x+1}+1 \; ; x \leq -1 \end{cases}$ وليكن $(\mathscr{C}_f)$ تمثيلها البياني المبيّن أسفله.

احسب مساحة الحيّز المظلل في الشكل.




$$A = \underbrace{\int_{-4}^{-1}(xe^{x+1}+1)dx}_{I} - \underbrace{\int_{-1}^{3}\left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}\right)dx}_{J}$$

$$I = \int_{-4}^{-1}(xe^{x+1}+1)dx = \int_{-4}^{-1} xe^{x+1}dx + \int_{-4}^{-1} dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1 \; ; \; v' = e^{x+1} \Rightarrow v = e^{x+1}$$

$$I = [xe^{x+1}]_{-4}^{-1} - \int_{-4}^{-1} e^{x+1}dx + [x]_{-4}^{-1} = [xe^{x+1}]_{-4}^{-1} - [e^{x+1}]_{-4}^{-1} + [x]_{-4}^{-1}$$

$$= [(x-1)e^{x+1} + x]_{-4}^{-1} = 5e^{-3} + 1$$

$$J = \int_{-1}^{3} \left(\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}\right) dx = \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x\right]_{-1}^{3} = -\frac{16}{3}$$

$$A = I - J = 5e^{-3} + 1 + \frac{16}{3} = \boxed{\left(5e^{-3} + \frac{19}{3}\right)\ u.a}$$

# الجزء الرابع

# حلول مسائل

# الدوال العددية

**I- النهايات والمستقيمات المقاربة**

**حل التمرين 01 :**

حساب النهايات للدالة $f$ عند حدود مجموعة تعريفها وتعيين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$

$1.\ f(x) = 3x^2 + 2|x| + 7\ ;\ Df = ]-\infty;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 = \boxed{+\infty}$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 = \boxed{+\infty}$

$2.\ f(x) = -x^3 + 2x^2; Df = ]-\infty;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} -x^3 = \boxed{+\infty}$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^3 = \boxed{-\infty}$

$3.\ f(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{x-2}\ ; Df = ]-\infty;+2[ \cup ]+2;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = \boxed{-\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{\substack{<\\x\to+2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{<\\x\to+2}} \dfrac{x^2+4x+4 \to 16}{x-2 \to 0^-} = \boxed{-\infty}$

$\lim\limits_{\substack{>\\x\to+2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{>\\x\to+2}} \dfrac{x^2+4x+4 \to 16}{x-2 \to 0^+} = \boxed{+\infty}$

المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته : $\boxed{x=2}$

$4.\ f(x) = 1 + \dfrac{3+4x}{1-2x}\ ; Df = \left]-\infty;+\dfrac{1}{2}\right[ \cup \left]+\dfrac{1}{2};+\infty\right[\ ;$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 + \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x}{-2x} = 1-2 = \boxed{-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 + \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x}{-2x} = 1-2 = \boxed{-1}$

$\lim\limits_{\substack{<\\x\to+\frac{1}{2}}} f(x) = \lim\limits_{\substack{<\\x\to+\frac{1}{2}}} 1 + \dfrac{3+4x \to 5}{1-2x \to 0^+} = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{\substack{>\\x\to+\frac{1}{2}}} f(x) = \lim\limits_{\substack{>\\x\to+\frac{1}{2}}} 1 + \dfrac{3+4x \to 5}{1-2x \to 0^-} = \boxed{-\infty}$

المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته : $\boxed{x=\frac{1}{2}}$ وآخر أفقيا معادلته : $\boxed{y=-1}$

$5.\ f(x)=\dfrac{x^4+1}{x^2+x+1}\ ;\ Df=]-\infty;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

$6.\ f(x)=\dfrac{x^2-4x+5}{x^2-4x-5}\ ;\ Df=]-\infty;-1[\cup]-1;+5[\cup]+5;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1\ ;\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}}\dfrac{x^2-4x+5\to 10}{x^2-4x-5\to 0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}}\dfrac{x^2-4x+5\to 10}{x^2-4x-5\to 0^-}=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to+5\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to+5\\ <}}\dfrac{x^2-4x+5\to 10}{x^2-4x-5\to 0^-}=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to+5\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to+5\\ >}}\dfrac{x^2-4x+5\to 10}{x^2-4x-5\to 0^+}=+\infty$

المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيمين مقاربين عموديين معادلتيهما : $\boxed{x=-1}$ و $\boxed{x=5}$ وآخر أفقيا معادلته : $\boxed{y=1}$

$7.\ f(x)=1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}\ ;\ Df=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1\ ;\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\ <}}\dfrac{1}{x^2}(x^2+3x+4)=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}}\dfrac{1}{x^2}(x^2+3x+4)=+\infty$

المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته : $\boxed{x=0}$ وآخر أفقيا معادلته : $\boxed{y=1}$

$8.\ f(x)=\dfrac{3}{(x-4)^2}\ ;\ Df=]-\infty;+4[\cup]+4;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3\quad\to 3}{(x-4)^2\to+\infty}=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{(x-4)^2} \begin{matrix} \to 3 \\ \to +\infty \end{matrix} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 4 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 4 \\ <}} \frac{3}{(x-4)^2} \begin{matrix} \to 3 \\ \to 0^+ \end{matrix} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 4 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 4 \\ >}} \frac{3}{(x-4)^2} \begin{matrix} \to 3 \\ \to 0^+ \end{matrix} = +\infty$$

المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته : $\boxed{x=4}$ وآخر أفقيا معادلته : $\boxed{y=0}$

$$9.\, f(x) = \frac{-3x^3+6x+4}{x^2+2} \; ; Df = ]-\infty;+\infty[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} -3x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} -3x = -\infty$$

$$10.\, f(x) = 1 + \frac{3x}{1-4x^2} \; ; Df = \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[ \cup \left]-\frac{1}{2};+\frac{1}{2}\right[ \cup \left]+\frac{1}{2};+\infty\right[$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{-4x^2} = 1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{-4x} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{-4x^2} = 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{-4x} = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to-\frac{1}{2} \\ <}} f(x) = 1 + \lim_{\substack{x\to-\frac{1}{2} \\ <}} \frac{3x}{1-4x^2} \begin{matrix} \to -\frac{3}{2} \\ \to 0^- \end{matrix} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-\frac{1}{2} \\ >}} f(x) = 1 + \lim_{\substack{x\to-\frac{1}{2} \\ >}} \frac{3x}{1-4x^2} \begin{matrix} \to -\frac{3}{2} \\ \to 0^+ \end{matrix} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to+\frac{1}{2} \\ <}} f(x) = 1 + \lim_{\substack{x\to+\frac{1}{2} \\ <}} \frac{3x}{1-4x^2} \begin{matrix} \to +\frac{3}{2} \\ \to 0^+ \end{matrix} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to+\frac{1}{2} \\ >}} f(x) = 1 + \lim_{\substack{x\to+\frac{1}{2} \\ >}} \frac{3x}{1-4x^2} \begin{matrix} \to +\frac{3}{2} \\ \to 0^- \end{matrix} = -\infty$$

المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيمين مقاربين عموديين معادلتيهما : $\boxed{x=-\frac{1}{2}}$ و $\boxed{x=\frac{1}{2}}$ وآخر أفقيا معادلته : $\boxed{y=1}$

$11.\ f(x) = 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}\ ; Df = ]-\infty; 0[ \cup ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} = 3$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} = 3$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} = -\infty$$

المنحنى ($\mathscr{C}f$) يقبل مستقيمين مقاربين عموديين معادلتيهما : $\boxed{x = 0}$ و $\boxed{x = 1}$ وآخر أفقيا معادلته : $\boxed{y = 3}$

$12.\ f(x) = \sqrt{x^2+1} - x\ ; Df = ]-\infty; +\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} - x = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$$

المنحنى ($\mathscr{C}f$) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا بجوار $(+\infty)$ معادلته : $\boxed{y = 0}$

$13.\ f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}\ ;\ x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1\ ; Df = [1; +\infty[$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} = \sqrt{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+2) - (x-1)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1}} = 0$$

المنحنى ($\mathscr{C}f$) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا بجوار $(+\infty)$ معادلته : $\boxed{y = 0}$

$14.\ f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-2}}\ ;\ \frac{x}{x-2}\geq 0\Rightarrow x\in\ ]-\infty;0]\cup\ ]2;+\infty[$

$Df=\ ]-\infty;0]\cup\ ]2;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x-2}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\sqrt{\frac{x}{x-2}}=0\ ;\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}}\sqrt{\frac{x}{x-2}}\ \begin{matrix}\to+2\\ \to 0^{+}\end{matrix}=\boxed{+\infty}$

المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته : $\boxed{x=2}$ وآخر أفقيا معادلته : $\boxed{y=1}$

$15.\ f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2x-3}\ ;\ x^2+x+1\geq 0\Rightarrow x\in\mathbb{R}\ ;$

$x^2+2x-3\geq 0\Rightarrow x\in\ ]-\infty;-3]\cup[1;+\infty[$

$Df=\ ]-\infty;-3]\cup[1;+\infty[$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2x-3}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2x-3}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x-3}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x-3}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x^2+x+1)-(x^2+2x-3)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x-3}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x+4}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x\left(1-\frac{4}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}}\ \begin{matrix}\to 1\\ \to 2\end{matrix}=\boxed{\frac{1}{2}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2x-3}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2x-3}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x-3}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x-3}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+x+1)-(x^2+2x-3)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+2x-3}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+4}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(-1+\frac{4}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1+\frac{4}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{\substack{x\to-3\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-3\\ <}} \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2x-3} = \boxed{\sqrt{7}}$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\ >}} \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2x-3} = \boxed{\sqrt{3}}$$

المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا بجوار $(-\infty)$ معادلته : $\boxed{y=\frac{1}{2}}$ ، وآخر أفقيا بجوار $(+\infty)$ معادلته : $\boxed{y=-\frac{1}{2}}$

16. $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ; $x+1>0 \Rightarrow x>-1$ ; $Df = ]-1;+\infty[$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\ >}} x-\frac{2}{\sqrt{x+1}} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x-\frac{2}{\sqrt{x+1}} = \boxed{+\infty}$$

المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته : $\boxed{x=-1}$

17. $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ ; $x^2-4>0 \Rightarrow x\in ]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

$Df = ]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to-\infty} x+\frac{x}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} x-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to+\infty} x+\frac{x}{|x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty} x+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to-2\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-2\\ <}} x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\begin{matrix}\to -2\\ \to 0^+\end{matrix}=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to2\\ >}} x+\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\begin{matrix}\to +2\\ \to 0^+\end{matrix}=\boxed{+\infty}$$

المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيمين مقاربين عموديين معادلتيهما : $\boxed{x=-2}$ و $\boxed{x=2}$

**حل التمرين 02 :**

1. $\lim_{x\to+\infty}\left(2x+1-\frac{4}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} 2x=\boxed{+\infty}$

2. $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3}{(x+1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty} 3x=\boxed{-\infty}$

3. $\lim_{x\to0}\frac{2x^2+7x-3}{x^2}\begin{matrix}\to -3\\ \to 0^+\end{matrix}=\boxed{-\infty}$

4. $\lim_{\substack{x\to-3\\ >}}\frac{x+2}{x^2+3x}\begin{matrix}\to -1\\ \to 0^-\end{matrix}=\boxed{+\infty}$

5. $\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x^2+4x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-x\sqrt{1+\frac{4}{x}}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left(2-\sqrt{1+\frac{4}{x}}\right)=\boxed{+\infty}$$

6. $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{3x^2+9}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(3+\frac{9}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{3+\frac{9}{x^2}}}{x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{3+\frac{9}{x^2}}=\boxed{-\sqrt{3}}$$

7. $\lim_{x\to2}\frac{2x^2-4x}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2x(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2} 2x=\boxed{4}$

8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+5)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}x+5=\boxed{8}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+3x-7}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(4x+7)}{(x-1)(x+3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x+7}{x+3}=\boxed{\dfrac{11}{4}}$

10. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}=\dfrac{12}{-4}$

$=\boxed{-3}$

11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^2-x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2-2x+1)}{(x-2)(x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x+1}{x+1}=\boxed{\dfrac{1}{3}}$

12. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4+x^3-7x^2+8x-12}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^3+3x^2-x+6)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}x^3+3x^2-x+6=\boxed{24}$

13. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x-1}+1\right)}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$

14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x+8}-3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{5-x}-2\right)\left(\sqrt{5-x}+2\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-x)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{5-x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}-\dfrac{\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{\left(\sqrt{5-x}+2\right)}=\boxed{-\dfrac{3}{2}}$

15. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+2}-2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1}{\sqrt{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}-2}$

$=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}-\frac{2}{\sqrt{x}}}=\boxed{1}$

16. $\lim_{x\to 7}\dfrac{x^2-4x-21}{x-4-\sqrt{x+2}}=\lim_{x\to 7}\dfrac{(x-7)(x+3)\left(x-4+\sqrt{x+2}\right)}{\left(x-4-\sqrt{x+2}\right)\left(x-4+\sqrt{x+2}\right)}$

$=\lim_{x\to 7}\dfrac{(x-7)(x+3)\left(x-4+\sqrt{x+2}\right)}{(x-4)^2-(x+2)}$

$=\lim_{x\to 7}\dfrac{(x-7)(x+3)\left(x-4+\sqrt{x+2}\right)}{x^2-9x+14}$

$=\lim_{x\to 7}\dfrac{(x-7)(x+3)\left(x-4+\sqrt{x+2}\right)}{(x-7)(x-2)}$

$=\lim_{x\to 7}\dfrac{(x+3)\left(x-4+\sqrt{x+2}\right)}{(x-2)}=\dfrac{60}{5}=\boxed{12}$

17. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\dfrac{\left(x\sqrt{x}-1\right)\left(x\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)(x+2)\left(x\sqrt{x}+1\right)}$

$=\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{(x-1)(x+2)\left(x\sqrt{x}+1\right)}$

$=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+2)\left(x\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x^2+x+1)}{(x+2)\left(x\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{3}{6}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$

18. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-6x+10}+x+2\right)$

$=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2-6x+10}+x+2\right)\left(\sqrt{x^2-6x+10}-x-2\right)}{\left(\sqrt{x^2-6x+10}-x-2\right)}$

$=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{(x^2-6x+10)-(x+2)^2}{\left(\sqrt{x^2\left(1-\frac{6}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}-x-2\right)}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-10x+6}{-x\left(\sqrt{1-\frac{6}{x}+\frac{10}{x^2}}+1+\frac{2}{x}\right)}$

$=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{-x\left(10-\frac{6}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1-\frac{6}{x}+\frac{10}{x^2}}+1+\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{10-\frac{6}{x}}{\left(\sqrt{1-\frac{6}{x}+\frac{10}{x^2}}+1+\frac{2}{x}\right)}$

$=\dfrac{10}{2}=\boxed{5}$

19. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2-7x+3}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2-2x+5)-(x^2-7x+3)}{\sqrt{x^2-2x+5}+\sqrt{x^2-7x+3}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{5x+2}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(5+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{5+\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

20. $\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\left(\sqrt{x}-1\right) = \boxed{-\infty}$

21. $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x+2}}$

$$= \lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+2}\right)}{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{3x+2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+2}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{x(x+1)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+2}\right)}{-2x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to0}\frac{(x+1)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+2}\right)}{-2\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} \to 2\sqrt{2} \to -4 = \boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

22. $\lim_{x\to1}\frac{x^{2007}-1}{x-1} = (x^{2007})'(1) = 2007(1)^{2006} = \boxed{2007}$

23. $\lim_{x\to3}\frac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}$ ; $f(x) = x\sqrt{x+1}$ ; $f(3) = 6$

$$\lim_{x\to3}\frac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3} = \lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3)$$

$$f'(x) = \sqrt{x+1}+x\left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right) \Rightarrow f'(3) = 2+\frac{3}{4} = \boxed{\frac{11}{4}}$$

24. $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\tan x-\tan 0}{x-0} = tan'(0) = 1+\tan^2(0) = \boxed{1}$

25. $\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x}{3x} = \lim_{x\to0} 2\times\frac{\sin 6x}{6x} = \boxed{2}$ $\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x}{6x} = 1\right)$

$$26.\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\tan 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan 3x}{x}\to 3}{\frac{\tan 2x}{x}\to 2}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

$$27.\lim_{x\to 0}\frac{\sin \alpha x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin \alpha x}{x}\to \alpha}{\frac{\sin x}{x}\to 1}=\boxed{\alpha}$$

$$28.\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{6x-\pi}=\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{2\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)}{6\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{3}sin'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{6}}$$

$$29.\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\sin(4x-2)}{2x-1}=\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{\sin 2(2x-1)}{2x-1}=\lim_{X\to 0}\frac{\sin 2X}{X}=\boxed{2}\ (X=2x-1)$$

$$30.\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3x}{x^2+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+3)}{x\left(x+\frac{\sin x}{x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{x+\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}}=\boxed{3}$$

$$31.\lim_{\substack{x\to \pi\\ >}}\frac{1-\cos x\to +2}{1+\cos x\to 0^+}=\boxed{+\infty}$$

$$32.\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{(1-\cos x)(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+\cos x}=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$33.\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos 2x+1}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{-2\sin^2 x+2}=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{-2(\sin^2 x-1)}$$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1}{-2(\sin x+1)}=\boxed{-\frac{1}{4}}$$

**حل التمرين 03 :**

حساب النهايات التالية باستعمال مبرهنة المقارنة:

$1.\ -1\le \sin x\le 1\Rightarrow x^2\le x^2+1+\sin x\le x^2+2\ ;\ \lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

$$\begin{cases}x^2+1+\sin x\ge x^2\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\end{cases}\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to+\infty}x^2+1+\sin x=+\infty}$$

$2.\ -1 \le \sin 2x \le 1 \Rightarrow 3x - 1 \le 3x + \sin 2x \le 3x + 1$ ;

$\lim\limits_{x\to-\infty} 3x + 1 = -\infty$

$\begin{cases} 3x + \sin 2x \le 3x + 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 3x + 1 = -\infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} 3x + \sin 2x = -\infty}$

$3.\ -1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow x \le x\cos x \le -x$

$\Rightarrow -2x^2 + x \le -2x^2 + x\cos x \le -2x^2 - x$ ;

$\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2 - x = \lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2 = -\infty$

$\begin{cases} -2x^2 + x\cos x \le -2x^2 - x \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2 - x = -\infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} -2x^2 + x\cos x = -\infty}$

$4.\ -1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow -1 \le -\sin x \le 1 \Rightarrow 1 \le 2 - \sin x \le 3$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3} \le \dfrac{1}{2 - \sin x} \le 1 \Rightarrow \dfrac{x}{3} \le \dfrac{x}{2 - \sin x} \le x\ (x > 0);\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{3} = +\infty$

$\begin{cases} \dfrac{x}{2 - \sin x} \ge \dfrac{x}{3} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{3} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{2 - \sin x} = +\infty}$

$5.\ -1 \le \sin 2x^2 \le 1 \Rightarrow -x \le x\sin 2x^2 \le x$

$\Rightarrow \dfrac{-x}{x^2 + 1} \le \dfrac{x\sin 2x^2}{x^2 + 1} \le \dfrac{x}{x^2 + 1}$ ;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{x^2 + 1} = 0$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2 + 1} = 0$

$\begin{cases} \dfrac{-x}{x^2 + 1} \le \dfrac{x\sin 2x^2}{x^2 + 1} \le \dfrac{x}{x^2 + 1} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2 + 1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sin 2x^2}{x^2 + 1} = 0}$

$6.\ -1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow 2x - 1 \le 2x + \cos x \le 2x + 1$

$\Rightarrow \dfrac{2x - 1}{1 + x} \le \dfrac{2x + \cos x}{1 + x} \le \dfrac{2x + 1}{1 + x}$ ;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x - 1}{1 + x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x + 1}{1 + x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$

$\begin{cases} \dfrac{2x - 1}{1 + x} \le \dfrac{2x + \cos x}{1 + x} \le \dfrac{2x + 1}{1 + x} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x - 1}{1 + x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x + 1}{1 + x} = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x + \cos x}{1 + x} = 2}$

$7.\ -1 \le \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le 1 \Rightarrow -x^2 \le x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2$

$\lim\limits_{x\to 0} -x^2 = 0\ ;\ \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$

$$\begin{cases} -x^2 \le x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2 \\ \lim\limits_{x\to 0} -x^2 = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$$

$8.\ -1 \le \sin 3x \le 1\ ;\ -1 \le \cos 2x \le 1 \Rightarrow -1 \le -\cos 2x \le 1$

$$\Rightarrow -2 \le \sin 3x - \cos 2x \le 2 \Rightarrow\ -\frac{2}{x} \le \frac{\sin 3x - \cos 2x}{x} \le \frac{2}{x};$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{2}{x} = 0\ ;\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$

$$\begin{cases} -\frac{2}{x} \le \frac{\sin 3x - \cos 2x}{x} \le \frac{2}{x} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin 3x - \cos 2x}{x} = 0}$$

$9.\ -1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow 0 \le 1 + \sin x \le 2\ ;$

$$\Rightarrow \frac{2}{x - \sqrt{x^2+1}} \le \frac{1+\sin x}{x - \sqrt{x^2+1}} \le 0\ ;\ (x - \sqrt{x^2+1} < 0)$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x - \sqrt{x^2+1}} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{2}{x - \sqrt{x^2+1}} \le \frac{1+\sin x}{x - \sqrt{x^2+1}} \le 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x - \sqrt{x^2+1}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\sin x}{x - \sqrt{x^2+1}} = 0}$$

**حل التمرين 04 :**

**لتكن $f$ دالة معرّفة على $]-\infty;0[$ حيث: $Df = [0;+\infty[$ $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x+1}}$**

**1. إثبات أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب تماما لدينا:**

$$x < \sqrt{x^2+x+1} < x+1$$

$$x > 0 \Rightarrow x^2+x+1 > x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+x+1} > \sqrt{x^2} \Rightarrow \boxed{\sqrt{x^2+x+1} > x}$$

$$x > 0 \Rightarrow x^2+x+1 < x^2+2x+1 \Rightarrow \sqrt{x^2+x+1} < \sqrt{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{x^2+x+1} < x+1}$$

**2. استنتاج أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب تماما لدينا:**

$$1-\frac{1}{x+1}<f(x)<1+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$x<\sqrt{x^2+x+1}<x+1\Rightarrow\frac{1}{x+1}<\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}<\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow\frac{x+\sqrt{x}}{x+1}<f(x)<\frac{x+\sqrt{x}}{x}$$

$$\frac{x+\sqrt{x}}{x+1}>\frac{x}{x+1}\Rightarrow\frac{x+\sqrt{x}}{x+1}>\frac{x+1-1}{x+1}\Rightarrow\frac{x+\sqrt{x}}{x+1}>1-\frac{1}{x+1}$$

$$\Rightarrow\boxed{f(x)>1-\frac{1}{x+1}}$$

$$f(x)<\frac{x+\sqrt{x}}{x}\Rightarrow f(x)<\frac{x}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}\Rightarrow\boxed{f(x)<1+\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

**3. استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$**

$$\begin{cases}1-\dfrac{1}{x+1}<f(x)<1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{1}{x+1}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=1\end{cases}\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=1}$$

**حل التمرين 05 :**

**لتكن $f$ الدالة المعرّفة على $[1;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{x^2-x}-2x$**

**1. مقارنة العددين $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ و $x^2-x$**

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=x^2-x+\frac{1}{4}\Rightarrow\boxed{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geq x^2-x}$$

**2. استنتاج أنّه من أجل كل $x\geq 1$ لدينا: $f(x)\leq-\frac{1}{2}-x$**

$$x^2-x\leq\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow\sqrt{x^2-x}\leq\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2-x}-2x\leq x-\frac{1}{2}-2x(\text{لأنّ } x\geq 1)\Rightarrow\boxed{f(x)\leq-\frac{1}{2}-x}$$

**حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ :**

$$\begin{cases} f(x) \le -\dfrac{1}{2} - x \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{2} - x = -\infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$$

**3. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$**

$$-1 - x \le f(x) \le -\frac{1}{2} - x \Rightarrow -\frac{1}{x} - 1 \le \frac{f(x)}{x} \le -\frac{1}{2x} - 1$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{x} - 1 \le \dfrac{f(x)}{x} \le -\dfrac{1}{2x} - 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} - 1 = -1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{2x} - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1}$$

**4. بيان أنّه من أجل كل $x \ge 1$ لدينا: $f(x) + x = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1}$**

$$f(x) + x = \sqrt{x^2 - x} - x = \frac{\left(\sqrt{x^2 - x} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - x} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2 - x} + x\right)}$$

$$= \frac{-x}{x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1\right)}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) + x = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1}}$$

**استنتاج أنّ $(\Delta): y = -x - \frac{1}{2}$ مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة $f$ بجوار $+\infty$:**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) + x = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) + x + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) - \left(-x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

منه المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y = -x - \frac{1}{2}$ مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة $f$ بجوار $+\infty$

**حل التمرين 06:**

$Df = \mathbb{R} - \{3\}$ ، $f(x) = \frac{-x^2+5x+5}{x-3}$

**1. تعيين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ حيث: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}$**

$$\boxed{f(x) = -x + 2 + \frac{11}{x-3}}$$

$$\begin{array}{r|l} -x^2+5x+5 & x-3 \\ \hline x^2-3x & -x+2 \\ \quad 2x+5 & \\ \quad -2x+6 & \\ \quad\quad 11 & \end{array}$$

**2. حساب نهايات الدالة $f$ عند حدود مجال تعريفها**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} -x = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} -x = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to3\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to3\\ <}} \frac{-x^2+5x+5 \to 11}{x-3 \to 0^-} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to3\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to3\\ >}} \frac{-x^2+5x+5 \to 11}{x-3 \to 0^+} = \boxed{+\infty}$$

**3. بيان أنّ ($\mathscr{C}$) يقبل مستقيمين مقاربين وتعيين معادلتيهما**

$$\lim_{\substack{x\to3\\ <}} f(x) = -\infty \; ; \; \lim_{\substack{x\to3\\ >}} f(x) = +\infty$$

$$\Longrightarrow \boxed{(D): x = 3 \text{ مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب}}$$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) - (-x+2) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{11}{x-3} = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{(\Delta): y = -x + 2 \text{ مستقيم مقارب مائل}}$$

**4. دراسة وضعية ($\mathscr{C}$) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل $(\Delta)$**

$$f(x) - (-x+2) = \frac{11}{x-3}$$

| $x$ | $-\infty$ | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x-3$ | $-$ | | $+$ |
| $f(x)-(-x+2)$ | $-$ | | $+$ |
| الوضعية | $(Cf)$ تحت $(\Delta)$ | | $(Cf)$ فوق $(\Delta)$ |

**حل التمرين 07:**

$$\boldsymbol{Df=\mathbb{R}-\{2\}\ ،\ f(x)=\frac{2x^3-11x^2+25x-27}{x^2-4x+4}}$$

**1. تعيين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ ، $c$ و $d$ حيث : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}+\frac{d}{(x-2)^2}$**

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-2}+\frac{d}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{(ax+b)(x-2)^2+c(x-2)+d}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{(ax+b)(x^2-4x+4)+c(x-2)+d}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{ax^3-(4a-b)x^2+(4a-4b+c)x-(-4b+2c-d)}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=2\\4a-b=11\\4a-4b+c=25\\-4b+2c-d=27\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-3\\c=5\\d=-5\end{cases}$$

$$\Rightarrow\boxed{f(x)=2x-3+\frac{5}{x-2}+\frac{-5}{(x-2)^2}}$$

**طريقة ثانية:**

$$\begin{array}{r|l}\boldsymbol{2x^3-11x^2+25x-27} & \boldsymbol{x^2-4x+4}\\ \hline -2x^3+8x^2-8x & \underbrace{\boldsymbol{2}}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{x}\underbrace{\boldsymbol{-3}}_{\boldsymbol{b}}\\ -3x^2+17x-27 & \\ 3x^2-12x+12 & \\ \boldsymbol{5x-15} & \boldsymbol{x-2}\\ \hline -5x+10 & \underbrace{\boldsymbol{5}}_{\boldsymbol{c}}\\ \underbrace{\boldsymbol{-5}}_{\boldsymbol{d}} & \end{array}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=-3\\c=5\\d=-5\end{cases}$$

**2. حساب نهايات الدالة $f$ عند حدود مجال تعريفها**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} 2x = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 2x = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{2x^3 - 11x^2 + 25x - 27 \to -5}{(x-2)^2 \to 0^+} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{2x^3 - 11x^2 + 25x - 27 \to -5}{(x-2)^2 \to 0^+} = \boxed{-\infty}$$

**3. بيان أنّ ($\mathscr{C}$) يقبل مستقيمين مقاربين يُطلب تعيين معادلتيهما**

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = -\infty$$

$$\Longrightarrow \boxed{(D): x = 2 \text{ مستقيم مقارب يوازي محور التراتيب}}$$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) - (2x-3) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{5}{x-2} + \frac{-5}{(x-2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(\Delta): y = 2x - 3 \text{ مستقيم مقارب مائل}}$$

**4. دراسة وضعية ($\mathscr{C}$) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل $(\Delta)$**

$$f(x) - (2x-3) = \frac{5}{x-2} + \frac{-5}{(x-2)^2} = \frac{5(x-2)-5}{(x-2)^2} = \frac{5x-15}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{5(x-3)}{(x-2)^2}$$

| $x$ | $-\infty$ | 2 | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x-3$ | $-$ | $-$ ‖ | 0 | $+$ |
| $f(x)-(2x-3)$ | $-$ | $-$ ‖ | 0 | $+$ |
| الوضعية | $(Cf)$ تحت $(\Delta)$ | $(Cf)$ تحت $(\Delta)$ | | $(Cf)$ فوق $(\Delta)$ |

**حل التمرين 08:**

$$\boldsymbol{Df = ]-\infty;0] \cup [2;+\infty[} \text{ ، } \boldsymbol{f(x) = \sqrt{x^2-2x} - 2x + 1}$$

**1. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2x} - 2x + 1 = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x} - 2x + 1 = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)} - 2x + 1$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{\left(1-\frac{2}{x}\right)} - 2 + \frac{1}{x}\right) = \boxed{-\infty}$$

**2. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-3x+2)]$**

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x] = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x} - x + 1$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-2x}-x+1\right)\left(\sqrt{x^2-2x}+x-1\right)}{\left(\sqrt{x^2-2x}+x-1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2-2x)-(x-1)^2}{\left(\sqrt{x^2-2x}+x-1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2-2x)-(x^2-2x+1)}{\left(\sqrt{x^2-2x}+x-1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\left(\sqrt{x^2-2x}+x-1\right)} \begin{matrix} \to -1 \\ \to +\infty \end{matrix} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-3x+2)] = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2x} + x - 1$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-2x}+x-1\right)\left(\sqrt{x^2-2x}-x+1\right)}{\left(\sqrt{x^2-2x}-x+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2-2x)-(x-1)^2}{\left(\sqrt{x^2-2x}-x+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2-2x)-(x^2-2x+1)}{\left(\sqrt{x^2-2x}-x+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\left(\sqrt{x^2-2x}-x+1\right)} \begin{matrix} \to -1 \\ \to +\infty \end{matrix} = \boxed{0}$$

**3. استنتاج وجود مستقيمين مقاربين للمنحنى ($\mathcal{C}$) الممثل للدالة $f$**

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x] = 0 \Longrightarrow \boxed{(\Delta): y=-x}$ مستقيم مقارب مائل بجوار $(+\infty)$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-3x+2)]=0$$

$\Rightarrow \boxed{(\Delta'): y=-3x+2}$ $(-\infty)$ مستقيم مقارب مائل بجوار

**II- الاستمرارية و الاشتقاقية**

**حل التمرين 09:**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{|x|} & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases};\ Df=\mathbb{R}$$

**دراسة استمرارية الدالة $f$ عند $x_0=0$**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{\sin 2x}{-x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}-2\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)=\boxed{-2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}2\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)=\boxed{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)\neq\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)\Rightarrow \boxed{x_0=0 \text{ الدالة غير مستمرة عند}}$$

**حل التمرين 10:**

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-4|}{x+2} & x\neq -2\\ -4 & x=-2\end{cases};\ Df=\mathbb{R}$$

$$x\in\ ]-\infty;-2[\cup[2;+\infty[\ :\ |x^2-4|=x^2-4\ \Rightarrow f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$$

$$=\boxed{x-2}$$

$$x\in\ ]-2;2[\ :\ |x^2-4|=-(x^2-4)\ \Rightarrow f(x)=-\frac{x^2-4}{x+2}=\boxed{-x+2}$$

**1. دراسة قابلية اشتقاق الدالة $f$ عند $x_0=-2$**

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ <}}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{\substack{x\to -2\\ <}}\frac{x-2+4}{x+2}=\lim_{\substack{x\to -2\\ <}}\frac{x+2}{x+2}=\boxed{1}$$

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ >}} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{\substack{x\to -2\\ >}} \frac{-x+2+4}{x+2} = \lim_{\substack{x\to -2\\ >}} \frac{-x+6}{x+2} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ <}} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2} \neq \lim_{\substack{x\to -2\\ >}} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{الدالة غير قابلة للاشتقاق عند } x_0 = -2}$$

**2. دراسة استمرارية الدالة $f$ عند $x_0 = -2$**

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -2\\ <}} x-2 = \boxed{-4}\ ;\ \lim_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -2\\ >}} -x+2 = \boxed{4}$$

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ <}} f(x) \neq \lim_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x) \Rightarrow \boxed{\text{الدالة غير مستمرة عند } x_0 = -2}$$

**حل التمرين 11:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3}{x+1} & x > 1 \\ \sqrt{x^2+3} & x \leq 1 \end{cases} ; Df = \mathbb{R}$$

**1. بيان أنّ الدالة $f$ مستمرة عند $x_0 = 1$**

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \sqrt{x^2+3} = \boxed{2}\ ;\ \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{x^2+3}{x+1} = \boxed{2}$$

$$f(1) = \sqrt{1+3} = \boxed{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = f(1) \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } f \text{ مستمرة عند } x_0 = 1}$$

**2. دراسة قابلية اشتقاق الدالة $f$ عند $x_0 = 1$**

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{x^2+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)} = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \frac{x^2-1}{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1^{<}} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

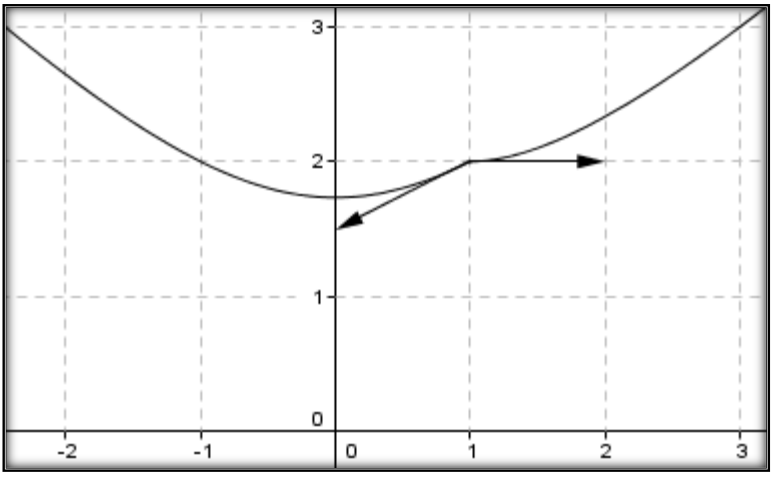
$$\lim_{x \to 1^{>}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^{>}} \frac{\frac{x^2+3}{x+1}-2}{x-1} = \lim_{x \to 1^{>}} \frac{\frac{x^2+3-2x-2}{x+1}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1^{>}} \frac{x^2-2x+1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1^{>}} \frac{x-1}{x+1} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x \to 1^{<}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim_{x \to 1^{>}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{الدالة } f \text{ غير قابلة للاشتقاق عند } x_0 = 1}$$

التفسير البياني للنتيجة : المنحنى يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة 1 (نقطة زاوية).




**حل التمرين 12:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x} ; & x > 0 \\ \dfrac{1-x^2}{x-2} ; & x \leq 0 \end{cases}} \quad ; \; \boldsymbol{Df = \mathbb{R}}$$

**1. دراسة استمرارية الدالة $f$ عند $x_0 = 0$**

$$\lim_{x \to 0^{<}} f(x) = \lim_{x \to 0^{<}} \frac{1-x^2}{x-2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1-\sqrt{x+1}\right)\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{\left(1+\sqrt{x+1}\right)} = \boxed{-\frac{1}{2}} \; ; \; f(0) = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } f \text{ مستمرة عند } x_0 = 0}$$

**2. استنتاج أنّ الدالة $f$ مستمرة على المجال $\mathbb{R}$**

الدالة $f$ مستمرة على المجال $]-\infty;0[$ لأنّها دالة ناطقة مستمرة على مجال تعريفها ، وهي مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ لأنّها مجموع دالتين مستمرتين على مجالي تعريفهما $\left(\frac{1}{x}$ و $\frac{-\sqrt{x+1}}{x}\right)$ ، وبما أنها مستمرة أيضا عند 0 فهي مستمرة على $\mathbb{R}$.

**حل التمرين 13:**

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2+3x}{x+1}; & x > 0 \\ \sqrt{-x}-x & ; \quad x \le 0 \end{cases} \quad ; \quad Dg = \mathbb{R}$$

**1. بيان أنّ الدالة $g$ مستمرة عند 0**

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \sqrt{-x}-x = \boxed{0} \; ; \; \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2+3x}{x+1} = \boxed{0}$$

$$g(0) = \boxed{0}$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = g(0) \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } g \text{ مستمرة عند } 0}$$

**2. بيان أن الدالة $g$ مستمرة على $\mathbb{R}$**

الدالة $g$ مستمرة على المجال $]-\infty;0[$ لأنّها مجموع دالتين مستمرتين على مجالي تعريفهما $\left(\sqrt{-x}$ و $-x\right)$ ، وهي مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ لأنّها دالة ناطقة مستمرة على مجال تعريفها ، وبما أنها مستمرة أيضا عند 0 فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$.

**3. دراسة قابلة اشتقاق الدالة $g$ عند 0**

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{-x}-x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2\left(-\frac{1}{x}\right)}-x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x\left(\sqrt{-\frac{1}{x}}+1\right)}{x}$$

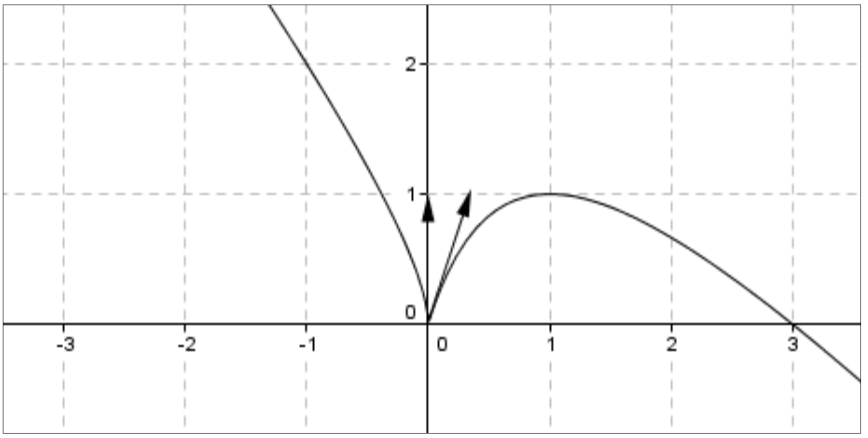
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} -\sqrt{-\frac{1}{x}+1} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{g(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{-x^2+3x}{x(x+1)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x(-x+3)}{x(x+1)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{-x+3}{x+1} = \boxed{3}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{g(x)}{x} \neq \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{g(x)}{x} \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } g \text{ غير قابلة للاشتقاق عند } 0}$$

**تفسير النتيجة هندسيا :**

المنحنى ($\mathscr{C}_g$) يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة 0 (نقطة زاوية).




**حل التمرين 14:**

$$\begin{cases} \boldsymbol{f(x) = \dfrac{x^2+|x|}{x^2-|x|};\quad x \neq 0} \\ \boldsymbol{f(0) = -1} \end{cases} ; \boldsymbol{Df} = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

**1. بيان أنّ الدالة $f$ زوجية**

- $x \in Df \Rightarrow x \notin \{-1;1\} \Rightarrow -x \notin \{1;-1\} \Rightarrow -x \in Df$
- $f(-x) = \frac{(-x)^2+|-x|}{(-x)^2-|-x|} = \frac{x^2+|x|}{x^2-|x|} = f(x) \Rightarrow$ الدالة $f$ زوجية

**2. كتابة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة**

- $x < 0 \Rightarrow |x| = -x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2-x}{x^2+x} = \frac{x-1}{x+1}$
- $x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x} = \frac{x+1}{x-1}$

**3. دراسة استمرارية الدالة $f$ على مجموعة تعريفها**

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} \; ; x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0[ \\ f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \; ; x \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[ \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x-1}{x+1} = \boxed{-1}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x+1}{x-1} = \boxed{-1}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = f(0) \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } f \text{ مستمرة عند } x_0 = 0}$$

الدالة $f$ مستمرة على المجال $]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0[$ لأنّها دالة ناطقة مستمرة على مجال تعريفها ، وهي مستمرة على المجال $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$ لأنّها دالة ناطقة مستمرة على مجال تعريفها ، وبما أنها مستمرة أيضا عند $0$ فهي إذن مستمرة على مجال تعريفها $Df$.

**4. حساب النهايتين $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x} = \boxed{1} \; ; \; \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = \boxed{1}$$

تفسير النتائج هندسيا : المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مستقيم مقارب أفقي للمنحنى $(\mathscr{C}f)$

**حل التمرين 15:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-8}{2x-8}; & x \in ]-\infty; 0[ \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{-x^2+3x+4}; x \in [0; 4] \; ; \; Df = \mathbb{R} \\ x - 5 + \dfrac{4}{x} \; ; & x \in ]4; +\infty[ \end{cases}}$$

**دراسة استمرارية الدالة $f$ عند 0 و 4 :**

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{x-8}{2x-8} = 1 \; ; \; \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{2}\sqrt{-x^2+3x+4} = 1$$
$$f(0) = 1$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = f(0) \Rightarrow$ الدالة $f$ مستمرة عند 0

$\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ <}} \frac{1}{2}\sqrt{-x^2+3x+4} = 0$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ >}} x - 5 + \frac{4}{x} = 0$

$f(4) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ >}} f(x) \Rightarrow$ الدالة $f$ مستمرة عند 4

**بيان أنّ الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$**

بما أنّ الدالة $f$ مستمرة على المجالات $]0;4[$ ، $]-\infty;0[$ و $]4;+\infty[$ وهي مستمرة أيضا عند 0 و 4 فهي مستمرة على $\mathbb{R}$.

**حل التمرين 16:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x+a}{x-2} & x > 2 \\ \dfrac{2x+b}{3} & x \leq 2 \end{cases} ; Df = \mathbb{R}$$

**تعيين قيمة العددين الحقيقيين $a$ و $b$ حتى تكون الدالة $f$ مستمرة عند $x_0 = 2$**

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{2x+b}{3} = \frac{4+b}{3}$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{x^2+x+a}{x-2}$

حتى تكون النهاية عند 2 بقيم كبرى منتهية ، ينبغي أن يكون $x^2+x+a$ قابلا للقسمة على $x-2$ أي 2 جذر لـ $x^2+x+a$ ، منه $6+a=0$ أي $a=-6$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} x+3 = 5$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x) = f(2) \Rightarrow \frac{4+b}{3} = 5 \Rightarrow 4+b = 15 \Rightarrow b = 11$

**حل التمرين 17:**

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x + 1 ; & x \leq 0 \\ \sqrt{x^2+2} + 3\alpha ; & 0 < x \leq 1 \\ x^2 + 4x + 2\beta ; & x > 1 \end{cases} ; Df = \mathbb{R}$$

**تعيين قيمة العددين الحقيقيين $\alpha$ و $\beta$ حتى تكون الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$**

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \sin 2x + 1 = 1$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \sqrt{x^2+2}+3\alpha = \sqrt{2}+3\alpha$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = f(0) \Rightarrow \sqrt{2}+3\alpha = 1 \Rightarrow 3\alpha = 1-\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1-\sqrt{2}}{3}}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \sqrt{x^2+2}+3\alpha = \sqrt{3}+3\alpha = \sqrt{3}+1-\sqrt{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} x^2+4x+2\beta = 5+2\beta$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = f(1) \Rightarrow 5+2\beta = \sqrt{3}+1-\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}-4}{2}}$$

**حل التمرين 18:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1-\cos(\pi x)}{x} ; & x<0 \\ \sqrt{x^2+x+1}-x ; & x\geq 0 \end{cases} ; \; Df = \mathbb{R}}$$

1. **حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

2. **بيان أنّ من أجل كل** $x\in]-\infty;0[$ **، لدينا:** $\boldsymbol{\frac{x+2}{x} \leq f(x) \leq 1}$

$$-1 \leq \cos(\pi x) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\cos(\pi x) \leq 1$$

$\Rightarrow x \leq x+1-\cos(\pi x) \leq x+2$

$\Rightarrow \frac{x+2}{x} \leq \frac{x+1-\cos(\pi x)}{x} \leq \frac{x}{x} \left(x<0 \text{ لأنّ}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{x+2}{x} \leq f(x) \leq 1}$

استنتاج $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\begin{cases} \frac{x+2}{x} \leq f(x) \leq 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1}$$

3. **بيان أنّ $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$**

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{x+1-\cos(\pi x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \left[\frac{x}{x} + \frac{1-\cos(\pi x)}{x}\right]$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \left[1 - \underbrace{\frac{\cos(\pi x)-1}{x}}_{\to 0}\right] = \boxed{1}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \sqrt{x^2+x+1} - x = \boxed{1}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = f(0) \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } f \text{ مستمرة عند } 0}$$

بما أنّ الدالة $f$ مستمرة على المجالين $]0;-\infty[$ و $]0;+\infty[$ وهي مستمرة أيضا عند $0$ فهي مستمرة على $\mathbb{R}$.

4. **بيان أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا $\alpha$ في المجال $\left]-\frac{1}{2};0\right[$**

$$f(x) = \frac{x+1-\cos(\pi x)}{x} \; ; f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{2}+1-\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -1$$

$$f(0) = 1$$

بما أنّ الدالة $f$ مستمرة على المجال $\left]-\frac{1}{2};0\right[$ و $f\left(-\frac{1}{2}\right) \times f(0) < 0$ ، فإنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا $\alpha$ في المجال $\left]-\frac{1}{2};0\right[$

5. **استنتاج أنّ $\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{-\alpha^2-2\alpha}$**

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha+1-\cos(\pi\alpha)}{\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha+1-\cos(\pi\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \cos(\pi\alpha) = \alpha+1 \Rightarrow \cos^2(\pi\alpha) = (\alpha+1)^2$$

$$\Rightarrow 1-\sin^2(\pi\alpha) = (\alpha+1)^2 \Rightarrow \sin^2(\pi\alpha) = 1-(\alpha+1)^2$$

$$\Rightarrow \sin^2(\pi\alpha) = -\alpha^2 - 2\alpha \Rightarrow \boxed{\sin(\pi\alpha) = -\sqrt{-\alpha^2 - 2\alpha}}$$

$$\left[\left(-\frac{\pi}{2} < \pi\alpha < 0\right) \sin(\pi\alpha) < 0 \text{ لأنّ}\right]$$

**حل التمرين 19:**

حساب مشتقة الدالة $f$ بعد تحديد $D_f$ و $D_{f'}$:

1) $f(x) = x^3 - 4x + 5$ ; $Df = \mathbb{R}$ ; $Df' = \mathbb{R}$ ; $\boxed{f'(x) = 3x^2 - 4}$

2) $f(x) = (x^2 - 1)^3$ ; $Df = \mathbb{R}$ ; $Df' = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 3(x^2 - 1)^2(2x) = \boxed{6x(x^2 - 1)^2}$$

3) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 3x + 4}$ ; $Df = \mathbb{R}$ ; $Df' = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{(2x + 3)(x^2 + 3x + 4) - (2x + 3)(x^2 + 3x - 4)}{(x^2 + 3x + 4)^2}$$

$$= \boxed{\frac{8(2x + 3)}{(x^2 + 3x + 4)^2}}$$

4) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x - 5}{2x + 1}$ ; $Df = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ ; $Df' = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

$$f'(x) = \frac{(6x + 4)(2x + 1) - 2(3x^2 + 4x - 5)}{(2x + 1)^2}$$

$$= \frac{12x^2 + 14x + 4 - 6x^2 - 8x + 10}{(2x + 1)^2} = \boxed{\frac{6x^2 + 6x + 14}{(2x + 1)^2}}$$

5) $f(x) = \dfrac{4}{(2x + 3)^2}$ ; $Df = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$ ; $Df' = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$

$$f'(x) = \frac{-16(2x + 3)}{(2x + 3)^4} = \boxed{\frac{-16}{(2x + 3)^3}}$$

6) $f(x) = \dfrac{4}{(2\sin x + 3)^2}$ ; $-1 \le \sin x \le 1 \Rightarrow 1 \le 2\sin x + 3 \le 5 \Rightarrow Df = \mathbb{R}$ ; $Df' = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{-16\cos x\,(2\sin x + 3)}{(2\sin x + 3)^4} = \boxed{\frac{-16\cos x}{(2\sin x + 3)^3}}$$

7) $f(x)=\sqrt{3x-6}$ ; $3x-6\geq 0 \Rightarrow x\geq 2 \Rightarrow Df=[2;+\infty[$

$Df'=]2;+\infty[$ ; $\boxed{f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x-6}}}$

8) $f(x)=\sqrt{2+\cos 2x}$ ; $-1\leq \cos 2x\leq 1 \Rightarrow 1\leq 2+\cos 2x\leq 3$

$\Rightarrow Df=\mathbb{R}$ ; $Df'=\mathbb{R}$

$f'(x)=\dfrac{-2\sin 2x}{2\sqrt{2+\cos 2x}}=\boxed{\dfrac{-\sin 2x}{\sqrt{2+\cos 2x}}}$

9) $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$ ; $x^2+1>0 \Rightarrow Df=\mathbb{R}$ ; $Df'=\mathbb{R}$

$f'(x)=\sqrt{x^2+1}+x\left(\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\boxed{\sqrt{x^2+1}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}$

10) $f(x)=x+\sin^3(\pi x)$ ; $Df=\mathbb{R}$ ; $Df'=\mathbb{R}$

$\boxed{f'(x)=1+3\pi\cos x\sin^2(\pi x)}$

11) $f(x)=\sqrt{x^2+4x}$ ; $x^2+4x\geq 0 \Rightarrow x(x+4)\geq 0$

$Df=]-\infty;-4]\cup[0;+\infty[$ ; $Df'=]-\infty;-4[\cup]0;+\infty[$

$f'(x)=\dfrac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x}}=\boxed{\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}}$

12) $f(x)=|x^2+4x-5|$ ; $Df=\mathbb{R}$ ; $Df'=\mathbb{R}$

$x^2+4x-5\geq 0 \Longrightarrow x\in]-\infty;-5]\cup[1;+\infty[$

- $x\in]-\infty;-5]\cup[1;+\infty[ : f(x)=x^2+4x-5$ ; $\boxed{f'(x)=2x+4}$
- $x\in]-5;1[ : f(x)=-x^2-4x+5$ ; $\boxed{f'(x)=-2x-4}$

**حل التمرين 20:**

$$f(x)=\frac{x^2+\alpha x+\beta}{x+2}\ ; Df=\mathbb{R}-\{2\}$$

**تعيين العددين الحقيقيين $\alpha$ و $\beta$ بحيث يقبل المنحنى الممثل للدالة $f$ عند النقطة $(1;-3)$ مماسا ميله $\frac{2}{3}$**

$$f'(x)=\frac{(2x+\alpha)(x+2)-(x^2+\alpha x+\beta)}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+2\alpha-\beta}{(x+2)^2}$$

$$\begin{cases} f(1) = -3 \\ f'(1) = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1+\alpha+\beta}{3} = -3 \\ \dfrac{5+2\alpha-\beta}{9} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+\alpha+\beta = -9 \\ 5+2\alpha-\beta = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = -10 \\ 2\alpha-\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha = -9 \\ \beta = 2\alpha - 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = -7 \end{cases}}$$

**حل التمرين 21:**

$$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c\ ; Df = \mathbb{R}\ ;\ f'(x) = 2ax + b}$$

**تعيين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ بحيث يشمل المنحنى الممثل للدالة $f$ النقطة $(0;3)$ و يقبل مماسا في $(\frac{5}{4}; -\frac{1}{8})$ موازيا لحامل محور الفواصل**

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f\left(\dfrac{5}{4}\right) = -\dfrac{1}{8} \\ f'\left(\dfrac{5}{4}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ \dfrac{25}{16}a + \dfrac{5}{4}b + c = -\dfrac{1}{8} \\ \dfrac{5}{2}a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ \dfrac{25}{16}a + \dfrac{5}{4}b = -\dfrac{25}{8} \\ \dfrac{5}{2}a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ 25a + 20b = -50 \\ b = -\dfrac{5}{2}a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ -25a = -50 \\ b = -\dfrac{5}{2}a \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \\ c = 3 \end{cases}}$$

**حل التمرين 22:**

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x - 3}\ ; Df = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}}$$

1. **بيان أنّ الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها**

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{(x_0+h)^2 + 2(x_0+h) - 3}{2(x_0+h) - 3} - \dfrac{{x_0}^2 + 2x_0 - 3}{2x_0 - 3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{({x_0}^2 + 2x_0h + h^2 + 2x_0 + 2h - 3)(2x_0 - 3) - (2x_0 + 2h - 3)({x_0}^2 + 2x_0 - 3)}{(2x_0 + 2h - 3)(2x_0 - 3)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2{x_0}^2 h - 6x_0 h}{h(2x_0+2h-3)(2x_0-3)} = \lim_{h\to 0} \frac{2x_0 h(x_0-3)}{h(2x_0+2h-3)(2x_0-3)}$$

$$= \boxed{\frac{2x_0(x_0-3)}{(2x_0-3)^2}}$$

منه نستنتج أنّ الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها.

2. **بيان أنّ المنحنى$(C_f)$ يقبل عند نقطتين A و B مماسين ميل كل منهما يساوي 4-**

$$f'(x) = -4 \Rightarrow \frac{2x^2-6x}{(2x-3)^2} = -4 \Rightarrow 2x^2-6x+4(2x-3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 18x^2-54x+36 = 0 \Rightarrow x^2-3x+2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=f(1)=0 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x=2 \\ y=f(2)=5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(1;0); B(2;5)}$$

**كتابة معادلتي المماسين :**

$$(\Delta): y = f'(1)(x-1)+f(1) = -4(x-1) = \boxed{-4x+4}$$

$$(\Delta'): y = f'(2)(x-2)+f(2) = -4(x-2)+5 = \boxed{-4x+13}$$

3. **تعيين نقطتين C و D من $(C_f)$ بحيث يقبل عندهما المنحنى$(C_f)$ مماسا يشمل النقطة $\left(-3;\frac{4}{25}\right)$**

$$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

$$\Rightarrow \frac{4}{25} = \frac{2{x_0}^2-6x_0}{(2x_0-3)^2}(-3-x_0) + \frac{{x_0}^2+2x_0-3}{2x_0-3}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{25} = \frac{(2{x_0}^2-6x_0)(-3-x_0)+(2x_0-3)({x_0}^2+2x_0-3)}{(2x_0-3)^2}$$

$$\Rightarrow 4(2x_0-3)^2 = 25({x_0}^2+6x_0+9) \Longrightarrow {x_0}^2+22x_0+21 = 0$$

$$\Delta' = 11^2-21 = 100 \Rightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=f(-1)=\frac{4}{5} \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x_0=-21 \\ y_0=f(-21)=-\frac{44}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{C\left(-1;\frac{4}{5}\right); D\left(-21;-\frac{44}{5}\right)}$$

**حل التمرين 23:**

$$f(x) = x^3 + mx + 1 \; ; Df = \mathbb{R} \; ; \; f'(x) = 3x^2 + m$$

1. **مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ وجود وعدد القيم الحدّية للدالة $f$**

- $m \geq 0 \implies f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة لا تقبل قيم حدية
- $m < 0 : f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + m = 0 \Rightarrow x^2 = -\frac{m}{3}$

$\Rightarrow x = \sqrt{-\frac{m}{3}}$ أو $x = -\sqrt{-\frac{m}{3}}$

بما أنّ $f'(x)$ تنعدم مرتين وتتغير إشارتها فإنّ الدالة $f$ تقبل قيمتين حدّيتين هما $f\left(\sqrt{-\frac{m}{3}}\right)$ و $f\left(-\sqrt{-\frac{m}{3}}\right)$

2. **تعيين قيمة $m$ بحيث يقبل منحنى الدالة $f$ مماسا معادلته $y = 3x + 1$ عند $x_0 = 0$**

$y = f'(0)x + f(0) = mx + 1 = 3x + 1 \Rightarrow \boxed{m = 3}$

## III- مبرهنة القيم المتوسطة والتناظر

**حل التمرين 24:**

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 1 \; ; Df = \mathbb{R}$$

1. **دراسة تغيرات الدالة $f$**

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 5 \; ; \; \Delta' = 3^2 - 3(5) = -6$

$f'(x) > 0 \Rightarrow f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \; ; \; \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

**استنتاج أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $\left]-\frac{1}{2}; 0\right[$**

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{8} \; ; \; f(0) = 1$

$f$ مستمرة و رتيبة على $I = \left]-\frac{1}{2}; 0\right[$ ، و $f\left(-\frac{1}{2}\right) \times f(0) < 0$ ، منه نستنتج أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $\left]-\frac{1}{2}; 0\right[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

2. بما أنّ الدالة $f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ، فالمعادلة $f(x) = 0$ لا تقبل حلولا أخرى في $\mathbb{R}$ لأنّ الحل $\alpha$ وحيد

3. **استنتاج إشارة $f(x)$ :**

$x \in ]-\infty; \alpha[ : f(x) < 0 \; ; \; x \in [\alpha; +\infty[ : f(x) \geq 0$

**حل التمرين 25:**

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x+2}\ ; Df = [-2;1[ \cup ]1;+\infty[$$

1. **حساب النهايات عند حدود مجال تعريف الدالة $f$**

$$\lim_{x \to -2^{>}} f(x) = \lim_{x \to -2^{>}} \frac{1}{x-1} - \sqrt{x+2} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{x \to 1^{<}} f(x) = \lim_{x \to 1^{<}} \frac{1}{x-1} - \sqrt{x+2} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \to 1^{>}} f(x) = \lim_{x \to 1^{>}} \frac{1}{x-1} - \sqrt{x+2} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-1} - \sqrt{x+2} = \boxed{-\infty}$$

2. **إنشاء جدول تغيرات الدالة $f$**

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x+2}} = -\left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x+2}}\right)$$

$f'(x) < 0 \Rightarrow Df$ متناقصة تماما على $f$

| $x$ | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $\|\|$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\frac{1}{3}$ | $\searrow$ | $\|\|$ | $\searrow$ | $-\infty$ |
| | | $-\infty$ | $\|\|$ | $+\infty$ | |

3. **بيان أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]1;2[$ :**

$$\lim_{x \to 1^{>}} f(x) = +\infty\ ;\ f(2) = -1$$

$f$ مستمرة و رتيبة على المجال $]1;2[$ ، $\lim_{x \to 1^{>}} f(x) = +\infty\ ;\ f(2) = -1$ ، منه

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]1;2[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

**استنتاج إشارة $f(x)$:**

$$x \in [-2;1[ \cup ]\alpha;+\infty[ : f(x) < 0\ ;\ x \in ]1;\alpha] : f(x) \geq 0$$

4. **حصر العدد $\alpha$ بتقريب $10^{-1}$ :**

$$f(1,5) = 0,13 \Rightarrow \alpha \in ]1,5;2[\ ;\ f(1,75) = -0,6 \Rightarrow \alpha \in ]1,5;1,75[$$

$$f(1,6) = -0,23 \Rightarrow \boxed{\alpha \in ]1,5;1,6[}$$

**حل التمرين 26:**

$$f(x)=\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\ ;\ Df=\mathbb{R}-\{1\}$$

**1. تعيين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ حيث :** $f(x)=x+a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}$

$$\begin{array}{r|l} x^3-4x^2+8x-4 & x^2-2x+1 \\ \hline -x^3+2x^2-x & x-2 \\ -2x^2+7x-4 & \\ 2x^2-4x+2 & \\ \hline 3x-2 & x-1 \\ \hline -3x+3 & 3 \\ \hline 1 & \end{array} \quad \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a=-2 \\ b=3 \\ c=1 \end{cases}}$$

**2. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty} x=\boxed{-\infty}\ ;\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=\lim_{\substack{x\to1\\<}}\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}=\boxed{+\infty}\ ;\ \lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x)$$
$$=\lim_{\substack{x\to1\\>}}\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}=\boxed{+\infty}$$

$$f'(x)=\frac{(3x^2-8x+8)(x-1)^2-2(x-1)(x^3-4x^2+8x-4)}{(x-1)^4}$$
$$=\frac{(3x^2-8x+8)(x-1)-2(x^3-4x^2+8x-4)}{(x-1)^4}=\boxed{\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-3$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-4$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $\frac{11}{4}$ | ↗ | $+\infty$ |

بيان أنّ المنحنى ($\mathscr{C}$) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يُطلب تعيين معادلته :

$$f(x) = x - 2 + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) - (x-2) = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} = 0$$

منه المستقيم ($\Delta$) ذو المعادلة $y = x - 2$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى ($\mathscr{C}$)

**3. دراسة وضعية ($\mathscr{C}$) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل :**

$$f(x) - (x-2) = \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{3x-2}{(x-1)^2} \; ; 3x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{2}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x-2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)-(x-2)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| الوضعية | ($\mathscr{C}$) تحت ($\Delta$) | | ($\mathscr{C}$) فوق ($\Delta$) | | ($\mathscr{C}$) فوق ($\Delta$) | | |

**4. بيان أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[$ :**

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{2}$ ، $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{11}{4}$ . $f$ مستمرة و رتيبة على $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[$ ، و $f\left(\frac{1}{2}\right) \times f\left(\frac{3}{4}\right) < 0$ ،

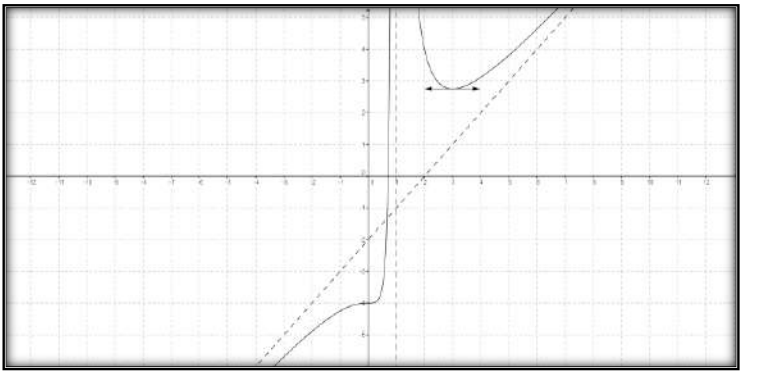
منه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

**5. إيجاد حصر للعدد $\alpha$ سعته 0,05 :**

$$f(0,5) = -3,5 \; ; f(0,6) = -2,65 \; ; f(0,7) = -0,19 \; ; \; f(0,75) = 2,75$$

$$\Rightarrow \boxed{0,70 < \alpha < 0,75}$$

**رسم المنحنى ($\mathscr{C}$) :**



**حل التمرين 27:**

$$\boldsymbol{g(x) = x^2 - x + 2\ ;\ Dg = \mathbb{R}}\ ،\ \boldsymbol{f(x) = \frac{1}{x}\ ;\ Df = \mathbb{R}^*}$$

**1. بيان أنّ المعادلة $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$ تكافئ المعادلة $\boldsymbol{x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0}$**

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - x + 2 = \frac{1}{x} \Rightarrow x(x^2 - x + 2) = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0}$$

**2. $\boldsymbol{h(x) = x^3 - x^2 + 2x - 1\ ;\ Dh = \mathbb{R}}$**

**أ. دراسة اتجاه تغيّر الدالة $h$ على $\mathbb{R}$ :**

$h'(x) = 3x^2 - 2x + 2\ ;\ \Delta = -20\ ;\ h'(x) > 0 \Rightarrow$ $h$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

حساب $h(0)$ و $h(1)$ :

$$h(0) = -1\ ;\ h(1) = 1$$

**ب. بيان أنّ المعادلة $\boldsymbol{h(x) = 0}$ تقبل حلا وحيدا $\boldsymbol{\alpha}$ على $\mathbb{R}$**

$h$ مستمرة و رتيبة على $\mathbb{R}$ ، و $h(0) \times h(1) < 0$ ، منه المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على $\mathbb{R}$.

يمثل العدد $\alpha$ فاصلة نقطة تقاطع المنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$

**ج. حصر العدد $\boldsymbol{\alpha}$ بتقريب $\boldsymbol{10^{-1}}$**

$$h(0{,}5) = -0{,}125\ ;\ h(0{,}75) = 0{,}359\ ;\ h(0{,}6) = 0{,}056 \Rightarrow \boxed{0{,}5 < \alpha < 0{,}6}$$

**حل التمرين 28:**

$$\boldsymbol{g(x) = -x^3}\ ،\ \boldsymbol{f(x) = \sqrt{x+1}}$$

**بيان أنّ $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها $\boldsymbol{x_0}$ حيث $\boldsymbol{-\frac{7}{8} < x_0 < -\frac{3}{4}}$**

$$f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} + x^3 = 0$$

$$h(x) = \sqrt{x+1} + x^3\ ;\ h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + 3x^2 > 0$$

$$\Rightarrow h \text{ متزايدة تماما على } ]-1; +\infty[$$

$$h\left(-\frac{7}{8}\right) \approx -0{,}3\ ;\ h\left(-\frac{3}{4}\right) \approx 0{,}08$$

$h$ مستمرة و رتيبة على المجال $\left]-\frac{7}{8}; -\frac{3}{4}\right[$ ، و $h\left(-\frac{7}{8}\right) \times h\left(-\frac{3}{4}\right) < 0$ ، منه المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $\left]-\frac{7}{8}; -\frac{3}{4}\right[$ ، منه المنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها $x_0$ حيث $-\frac{7}{8} < x_0 < -\frac{3}{4}$.

**حل التمرين 29:**

$$f(x) = 3x - \sin x - 1 \; ; Df = \mathbb{R}$$

1. **بيان أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا: $3x - 2 \leq f(x) \leq 3x$**

$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\sin x \leq 1$

$\Rightarrow 3x - 2 \leq 3x - 1 - \sin x \leq 3x \Rightarrow \boxed{3x - 2 \leq f(x) \leq 3x}$

2. **استنتاج نهاية $f(x)$ عند كل من $-\infty$ و $+\infty$**

$$\begin{cases} f(x) \leq 3x \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 3x = -\infty \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty} \; ; \begin{cases} f(x) \geq 3x - 2 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 3x - 2 = +\infty \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

3. **حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f\left(\frac{1}{x}\right)$**

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f\left(\frac{1}{x}\right) = \boxed{+\infty}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+ \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right) = \boxed{-1}$$

4. **بيان أنّ المعادلة $3x = \sin x + 1$ تقبل على الأقل حلا $\alpha$ حيث $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$**

$3x = \sin x + 1 \Rightarrow 3x - \sin x - 1 = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \; ; f(0) = -1$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - 2 \approx 2{,}7$

الدالة $f$ مستمرة على $\mathbb{R}$ (مجموع دالة مثلثية وكثير حدود) ، و $f(0) \times f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ ، منه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا $\alpha$ حيث $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

**بيان أنّ الحل $\alpha$ وحيد :**

$f'(x) = 3 - \cos x \; ; \; -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\cos x \leq 1$

$\Rightarrow 2 \leq 3 - \cos x \leq 4 \Rightarrow f'(x) > 0$

بما أنّ الدالة $f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ، فإنّ الحل $\alpha$ وحيد.

5. **بيان أنّ: $\cos \alpha = \sqrt{6\alpha - 9\alpha^2}$**

$f(\alpha) = 0 \Rightarrow 3\alpha - \sin \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \sin \alpha = 3\alpha - 1$

$\Rightarrow \sin^2 \alpha = (3\alpha - 1)^2 \Rightarrow 1 - \cos^2 \alpha = 9\alpha^2 - 6\alpha + 1$

$\Rightarrow \cos^2 \alpha = -9\alpha^2 + 6\alpha \Rightarrow \boxed{\cos \alpha = \sqrt{6\alpha - 9\alpha^2}} \; [\cos(\alpha) > 0 \text{ لأنّ}]$

**حل التمرين 30:**

**بيان أنّ المستقيم ذا المعادلة $x = \alpha$ محور تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في كل حالة من الحالات التالية:**

$1)\ f(x) = \dfrac{2x^2 - 8x + 7}{x^2 - 4x + 3}\ ;\ Df = \mathbb{R} - \{1;3\}$

$x = 2\ (Cf)$ محور تناظر لـ $\Rightarrow \begin{cases} (4-x) \in Df \\ f(4-x) = f(x) \end{cases}$

$x \in Df \Rightarrow x \notin \{1;3\} \Rightarrow -x \notin \{-1;-3\} \Rightarrow 4 - x \notin \{3;1\} \Rightarrow 4 - x \in Df$

$$f(4-x) = \frac{2(4-x)^2 - 8(4-x) + 7}{(4-x)^2 - 4(4-x) + 3}$$

$$= \frac{2x^2 - 16x + 32 - 32 + 8x + 7}{x^2 - 8x + 16 - 16 + 4x + 3} = \frac{2x^2 - 8x + 7}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(4-x) = f(x)}$$

$2)\ f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}\ ;\ Df = \mathbb{R}$

$x = 1\ (Cf)$ محور تناظر لـ $\Longrightarrow \begin{cases} (2-x) \in Df \\ f(2-x) = f(x) \end{cases}$

$x \in \mathbb{R} \Longrightarrow 2 - x \in \mathbb{R}$

$$f(2-x) = \sqrt{(2-x)^2 - 2(2-x) + 5} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 - 4 + 2x + 5}$$

$$= \sqrt{x^2 - 2x + 5} \Rightarrow \boxed{f(2-x) = f(x)}$$

$3)\ f(x) = 2x^2 - 12x + 2|x-3| - 7\ ;\ Df = \mathbb{R}$

$x = 3\ (Cf)$ محور تناظر لـ $\Longrightarrow \begin{cases} (6-x) \in Df \\ f(6-x) = f(x) \end{cases}$

$x \in \mathbb{R} \Longrightarrow 6 - x \in \mathbb{R}$

$$f(6-x) = 2(6-x)^2 - 12(6-x) + 2|6-x-3| - 7$$

$$= 2x^2 - 24x + 72 - 72 + 12x + 2|3-x| - 7$$

$$= 2x^2 - 12x + 2|x-3| - 7 \Rightarrow \boxed{f(6-x) = f(x)}$$

**حل التمرين 31:**

**بيان أنّ النقطة $\omega$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في كل حالة من الحالات التالية:**

$1)\ f(x) = x^3 - 3x - 2\ ;\ Df = \mathbb{R}$

$w(0;-2)\ (Cf)$ مركز تناظر لـ $\Rightarrow \begin{cases} -x \in Df \\ f(-x) + f(x) = -4 \end{cases}$

$x \in \mathbb{R} \Longrightarrow -x \in \mathbb{R}$

$f(-x)+f(x)=-x^3+3x-2+x^3-3x-2=-4$

2) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+2}{x-1}$ ; $Df=\mathbb{R}-\{1\}$

$w(1;6)$ مركز تناظر لـ $(Cf)$ $\Longrightarrow \begin{cases} (2-x)\in Df \\ f(2-x)+f(x)=12 \end{cases}$

$x \in Df \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow -x \neq -1 \Rightarrow 2-x \neq 1 \Rightarrow 2-x \in Df$

$$f(2-x)+f(x)=\frac{(2-x)^2+4(2-x)+2}{2-x-1}+\frac{x^2+4x+2}{x-1}$$
$$=\frac{x^2-4x+4+8-4x+2}{1-x}+\frac{x^2+4x+2}{x-1}$$
$$=\frac{-x^2+8x-14+x^2+4x+2}{x-1}=\frac{12x-12}{x-1}$$
$$=\frac{12(x-1)}{x-1}=12$$

3) $f(x)=[x+\pi+\tan 3x]\cos x$ ; $Df=\mathbb{R}$

$w(-\pi;0)$ مركز تناظر لـ $(Cf)$ $\Longrightarrow \begin{cases} -2\pi-x\in Df \\ f(-2\pi-x)+f(x)=0 \end{cases}$

$x \in \mathbb{R} \Longrightarrow -2\pi-x \in \mathbb{R}$

$f(-2\pi-x)+f(x)=$

$[-2\pi-x+\pi+\tan 3(-2\pi-x)]\cos(-2\pi-x)+[x+\pi+\tan 3x]\cos x$

$=[-\pi-x+\tan(-6\pi-3x)]\cos(-2\pi-x)+[x+\pi+\tan 3x]\cos x$

$=[-\pi-x+\tan(-3x)]\cos(-x)+[x+\pi+\tan 3x]\cos x$

$=[-\pi-x-\tan(3x)]\cos(x)+[x+\pi+\tan 3x]\cos x=0$

## IV- استعمال جدول التغيرات و القراءة البيانية في دراسة الدوال

**حل التمرين 32:**

**1. تخمين النهايات عند حدود مجال تعريف كل دالة**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x)=+\infty$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)=-\infty$ ;

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\ <}} f(x)=+\infty$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to3\\ >}} f(x)=-\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ;

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=1$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$

**2. تعيين بيانيا: $g'(4)\ ,g(4)\ ,f'(2)\ ,f(2)$**

$f(2)=0\ ;f'(2)=\frac{2}{3}\ ;g(4)=-1\ ;g'(4)=0$

**3. جدول تغيرات الدالة $f$ :**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $+\infty$ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ $-\infty$ | ↗ | $0$ |

**جدول تغيرات الدالة $g$ :**

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{3}{2}$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $1$ | ↗ | $9$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $1$ |

**دراسة إشارة $f(x)$ :**

$x\in\ ]-\infty;-1[\cup\ ]2;3[:f(x)>0$

$x\in\ ]-1;2[\cup\ ]3;+\infty[:f(x)<0\ ;f(2)=0$

**4. كتابة معادلة المماس $(\Delta)$ للمنحنى ( $\mathscr{C}_f$ ) عند النقطة $A$ :**

$$y=f'(2)(x-2)+f(2)=\frac{2}{3}(x-2)=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}\Rightarrow 3y=2x-4$$

$$\Rightarrow \boxed{(\Delta):2x-3y-4=0}$$

**5. دراسة وضعية ( $\mathscr{C}_f$ ) بالنسبة للمماس $(\Delta)$**

- $x\in\ ]-\infty;-1[\cup\ ]0;3[:$ ( $\mathscr{C}_f$ ) فوق $(\Delta)$
- $x\in\ ]-1;0[\cup\ ]3;+\infty[:$ ( $\mathscr{C}_f$ ) تحت $(\Delta)$

**6. مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة: $g(x)=m$**

| $m$ | عدد حلول المعادلة $g(x)=m$ |
|---|---|
| $]-\infty;-1[$ | المعادلة لا تقبل حلولا |
| $-1$ | المعادلة تقبل حلا مضاعفا |
| $]-1;1[$ | المعادلة تقبل حلين |
| $1$ | المعادلة تقبل حلا وحيدا |
| $]1;9[$ | المعادلة تقبل حلين |

| | |
|---|---|
| المعادلة تقبل حلا مضاعفا | 9 |
| المعادلة لا تقبل حلولا | $]9;+\infty[$ |

**حل التمرين 33:**

**1. حساب $f'(3)$ و $f'(-1)$ و $f'(2)$**

$$f'(3)=\frac{0-0,74}{5-3}=-0,37\ ;\ f'(-1)=\frac{3-1}{0-(-2)}=1\ ;\ f'(2)=0$$

**2. جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↗ | $+\infty$ $\|\|$ $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

**تعيين إشارة $f(x)$**

- $x\in\ ]-\infty;0[\ \cup\ [1;+\infty[ : f(x)\geq 0$
- $x\in\ ]0;1[ : f(x)<0$

3. $h(x)=\frac{-1}{f(x)}+2$

**أ- تعيين مجموعة تعريف الدالة $h$**

$$Dh=\{x;x\in Df \text{ و } f(x)\neq 0\}$$

$$\begin{cases} x\in Df \\ f(x)\neq 0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 1 \end{cases}\Rightarrow \boxed{Dh=\ ]-\infty;0[\ \cup\ ]0;1[\ \cup\ ]1;+\infty[}$$

**ب- حساب نهايات الدالة $h$ على أطراف مجموعة تعريفها**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1\Rightarrow\lim_{x\to-\infty} h(x)=1$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=+\infty\Rightarrow\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} h(x)=2\ ;\ \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty\Rightarrow\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} h(x)=2$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=0^-\Rightarrow\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} h(x)=+\infty\ ;\ \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=0^+\Rightarrow\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} h(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0^+\Rightarrow\lim_{x\to+\infty} h(x)=-\infty$$

**ج- حساب $h'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$**

$$h'(x)=\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

**جدول تغيرات الدالة $h$**

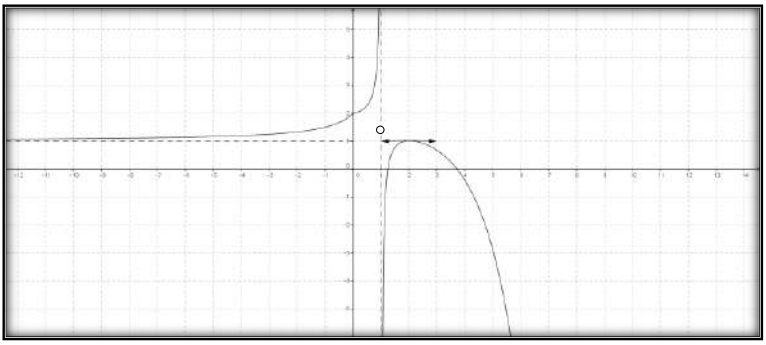
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | |
| $h(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-\infty$ |
| | | | $2$ | | $-\infty$ | | | | |

د- بيان أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]1\ ;\ 2[$ :

الدالة $h$ مستمرة و رتيبة على المجال $]1;2[$ ، $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = -\infty$ و $h(2) = 1$

منه المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]1;2[$

**ه- رسم المنحنى ($C_h$) :**



4. $k(x) = \sqrt{f(x)}$

**أ- حساب نهايات الدالة $k$ على أطراف مجموعة تعريفها**

$Dk = \{x; x \in Df \text{ و } f(x) \geq 0\}$

$$\begin{cases} x \in Df \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \in ]-\infty;0[ \cup [1;+\infty[ \end{cases} \Rightarrow \boxed{Dk = ]-\infty;0[ \cup [1;+\infty[}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^-} h(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^+} h(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

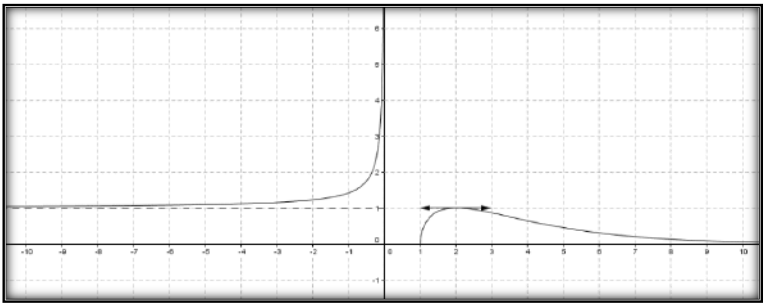
**أ- حساب $k'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$**

$$k'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

**جدول تغيرات الدالة $k$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k'(x)$ | $+$ | | ‖ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $k(x)$ | $1$ | ↗ | $+\infty$ ‖ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ | |

**رسم المنحنى $(C_k)$**



**حل التمرين 34:**

7. **تعيين :** $f(2)\ ;\ f'(3)\ ;\ f'(2)\ ;\ (f\circ f)'(2)\ ;\ f''(2)$

$f(2)=0\ ;f'(2)=-2\ ;f'(3)=0\ ;f"(2)=0$ (نقطة انعطاف)

$(f\circ f)'(2)=(f'\circ f)(2)\times f'(2)=f'(0)\times f'(2)=0(-2)=0$

8. **حل بيانيا المتراجحتين:**

أ) $f(x)<0 : S=[-3;-2[\cup]2;4[$

ب) $f'(x)\geq 0 : S=[-3;0]\cup[3;5]$

9. **كتابة معادلة المماس $(T)$ للمنحنى عند النقطة ذات الفاصلة 2**

$y=f'(2)(x-2)+f(2)\Rightarrow \boxed{(T): y=-2x+4}$

10. **جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-3$ | | $0$ | | $3$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-1,8$ | ↗ | $1,5$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $3$ |

11. **بيان أنّ المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[3;5]$**

الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على المجال $[3;5]$ و $f(3) < 2 < f(5)$ ، منه المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[3;5]$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

12. **جدول تغيرات الدالة $g$ :**

$$g(x) = 2\sqrt{f(x)} \Rightarrow Dg = [-2;2] \cup [4;5] \; ; \; g'(x) = \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$$

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $4$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | ‖ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $0$ | ↗ | $2,45$ | ↘ | ‖ | ‖ | $0$ | ↗ | $3,46$ |

**حل التمرين 35:**

**1. تعيين معامل توجيه المماس $(T)$**

$g'(0) = -3$

2. $g(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ ، $g'(x) = a - \frac{c}{(x+1)^2}$

**أ. تعيين الأعداد الحقيقية $a$، $b$، $c$ مستعينا بمعطيات المنحنى**

$$\begin{cases} g(0) = 3 \\ g'(1) = 0 \\ g'(0) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = 3 \\ a - \frac{c}{4} = 0 \\ a - c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -c + 3 \\ \frac{3c}{4} = 3 \\ a = c - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = 4 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{g(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}}$$

**ب. تعيين معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathscr{C}_g)$**

$\lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = +\infty \Rightarrow$ مستقيم مقارب عمودي $x = -1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) - (x-1)] = 0 \Rightarrow$ مستقيم مقارب مائل $y = x - 1$

**ج. كتابة معادلة المماس $(T)$**

$(T): y = f'(0)(x) + f(0) \Rightarrow \boxed{y = -3x + 3}$

**3. المناقشة البيانية حسب قيم $m$ لعدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = -2m$**

- $-2m < 2 \Rightarrow m > -1$ : المعادلة لا تقبل حلولا

- المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا : $-2m = 2 \Rightarrow m = -1$
- المعادلة تقبل حلين موجبين : $2 < -2m < 3 \Rightarrow -\frac{3}{2} < m < -1$
- المعادلة تقبل حلا موجبا وحلا معدوما : $-2m = 3 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$
- المعادلة تقبل حلا موجبا وحلا سالبا : $-2m > 3 \Rightarrow m < -\frac{3}{2}$

**حل التمرين 36:**

**1. تعيين نهايات الدالة $f$ عند حدود $D_f$ والمستقيمات المقاربة للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +1$;

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ ; $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$

المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيمين مقاربين أفقيين ($y = -1$ و $y = 1$) ومستقيم مقارب عمودي ($x = -1$)

**2. كتابة معادلة المماس للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) عند النقطة التي فاصلتها 2-**

$$y = f'(-2)(x+2) + f(-2) = -2(x+2) - 3 \Rightarrow \boxed{y = -2x - 7}$$

3. المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 نصفي مماسين ، منه الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق عند 1.

**4. تعيين إشارة $f'(x)$ حسب قيم $x$ من $D_f$**

$x \in ]-\infty;-1[ \cup ]-1;1[ : f'(x) < 0$ ; $x \in ]1;+\infty[ : f'(x) \geq 0$

**5. المجالات من $D_f$ التي تكون عليها $f$ مستمرة :**

الدالة $f$ مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;-1[$ و $]1;+\infty[$

**6. مناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة: $f(x) = m$**

- المعادلة تقبل حلا وحيدا : $m < -1$
- المعادلة لا تقبل حلولا : $-1 \leq m < 0$
- المعادلة تقبل حلا وحيدا : $m = 0$
- المعادلة تقبل حلين : $0 < m < 1$
- المعادلة تقبل حلا وحيدا : $1 \leq m < +\infty$

**7. أ. تعيين إشارة $f(x)$ حسب قيم $x$ من $D_f$**

$x \in ]-\infty;-1[ : f(x) < 0$ ; $x \in ]-1;+\infty[ : f(x) \geq 0$

**ب. شرح كيفية رسم ($\mathscr{C}_h$)**

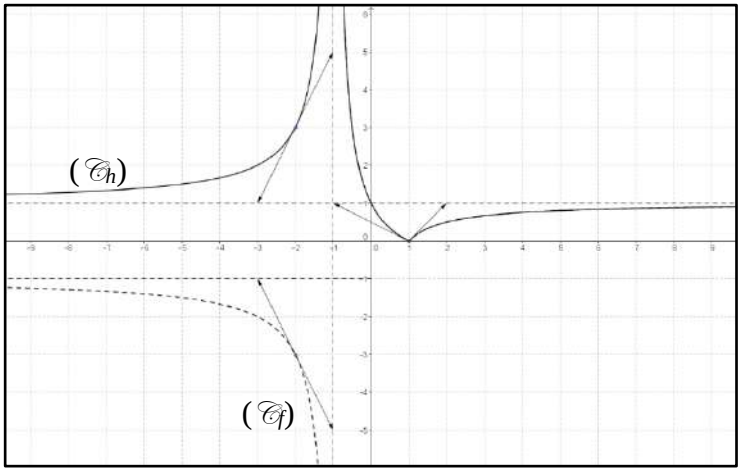
$x \in ]-\infty;-1[ : f(x) < 0 \Rightarrow h(x) = -f(x)$

منه ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_h$) متناظران بالنسبة إلى حامل محور الفواصل

$x \in ]-1;+\infty[ : f(x) \geq 0 \Rightarrow h(x) = f(x)$

منه ( $\mathscr{C}_f$ ) و ( $\mathscr{C}_h$ ) متطابقان

**رسم ( $\mathscr{C}_h$ ) :**




**حل التمرين 37:**

1. المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب لـ ( $\mathscr{C}_g$ ) : **صحيح** لأنّ : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$
2. محور التراتيب مقارب لـ ( $\mathscr{C}_g$ ) : **صحيح** لأنّ : $\lim\limits_{|x| \to 0} g(x) = -\infty$
3. للمعادلة $g(x) = 0$ ثلاثة حلول : **صحيح** لأنّ :

$g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]-1;0[$ ، $g(-1) = 2$ و $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = -\infty$

منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]-1;0[$

$g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]0;1[$ ، $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$ و $g(1) = 3$

منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\beta$ على المجال $]0;1[$

$g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]1;+\infty[$ ، $g(1) = 3$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\gamma$ على المجال $]1;+\infty[$

4. ( $\mathscr{C}_g$ ) يقبل مماسا معادلته $y = 1$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 : **خطأ** لأنّ :

$y = g'(1)(x-1) + g(1) \; ; \; g'(1) = 0 \; ; \; g(1) = 3$

منه معادلة المماس لـ ( $\mathscr{C}_g$ ) عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي : $y = 3$

5. أ) $g(5) > g(2)$ : **خطأ** لأنّ الدالة $g$ متناقصة على المجال $]2;5[$ منه :

$2 < 5 \Rightarrow g(2) > g(5)$

ب) $g\left(-\frac{1}{4}\right) < g(-\frac{3}{4})$ : **صحيح** لأنّ الدالة $g$ متناقصة على المجال $\left]-\frac{1}{4};-\frac{3}{4}\right[$ منه:

$$-\frac{3}{4} < -\frac{1}{4} \Rightarrow g\left(-\frac{3}{4}\right) > g(-\frac{1}{4})$$

ج) $g\left(\frac{1}{4}\right) < g\left(\frac{3}{4}\right)$ : **صحيح** لأنّ الدالة $g$ متزايدة على المجال $\left]\frac{1}{4};\frac{3}{4}\right[$ منه :

$$\frac{1}{4} < \frac{3}{4} \Rightarrow g\left(\frac{1}{4}\right) < g\left(\frac{3}{4}\right)$$

**حل التمرين 38:**

1. **حساب** $f(-1)\,,f'(-1)\,,f(0)\,,f'(0)$

$f(-1) = 2{,}75\,;f'(-1) = 0\,;f(0) = 2\,;f'(0) = -1$

2. **تعيين حلول المتراجحة** $f(x) \leq 0$

$f(x) \leq 0 \Rightarrow x \leq -2 \Rightarrow S = ]-\infty;-2]$

3. **جدول تغيرات الدالة** $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $2{,}75$ | ↘ | $0$ |

4. **كتابة معادلة المماس (T)**

$y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow \boxed{y = -x + 2}$

5. **تعيين وضعية** $(\mathscr{C}_f)$ **بالنسبة لمماسه :**

$(\mathscr{C}_f)$ فوق (T) : $x > 0$ ; $(\mathscr{C}_f)$ تحت (T) : $x < 0$

الاستنتاج : بما أن وضعية المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى المماس (T) تتغير عند النقطة ذات الفاصلة 0 ، فإنّ النقطة $A$ هي نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$.

**حل التمرين 39:**

1. **تعيين إشارة** $f(x)$ **:**

- $x \in ]-\infty;-1[ \cup ]0;3[ : f(x) < 0$
- $x \in ]-1;0[ \cup ]3;+\infty[ : f(x) > 0$
- $f(0) = f(3) = 0$

2. $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+d}$

**أ. حساب $f'(x)$ بدلالة $a, b, c, d$**

$$f'(x) = a - \frac{c}{(x+d)^2}$$

**ب. إثبات أن: $a = 1$ ، $b = -4$ ، $c = 4$ ، $d = 1$**

$$Df = \mathbb{R} - \{-1\} \Rightarrow -1 + d = 0 \Rightarrow \boxed{d = 1}$$

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(0) = 0 \\ f(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - \frac{c}{4} = 0 \\ b + c = 0 \\ a + b + \frac{c}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{c}{4} \\ b = -c \\ -\frac{c}{4} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = x - 4 + \frac{4}{x+1}}$$

**ج. حساب النهايات و $f(-3)$ :**

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{x - 4}_{\to -\infty} + \underbrace{\frac{4}{x+1}}_{\to 0} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \underbrace{x - 4}_{\to -5} + \underbrace{\frac{4}{x+1}}_{\to -\infty} = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \underbrace{x - 4}_{\to -5} + \underbrace{\frac{4}{x+1}}_{\to +\infty} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{x - 4}_{\to +\infty} + \underbrace{\frac{4}{x+1}}_{\to 0} = +\infty$
- $f(-3) = -9$

**د. بيان أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيما مقاربا مائلا ($\Delta$) :**

$$\lim_{|x| \to +\infty} [f(x) - (x - 4)] = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{4}{x+1} = 0 \Rightarrow \boxed{(\Delta): y = x - 4}$$

**ه. إيجاد المماسات للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) التي معامل توجيهها يساوي 3-**

$$f'(x) = -3 \Rightarrow 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = -3 \Rightarrow -\frac{4}{(x+1)^2} = -4$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 1 \Rightarrow x + 1 = 1 \text{ أو } x + 1 = -1 \Rightarrow x = 0 \text{ أو } x = -2$$

$$(T_0): y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow \boxed{y = -3x}$$

$$(T_{-2}): y = f'(-2)(x + 2) + f(-2) \Rightarrow \boxed{y = -3x - 16}$$

**حل التمرين 40:**

1. **تعيين مجموعة تعريف الدالة $u$ :** $Du = ]-\infty;-1[ \cup ]-1;+\infty[$
2. **تعيين معادلات المستقيمات المقاربة لـ $(\mathcal{C}_u)$**

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} u(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ مستقيم مقارب أفقي

$\lim\limits_{x\to-1} u(x) = +\infty \Rightarrow x = -1$ مستقيم مقارب عمودي

3. **تعيين إشارة $u(x)$**

$x \in ]-\infty;-1[ \cup ]-1;0[ : u(x) > 0 \; ; x \in [0;+\infty[ : u(x) \leq 0$

4. **بيان أنّ المعادلة $u(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[2;+\infty[$**

الدالة $u$ مستمرة ورتيبة على المجال $[2;+\infty[$ ، $u(2) = -2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$

منه المعادلة $u(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[2;+\infty[$

5. $v(x) = u^2(x)$

أ. **تعيين مجموعة تعريف الدالة $v$**

$Dv = Du = ]-\infty;-1[ \cup ]-1;+\infty[$

ب. **كتابة $v'(x)$ بدلالة $u(x)$ و $u'(x)$ :**

$v'(x) = 2u(x).u'(x)$

**دراسة تغيرات الدالة $v$**

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} u(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{|x|\to+\infty} v(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to-1} u(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-1} v(x) = +\infty$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u'(x)$ | $+$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $u(x)$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | |
| $v'(x)$ | $+$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | | |

$x \in ]-1;0[ \cup ]2;+\infty[ : v'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $v$ متناقصة

$x \in ]-\infty;-1[ \cup [0;2] : v'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $v$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $v$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $v'(x)$ | $+$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | | |
| $v(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $4$ | $\searrow$ $0$ |

**حل التمرين 41 :**

1. المستقيم $y = 2$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ : **صحيح** لأنّ $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) = 2$

2. المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا : **خطأ** لأنّ $f(x) > 2$

3. مجموعة حلول المتراجحة $f(x) > 0$ هي $S = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$ : **صحيح** لأنّ من أجل كل $x \neq -1$ : $f(x) > 2$

4. في المجال $]-\infty; -1[$ يكون $f(-2) > f(x)$ عندما يكون $x < -2$ : **صحيح** لأنّ الدالة $f$ متزايدة على المجال $]-\infty; -1[$ منه : $x < -2 \Rightarrow f(x) < f(-2)$

5. النقطة $A(-3; 1)$ تنتمي إلى المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ : **خطأ** لأنّ $f(x) > 2$

6. الدالة $f$ زوجية : **خطأ** لأنّ $Df$ غير متناظر بالنسبة إلى الصفر.

## V- دراسة الدوال العددية

**حل التمرين 42 :**

$$\boldsymbol{g(x) = x + 2 - \frac{5}{2}\sqrt{x+1}\,;\, Dg = [-1; +\infty[}$$

**1. حساب** $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} \frac{g(x)-1}{x+1}$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ >}} \frac{g(x)-1}{x+1} = \lim_{\substack{x\to-1\\ >}} \frac{x+1-\frac{5}{2}\sqrt{x+1}}{x+1}$$

$$= \lim_{\substack{x\to-1\\ >}} \frac{(x+1)\left(1-\frac{5}{2\sqrt{x+1}}\right)}{x+1} = \lim_{\substack{x\to-1\\ >}} 1 - \frac{5}{2\sqrt{x+1}} = \boxed{-\infty}$$

**تفسير النتيجة بيانيا :** الدالة $g$ غير قابلة للاشتقاق عند النقطة ذات الفاصلة (-1) ويقبل المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ نصف مماس عمودي.

**2. حساب نهاية** $g$ **عند** $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x + 2 - \frac{5}{2}\sqrt{x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x + 2 - \frac{5}{2}\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} x + 2 - \frac{5}{2}x\sqrt{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{5}{2}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = \boxed{+\infty}$$

**3. تعيين حلول المتراجحة : $4\sqrt{x+1}-5\geq 0$**

$$4\sqrt{x+1}-5\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1}\geq \frac{5}{4} \Rightarrow x+1\geq \frac{25}{16} \Rightarrow x\geq \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \boxed{S=\left[\frac{9}{16};+\infty\right[}$$

**4. دراسة اتجاه تغيّر الدالة $g$**

$$g'(x)=1-\frac{5}{4\sqrt{x+1}}=\boxed{\frac{4\sqrt{x+1}-5}{4\sqrt{x+1}}}$$

بما أنّ المقام موجب دوما ، فإنّ إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة البسط ، و حسب السؤال السابق نستنتج أنّ:

$x\in\left[-1;\frac{9}{16}\right[ : g'(x)<0 \Rightarrow$ متناقصة $g(x)$

$x\in\left[\frac{9}{16};+\infty\right[ : g'(x)\geq 0 \Rightarrow$ متزايدة $g(x)$

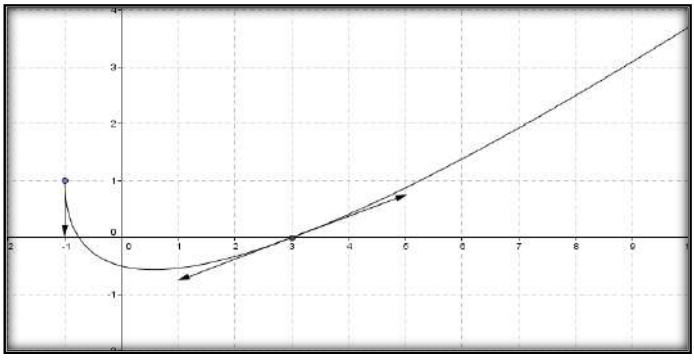
**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-1$ | | $\frac{9}{16}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $1$ | ↘ | $\frac{9}{16}$ | ↗ | $+\infty$ |

**5. كتابة معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 3**

$$(\Delta):\ y=g'(3)(x-3)+g(3)=\frac{3}{8}(x-3) \Rightarrow \boxed{y=\frac{3}{8}x-\frac{9}{8}}$$

**6. إنشاء المنحنى ($C_f$) و المماس (Δ)**



**7.** $\boldsymbol{h(x) = 5 - |x-3| - \frac{5}{2}\sqrt{4-|x-3|}}$

**أ- بيان أنّ** $\boldsymbol{D_h = [-1;7]}$

$Dh = \{x\ ;\ 4 - |x-3| \geq 0\}$

$4 - |x-3| \geq 0 \Rightarrow\ |x-3| \leq 4 \Rightarrow\ -4 \leq x-3 \leq 4$

$\Rightarrow\ -1 \leq x \leq 7 \Rightarrow \boxed{Dh = [-1;7]}$

**ب- بيان أنّ المستقيم :** $\boldsymbol{x = 3}$ **محور تناظر للمنحنى** $\boldsymbol{(C_h)}$

$x = 3$ محور تناظر للمنحنى $(C_h)$ يعني: $\begin{cases} x \in Dh \Rightarrow (6-x) \in Dh \\ h(6-x) = h(x) \end{cases}$

$x \in Dh \Rightarrow\ -1 \leq x \leq 7\ \Rightarrow\ -7 \leq -x \leq 1\ \Rightarrow\ -1 \leq 6-x \leq 7 \Rightarrow 6-x \in Dh$

$$h(6-x) = 5 - |6-x-3| - \frac{5}{2}\sqrt{4-|6-x-3|}$$

$$h(6-x) = 5 - |3-x| - \frac{5}{2}\sqrt{4-|3-x|}$$

$$h(6-x) = 5 - |x-3| - \frac{5}{2}\sqrt{4-|x-3|} = h(x)$$

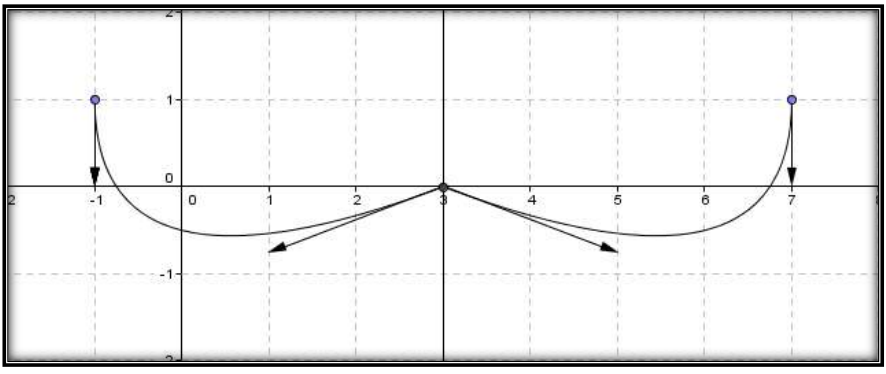
**ج- بيان أنّ من أجل كل عدد حقيقي** $\boldsymbol{x}$ **حيث** $\boldsymbol{x \in [-1;3]}$ **:** $\boldsymbol{h(x) = g(x)}$

$x \in [-1;3] \Rightarrow x-3 < 0 \Rightarrow\ |x-3| = -x+3$

$$\Rightarrow h(x) = 5 - (-x+3) - \frac{5}{2}\sqrt{4-(-x+3)}$$

$$\Rightarrow h(x) = x + 2 - \frac{5}{2}\sqrt{x+1} \Rightarrow \boxed{h(x) = g(x)}$$

**د- استنتاج رسم المنحنى** $\boldsymbol{(C_h)}$



**حل التمرين 43 :**

**I-** $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5 \; ; Dg = \mathbb{R}$

**1- حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 - 3x^2 + 3x - 5 = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 - 3x^2 + 3x - 5 = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

**2- دراسة تغيرات الدالة** $g$

$$g'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2$$

$g'(x) \geq 0$ منه $g$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

**3- بيان أن المعادلة** $g(x) = 0$ **تقبل حلا وحيدا** $\alpha$ **، حيث** $\alpha \in ]\,2\,;\,3\,[$

$g(2) = -3$ ، $g(3) = 4$ . الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال ] 2 ; 3 [ ،

$g(2) \times g(3) < 0$ منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال] 2 ; 3 [

**4- استنتاج إشارة** $g(x)$

$x \in ]-\infty;\alpha[ : g(x) < 0 \; ; \; x \in ]\alpha;+\infty[ \; ; g(x) > 0 \; ; g(\alpha) = 0$

**II-** $f(x) = \frac{x^3-3x^2+3x+1}{(x-1)^2} \; ; Df = \mathbb{R} - \{1\}$

**1- حساب نهاية الدالة** $f$ **على أطراف مجال تعريفها**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\<}} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} \begin{matrix}\to 2\\ \to 0^+\end{matrix} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\>}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\>}} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} \begin{matrix}\to 2\\ \to 0^+\end{matrix} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

2- بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R} - \{1\}$ : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 6x + 3)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3 - 3x^2 + 3x + 1)}{(x-1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)[(3x^2 - 6x + 3)(x-1) - 2(x^3 - 3x^2 + 3x + 1)]}{(x-1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 5}{(x-1)^3} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^3}}$$

**3- استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $x-1$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | |
| $f'(x)$ | $+$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | |

$x \in ]-\infty; 1[ \cup [\alpha; +\infty[ : f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ متزايدة $f$

$x \in ]1; \alpha[ : f'(x) < 0 \Rightarrow$ متناقصة $f$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | | $+\infty$ ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | | $+\infty$ |

**4- بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}-\{1\}$ : $f(x) = x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2}$**

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2} = \frac{(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 2}{(x-1)^2}$$

$$f(x) = \frac{(x-1)^3 + 2}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^3}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^2} = \boxed{x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2}}$$

- **بيان أن المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة : $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$**

$$\lim_{|x|\to+\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{2}{(x-1)^2} = 0$$

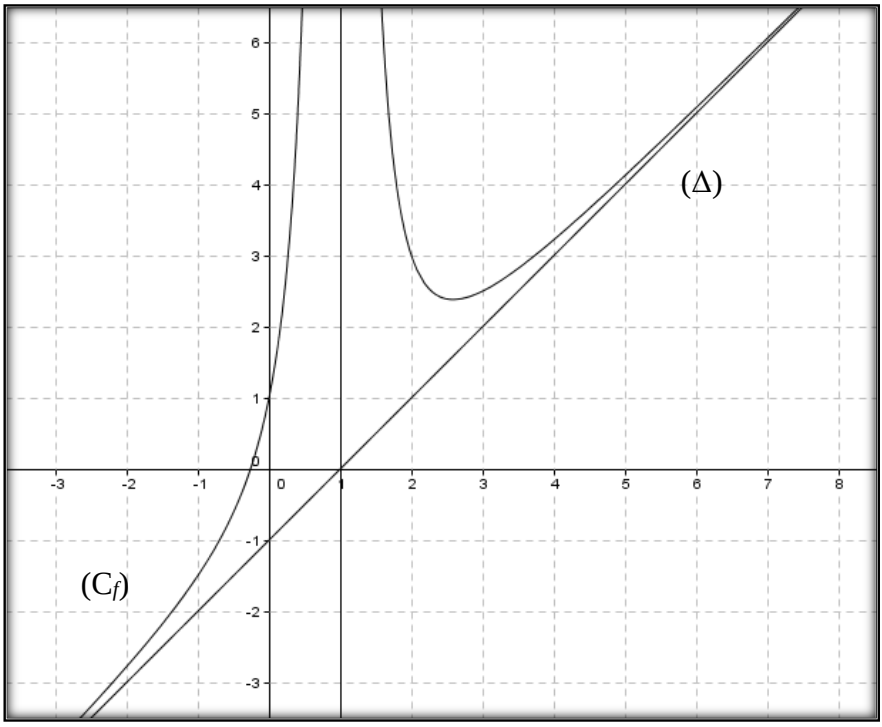
منه المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل لـ $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$

- **دراسة وضعية المنحنى $(C_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$**

$$f(x) - (x-1) = \frac{2}{(x-1)^2}$$

بما أنّ $f(x) - (x-1) > 0$ ، فإنّ المنحنى $(C_f)$ فوق المستقيم $(\Delta)$

**5- رسم المستقيم $(\Delta)$ و المنحنى $(C_f)$**




**حل التمرين 44:**

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{3x+2}{(x+1)^2}\ ;\ Df = \mathbb{R} - \{-1\}}$$

**1. حساب النهايات للدالة $f$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1 \\ <}} \frac{3x+2}{(x+1)^2} \to \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1 \\ >}} \frac{3x+2}{(x+1)^2} \to \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$$

**تفسير النتائج هندسيا :**

$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ مستقيم مقارب أفقي

$\lim_{x\to-1} f(x) = -\infty \Rightarrow x = -1$ مستقيم مقارب عمودي

**2. دراسة اتجاه تغيّر الدالة $f$**

$$f'(x)=\frac{3(x+1)^2-2(x+1)(3x+2)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(x+1)[3(x+1)-2(3x+2)]}{(x+1)^4}=\boxed{\frac{-3x-1}{(x+1)^3}}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-3x-1$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$x\in\left]-\infty;-1\right[\cup\left]-\frac{1}{3};+\infty\right[ : f'(x)<0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x\in\left]-1;-\frac{1}{3}\right] : f'(x)\geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيّرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $\frac{9}{4}$ | ↘ | $0$ |

**3. تعيين تقاطع ($\mathscr{C}_f$) مع حاملي المحورين**

$f(x)=0\Rightarrow 3x+2=0\Rightarrow x=-\frac{2}{3}\ ;\ f(0)=2$

المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقطع محور الفواصل عند النقطة $\left(-\frac{2}{3};0\right)$ ، ويقطع محور التراتيب عند النقطة $(0;2)$

**4. كتابة معادلة المماس لـ ($\mathscr{C}_f$) و الذي يشمل النقطة $A(-1,3)$**

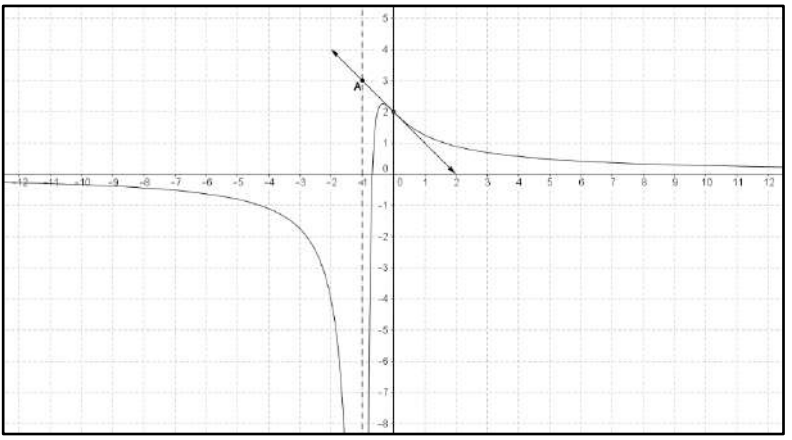
لتكن $M(x_0;f(x_0))$ النقطة التي يقبل عندها المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مماسا يشمل النقطة $A$

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\Rightarrow 3=\frac{-3x_0-1}{(x_0+1)^3}(-1-x_0)+\frac{3x_0+2}{(x_0+1)^2}$$

$$\Rightarrow 3=\frac{6x_0+3}{(x_0+1)^2}\Rightarrow 3(x_0+1)^2=6x_0+3\Rightarrow x_0^2=0\Rightarrow x_0=0$$

$$\Rightarrow M(0;2)\Rightarrow \boxed{y=-x+2}$$

**5. رسم المنحنى ($\mathscr{C}$)**



**6. دراسة عدد حلول المعادلة : $mx^2 + (2m-3)x + m - 2 = 0$**

$$mx^2 + (2m-3)x + m - 2 = 0 \Rightarrow mx^2 + 2mx - 3x + m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow m(x^2 + 2x + 1) = 3x + 2 \Rightarrow m = \frac{3x+2}{(x+1)^2} \Rightarrow m = f(x)$$

ندرس تقاطع المستقيم ذي المعادلة $y = m$ مع المنحنى ($\mathscr{C}$)

- $m \in ]-\infty; 0[$ : المعادلة تقبل حلين متمايزين
- $m = 0$ : المعادلة تقبل حلا وحيدا
- $m \in \left]0; \frac{9}{4}\right[$ : المعادلة تقبل حلين متمايزين
- $m = \frac{9}{4}$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا
- $m \in \left]\frac{9}{4}; +\infty\right[$ : المعادلة لا تقبل حلولا

**حل التمرين 45:**

**I- الإجابة بصحيح أم خطأ مع التبرير :**

1. معادلة المماس للتمثيل البياني للدالة $f(x) = \sqrt{x^2+3}$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ (**صحيح**)

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \; ; f'(1) = \frac{1}{2} \; ; f(1) = 2 \; ; y = \frac{1}{2}(x-1) + 2 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

2. $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} = 1$ (**خطأ**)

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x-\sin\pi}{x-\pi}=sin'(\pi)=\cos(\pi)=\boxed{-1}$$

3. الدالة $u(x)=e^{|x|}$ قابلة للاشتقاق عند 0 (**خطأ**)

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{u(x)-u(0)}{x}=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{e^{-x}-1}{x}=\lim_{X\overset{>}{\to}0}-\frac{e^{X}-1}{X}=\boxed{-1}\ (X=-x)$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{u(x)-u(0)}{x}=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{e^{x}-1}{x}=\boxed{1}$$

II- $f$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\frac{\cos x}{x^2}+x+1$

1. $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ هي : أ) $+\infty$

$$-1\le\cos x\le 1\Rightarrow-\frac{1}{x^2}\le\frac{\cos x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^2}=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

2. يقبل منحنى الدالة $f$ مستقيما مقاربا $(\Delta)$ معادلته : أ) $y=x+1$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^2}=0\Rightarrow(\Delta):y=x+1$ مستقيم مقارب مائل

**حل التمرين 46:**

$$\boldsymbol{f(x)=|x-3|-\frac{2}{x-1}\ ;\ Df=\mathbb{R}-\{1\}}$$

**1. دراسة قابلة الاشتقاق للدالة $f$ عند $x_0=3$**

$$\lim_{x\overset{<}{\to}3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\overset{<}{\to}3}\frac{-x+3-\frac{2}{x-1}+1}{x-3}=\lim_{x\overset{<}{\to}3}\frac{(-x+4)(x-1)-2}{(x-3)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\overset{<}{\to}3}\frac{-x^2+5x-6}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\overset{<}{\to}3}\frac{(x-3)(-x+2)}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\overset{<}{\to}3}\frac{-x+2}{x-1}=\boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\overset{>}{\to}3}\frac{x-3-\frac{2}{x-1}+1}{x-3}=\lim_{x\overset{>}{\to}3}\frac{(x-2)(x-1)-2}{(x-3)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\overset{>}{\to}3}\frac{x^2-3x}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\overset{>}{\to}3}\frac{x(x-3)}{(x-3)(x-1)}=\lim_{x\overset{>}{\to}3}\frac{x}{x-1}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

$\lim_{x\overset{<}{\to}3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\neq\lim_{x\overset{>}{\to}3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ ، منه الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق عند $x_0=3$

نستنتج أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة 3 (نقطة زاوية)

**2. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\begin{cases} f(x) = -x + 3 - \dfrac{2}{x-1} \; ; x \in ]-\infty; 1[ \cup ]1; 3[ \\ f(x) = x - 3 - \dfrac{2}{x-1} \; ; x \in [3; +\infty[ \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -x + 3 - \frac{2}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} -x + 3 - \frac{2}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} -x + 3 - \frac{2}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x - 3 - \frac{2}{x-1} = +\infty$$

$x \in ]-\infty; 1[ \cup ]1; 3[ : f(x) = -x + 3 - \dfrac{2}{x-1}$

$$f'(x) = -1 + \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1)^2 + 2}{(x-1)^2} = \boxed{\frac{-x^2 + 2x + 1}{(x-1)^2}}$$

$-x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1 - \sqrt{2}$ أو $x = 1 + \sqrt{2}$

$x \in ]-\infty; 1 - \sqrt{2}[ \cup ]1 + \sqrt{2}; 3[ \; : \; f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x \in ]1 - \sqrt{2}; 1[ \cup ]1; 1 + \sqrt{2}[ \; : \; f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x \in [3; +\infty[ : f(x) = x - 3 - \dfrac{2}{x-1}$

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 + 2}{(x-1)^2} = \boxed{\frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)^2}}$$

$f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة على المجال $[3; +\infty[$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $1-\sqrt{2}$ | | $1$ | | $1+\sqrt{2}$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(1-\sqrt{2})$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $f(1+\sqrt{2})$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

$f(1 - \sqrt{2}) \approx 4{,}8 \; ; \; f(1 + \sqrt{2}) \approx -0{,}8$

3. **إثبات أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين ($\Delta$) و ($\Delta'$) معادلتيهما $y = x - 3$ و $y = -x + 3$**

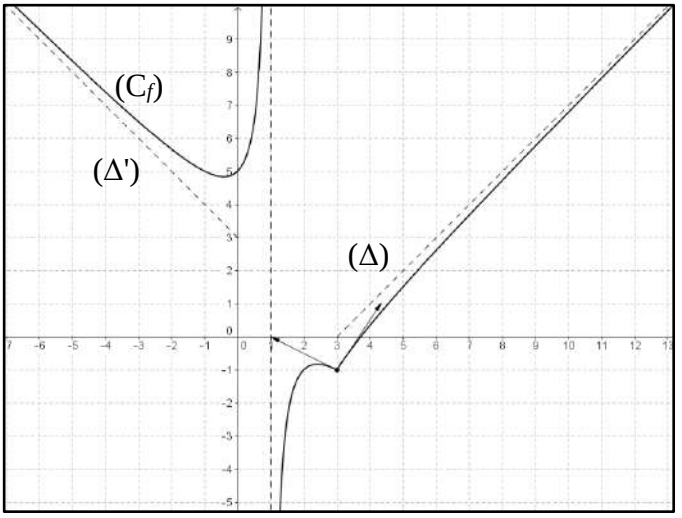
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (-x+3) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{2}{x-1} = 0$$

يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta'): y = -x + 3$ بجوار $(-\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-3) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2}{x-1} = 0$$

يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta): y = x - 3$ بجوار $(+\infty)$

4. **انشاء ($\Delta$) ، ($\Delta'$) و ($\mathscr{C}_f$)**




5. **مناقشة عدد و إشارة حلول المعادلة : $2 + \frac{2-mx+m}{x-1} = \sqrt{x^2-6x+9}$**

$$2 + \frac{2-mx+m}{x-1} = \sqrt{x^2-6x+9} \Rightarrow 2 + \frac{2-m(x-1)}{x-1} = \sqrt{(x-3)^2}$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{2}{x-1} - m = |x-3| \Rightarrow 2 - m = f(x)$$

ندرس تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مع المستقيم ذي المعادلة $y = 2 - m$

المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا : $2 - m < -1 \Rightarrow m > 3$

المعادلة تقبل حلين موجبين : $2 - m = -1 \Rightarrow m = 3$

المعادلة تقبل 3 حلول موجبة : $-1 < 2 - m < 2 - 2\sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{2} < m < 3$

المعادلة تقبل حلين موجبين : $2 - m = 2 - 2\sqrt{2} \Rightarrow m = 2\sqrt{2}$

المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا : $2 - 2\sqrt{2} < 2 - m < 2 + 2\sqrt{2} \Rightarrow -2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$

المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة : $2 - m = 2 + 2\sqrt{2} \Rightarrow m = -2\sqrt{2}$

المعادلة تقبل حلا موجبا وحلين سالبين : $2+2\sqrt{2}<2-m<5 \Rightarrow -3<m<-2\sqrt{2}$

المعادلة تقبل حلا موجبا وثانيا سالبا وثالثا معدوما : $2-m=5 \Rightarrow m=-3$

المعادلة تقبل حلا سالبا وحلين موجبين : $2-m>5 \Rightarrow m<-3$

**حل التمرين 47:**

$$f(x)=\frac{|x^2-3x|}{x+1} \; ; \; Df=\mathbb{R}-\{-1\}$$

**1. كتابة الدالة $f$ دون رمز القيمة المطلقة**

$x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow x=0$ أو $x=3$

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x+1} \; ; \; x\in ]-\infty;-1[\cup]-1;0]\cup[3;+\infty[ \\ f(x)=\dfrac{-x^2+3x}{x+1} \; ; \; x\in ]0;3[ \end{cases}$$

**2. بيان أنّه يمكن كتابة الدالة $f$ على الشكل: $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$ في كل حالة**

| $x^2-3x$ | $x+1$ |
|---|---|
| $-x^2-x$ | $x-4$ |
| $-4x$ | |
| $4x+4$ | |
| $+4$ | |

$$f(x)=x-4+\frac{4}{x+1}$$

| $-x^2+3x$ | $x+1$ |
|---|---|
| $x^2+x$ | $-x+4$ |
| $4x$ | |
| $-4x-4$ | |
| $-4$ | |

$$f(x)=-x+4-\frac{4}{x+1}$$

**3. حساب $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$**

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-3x}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x-3)}{x(x+1)}=\boxed{-3}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2+3x}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(-x+3)}{x(x+1)}=\boxed{3}$$

نستنتج أنّ الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق عند النقطة ذات الفاصلة 0 ويقبل المنحنى $(\mathcal{C})$ عند هذه النقطة نصفي مماسين ميليهما $-3$ و 3 على الترتيب

**4. حساب $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(3+x)}{x}$. نضع : $X=3+x$**

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(3+x)}{x}=\lim_{X\to 3^-}\frac{f(X)}{X-3}=\lim_{X\to 3^-}\frac{-X^2+3X}{(X-3)(X+1)}$$

$$= \lim_{X\to 3^-} \frac{-X(X-3)}{(X-3)(X+1)} = \boxed{-\frac{3}{4}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(3+x)}{x} = \lim_{X\to 3^+} \frac{f(X)}{X-3} = \lim_{X\to 3^+} \frac{X^2-3X}{(X-3)(X+1)}$$

$$= \lim_{X\to 3^+} \frac{X(X-3)}{(X-3)(X+1)} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

نستنتج أنّ الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق عند النقطة ذات الفاصلة 3 ويقبل المنحنى ($\mathscr{C}$) عند هذه النقطة نصفي مماسين ميليهما $\frac{3}{4}-$ و $\frac{3}{4}$ على الترتيب

**5. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x - 4 + \frac{4}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x - 4 + \frac{4}{x+1} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{<\\ x\to -1}} f(x) = \lim_{\substack{<\\ x\to -1}} x - 4 + \frac{4}{x+1} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{>\\ x\to -1}} f(x) = \lim_{\substack{>\\ x\to -1}} x - 4 + \frac{4}{x+1} = +\infty$$

$$x \in ]-\infty;-1[ \cup ]-1;0] \cup [3;+\infty[ : f(x) = x - 4 + \frac{4}{x+1}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2} = \boxed{\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | | ‖ | | ‖ | | $+$ | | |
| $x+3$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | ‖ | | ‖ | | $+$ | | |
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | ‖ | ‖ | ‖ | ‖ | ‖ | ‖ | $+$ | | |

$$x \in ]0;3[ : f(x) = -x + 4 - \frac{4}{x+1}$$

$$f'(x) = -1 + \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{4-(x+1)^2}{(x+1)^2} = \boxed{-\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | | | | | | $-$ | $0$ | $+$ | | | | |
| $x+3$ | | | | | | | $+$ | | $+$ | | | | |
| $f'(x)$ | | | | | | | $+$ | $0$ | $-$ | | | | |

**جدول تغيرات الدالة $f$**

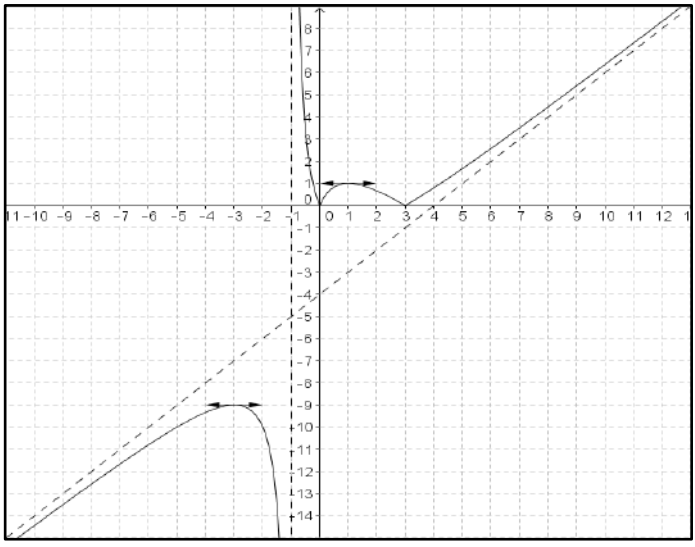
| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-9$ | ↘ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**6. تعيين المستقيمات المقاربة للمنحنى ($\mathscr{C}$)**

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x)-(x-4)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x+1}=0\Rightarrow y=x-4$ مستقيم مقارب مائل

$\lim\limits_{\substack{<\\ x\to-1}} f(x)=-\infty\ ;\ \lim\limits_{\substack{>\\ x\to-1}} f(x)=+\infty\Rightarrow x=-1$ مستقيم مقارب عمودي

**7. انشاء المنحنى ($\mathscr{C}$) و المستقيمات المقاربة**



**8. مناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط $m$ عدد حلول المعادلة: $|x^2-3x|=m(x+1)$**

$|x^2-3x|=m(x+1)\Rightarrow m=\dfrac{|x^2-3x|}{x+1}\Rightarrow m=f(x)$

ندرس تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}$) مع المستقيم ذي المعادلة $y=m$

- $m < -9$ : المعادلة تقبل حلين
- $m = -9$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا
- $-9 < m < 0$ : المعادلة لا تقبل حلولا
- $m = 0$ : المعادلة تقبل حلين
- $0 < m < 1$ : المعادلة تقبل أربعة حلول
- $m = 1$ : المعادلة تقبل حلين متمايزين وحلا مضاعفا
- $m > 1$ : المعادلة تقبل حلين

**حل التمرين 48:**

**1.** $\boldsymbol{f(x) = x\sqrt{4 - x^2}\ ; Df = [-2; 2]}$

**أ. حساب** $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2}$ **و** $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{f(x)-f(-2)}{x+2}$

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{x + 2} = \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{x(4 - x^2)}{(x + 2)\sqrt{4 - x^2}}$$

$$= \lim_{\substack{x \to -2 \\ >}} \frac{x(2 - x) \to -8}{\sqrt{4 - x^2} \to 0^+} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{x - 2} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{x(4 - x^2)}{(x - 2)\sqrt{4 - x^2}}$$

$$= \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \frac{-x(2 + x) \to -8}{\sqrt{4 - x^2} \to 0^+} = \boxed{-\infty}$$

نستنتج أنّ الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق على يمين $(-2)$ وعلى يسار $(2)$ ، كما يقبل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ نصف مماس عند كل من النقطتين ذات الفاصلتين $(-2)$ و$(2)$

**ب. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$f'(x) = \sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$$

| $x$ | $-2$ | | $-\sqrt{2}$ | | $\sqrt{2}$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $2$ | ↘ | $0$ |

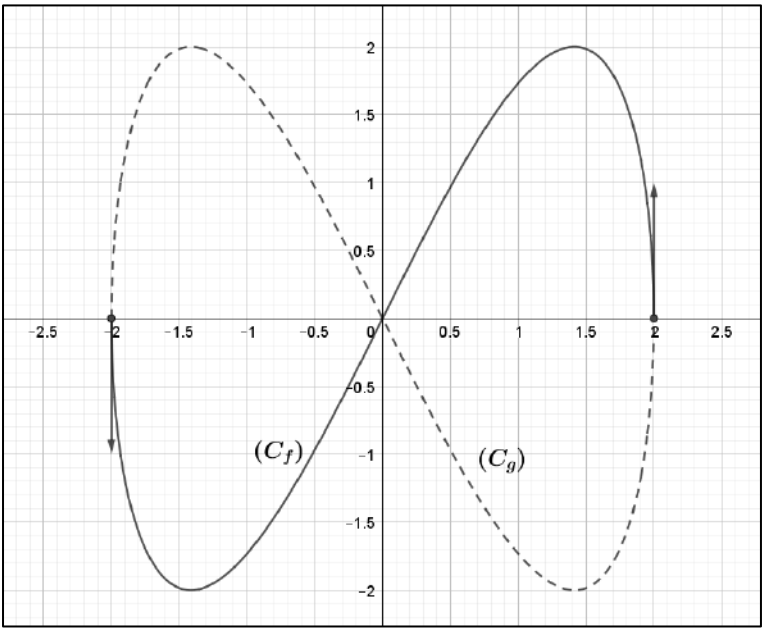
$4 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$ أو $x = \sqrt{2}$ ; $f(-\sqrt{2}) = -2$ ; $f(\sqrt{2}) = 2$

**ج. انشاء** المنحنى **($\mathscr{C}_f$)**

(انظر الشكل في الأسفل)

**2. انشاء ($\mathscr{C}_g$) انطلاقا من ($\mathscr{C}_f$)**

بما أنّ $g(x) = -f(x)$ ، فإنّ ($\mathscr{C}_g$) نظير ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة لمحور الفواصل




**3. مناقشة عدد و إشارة حلول المعادلة : $g(x) = -2m + 1$**

ندرس تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_g$) مع المستقيم ذي المعادلة : $y = -2m + 1$

- $-2m+1<-2 \Rightarrow -2m<-3 \Rightarrow m>\frac{3}{2}$ : المعادلة لا تقبل حلولا
- $-2m+1=-2 \Rightarrow -2m=-3 \Rightarrow m=\frac{3}{2}$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا
- $-2<-2m+1<0 \Rightarrow -3<-2m<-1 \Rightarrow \frac{1}{2}<m<\frac{3}{2}$ :
المعادلة تقبل حلين موجبين
- $-2m+1=0 \Rightarrow -2m=-1 \Rightarrow m=\frac{1}{2}$ :
المعادلة تقبل حلا معدوما وحلين متعاكسين
- $0<-2m+1<2 \Rightarrow -1<-2m<1 \Rightarrow -\frac{1}{2}<m<\frac{1}{2}$ :
المعادلة تقبل حلين سالبين
- $-2m+1=2 \Rightarrow -2m=1 \Rightarrow m=-\frac{1}{2}$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا سالبا
- $-2m+1>2 \Rightarrow -2m>1 \Rightarrow m<-\frac{1}{2}$ : المعادلة لا تقبل حلولا

**4. بيان أنّ $h$ دالة زوجية ، ثمّ استنتاج انشاء ($\mathscr{C}_h$)**

لدينا $Dh$ متناظر بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل عدد حقيقي $x$ من $Dh$ :

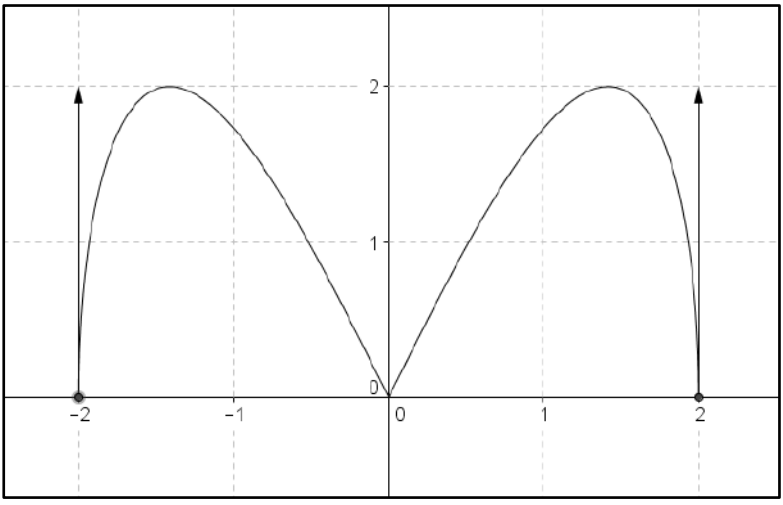
$$h(-x)=|-x|\sqrt{4-(-x)^2}=|x|\sqrt{4-x^2}=h(x)$$

منه الدالة $h$ زوجية، ومنحناها البياني ($\mathscr{C}_h$) متناظر بالنسبة لمحور التراتيب.

من أجل $x\in[-2;0]$ ، لدينا $h(x)=g(x)$ ، منه ($\mathscr{C}_g$) و ($\mathscr{C}_h$) متطابقين

من أجل $x\in[0;2]$ ، لدينا $h(x)=f(x)$ ، منه ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_h$) متطابقين

**انشاء ($\mathscr{C}_h$)**



**حل التمرين 49:**

$$f(x)=\frac{\alpha x^2+\beta x-1}{2x-3}\ ;\ Df=\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$$

**I- تعيين α و β حتى يكون $(T): y=-3x+3$ مماسا لـ $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1**

$$f'(x)=\frac{(2\alpha x+\beta)(2x-3)-2(\alpha x^2+\beta x-1)}{(2x-3)^2}=\frac{2\alpha x^2-6\alpha x-3\beta+2}{(2x-3)^2}$$

$$f'(1)=-4\alpha-3\beta+2$$

$$(T): y=-3(x-1)+f(1)=-3x+3+f(1)$$

$$\begin{cases} f'(1)=-3 \\ f(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\alpha-3\beta=-5 \\ -\alpha-\beta=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4\alpha-3\beta=-5 \\ 3\alpha+3\beta=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=2 \\ \beta=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x)=\frac{2x^2-x-1}{2x-3}}$$

II- نضع : α = 2 و β = -1

**1. تعيين $a$ ، $b$ ، $c$ حيث : $f(x)=ax+b+\frac{c}{2x-3}$**

$$\begin{array}{r|l} 2x^2-x-1 & 2x-3 \\ \hline -2x^2+3x & x+1 \\ 2x-1 & \\ -2x+3 & \\ 2 & \end{array} \Rightarrow \boxed{f(x)=x+1+\frac{2}{2x-3}}$$

**دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+1+\frac{2}{2x-3}=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+1+\frac{2}{2x-3}=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}^<} f(x)=\lim_{x\to\frac{3}{2}^<} x+1+\frac{2}{2x-3}\ \begin{matrix}\to 2\\ 0^-\end{matrix}=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to\frac{3}{2}^>} f(x)=\lim_{x\to\frac{3}{2}^>} x+1+\frac{2}{2x-3}\ \begin{matrix}\to 2\\ 0^+\end{matrix}=\boxed{+\infty}$$

$$f'(x)=1-\frac{4}{(2x-3)^2}=\frac{(2x-3)^2-4}{(2x-3)^2}=\boxed{\frac{(2x-1)(2x-5)}{(2x-3)^2}}$$

$x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{5}{2};+\infty\right[ : f'(x)\geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x\in\left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[\cup\left]\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right[ : f'(x)<0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيّرات الدالة $f$:**

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{3}{2}$ | | $\frac{5}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\frac{1}{2}$ | ↘ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↘ | $\frac{9}{2}$ | ↗ | $+\infty$ |

**2. إثبات أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيما مقاربا مائلا ($\Delta$) معادلته $y = x + 1$**

$\lim\limits_{|x|\to+\infty} \dfrac{2}{2x-3} = 0 \implies (\Delta): y = x + 1$ مستقيم مقارب مائل

**3. دراسة وضعية ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة لـ ($\Delta$)**

$f(x) - (x+1) = \dfrac{2}{2x-3}\ ; x \in \left]-\infty; \dfrac{3}{2}\right[ : 2x - 3 < 0 \implies (Cf)$ تحت $(\Delta)$

$x \in \left]\dfrac{3}{2}; +\infty\right[ : 2x - 3 > 0 \implies (Cf)$ فوق $(\Delta)$

**4. إثبات أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقبل كمركز تناظر له نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين**

$$(\Delta) \cap (D) = w(x;y) \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{w\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)}$$

$w\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$ مركز تناظر لـ $(Cf) \Rightarrow \begin{cases} x \in Df \Rightarrow 3 - x \in Df \\ f(3-x) + f(x) = 5 \end{cases}$

$x \in Df \Rightarrow x \neq \dfrac{3}{2} \Rightarrow -x \neq -\dfrac{3}{2} \Rightarrow 3 - x \neq \dfrac{3}{2} \Rightarrow 3 - x \in Df$

$$f(3-x) + f(x) = 3 - x + 1 + \frac{2}{2(3-x)-3} + x + 1 + \frac{2}{2x-3}$$

$$= 5 + \frac{2}{2x-3} - \frac{2}{2x-3} = 5$$

منه النقطة $w\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$ مركز تناظر لـ ($\mathscr{C}_f$)

**5. إثبات وجود مماسين لـ ($\mathscr{C}_f$) معامل توجيه كل منهما هو (-3)**

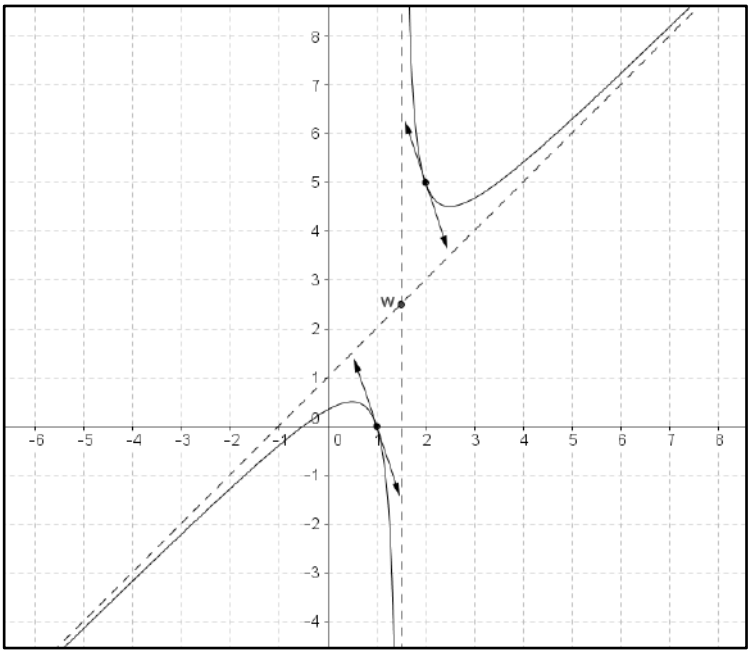
$f'(x) = -3 \Rightarrow 1 - \dfrac{4}{(2x-3)^2} = -3 \Rightarrow \dfrac{1}{(2x-3)^2} = 1 \Rightarrow (2x-3)^2 = 1$

$\Rightarrow (2x-2)(2x-4) = 0 \Rightarrow x = 1$ أو $x = 2$

$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1) = -3(x-1) \Rightarrow \boxed{y = -3x + 3}$

$(T'): y = f'(2)(x-2) + f(2) = -3(x-2) + 5 \Rightarrow \boxed{y = -3x + 11}$

**6. انشاء المنحنى ($\mathscr{C}_f$) والمماسين**




**7. مناقشة عدد نقط تقاطع ($\mathscr{C}_f$) مع المستقيم $(\Delta_m)$ ذي المعادلة $y = -3x + m$**

- $(\Delta_m) : m \in ]-\infty; 3[ \cup ]11; +\infty[$ يقطع ($\mathscr{C}_f$) في نقطتين
- $(\Delta_m) : m \in \{3; 11\}$ يمسّ ($\mathscr{C}_f$) في نقطة
- $(\Delta_m) : m \in ]3; 11[$ لا يقطع ($\mathscr{C}_f$)

**III- $g(x) = \frac{2x^2-|x|-1}{2|x|-3}$**

**1. إثبات أنّ $g$ دالة زوجية**

$2|x| - 3 = 0 \Rightarrow |x| = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ أو $x = -\frac{3}{2}$

$\Rightarrow Dg = \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[ \cup \left]-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right[ \cup \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$

لدينا $Dg$ متناظر بالنسبة إلى الصفر ومن أجل كل عدد حقيقي $x$ من $Dg$ :

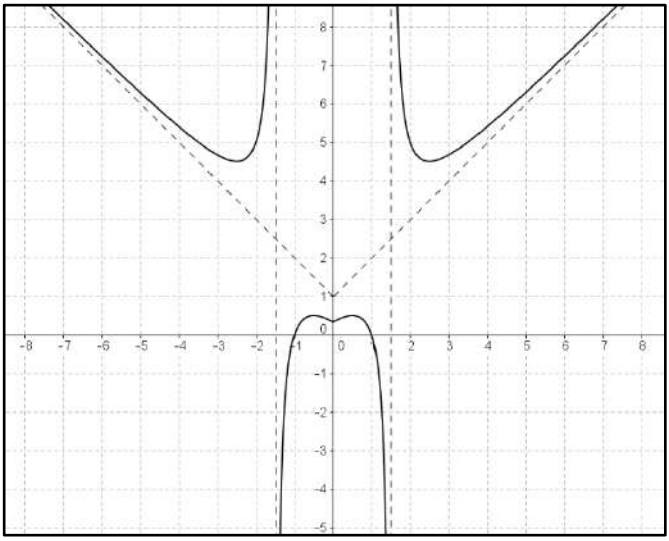
$g(-x) = \frac{2x^2-|-x|-1}{2|-x|-3} = \frac{2x^2-|x|-1}{2|x|-3} = g(x)$ ، منه الدالة $g$ زوجية

**2. بيان كيفية انشاء ($\mathscr{C}_g$) انطلاقا من ($\mathscr{C}_f$)**

$x \in \left]0; \frac{3}{2}\right[ \cup \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[ : \ |x| = x \ \Rightarrow g(x) = f(x)$

على المجال $]\frac{3}{2};+\infty[$ يكون المنحنيان $(\mathscr{C}_g)$ و$(\mathscr{C}_f)$ متطابقين ، أمّا على المجال $]-\frac{3}{2};0[$ نرسم $(\mathscr{C}_g)$ بالتناظر المحوري (لأنّ الدالة $g$ زوجية)

**3. انشاء المنحنى $(\mathscr{C}_g)$**



**حل التمرين 50:**

**I- $f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ; $Df = \mathbb{R}$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} -1 + \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} -1 + \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} -1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \boxed{-2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} -1 + \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} -1 + \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} -1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \boxed{0}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}}$$

بما أنّ $f'(x)>0$ ، فإنّ الدالة $f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-2$ | ↗ | $0$ |

**استنتاج إشارة $f(x)$**

من الجدول السابق نستنتج أنّ الدالة $f$ سالبة تماما

**2. استنتاج المستقيمات المقاربة لـ $(\mathscr{C}_f)$**

المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين أفقيين هما : $(\Delta): y=-2$ بجوار $(-\infty)$ و $(\Delta'): y=0$ بجوار $(+\infty)$

**3. اثبات أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف ω**

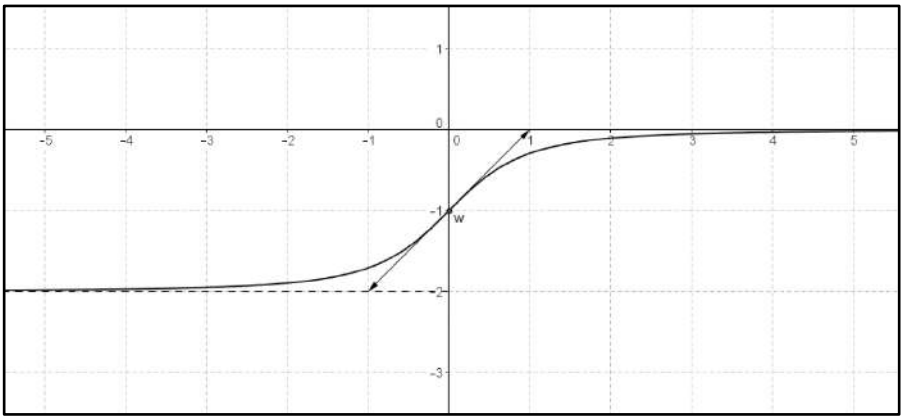
$$f'(x)=\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow f''(x)=-\frac{3x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^3}=\boxed{-\frac{3x}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow x=0\,;f(0)=-1\Rightarrow \boxed{\omega(0;-1)}$$

**4. كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0**

$$(T): y=f'(0)x+f(0)\Rightarrow \boxed{(T): y=x-1}$$

**5. انشاء المماس (T) و المنحنى $(\mathscr{C}_f)$**



**II- $g(x) = -x + 2 + \sqrt{x^2+1}$ ; $Dg = \mathbb{R}$**

**1. إثبات أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ فإنّ : $g'(x) = f(x)$**

$$g'(x) = -1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \boxed{g'(x) = f(x)}$$

**2. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} -x + 2 + \sqrt{x^2+1} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} -x + 2 + \sqrt{x^2+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(-x+2+\sqrt{x^2+1}\right)\left(-x+2-\sqrt{x^2+1}\right)}{-x+2-\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{(-x+2)^2-(x^2+1)}{-x+2-\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x+3}{-x+2-|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(-4+\frac{3}{x}\right)}{x\left(-1+\frac{2}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4+\frac{3}{x}}{-1+\frac{2}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \boxed{2}$$

بما أنّ $g'(x) = f(x)$ و $f(x) < 0$ ، فإنّ الدالة $g$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $2$ |

**3. إثبات أنّ ($\mathscr{C}_g$) يقبل مستقيما مقاربا مائلا ($\Delta$) معادلته $y = -2x + 2$**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) - (-2x+2) = \lim_{x\to-\infty} x + \sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}} = \boxed{0}$$

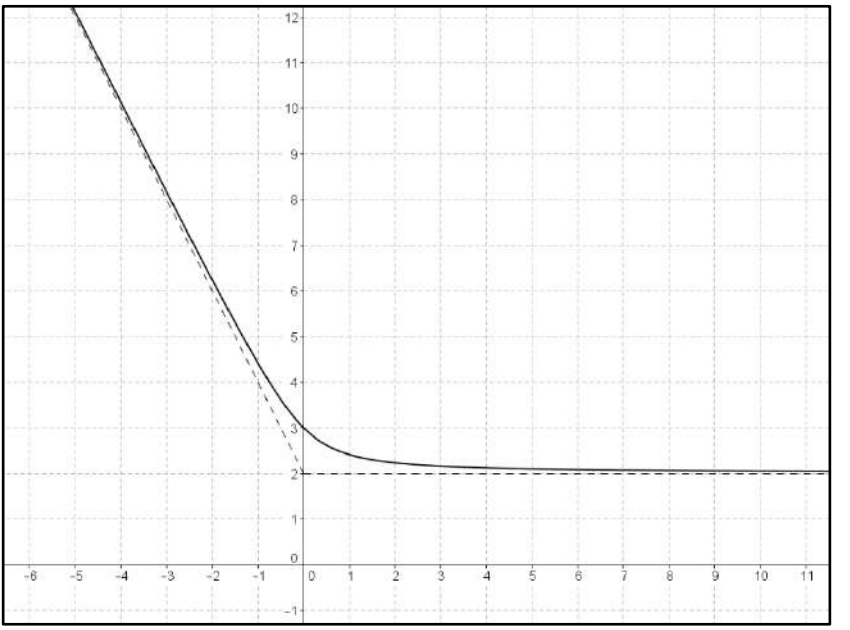
منه ، نستنتج أنّ ($\mathscr{C}_g$) يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta): y = -2x+2$ بجوار $(-\infty)$

**4. دراسة وضعية ($\mathscr{C}_g$) بالنسبة لـ ($\Delta$)**

$g(x) - (-2x+2) = x + \sqrt{x^2+1}$ ; $x^2+1 > x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > |x|$

$\Rightarrow x + \sqrt{x^2+1} > 0 \Rightarrow g(x) - (-2x+2) > 0 \Rightarrow \boxed{(Cg) \text{ فوق } (\Delta)}$

**5. انشاء المنحنى $(\mathcal{C}_g)$**



**حل التمرين 51:**

**I- $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$ ; $Df=\mathbb{R}-\{-1\}$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-3}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=\boxed{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-3}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=\boxed{1}$$

$$\lim_{\substack{<\\x\to-1}} f(x)=\lim_{\substack{<\\x\to-1}}\frac{x^2+2x-3\to-4}{(x+1)^2\to 0^+}=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{\substack{>\\x\to-1}} f(x)=\lim_{\substack{>\\x\to-1}}\frac{x^2+2x-3\to-4}{(x+1)^2\to 0^+}=\boxed{-\infty}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(x+1)^2-2(x+1)\left(x^2+2x-3\right)}{(x+1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{2(x+1)[(x+1)^2-\left(x^2+2x-3\right)]}{(x+1)^4}=\boxed{\frac{8}{(x+1)^3}}$$

$x < -1 \Rightarrow x + 1 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x > -1 \Rightarrow x + 1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيّرات الدالة $f$:**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ ↘ | $-\infty$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $1$ |

**2. تعيين المستقيمات المقاربة لـ ($\mathscr{C}_f$)**

المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x = -1$ وآخر أفقيا معادلته $y = 1$

**3. تعيين معادلة المماس (T)**

لتكن $x_0$ الفاصلة التي يكون عندها (T) مماسا لـ ($\mathscr{C}_f$) ، لدينا :

$$f'(x_0) = 1 \Rightarrow \frac{8}{(x_0+1)^3} = 1 \Rightarrow (x_0+1)^3 = 8 \Rightarrow x_0 + 1 = 2 \Rightarrow x_0 = 1$$

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1) \Rightarrow \boxed{(T): y = x - 1}$$

**4. انشاء (T) و($\mathscr{C}_f$) : (انظر الشكل أسفله)**

**II- 1. تعيين العددين الحقيقيين $\alpha$ و $\beta$ حتى يكون $f(x) = \alpha + \frac{\beta}{(x+1)^2}$**

$$f(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1-4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}$$

$$f(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} \Rightarrow \boxed{\alpha = 1\ ;\ \beta = -4}$$

**2. $g(x) = \frac{-4}{x^2+2x+1}$ ; $Dg = \mathbb{R} - \{-1\}$**

- **تعيين $\gamma$ حتى يكون من أجل كل $x$ من $\mathbb{R} - \{-1\}$: $g(x) = f(x) + \gamma$**

$$g(x) = -\frac{4}{(x+1)^2} \Rightarrow g(x) = f(x) - 1 \Rightarrow \boxed{\gamma = -1}$$

- **استنتاج جدول تغيرات الدالة $g$ ، ثمّ أنشئ المنحنى ($\mathscr{C}_g$)**

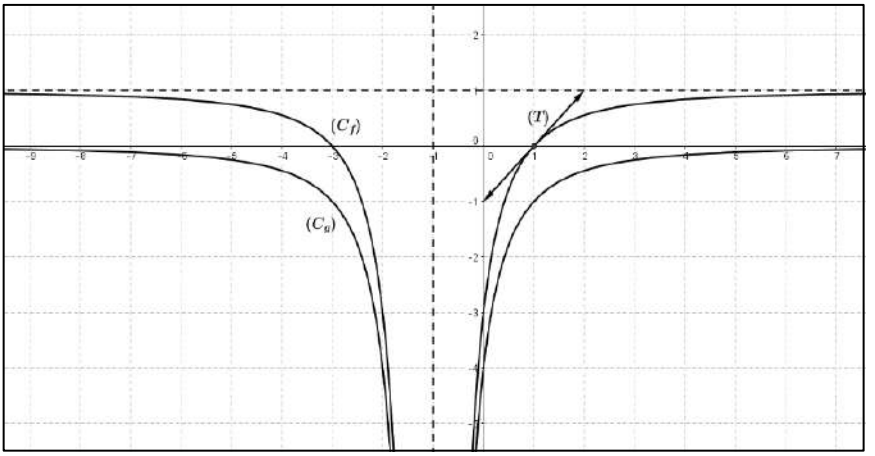
$$g(x) = f(x) - 1 \Rightarrow g'(x) = f'(x)$$

منه الدالة $g$ لها نفس اتجاه تغيّر الدالة $f$ ، والمنحنى ($\mathscr{C}_g$) هو صورة المنحنى ($\mathscr{C}_f$) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(0;-1)$

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ |

**انشاء المنحنى ($\mathscr{C}_g$)**




**III- $h(x) = 1 - \frac{4}{(\sin x+1)^2}$**

**1. تعيين مجموعة تعريف الدالة $h$**

$$\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow \sin x = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\boxed{Dh = \mathbb{R} - \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right\} ; k \in \mathbb{Z}}$$

**2. بيان أنّه يمكن اعتبار الدالة $h$ كمركب دالتين إحداهما هي $f$ و الأخرى يُطلب تعيينها**

$$h(x) = fok(x) = 1 - \frac{4}{(k(x)+1)^2} = 1 - \frac{4}{(\sin x + 1)^2} \Rightarrow k(x) = \sin x$$

**3. حساب $h'(x)$ و استنتاج أنّ الدالة $h$ متزايدة تماما على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$**

$$h(x) = f[sin(x)] \Rightarrow h'(x) = f'[sin(x)] \times cos(x) = \frac{8\cos x}{(\sin x + 1)^3}$$

من أجل $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ، لدينا $\cos x > 0$ و $\sin x > -1$ ، منه $h'(x) > 0$ وتكون الدالة $h$ متزايدة تماما على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

**حل التمرين 52:**

**I- $g(x) = x^3 - 3x - 4$ ; $Dg = \mathbb{R}$**

**5. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 - 3x - 4 = \lim_{x\to-\infty} x^3 = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 - 3x - 4 = \lim_{x\to+\infty} x^3 = \boxed{+\infty}$$

$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

$x \in ]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[ : g'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

$x \in ]-1;1[ : g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-2$ | ↘ | $-6$ | ↗ | $+\infty$ |

**6. بيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ ، حيث $\alpha \in ]\,2\,;\,3\,[$**

$g(2) = -2$ ، $g(3) = 14$ . الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]\,2\,;\,3\,[$ ، $g(2) \times g(3) < 0$ منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]\,2\,;\,3\,[$

**تعيين حصر للعدد $\alpha$ بالتقريب إلى $10^{-1}$**

$g(2,5) \approx 4,13$ ; $g(2,25) \approx 0,64$ ; $g(2,2) \approx 0,05$ ; $g(2,1) \approx -1,04$

من النتائج السابقة ، نستنتج أنّ : $\boxed{2,1 < \alpha < 2,2}$

**7. استنتاج إشارة $g(x)$**

$x \in ]-\infty;\alpha[ : g(x) < 0$ ; $x \in ]\alpha;+\infty[$ ; $g(x) > 0$ ; $g(\alpha) = 0$

**II- $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{x^2-1}$ ; $Df = \mathbb{R} - \{-1;1\}$**

**1. تعيين الأعداد الحقيقية $a, b, c, d$ حيث : $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-1}$**

$$\begin{array}{r|l} x^3+2x^2 & x^2-1 \\ -x^3+x & x+2 \\ 2x^2+x & \\ -2x^2+2 & \\ x+2 & \end{array}$$

$$\boxed{f(x)=x+2+\frac{x+2}{x^2-1}}$$

**2. بيان أنّ من أجل كل $x\in D_f$: $f'(x)=\frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$**

$$f'(x)=\frac{(3x^2+4x)(x^2-1)-2x(x^3+2x^2)}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{x[(3x+4)(x^2-1)-2(x^3+2x^2)]}{(x^2-1)^2}=\frac{x(x^3-3x-4)}{(x^2-1)^2}=\frac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-\infty$ | ↘ | $+\infty$ | ↗ | $+\infty$ |
| | | | | | | | | | $f(\alpha)$ | | |

**3. بيان أنّ: $f(\alpha)=\frac{3\alpha+4}{2}$**

$$g(\alpha)=\alpha^3-3\alpha-4=0\Rightarrow\alpha^3=3\alpha+4$$

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^3+2\alpha^2}{\alpha^2-1}=\frac{\alpha^3\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)}{\frac{\alpha^3}{\alpha}-1}=\frac{(3\alpha+4)\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)}{\frac{3\alpha+4}{\alpha}-1}=\frac{3\alpha^2+10\alpha+8}{2\alpha+4}$$

$$f(\alpha)=\frac{(\alpha+2)(3\alpha+4)}{2(\alpha+2)}=\boxed{\frac{3\alpha+4}{2}}$$

**تعيين حصر لـ $f(\alpha)$**

$$2{,}1<\alpha<2{,}2\Rightarrow 6{,}3<3\alpha<6{,}6\Rightarrow 10{,}3<3\alpha+4<10{,}6$$

$$\Rightarrow\frac{10{,}3}{2}<\frac{3\alpha+4}{2}<\frac{10{,}6}{2}\Rightarrow\boxed{5{,}15<f(\alpha)<5{,}3}$$

-III

**1. برهان أنّ للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) مستقيم مقارب مائل ($\Delta$)**

$$\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{x+2}{x^2-1}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

منه المستقيم ($\Delta$) ذي المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ ($\mathscr{C}_f$)

**2. دراسة وضعية ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة إلى المستقيم ($\Delta$)**

$$f(x)-(x+2)=\frac{x+2}{x^2-1}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x^2-1$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)-(x+2)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | ‖ | $+$ | |

من أجل $x \in ]-\infty;-2[ \cup ]-1;1[$ : المنحنى ($\mathscr{C}_f$) تحت المستقيم ($\Delta$)

من أجل $x \in ]-2;-1[ \cup ]1;+\infty[$ : المنحنى ($\mathscr{C}_f$) فوق المستقيم ($\Delta$)

**3. برهان أنّ للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) مماسين ($D$) و ($D'$) يوازيان ($\Delta$)**

$$(D) \parallel (D') \parallel (\Delta) \Rightarrow f'(x)=1 \Rightarrow \frac{x(x^3-3x-4)}{(x^2-1)^2}=1$$

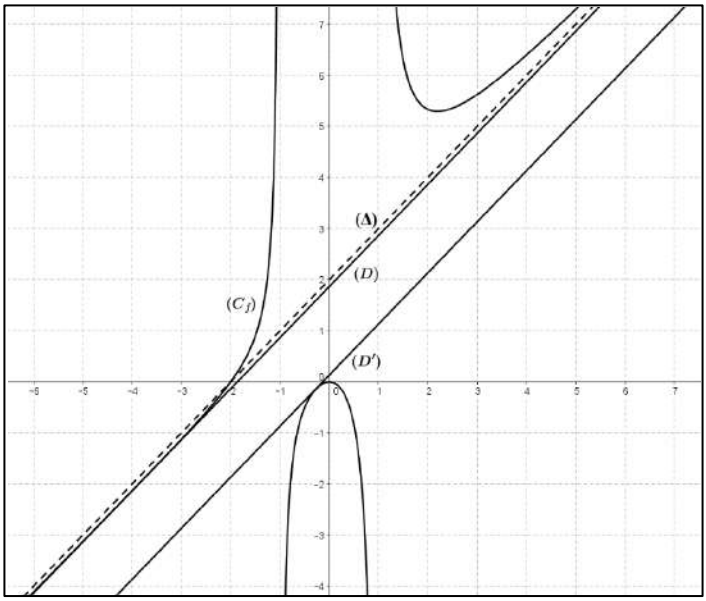
$$\Rightarrow x^4-3x^2-4x=x^4-2x^2+1 \Rightarrow x^2+4x+1=0$$

$$\Rightarrow x=-2-\sqrt{3} \text{ أو } x=-2+\sqrt{3}$$

$$(D): y=f'\left(-2-\sqrt{3}\right)\left(x+2+\sqrt{3}\right)+f\left(-2-\sqrt{3}\right) \Rightarrow y=x+1+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(D'): y=f'\left(-2+\sqrt{3}\right)\left(x+2-\sqrt{3}\right)+f\left(-2+\sqrt{3}\right) \Rightarrow y=x+1-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**4. انشاء ($D$) ، ($D'$) ، ($\Delta$) و($\mathscr{C}_f$)**



**5. مناقشة عدد وإشارة حلول المعادلة: $x^3 - mx^2 + m + 2 = 0$**

$$x^3 - mx^2 + m + 2 = 0 \Rightarrow m(x^2 - 1) = x^3 + 2 \Rightarrow m = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$$

$$\Rightarrow m + 2 = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} + 2 \Rightarrow m + 2 = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow m + 2 = f(x)$$

ندرس تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مع المستقيم ذي المعادلة : $y = m + 2$

$m + 2 < 0$ أي $m < -2$ : المعادلة تقبل حلا موجبا وحلين سالبين

$m + 2 = 0$ أي $m = -2$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا معدوما وآخر سالبا

$0 < m + 2 < f(\alpha)$ أي $-2 < m < f(\alpha) - 2$ : المعادلة تقبل حلا سالبا

$m + 2 = f(\alpha)$ أي $m = f(\alpha) - 2$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا وحلا سالبا

$m + 2 > f(\alpha)$ أي $m > f(\alpha) - 2$ : المعادلة تقبل حلين موجبين وحلا سالبا

**حل التمرين 53:**

$$f(x) = x\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}$$

**1. تعيين مجموعة تعريف الدالة $f$**

$$Df = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ \frac{1-x}{x+1} \geq 0 \text{ و } x + 1 \neq 0\right\}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1-x$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | |
| $x+1$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | |
| $\frac{1-x}{x+1}$ | $-$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | |

$$Df = ]-1; 1]$$

**دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} x\sqrt{\frac{1-x}{x+1}} \begin{matrix} \to 2 \\ \to 0^+ \end{matrix} = \boxed{-\infty} \left(\begin{matrix} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \frac{1-x}{x+1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{matrix}\right) ;\ f(1) = 0$$

$$f'(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} - \frac{\frac{2x}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}} = \frac{\frac{1-x}{x+1} - \frac{x}{(x+1)^2}}{\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}} = \boxed{\frac{-x^2 - x + 1}{(x+1)^2\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}}}$$

$-x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ أو $x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (مرفوضة)

$x \in \left]-1; \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] : f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x \in \left]\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}; 1\right] : f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-1$ | | $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $f\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ | $\searrow$ | $0$ |

**2. حساب $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$**

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x\sqrt{1-x}\sqrt{\frac{1}{x+1}}}{\sqrt{x-1}^2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x\sqrt{\frac{1}{x+1}}}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \begin{matrix} \to 1 \\ \to 0^+ \end{matrix} = \boxed{+\infty}$$

**تفسير النتيجة هندسيا :** الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق عند النقطة ذات الفاصلة 1 ، ويقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) نصف مماس يوازي محور التراتيب

**3. كتابة معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0**

$$y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow \boxed{y = x}$$

**4. رسم ($\mathscr{C}_f$) المنحنى الممثل للدالة $f$ : انظر الشكل في نهاية التمرين**

5. $(E): (x-1)x^2 + (x+1)y^2 = 0$

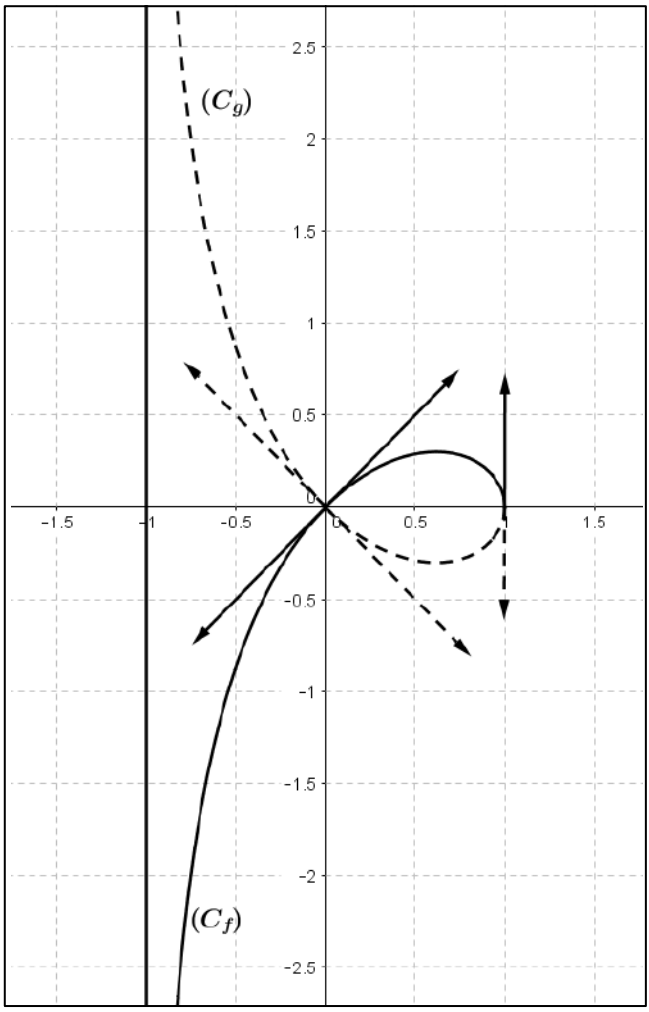
**أ. بيان أنّ المجموعة $(E)$ هي اتحاد منحنيين يُطلب تعيين معادلتيهما**

$$(x-1)x^2 + (x+1)y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = x^2\left(\frac{1-x}{x+1}\right)$$

$$\Rightarrow y = x\sqrt{\frac{1-x}{x+1}} \text{ أو } y = -x\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}$$

منه ، المجموعة $(E)$ هي اتحاد المنحنيين ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_g$) حيث : $g(x) = -x\sqrt{\frac{1-x}{x+1}}$

**ب. انشاء المجموعة $(E)$**




**حل التمرين 54:**

$\boldsymbol{f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}\,;\, Df = ]-\infty; -4] \cup [0; +\infty[}$

**1. دراسة قابلية الاشتقاق عند القيمتين 0 و 4-**

$$\lim_{\substack{>\\x\to 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{>\\x\to 0}} \frac{x+\sqrt{x^2+4x}}{x} = \lim_{\substack{>\\x\to 0}} \frac{x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{\substack{>\\x\to 0}} \frac{x\left(1+\sqrt{\left(1+\frac{4}{x}\right)}\right)}{x} = \lim_{\substack{>\\x\to 0}} 1+\sqrt{\left(1+\frac{4}{x}\right)} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{\substack{<\\x\to -4}} \frac{f(x)-f(-4)}{x+4} = \lim_{\substack{<\\x\to -4}} \frac{x+4+\sqrt{x^2+4x}}{x+4}$$

$$= \lim_{\substack{<\\x\to -4}} \frac{\left(x+4+\sqrt{x^2+4x}\right)\left(x+4-\sqrt{x^2+4x}\right)}{(x+4)\left(x+4-\sqrt{x^2+4x}\right)}$$

$$= \lim_{\substack{<\\x\to -4}} \frac{(x+4)^2-(x^2+4x)}{(x+4)\left(x+4-\sqrt{x^2+4x}\right)}$$

$$= \lim_{\substack{<\\x\to -4}} \frac{4(x+4)}{(x+4)\left(x+4-\sqrt{x^2+4x}\right)} = \lim_{\substack{<\\x\to -4}} \frac{4}{\left(x+4-\sqrt{x^2+4x}\right)} = -\infty$$

**تفسير النتيجة هندسيا**

المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل نصفي مماسين عموديين عند النقطتين ذات الفاصلتين 0 و 4-

**2. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x+1+\sqrt{x^2+4x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{(x+1)^2-(x^2+4x)}{x+1-\sqrt{x^2+4x}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x+1}{x+1-\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x+1}{x+1-(-x)\sqrt{\left(1+\frac{4}{x}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(-2+\frac{1}{x}\right)}{x\left[1+\frac{1}{x}+\sqrt{\left(1+\frac{4}{x}\right)}\right]} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{\left(1+\frac{4}{x}\right)}} = \boxed{-1}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x+1+\sqrt{x^2+4x} = \boxed{+\infty}$$

$$f'(x) = 1+\frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x}} = 1+\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}} = \frac{\sqrt{x^2+4x}+x+2}{\sqrt{x^2+4x}}$$

$$\sqrt{x^2+4x}+x+2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+4x} \geq -x-2$$

من أجل $x \in [0;+\infty[$ ، $-x-2<0$ : المتراجحة محققة من أجل كل $x>0$
من أجل $x \in ]-\infty;-4]$ ، $-x-2>2$ : نحل المتراجحة التالية :

$$\sqrt{x^2+4x} \geq -x-2 \Rightarrow x^2+4x \geq (-x-2)^2$$
$$\Rightarrow x^2+4x \geq x^2+4x+4 \Rightarrow 0 \geq 4 \text{ (مستحيل)}$$

نستنتج أنّه : من أجل $x \in [0;+\infty[$ ، فإنّ $f'(x)>0$ ، منه الدالة $f$ متزايدة
ومن أجل $x \in ]-\infty;-4]$ ، فإنّ $f'(x)<0$ ، منه الدالة $f$ متناقصة
جدول تغيرات الدالة $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | ‖ | | $+$ | | |
| $f(x)$ | $-1$ | ↘ | ‖ | | $1$ | ↗ | $+\infty$ |
| | | $-3$ | ‖ | | | | |

**3. حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+3)]$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(2x+3)] = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x}-(x+2)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x}-(x+2) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+4x)-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-4}{\sqrt{x^2+4x}+(x+2)} = \boxed{0}$$

نستنتج أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار $(+\infty)$ معادلته : $y=2x+3$

**4. رسم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ :** انظر الشكل في نهاية التمرين

**5.** $g(x)=x+1-\sqrt{x^2+4x}$ ; $Dg=]-\infty;-4]\cup[0;+\infty[$

**برهان أنّ المنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ متناظران بالنسبة للنقطة $\omega(-2;-1)$**

لتكن $F(X)$ و $G(X)$ عبارتي الدالتين $f(x)$ و $g(x)$ في المعلم $(\omega;\vec{i};\vec{j})$

$$\begin{cases} x=X-2 \\ y=Y-1 \end{cases}$$

$$f(x)=x+1+\sqrt{x^2+4x} \Rightarrow Y-1=X-1+\sqrt{(X-2)^2+4(X-2)}$$
$$\Rightarrow Y=X+\sqrt{X^2-4} \Rightarrow \boxed{F(X)=X+\sqrt{X^2-4}}$$
$$g(x)=x+1-\sqrt{x^2+4x} \Rightarrow Y-1=X-1-\sqrt{(X-2)^2+4(X-2)}$$
$$\Rightarrow Y=X-\sqrt{X^2-4} \Rightarrow \boxed{G(X)=X-\sqrt{X^2-4}}$$

$$F(-X) = -X + \sqrt{X^2 - 4} = -\left(X - \sqrt{X^2 - 4}\right) = -G(X)$$

منه ، نستنتج أنّ المنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ متناظران بالنسبة للنقطة $\omega(-2;-1)$

6. تعيين المجموعة $(\Gamma)$

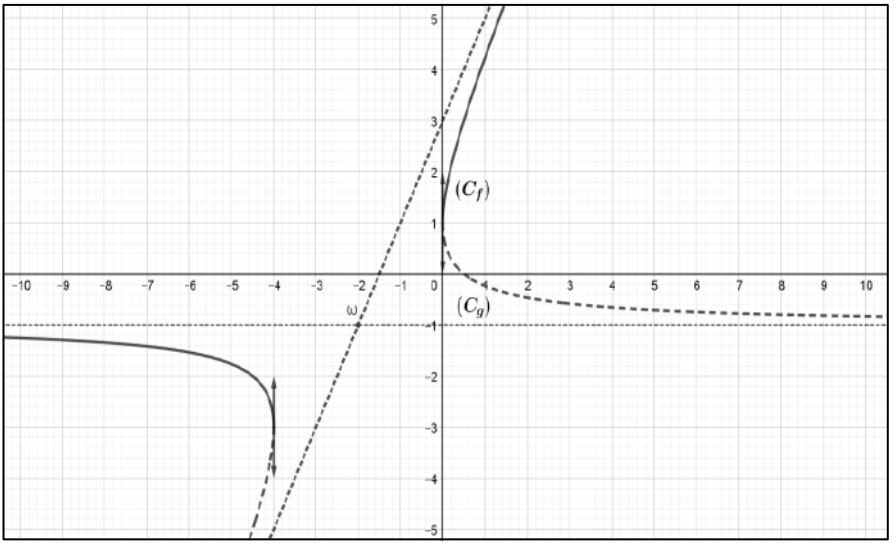
$$M(x;y) \in (\Gamma) \Rightarrow y^2 - 2y(x+1) - 2x + 1 = 0$$

$$\Delta' = (x+1)^2 - (-2x+1) = x^2 + 4x$$

$$y = x + 1 - \sqrt{x^2 + 4x} = g(x) \text{ أو } y = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} = f(x)$$

المجموعة $(\Gamma)$ هي اتحاد المنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$

**7. انشاء المجموعة $(\Gamma)$**




**حل التمرين 55:**

$$\boldsymbol{f_n(x) = (x^2 - 2x)^n \; ; \; Df_n = \mathbb{R}}$$

**1. دراسة تغيرات الدالة $f_n$**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^2 - 2x)^n = \lim_{x \to -\infty} x^{2n} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 2x)^n = \lim_{x \to +\infty} x^{2n} = \boxed{+\infty}$$

$$f'_n(x) = n(x^2 - 2x)^{n-1}(2x - 2) = \boxed{2nx^{n-1}(x-1)(x-2)^{n-1}}$$

**الحالة الأولى : $n$ زوجي**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^{n-1}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(x-2)^{n-1}$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**الحالة الثانية : $n$ فردي**

من أجل $n$ فردي ، يكون $n-1$ زوجي ، منه $x^{n-1} \geq 0$ و $(x-2)^{n-1} \geq 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^{n-1}$ | | $+$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(x-2)^{n-1}$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**2. تحقق أنّ المستقيم ذي المعادلة $x=1$ هو محور تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_n)$**

لتكن $F(X)$ عبارة الدالة $f(x)$ في المعلم $(\omega;\vec{i};\vec{j})$ ، حيث $\omega(1;0)$

$$\begin{cases} x = X+1 \\ y = Y \end{cases}$$

$$y=(x^2-2x)^n \Rightarrow Y=[(X+1)^2-2(X+1)]^n \Rightarrow F(X)=(X^2-1)^n$$

$F(-X)=[(-X)^2-1]^n=(X^2-1)^n=F(X) \Rightarrow$ الدالة $F$ زوجية

منه ، نستنتج أنّ المستقيم ذي المعادلة $x=1$ هو محور تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_n)$

**3. تبرير أنّ $(\mathscr{C}_n)$ يمرّ من أربع نقاط إحداثياتها مستقلة عن العدد الطبيعي $n$**

$\forall n \in \mathbb{N}: y=(x^2-2x)^n$

$y=0 \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow x=0$ أو $x=2$

$y>0 \Rightarrow \ln y=\ln(x^2-2x)^n \Rightarrow \ln y=n\ln(x^2-2x)$

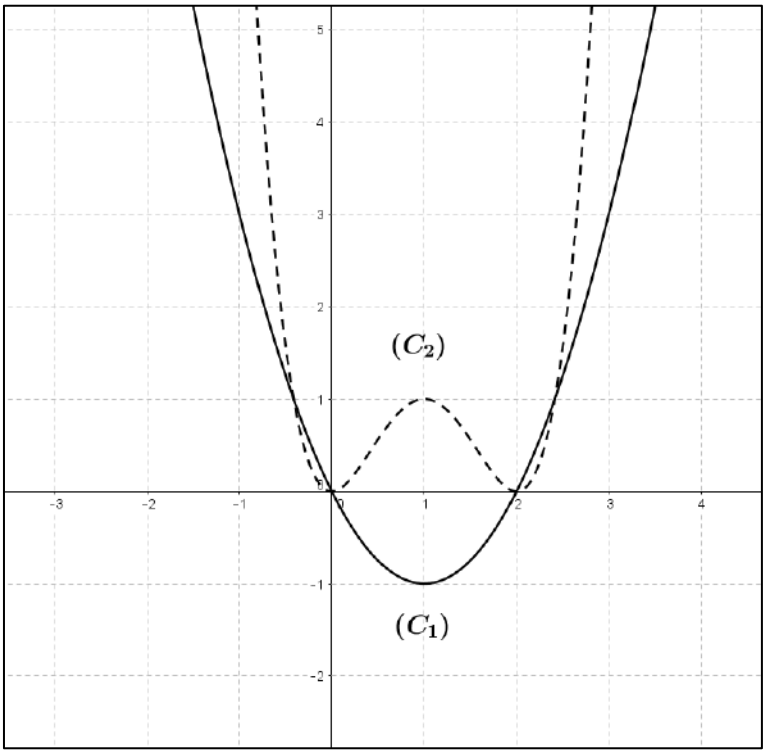
$$\Rightarrow n\ln(x^2-2x)-\ln y=0 \Rightarrow \begin{cases} \ln(x^2-2x)=0 \\ \ln y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-2x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases}$

نستنتج أن المنحنى ($\mathscr{C}_n$) يمرّ من أربع نقاط إحداثياتها مستقلة عن العدد الطبيعي $n$ وهي :

$O(0;0)$ ، $A(2;0)$ ، $B(1-\sqrt{2};1)$ ، $C(1+\sqrt{2};1)$

**4. رسم في نفس المعلم المنحنيين ($\mathscr{C}_1$) و ($\mathscr{C}_2$)**




**حل التمرين 56:**

$\boldsymbol{f(x) = 1 + 2\cos x + \cos 2x}$ ; $\boldsymbol{Df} = \mathbb{R}$

**1. إثبات أنّ الدالة $f$ زوجية وأنّ دورها $2\pi$**

من أجل كل $x \in Df$ ، فإنّ $(-x) \in Df$ ، ولدينا :

$$f(-x) = 1 + 2\cos(-x) + \cos(-2x) = 1 + 2\cos x + \cos 2x = f(x)$$

منه ، الدالة $f$ زوجية

$$f(x + 2\pi) = 1 + 2\cos(x + 2\pi) + \cos(2x + 4\pi)$$

$$f(x + 2\pi) = 1 + 2\cos x + \cos 2x = f(x)$$

منه ، الدالة $f$ دورية ودورها $2\pi$ ، لذا سنقتصر في دراسة الدالة $f$ على المجال $[0;\pi]$

**دراسة تغيرات الدالة $f$ على المجال $[0;\pi]$**

$f(0)=4\,;f(\pi)=0$

$f'(x)=-2\sin x-2\sin 2x=-2\sin x-4\sin x\cos x$

$\boxed{f'(x)=-2\sin x\,(1+2\cos x)}$

بما أنّ $\sin x\geq 0$ على المجال $[0;\pi]$ ، فإنّ إشارة $f'(x)$ هي عكس إشارة $1+2\cos x$

$1+2\cos x=0\Rightarrow\cos x=-\frac{1}{2}\Rightarrow\cos x=\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}$

$x\in\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]\Rightarrow 1+2\cos x\geq 0\Rightarrow f'(x)\leq 0\Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x\in\left]\frac{2\pi}{3};\pi\right]\Rightarrow 1+2\cos x<0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=1+2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=1+2\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)=\boxed{-\frac{1}{2}}$

جدول تغيرات الدالة $f$

| $x$ | $0$ | | $\frac{2\pi}{3}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $4$ | ↘ | $-\frac{1}{2}$ | ↗ | $0$ |

**2. ايجاد نقط تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مع حامل محور الفواصل**

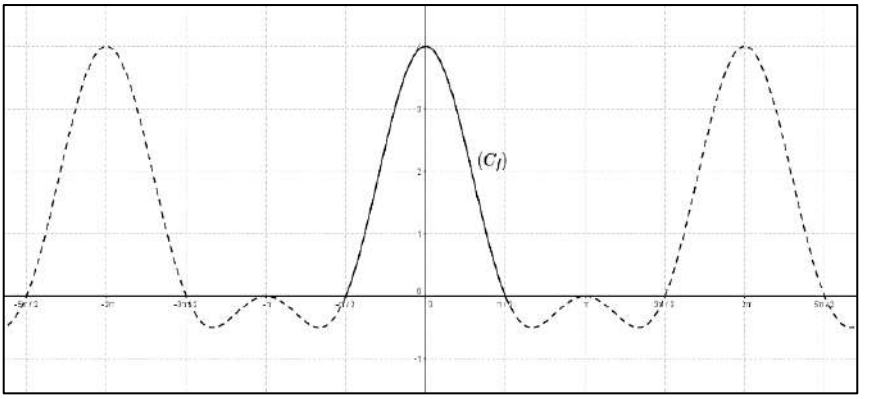
$f(x)=0\Rightarrow 1+2\cos x+\underbrace{\cos 2x}_{2\cos^2 x-1}=0\Rightarrow 2\cos x+2\cos^2 x=0$

$\Rightarrow 2\cos x\,(1+\cos x)=0\Rightarrow\cos x=0$ أو $\cos x=-1\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$ أو $x=\pi$

يقطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) محور الفواصل على المجال $[0;\pi]$ في نقطتين هما : $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ ; $(\pi;0)$

**3. رسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$) على المجال $[-\pi;\pi]$ واستنتاج كيفية رسمه على $\mathbb{R}$**

نرسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$) ابتداءً على المجال $[0;\pi]$ ، ثمّ نرسمه على المجال $[-\pi;0]$ بالتناظر المحوري (لأنّ الدالة $f$ زوجية) ، وأخيرا نسحبه على المجالين $]-\infty;-\pi[$ و $]\pi;+\infty[$ (لأنّ الدالة $f$ دورية ودورها $2\pi$)




**4. المناقشة البيانية حسب قيم الوسيط $m$ لعدد حلول الجملة :** $\begin{cases} \cos^2 x + \cos x = \frac{m}{2} \\ -\pi \leq x \leq \pi \end{cases}$

$\cos^2 x + \cos x = \frac{m}{2} \Rightarrow 2\cos^2 x + 2\cos x = m$

$\Rightarrow 1 + \cos 2x + 2\cos x = m \Rightarrow f(x) = m$

ندرس تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيم ذي المعادلة $y = m$ على المجال $[-\pi; \pi]$

- $m < -\frac{1}{2}$ : المعادلة لا تقبل حلا
- $m = -\frac{1}{2}$ : المعادلة تقبل حلين مضاعفين
- $-\frac{1}{2} < m \leq 0$ : المعادلة تقبل أربعة حلول
- $0 < m < 4$ : المعادلة تقبل حلين
- $m = 4$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا
- $m > 4$ : المعادلة لا تقبل حلا

**حل التمرين 57:**

**I-** $f_m(x) = \frac{-x^2-2x+7}{x^2-2x+m}$

**1. تعيين حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ مجموعة تعريف الدالة $f_m$**

$x^2 - 2x + m = 0$ ; $\Delta' = 1 - m$

$\Delta' < 0 \Rightarrow 1 - m < 0 \Rightarrow m > 1 \Rightarrow \boxed{D_{f_m} = \mathbb{R}}$

$\Delta' = 0 \Rightarrow 1 - m = 0 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow x' = x'' = 1 \Rightarrow \boxed{D_{f_m} = \mathbb{R} - \{1\}}$

$\Delta' > 0 \Rightarrow 1 - m > 0 \Rightarrow m < 1 \Rightarrow x' = 1 - \sqrt{1-m}$ ; $x'' = 1 + \sqrt{1-m}$

$\Rightarrow \boxed{D_{f_m} = \mathbb{R} - \{1 - \sqrt{1-m}\,; 1 + \sqrt{1-m}\}}$

**2. بيان أنّ جميع المنحنيات ($\mathscr{C}_m$) تشمل نقطتين ثابتتين يُطلب تعيين إحداثييها**

$$\forall m \in \mathbb{R} : y = \frac{-x^2-2x+7}{x^2-2x+m} \Rightarrow y(x^2-2x+m) = -x^2-2x+7$$

$$\forall m \in \mathbb{R} : my + x^2y - 2xy + x^2 + 2x - 7 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2y - 2xy + x^2 + 2x - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 2x - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 - 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

نستنتج أنّ جميع المنحنيات ($\mathscr{C}_m$) تشمل نقطتين ثابتتين هما :

$$\boxed{\left(-1+2\sqrt{2};0\right);(-1-2\sqrt{2};0)}$$

**3. تعيين $m$ حتى يشمل المنحنى ($\mathscr{C}_m$) النقطة $A(3;-2)$**

$$A(3;-2) \in (Cm) \Rightarrow -2 = \frac{-3^2-2(3)+7}{3^2-2(3)+m} \Rightarrow -2 = -\frac{8}{3+m}$$

$$\Rightarrow 2m + 6 = 8 \Rightarrow 2m = 2 \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

**II- $D_{f_1} = \mathbb{R} - \{1\}$ ، $f_1(x) = \frac{-x^2-2x+7}{x^2-2x+1} = \frac{-x^2-2x+7}{(x-1)^2}$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $f_1$**

$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2-2x+7}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^2}{x^2} = \boxed{-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2-2x+7}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x^2} = \boxed{-1}$$

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ <}} f_1(x) = \lim_{\substack{x\to1 \\ <}} \frac{-x^2-2x+7}{(x-1)^2} \begin{matrix} \to +4 \\ \to 0^+ \end{matrix} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to1 \\ >}} f_1(x) = \lim_{\substack{x\to1 \\ >}} \frac{-x^2-2x+7}{(x-1)^2} \begin{matrix} \to +4 \\ \to 0^+ \end{matrix} = +\infty$$

$$f'_1(x) = \frac{(-2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(-x^2-2x+7)}{(x-1)^4}$$

$$f'_1(x) = \frac{(-2x-2)(x-1) - 2(-x^2-2x+7)}{(x-1)^3} = \frac{4x-12}{(x-1)^3}$$

$$\boxed{f'_1(x) = \frac{4(x-3)}{(x-1)^3}}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-3$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $x-1$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | |
| $f'(x)$ | $+$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $f(x)$ | $-1$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $-2$ | | $-1$ | |

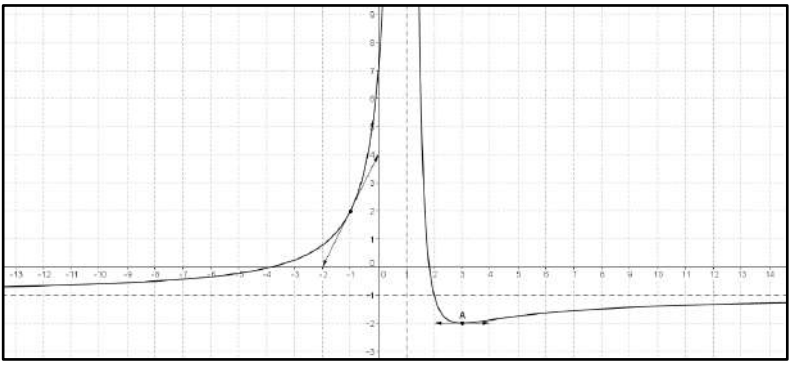
**2. تعيين المستقيمات المقاربة**

المنحنى ($\mathscr{C}_1$) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y=-1$ ، وآخر عموديا معادلته $x=1$

كتابة معادلة المماس للمنحنى ($\mathscr{C}_1$) عند النقطة ذات الفاصلة 1-

$$y=f'_1(-1)(x+1)+f_1(-1)=2(x+1)+2 \Rightarrow \boxed{y=2x+4}$$

**3. رسم المماس والمنحنى ($\mathscr{C}_1$)**



**4. مناقشة عدد وإشارة حلول المعادلة: $(k-1)x^2-2(k+1)x+k+7=0$**

$$(k-1)x^2-2(k+1)x+k+7=0 \Rightarrow k(x^2-2x+1)=x^2+2x-7$$

$$\Rightarrow k=\frac{x^2+2x-7}{x^2-2x+1} \Rightarrow \boxed{-k=f_1(x)}$$

ندرس تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_1$) مع المستقيم ذي المعادلة $y=-k$

- $-k<-2 \Rightarrow k>2$ : المعادلة لا تقبل حلا
- $-k=-2 \Rightarrow k=2$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا
- $-2<-k<-1 \Rightarrow 1<k<2$ : المعادلة تقبل حلين موجبين
- $-k=-1 \Rightarrow k=1$ : المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا
- $-1<-k<7 \Rightarrow -7<k<1$ : المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة
- $-k=7 \Rightarrow k=-7$ : المعادلة تقبل حلا موجبا وآخر معدوما
- $k>7$ : المعادلة تقبل حلين موجبين

**III- $g(x)=\frac{x^2+2x-7}{|x-1|(x-1)}$ ; $Dg=\mathbb{R}-\{1\}$**

**1. كتابة عبارة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة**

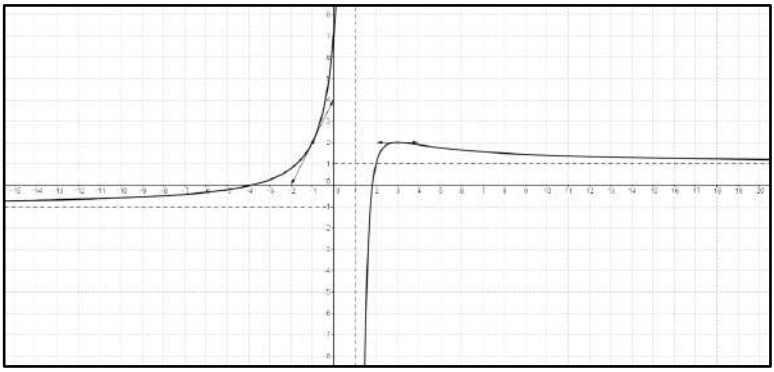
$x-1>0 \Rightarrow x>1 : \ |x-1|=x-1 \Rightarrow \boxed{g(x)=-f_1(x)}$

$x-1<0 \Rightarrow x<1 : \ |x-1|=-(x-1) \Rightarrow \boxed{g(x)=f_1(x)}$

**2. تفسير كيف يمكن رسم المنحنى (γ) انطلاقا من المنحنى ($\mathscr{C}_1$)**

- من أجل $x \in ]-\infty;1[$ : المنحنى (γ) متطابق مع المنحنى ($\mathscr{C}_1$)
- من أجل $x \in ]1;+\infty[$ : المنحنى (γ) نظير المنحنى ($\mathscr{C}_1$) بالنسبة لمحور الفواصل

**رسم المنحنى (γ)**



**حل التمرين 58:**

**I- $f_m(x)=\frac{3x^2-mx}{x-3}$ ; $Df_m=\mathbb{R}-\{3\}$**

**1. بيان أنّه توجد نقطة وحيدة A تنتمي إلى كل المنحنيات ($\mathscr{C}_m$)**

$\forall m \in \mathbb{R} : \ y=\frac{3x^2-mx}{x-3} \Rightarrow y(x-3)=3x^2-mx$

$\Rightarrow mx-3x^2+xy-3y=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ -3x^2+xy-3y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

منه توجد نقطة وحيدة تنتمي إلى كل المنحنيات ($\mathscr{C}_m$) وهي المبدأ $O$

**2. تعيين قيم $m$ التي تجعل الدالة $f_m$ تتغير دوما في نفس الاتجاه**

$$f'_m(x)=\frac{(6x-m)(x-3)-(3x^2-mx)}{(x-3)^2}=\frac{3x^2-18x+3m}{(x-3)^2}$$

$3x^2-18x+3m=0 \Rightarrow x^2-6x+m=0$ ; $\Delta'=9-m$ ;

من أجل $m \in [9 ; +\infty[$ ، تكون $\Delta' \leq 0$ ، أي $f'_m(x) \geq 0$ ، منه تتغير الدالة $f_m$ دوما في نفس الاتجاه

**3. تعيين قيم $m$ التي تجعل الدالة $f_m$ تقبل قيمتين حديتين محليتين**

من أجل $m \in ]-\infty;9[$ ، تكون $\Delta > 0$ ، منه تقبل الدالة $f_m$ قيمة حدية محلية عظمى و قيمة حدية محلية صغرى

**II- $g(x) = f_5(x) = \frac{3x^2-5x}{x-3}$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-5x}{x-3} = \lim_{x\to-\infty} 3x = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-5x}{x-3} = \lim_{x\to+\infty} 3x = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{\substack{<\\x\to3}} g(x) = \lim_{\substack{<\\x\to3}} \frac{3x^2-5x}{x-3} \to \frac{12}{0^-} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{\substack{>\\x\to3}} g(x) = \lim_{\substack{>\\x\to3}} \frac{3x^2-5x}{x-3} \to \frac{12}{0^+} = \boxed{+\infty}$$

$$g'(x) = \frac{3x^2-18x+15}{(x-3)^2}$$

$3x^2-18x+15 = 0 \Rightarrow x^2-6x+5 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-5) = 0$

$\Rightarrow x = 1$ أو $x = 5$

$x \in ]-\infty;1] \cup [5;+\infty[ : g'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

$x \in ]1;3[ \cup ]3;5[ : g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $\|$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-1$ | ↘ | $+\infty$ | ↘ | $25$ | ↗ | $+\infty$ |

**2. برهان أنّه توجد نقطتين من $(\mathscr{C}_g)$ يكون عندهما ميل المماس يساوي 2**

$$g'(x) = 2 \Rightarrow \frac{3x^2-18x+15}{(x-3)^2} = 2 \Rightarrow 3x^2-18x+15 = 2(x-3)^2$$

$\Rightarrow x^2-6x-3 = 0 \Rightarrow x = 3-2\sqrt{3}$ أو $x = 3+2\sqrt{3}$

كتابة معادلة هذين المماسين

$$(T): y = g'(3-2\sqrt{3})(x-3+2\sqrt{3}) + g(3-2\sqrt{3}) \Rightarrow \boxed{y = 2x+7-4\sqrt{3}}$$

$$(T'): y = g'(3+2\sqrt{3})(x-3-2\sqrt{3}) + g(3+2\sqrt{3}) \Rightarrow \boxed{y = 2x+7+4\sqrt{3}}$$

**3. تعيين الأعداد الحقيقية γ ، β ، α حيث : $g(x)=\alpha x+\beta+\frac{\gamma}{x-3}$**

$$g(x)=\frac{3x^2-5x}{x-3}=\frac{(x-3)(3x+4)+12}{x-3}=\boxed{3x+4+\frac{12}{x-3}}$$

**4. بيان أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_g$) يقبل مستقيمين مقاربين يُطلب تعيين نقطة تقاطعهما ω**

$\lim\limits_{\substack{<\\x\to 3}} g(x)=-\infty\ ;\ \lim\limits_{\substack{>\\x\to 3}} g(x)=+\infty \Rightarrow$ $\boxed{(\Delta): x=3}$ مستقيم مقارب عمودي

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)-(3x+4)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{12}{x-3}=0 \Rightarrow$ $\boxed{(\Delta'): y=3x+4}$ مستقيم مقارب مائل

$$\omega(x;y)\in(\Delta)\cap(\Delta')\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=3x+4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=13\end{cases}\Rightarrow\boxed{\omega(3;13)}$$

**5. بيان أنّ النقطة ω مركز تناظر للمنحنى ($\mathscr{C}_g$)**

ω مركز تناظر للمنحنى ($\mathscr{C}_g$) يستلزم : $\begin{cases}x\in Dg\Rightarrow(6-x)\in Dg\\ g(6-x)+g(x)=26\end{cases}$

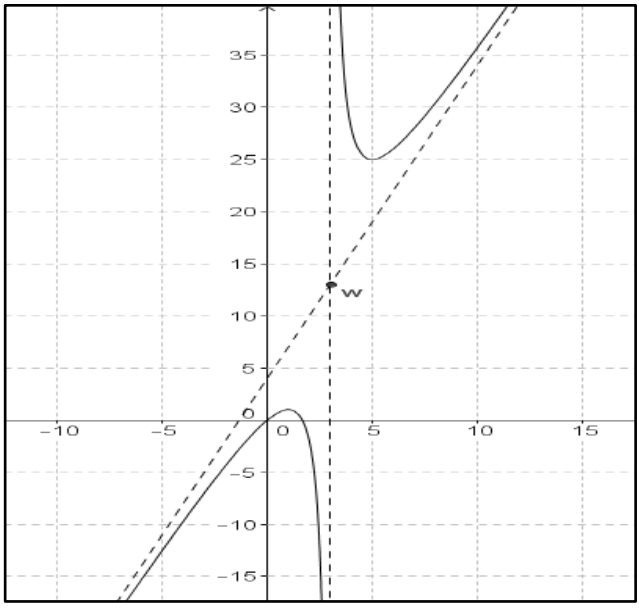
$$x\in Dg\Rightarrow x\neq 3\Rightarrow -x\neq -3\Rightarrow(6-x)\neq 3\Rightarrow(6-x)\in Dg$$

$$g(6-x)+g(x)=3(6-x)+4+\frac{12}{(6-x)-3}+3x+4+\frac{12}{x-3}$$

$$g(6-x)+g(x)=26+\frac{12}{3-x}+\frac{12}{x-3}=26-\frac{12}{x-3}+\frac{12}{x-3}=26$$

منه ، نستنتج أنّ النقطة ω مركز تناظر للمنحنى ($\mathscr{C}_g$)

**6. انشاء المنحنى ($\mathscr{C}_g$)**



**7. مناقشة عدد وإشارة حلول المعادلة: $3x^2-(2\lambda+5)x+6\lambda=0$**

$3x^2-(2\lambda+5)x+6\lambda=0 \Rightarrow 3x^2-5x-2\lambda(x-3)=0$

$\Rightarrow 2\lambda=\dfrac{3x^2-5x}{x-3} \Rightarrow \boxed{2\lambda=g(x)}$

ندرس تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ مع المستقيم ذي المعادلة : $y=2\lambda$

- $2\lambda<0$ ، أي $\lambda<0$ : المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة
- $2\lambda=0$ ، أي $\lambda=0$ : المعادلة تقبل حلا معدوما وآخر موجبا
- $0<2\lambda<1$ ، أي $0<\lambda<\frac{1}{2}$ : المعادلة تقبل حلين موجبين
- $2\lambda=1$ ، أي $\lambda=\frac{1}{2}$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا
- $1<2\lambda<25$ ، أي $\frac{1}{2}<\lambda<\frac{25}{2}$ : المعادلة لا تقبل حلا
- $2\lambda=25$ ، أي $\lambda=\frac{25}{2}$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا
- $2\lambda>25$ ، أي $\lambda>\frac{25}{2}$ : المعادلة تقبل حلين موجبين

**8. $h(x)=\frac{3x^2-5|x|}{|x|-3}$**

**أ. تعيين مجموعة تعريف الدالة $h$**

$|x|-3=0 \Rightarrow |x|=3 \Rightarrow x=3$ أو $x=-3 \Rightarrow \boxed{Dh=\mathbb{R}-\{-3;3\}}$

**ب. دراسة قابلية الاشتقاق للدالة $h$ عند $x_0=0$**

$x<0 : |x|=-x \Rightarrow h(x)=\dfrac{3x^2+5x}{-x-3}$

$x>0 : |x|=x \Rightarrow h(x)=\dfrac{3x^2-5x}{x-3}$

$$\lim_{\substack{<\\ x\to 0}}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{\substack{<\\ x\to 0}}\frac{3x^2+5x}{x(-x-3)}=\lim_{\substack{<\\ x\to 0}}\frac{x(3x+5)}{x(-x-3)}=\lim_{\substack{<\\ x\to 0}}\frac{3x+5}{-x-3}=\boxed{-\frac{5}{3}}$$

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 0}}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{\substack{>\\ x\to 0}}\frac{3x^2-5x}{x(x-3)}=\lim_{\substack{>\\ x\to 0}}\frac{x(3x-5)}{x(x-3)}=\lim_{\substack{>\\ x\to 0}}\frac{3x-5}{x-3}=\boxed{\frac{5}{3}}$$

منه ، الدالة $h$ غير قابلية للاشتقاق عند $x_0=0$

**ج. دراسة شفعية الدالة $h$**

$Dh$ متناظر بالنسبة إلى الصفر ، ومن أجل كل $x\in Dh$ فإنّ :

$$h(-x)=\frac{3x^2-5|-x|}{|-x|-3}=\frac{3x^2-5|x|}{|x|-3}=h(x)$$

منه ، الدالة $h$ زوجية

**د. برهان أنّ $h(x) = g(x)$ على مجال I يُطلب تعيينه**

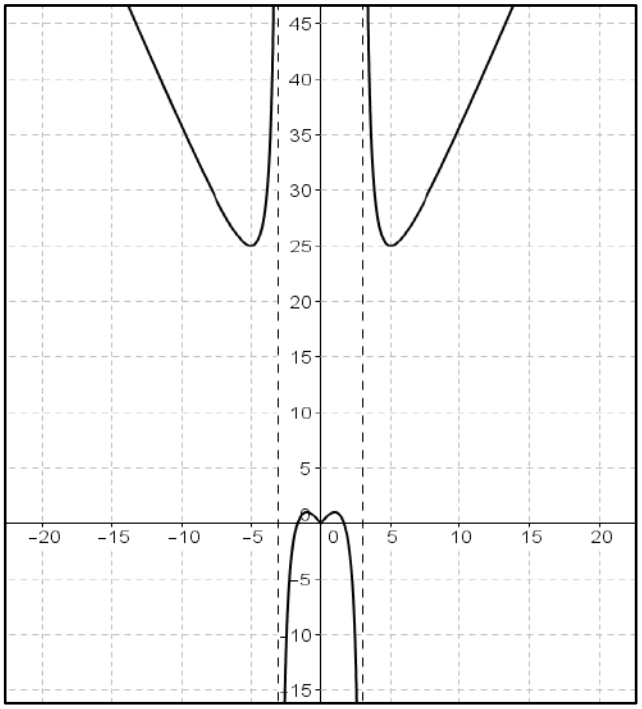
$$x > 0 : |x| = x \Rightarrow h(x) = \frac{3x^2 - 5x}{x - 3} \Rightarrow h(x) = g(x)$$

منه ، الدالة $h$ تساوي الدالة $g$ على المجال $\boxed{I = [0;3[ \cup ]3;+\infty[}$

**استنتاج كيفية رسم المنحنى ($\mathscr{C}_h$)**

- من أجل $x \in [0;3[ \cup ]3;+\infty[$ : المنحنى ($\mathscr{C}_h$) متطابق مع المنحنى ($\mathscr{C}_g$)
- من أجل $x \in ]-\infty;-3[ \cup ]-3;0[$ : نرسم المنحنى ($\mathscr{C}_h$) بالتناظر المحوري

**ه. رسم المنحنى ($\mathscr{C}_h$)**




**<u>حل التمرين 59:</u>**

اختر في كل حالة الإجابة الصحيحة مع التبرير:

$1)\ f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

$x^2 + x + 1 \geq 0\ ;\ \Delta < 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$x^2 + 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow (x-1)(x+3) \geq 0 \Rightarrow x \in ]-\infty;-3] \cup [1;+\infty[$

$\boxed{Df = ]-\infty;-3] \cup [1;+\infty[}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-x-6}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}}=\boxed{1}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\dfrac{\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}-1\right)\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}+1\right)}{\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}+1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}x\dfrac{\frac{x}{x+1}-1}{\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}+1\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}\times\dfrac{-1}{\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}+1\right)}=\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

4) $f(x)=x+\cos^2 x\,;f'(x)=1+2\cos x\,(\cos x)'=1-2\sin x\cos x$

$\Rightarrow\boxed{f'(x)=1-\sin 2x}$

5) $f(x)=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+1;f'(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{x}+\dfrac{2}{3}x\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\dfrac{2}{3}\sqrt{x}+\dfrac{1}{3}\sqrt{x}=\boxed{\sqrt{x}}$

6) $\lim\limits_{x\to2}f(x)=0^+\Rightarrow\boxed{\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty}$

7) المعادلة $f(x)=-1$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على $\mathbb{R}$ $(\alpha\in\,]-\infty;0[)$

8) $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=1\Rightarrow\boxed{f(x)=1-\dfrac{1}{(x+2)^2}}$

9) $\lim\limits_{x\to-2}f(x)=-\infty\Rightarrow\boxed{x=-2\text{ مستقيم مقارب عمودي}}$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\dfrac{1}{(x+2)^2}=\boxed{1}$

11) $f(1-x)+f(x)=1\Rightarrow f\left[2\left(\dfrac{1}{2}\right)-x\right]+f(x)=2\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow\boxed{\Omega\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)\text{ مركز تناظر}}$

12) $A(2;1);B(3{,}5;0);f'(2)=\dfrac{0-1}{3{,}5-2}=-\dfrac{1}{1{,}5}=-\dfrac{1}{\frac{3}{2}}\Rightarrow\boxed{f'(2)=-\dfrac{2}{3}}$

13) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0}$

14) $\boxed{f'(0)=0}$ (قيمة حدّية عظمي)

15) $f(x)=\begin{cases}x^2-1; x\leq 0\\ x+m; x>0\end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} x^2-1=-1$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x+m=m$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=f(0)\Rightarrow \boxed{m=-1}$

## V مواضيع الدوال العددية في البكالوريا

**حل التمرين 60 : بكالوريا 2008 ر**

$\boldsymbol{f(x)=3+\sqrt{x-1}}$ ; $\boldsymbol{Df=[1;+\infty[}$

1. **حساب** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} \frac{1}{\sqrt{x-1}}=\boxed{+\infty}$$

**تفسير النتيجة هندسيا**

يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) نصف مماس يوازي محور التراتيب عند النقطة ذات الفاصلة 1

2. **دراسة تغيرات الدالة** $\boldsymbol{f}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 3+\sqrt{x-1}=+\infty$$

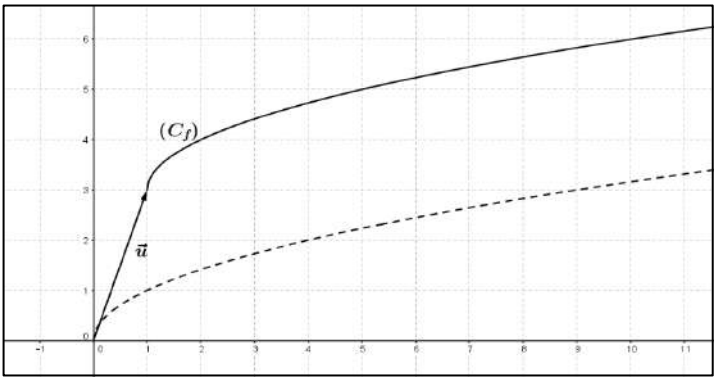
$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ ; $f'(x)>0\Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة** $\boldsymbol{f}$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3. **انشاء المنحنى ($\mathscr{C}_f$) باستعمال منحنى دالة "الجذر التربيعي"**

بما أنّ $f(x)=\sqrt{x-1}+3$ (من الشكل $\sqrt{x+a}+b$) ، فإنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) هو صورة منحنى دالة "الجذر التربيعي" بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ ، أي $\begin{pmatrix}-a\\b\end{pmatrix}$




**حل التمرين 61 : بكالوريا 2008 ع ت**

$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$ ; $Dg = [-1; +\infty[$

1. **أ. جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | | ↗ | $+\infty$ |
| | $-2$ | | |

$g\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ ، $g(0) = -1$

**ب. تعليل وجود عدد حقيقي $\alpha$ من المجال $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ يحقق $g(\alpha) = 0$**

الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ ، $g(0) \times g\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $\left]0; \frac{1}{2}\right[$

**ج. استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $[-1; +\infty[$**

$x \in [-1; \alpha[ : g(x) < 0$ ; $x \in [\alpha; +\infty[ : g(x) \geq 0$

2. $f(x) = \frac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$ ; $Df = ]-1; +\infty[$

**أ. التحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $Df$ : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$**

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x + 3)(x + 1)^2 - 2(x + 1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)}{(x + 1)^4}$$

$$= \frac{(x + 1)[(3x^2 + 6x + 3)(x + 1) - 2(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)]}{(x + 1)^4}$$

$$= \frac{(3x^3 + 3x^2 + 6x^2 + 6x + 3x + 3 - 2x^3 - 6x^2 - 6x - 4)}{(x + 1)^3}$$

$$= \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{(x+1)^3} = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$$

**ب. تعيين دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وتفسير النتيجة بيانيا**

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{(\alpha+1)^3} = \boxed{0}$$

يقبل المنحنى $(\Gamma)$ مماسا يوازي محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة $\alpha$

**ج. حساب $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (x+1)]$**

$$\lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2} \begin{matrix} \to +1 \\ \to 0^+ \end{matrix} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x+1)^2} - (x+1)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2 - (x+1)^3}{(x+1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x+1)^2} = \boxed{0}$$

**تفسير النتيجتين بيانيا**

يقبل المنحنى $(\Gamma)$ مستقيما مقاربا عموديا معادلته : $x = -1$ وآخر مائلا بجوار $(+\infty)$معادلته : $y = x + 1$

**د. جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3. نأخذ $\alpha = 0{,}26$

**أ. تعيين مدوّر $f(\alpha)$ إلى $10^{-2}$**

$$f(\alpha) \approx \frac{(0{,}26)^3 + 3(0{,}26)^2 + 3(0{,}26) + 2}{(0{,}26+1)^2} \approx \boxed{1{,}89}$$

**ب. رسم المنحنى $(\Gamma)$**

4. كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2}$

$$f(x) = x + a + \frac{b}{(x+1)^2} = \frac{(x+a)(x+1)^2 + b}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+a)(x^2+2x+1)+b}{(x+1)^2} = \frac{x^3+(2+a)x^2+(1+2a)x+a+b}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2+a=3 \\ 1+2a=3 \\ a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{f(x)=x+1+\frac{1}{(x+1)^2}}$$

**حل التمرين 62 : بكالوريا 2008 ت إ**

1. **حساب $f'(x)$**

$$f'(x)=a-\frac{c}{(x-1)^2}$$

2. اعتمادا على جدول تغيرات الدالة $f$ :

**أ. تعيين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ ، $c$**

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right)=1 \\ f\left(\frac{3}{2}\right)=3 \\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a+b+\frac{c}{-\frac{1}{2}}=1 \\ \frac{3}{2}a+b+\frac{c}{\frac{1}{2}}=3 \\ a-\frac{c}{\frac{1}{4}}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a+b-2c=1 \\ \frac{3}{2}a+b+2c=3 \\ a-4c=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ b+8c=3 \\ a=4c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \boxed{f(x)=x+1+\frac{1}{4(x-1)}}$$

**ب. تعيين $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x)$ وتفسير النتيجة بيانيا**

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ >}} f(x)=+\infty \; ; \; \lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} f(x)=-\infty$$

المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته : $x=1$

**ج. المقارنة بين صورتي العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ بالدالة $f$**

لدينا $\frac{1}{2}<\frac{3}{4}$ والدالة $f$ متناقصة على المجال $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[$ ، منه $\boxed{f\left(\frac{1}{2}\right)>f\left(\frac{3}{4}\right)}$

3. $\boldsymbol{f(x)=x+1+\frac{1}{4(x-1)}}$

**أ. بيان أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيما مقاربا ($\Delta$) معادلته: $y=x+1$**

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x)-(x+1)=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{1}{4(x-1)}=\boxed{0}$$

منه ، يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مستقيما مقاربا ($\Delta$) معادلته: $y=x+1$

**ب. دراسة وضعية المنحنى ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة إلى المستقيم ($\Delta$)**

$$f(x)-(x+1)=\frac{1}{4(x-1)}$$

من أجل $x\in\ ]-\infty;1[$ ، يكون المنحنى ($\mathscr{C}_f$) تحت المستقيم ($\Delta$)

من أجل $x\in\ ]1;+\infty[$ ، يكون المنحنى ($\mathscr{C}_f$) فوق المستقيم ($\Delta$)

**ج. إثبات أنّ النقطة $\omega(1;2)$ مركز تناظر للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**

- $x\in Df\Rightarrow x\neq 1\Rightarrow -x\neq -1\Rightarrow 2-x\neq 1\Rightarrow (2-x)\in Df$
- $f(2-x)+f(x)=2-x+1+\frac{1}{4(2-x-1)}+x+1+\frac{1}{4(x-1)}$

$$=4+\frac{1}{4(1-x)}+\frac{1}{4(x-1)}=4-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{1}{4(x-1)}=\boxed{4}$$

**د. تعيين نقط تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مع حامل محور الفواصل**

$$x+1+\frac{1}{4(x-1)}=0\Rightarrow\frac{4(x-1)(x+1)+1}{4(x-1)}=0\Rightarrow 4x^2-3=0$$

$$\Rightarrow\left(2x-\sqrt{3}\right)\left(2x+\sqrt{3}\right)=0\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ أو }x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow\boxed{(Cf)\cap(xx')=\left\{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right);\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)\right\}}$$

4. **تعيين بيانيا حسب قيم $\lambda$ عدد حلول المعادلة $f(x)=|\lambda|$**

ندرس تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مع المستقيم ذي المعادلة $y=|\lambda|$ ، حيث $|\lambda|\geq 0$

- $0\leq|\lambda|<1\Rightarrow\lambda\in\ ]-1;1[$ : المعادلة تقبل حلين
- $|\lambda|=1\Rightarrow\lambda\in\{-1;1\}$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا
- $1<|\lambda|<3\Rightarrow\lambda\in\ ]-3;-1[\cup]1;3[$ : المعادلة لا تقبل حلول
- $|\lambda|=3\Rightarrow\lambda\in\{-3;3\}$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا
- $|\lambda|>3\Rightarrow\lambda\in\ ]-\infty;-3[\cup]3;+\infty[$ : المعادلة تقبل حلين

**حل التمرين 63 : بكالوريا 2009 ر**

$$f(x)=x-\frac{2}{\sqrt{x+1}}\ ;\ Df=\ ]-1;+\infty[$$

1. **دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} x - \frac{2}{\sqrt{x+1}} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x - \frac{2}{\sqrt{x+1}} = \boxed{+\infty}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{\frac{2}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} = 1 + \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

2. **أ. بيان أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (D) معادلته: $y = x$**

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x) = -\infty \Rightarrow x = -1$ مستقيم مقارب عمودي

$\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to +\infty} -\frac{2}{\sqrt{x+1}} = 0 \Rightarrow (D): y = x$ مستقيم مقارب مائل

**ب. دراسة الوضعية النسبية للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) و (D)**

$f(x) - x = -\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ; $f(x) - x < 0 \Rightarrow (D)$ تحت $(Cf)$

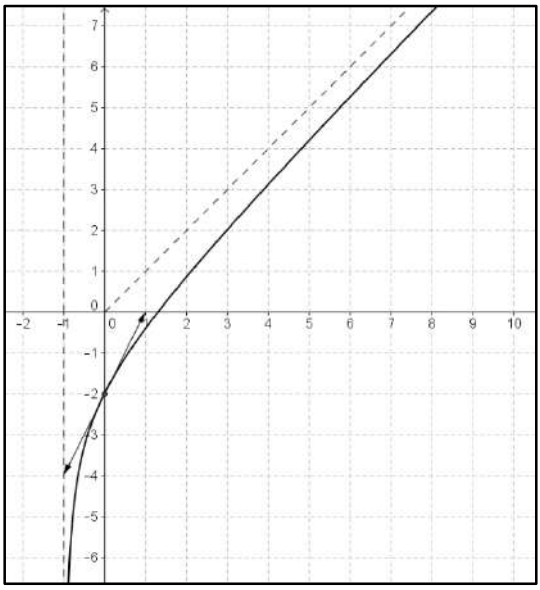
3. **أ. بيان أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $x_0$ حيث $1,3 < x_0 < 1,4$**

$f(1,3) = -0,02$ ، $f(1,4) = 0,11$ . الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على المجال ]1,3 ; 1,4[ و $f(1,3) \times f(1,4) < 0$ ، منه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $x_0$ على المجال ]1,3 ; 1,4[ ، أي يقطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $x_0$ حيث $1,3 < x_0 < 1,4$.

**ب. تعيين معادلة ($\Delta$) مماسا للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) في نقطة تقاطعه مع محور التراتيب**

$y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow \boxed{(\Delta): y = 2x - 2}$

**ج. رسم $(\Delta)$ و $(\mathscr{C}_f)$ في نفس المعلم**



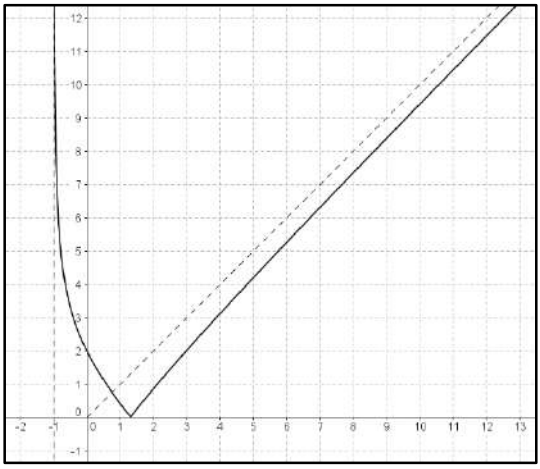
4. $\boldsymbol{g(x) = |f(x)|\ ; Dg = ]-1; +\infty[}$

- **بيان كيف يمكن إنشاء $(\mathscr{C}_g)$ انطلاقا من $(\mathscr{C}_f)$ ورسمه في نفس المعلم السابق**

$g(x) = |f(x)|; f(x) \geq 0 \Rightarrow x \in [x_0; +\infty[ \begin{cases} g(x) = -f(x); x \in ]-1; x_0[ \\ g(x) = f(x); x \in [x_0; +\infty[ \end{cases}$

$x \in ]-1; x_0[ : \ g(x) = -f(x) \Rightarrow$ متناظران بالنسبة لمحور الفواصل $(Cg)$ و $(Cf)$

$x \in [x_0; +\infty[ : \ g(x) = f(x) \Rightarrow$ متطابقان $(Cg)$ و $(Cf)$



5. **المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول $x$ : $g(x) = m^2$**

ندرس تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ مع المستقيم ذي المعادلة : $y = m^2$

- $m^2 = 0$ ، أي $m = 0$ : المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا $(x_0)$
- $0 < m^2 < 2$ ، أي $m \in ]-\sqrt{2}; 0[ \cup ]0; \sqrt{2}[$ : المعادلة تقبل حلين موجبين
- $m^2 = 2$ ، أي $m \in \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$ : المعادلة تقبل حلا معدوما وآخر موجبا
- $m^2 > 2$ ، أي $m \in ]-\infty; -\sqrt{2}[ \cup ]\sqrt{2}; +\infty[$ : المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة

**حل التمرين 64 : بكالوريا 2009 ع ت**

**I- $f(x) = -x + \frac{4}{x+1}$ ; $Df = I = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0]$**

1. **أ. حساب نهايات $f$ عند الحدود المفتوحة لـ I**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -x + \frac{4}{x+1} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ < }} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ < }} -x + \frac{4}{x+1} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ > }} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ > }} -x + \frac{4}{x+1} = \boxed{+\infty}$$

**ب. جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $4$ |

2. $g(x) = x + \frac{4}{x+1}$ ; $Dg = [0; +\infty[$

**أ. حساب نهاية $g$ عند $+\infty$**

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x + \frac{4}{x+1} = \boxed{+\infty}$$

**ب. التحقق من أنّ $(\mathscr{C}_g)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ عند $+\infty$**

$$\lim_{x \to +\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x+1} = \boxed{0} \Rightarrow \boxed{(\Delta): y = x \text{ مستقيم مقارب مائل}}$$

**ج. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$g'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \boxed{\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}}$$

بما أنّ $x+3>0$ و $(x+1)^2>0$ ، فإنّ إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $x-1$

الدالة $g$ متناقصة $\Rightarrow x-1<0 \Rightarrow g'(x)<0$ $x\in[0;1[$

الدالة $g$ متزايدة $\Rightarrow x-1\geq 0 \Rightarrow g'(x)\geq 0$ $x\in[1;+\infty[$

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $4$ | ↘ | $3$ | ↗ | $+\infty$ |

**II- $k(x)=|x|+\frac{4}{x+1}$ ; $Dk=\mathbb{R}-\{-1\}$**

1. **أ. حساب $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$ ، $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{k(h)-k(0)}{h}$.**

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{h+\frac{4}{h+1}-4}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{(h-4)(h+1)+4}{h(h+1)}$$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{h^2-3h}{h(h+1)}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{h(h-3)}{h(h+1)}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\frac{h-3}{h+1}=\boxed{-3}$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{k(h)-k(0)}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{-h+\frac{4}{h+1}-4}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{(-h-4)(h+1)+4}{h(h+1)}$$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{-h^2-5h}{h(h+1)}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{h(-h-5)}{h(h+1)}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{-h-5}{h+1}=\boxed{-5}$$

نستنتج أنّ الدالة $k$ غير قابلة للاشتقاق عند $0$

**ب. اعطاء تفسير هندسي لهذه النتيجة**

يقبل المنحنى البياني $(\mathscr{C}_k)$ عند النقطة $(0;4)$ نصفي مماسين ميليهما $-5$ (على اليسار) و $-3$ (على اليمين)

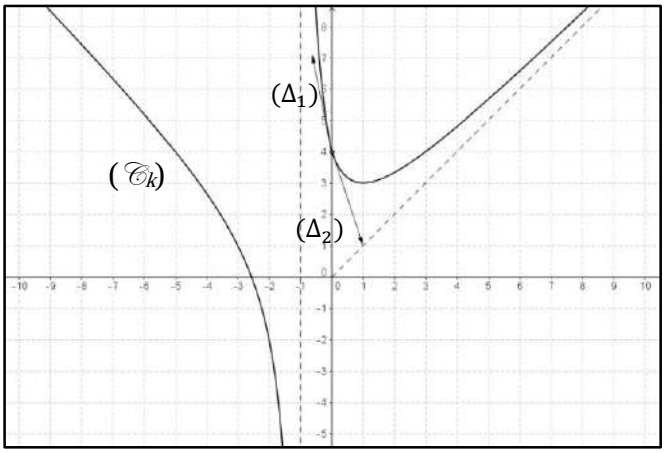
2. **كتابة معادلتي المماسين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$**

$(\Delta_1): y=-5x+4$ ; $(\Delta_2): y=-3x+4$

3. **رسم $(\Delta_1)$ ، $(\Delta_2)$ و $(\mathscr{C}_k)$**

$x\in]-\infty;-1[\cup]-1;0[$ : $k(x)=f(x)\Rightarrow$ متطابقان $(Cf)$ و $(Ck)$

$x\in[0;+\infty[$ : $k(x)=g(x)\Rightarrow$ متطابقان $(Ck)$ و $(Cg)$




**حل التمرين 65 : بكالوريا 2010 ت ر**

$$\boldsymbol{Df = \mathbb{R}\ ،\ f(x) = x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)}$$

1. **أ. إثبات أنّ الدالة $f$ فردية**

$Df$ متناظر بالنسبة إلى الصفر ، ومن أجل كل $x \in Df$ ، لدينا :

$$f(-x) = -x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{(-x)^2+1}}\right) = -x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = -f(x)$$

منه ، الدالة $f$ فردية

**ب. إثبات أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا: $\boldsymbol{f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}}$**

$$f'(x) = 1 + \frac{\sqrt{x^2+1} - x\left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1} = 1 + \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \boxed{1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}}$$

**ج. دراسة تغيرات الدالة $f$**

بما أنّ $f'(x) > 0$ ، فإنّ الدالة $f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \boxed{+\infty}$$

2. **أ. كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) في النقطة ذات الفاصلة 0**

$y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow \boxed{(T): y = 2x}$

**ب. دراسة وضعية ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة للمماس (T)**

$$f(x) - 2x = x\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) - 2x = x\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$x^2 + 1 > 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} < 1 \Rightarrow -1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} < 0$$

منه ، إشارة $f(x) - 2x$ هي عكس إشارة $x$ ، أي :

$x < 0 : \ f(x) - 2x > 0 \Rightarrow (T)$ فوق $(Cf)$

$x > 0 : \ f(x) - 2x < 0 \Rightarrow (T)$ تحت $(Cf)$

**استنتاج أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيينها**

بما أنّ وضعية ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة للمماس (T) تتغير عند نقطة التماس ، نستنتج أنّ هذه النقطة (المبدأ) هي نقطة انعطاف بالنسبة للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)

**ج. بيان أنّ المستقيم $(d): y = x + 1$ مقارب للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) في جوار $+\infty$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - 1 = \boxed{0}$$

منه ، المستقيم $(d): y = x + 1$ مقارب للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) في جوار $+\infty$

**د. استنتاج معادلة $(d')$ المستقيم المقارب الآخر**

بما أنّ الدالة $f$ فردية ، فإنّ المستقيم المقارب الآخر $(d')$ للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) في جوار $-\infty$ ، هو نظير المستقيم $(d)$ بالنسبة للمبدأ ، أي :

$$(d): y = x + 1 \Rightarrow (d'): -y = -x + 1 \Rightarrow \boxed{(d'): y = x - 1}$$

**ه. رسم $(d')$ ، $(d)$ و ($\mathscr{C}_f$) :** (انظر نهاية التمرين)

$$g(x) = |x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) ; Dg = \mathbb{R}$$

**أ. بيان أنّ الدالة g زوجية**

$Dg$ متناظر بالنسبة إلى الصفر ، ومن أجل كل $x \in Dg$ ، لدينا :

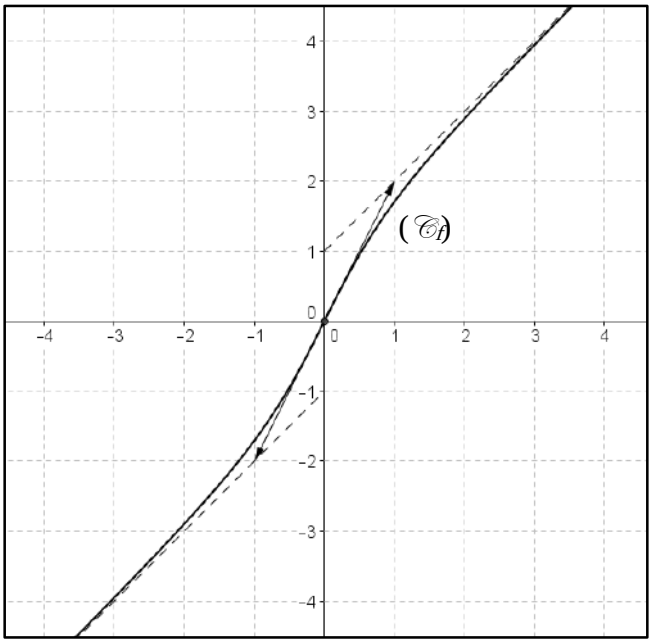
$$g(-x) = |-x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{(-x)^2+1}}\right) = |x|\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) = g(x)$$

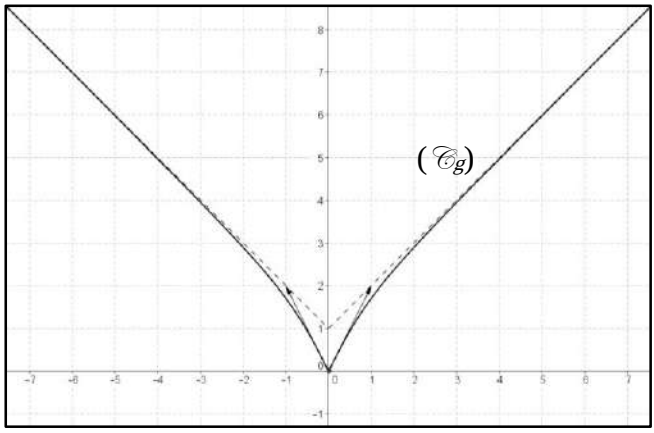
منه ، الدالة $g$ زوجية

**ب. رسم ($\mathscr{C}_g$) انطلاقا من ($\mathscr{C}_f$)**

$x \in [0; +\infty[ : \ g(x) = f(x) \Rightarrow$ متطابقان $(Cg)$ و $(Cf)$

أمّا على المجال $]-\infty; 0[$ ، نرسم ($\mathscr{C}_g$) بالتناظر المحوري لأنّ الدالة $g$ زوجية




**حل التمرين 66 : بكالوريا 2014 ع ت**

**I- $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$**

1. **أ. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = \boxed{-\infty} \; ; \; \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x^3 = \boxed{+\infty}$$

**ب. دراسة اتجاه تغير الدالة $g$ على $\mathbb{R}$**

الدالة $g$ متزايدة $\Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow \Delta < 0 \; ; \; \Delta = -104 \; ; \; g'(x) = 6x^2 - 8x + 7$

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

2. **أ. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $0,7 < \alpha < 0,8$**

الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]0,7; 0,8[$ ، $g(0,7) \approx -0,37$ ، $g(0,8) \approx 0,06$ منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]0,7; 0,8[$ ، $g(0,7) \times g(0,8) < 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**ب. استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$**

$g(\alpha) = 0 \; ; \; x \in ]\alpha; +\infty[ : g(x) > 0 \; ; \; x \in ]-\infty; \alpha[ : g(x) < 0$

II- $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$

1. **حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2}x = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}x = \boxed{+\infty}$$

2. **أ. بيان أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$**

$$\frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} = \frac{(x+1)(2x^2-2x+1)+1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

$$= \frac{2x^3-4x+2}{2(2x^2-2x+1)} = \frac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1} = f(x)$$

**ب. استنتاج أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ يُطلب تعيين معادلة له**

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) - \left[\frac{1}{2}(x+1)\right] = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)} = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{-3x}{4x^2}$$

$$= \lim_{|x| \to +\infty} \frac{-3}{4x} = \boxed{0} \Rightarrow (\Delta): y = \frac{1}{2}(x+1)$$ مستقيم مقارب مائل

**ج. دراسة الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ و$(\Delta)$**

$$f(x) - \left[\frac{1}{2}(x+1)\right] = \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

بما أنّ المقام موجب دوما ، فإنّ إشارة $f(x)-\left[\frac{1}{2}(x+1)\right]$ هي نفس إشارة $1-3x$

$1-3x<0\Rightarrow x>\frac{1}{3}: f(x)-\left[\frac{1}{2}(x+1)\right]<0\Rightarrow (\Delta)$ تحت $(Cf)$

$1-3x>0\Rightarrow x<\frac{1}{3}: f(x)-\left[\frac{1}{2}(x+1)\right]>0\Rightarrow (\Delta)$ فوق $(Cf)$

3. **أ. بيان أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x)=\frac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$**

$$f'(x)=\frac{(3x^2-2)(2x^2-2x+1)-(4x-2)(x^3-2x+1)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^4-4x^3+7x^2-4x}{(2x^2-2x+1)^2}=\frac{x(2x^3-4x^2+7x-4)}{(2x^2-2x+1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}}$$

**ب. استنتاج إشارة $f'(x)$ حسب قيم $x$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

4. **حساب $f(1)$**

$f(1)=0\Rightarrow x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1)$

**حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$**

$f(x)=0\Rightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0$

$x^2+x-1=0\ ;\ \Delta=5\ ; x'=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\ ;\ x''=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$\boxed{S=\left\{1;\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}}$$

5. **انشاء المستقيم** $(\Delta)$ **والمنحنى** $(\mathscr{C}_f)$ **(انظر الشكل في نهاية التمرين)**

6. $\boldsymbol{h(x) = \frac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}}$

**أ. التحقّق أنّه من أجل كل** $\boldsymbol{x}$ **من** $\mathbb{R}$ **:** $\boldsymbol{h(x) = f(x) - 2}$

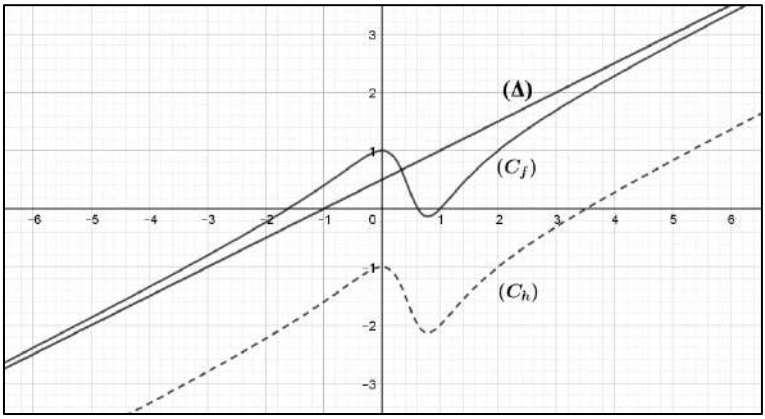
$$f(x) - 2 = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} - 2 = \frac{x^3 - 2x + 1 - 2(2x^2 - 2x + 1)}{2x^2 - 2x + 1}$$

$$f(x) - 2 = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1} = h(x)$$

**ب. استنتاج أنّ** $(\mathscr{C}_h)$ **هو صورة** $(\mathscr{C}_f)$ **بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه**

بما أنّ $h(x) = f(x) - 2$ ، فإنّ $(\mathscr{C}_h)$ هو صورة $(\mathscr{C}_f)$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$

**انشاء** $(\mathscr{C}_h)$




**التمرين 67 : بكالوريا 2017 ت ر**

**I- $\boldsymbol{g(x) = x^3 + 6x + 12}$ ، $\boldsymbol{D_g = \mathbb{R}}$**

**1. دراسة اتجاه تغير الدالة** $\boldsymbol{g}$

$g'(x) = 3x^2 + 6$ ; $g'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

**2. بيان أنّ المعادلة** $\boldsymbol{g(x) = 0}$ **تقبل حلا وحيدا** $\boldsymbol{\alpha}$ **حيث** $\boldsymbol{\alpha \in ]-1,48\ ;-1,47[}$

الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]-1,48;-1,47[$ و $\underbrace{g(-1,48)}_{\approx -0,12} \times \underbrace{g(-1,47)}_{\approx 0,004} < 0$

منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-1,48;-1,47[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**استنتاج إشارة $g(x)$**

$x \in ]-\infty;\alpha[ : g(x) < 0 ; x \in ]\alpha;+\infty[ : g(x) > 0 ; g(\alpha) = 0$

**II- $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = \frac{x^3-6}{x^2+2}$**

1. أ. **حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-6}{x^2+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} x = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-6}{x^2+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x = \boxed{+\infty}$$

**ب. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x) = \frac{x.g(x)}{(x^2+2)^2}$**

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+2) - 2x(x^3-6)}{(x^2+2)^2} = \frac{x^4+6x^2+12x}{(x^2+2)^2} = \boxed{\frac{x.g(x)}{(x^2+2)^2}}$$

**دراسة اتجاه تغير الدالة $f$**

نلاحظ أنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة الجداء $x.g(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | ‖ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ |
| $g(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | ‖ |
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ |

- $x \in ]-\infty;\alpha[ \cup ]0;+\infty[ : f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة
- $x \in [\alpha;0] : f'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $-3$ | ↗ | $+\infty$ |

2. أ. **بيان أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$**

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) - x = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{x^3-6}{x^2+2} - x = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{-2x-6}{x^2+2} = \lim_{|x|\to+\infty} -\frac{2}{x} = 0$$

منه نستنتج أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

**ب. دراسة وضعية المنحنى ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة إلى المستقيم ($\Delta$)**

$$f(x)-x=\frac{-2x-6}{x^2+2}\ ;\ -2x-6=0\Rightarrow x=-3$$

- $x\in\ ]-\infty;-3[\ : f(x)-x>0\Rightarrow$ ($\Delta$) فوق $(C_f)$
- $x\in\ ]-3;+\infty[\ : f(x)-x<0\Rightarrow$ ($\Delta$) تحت $(C_f)$
- $(C_f)\cap(\Delta)=\{(-3;-3)\}$

3. **بيان أنّ $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$**

$$g(\alpha)=0\Rightarrow\alpha^3+6\alpha+12=0\Rightarrow\alpha^3=-6\alpha-12$$

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2}=\frac{\frac{\alpha^3-6}{\alpha^3}}{\frac{\alpha^3}{\alpha}+2}=\frac{\frac{-6\alpha-12-6}{\alpha}}{\frac{-6\alpha-12}{\alpha}+2}=\left(\frac{-6\alpha-18}{-4\alpha-12}\right)\alpha$$

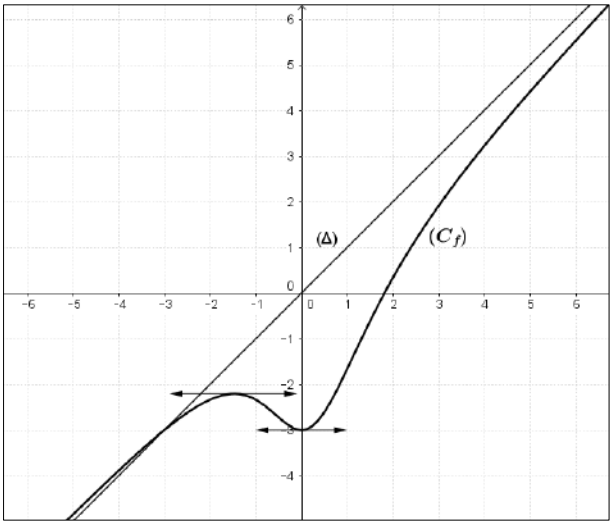
$$=\frac{3}{2}\left(\frac{-2\alpha-6}{-2\alpha-6}\right)\alpha=\boxed{\frac{3}{2}\alpha}$$

**استنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$**

$$-1{,}48<\alpha<-1{,}47\Rightarrow\frac{3}{2}(-1{,}48)<\frac{3}{2}\alpha<\frac{3}{2}(-1{,}47)$$

$$\Rightarrow\boxed{-2{,}22<f(\alpha)<-2{,}21}$$

4. **رسم المستقيم ($\Delta$) والمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**



5. **اثبات أنّ من أجل كل** $x \in [\alpha\,;0]$ ، $-3 \le f(x) \le f(\alpha)$

$$\alpha \le x \le 0 \xrightarrow[f \text{ متناقصة على } [\alpha\,;0]]{} f(0) \le f(x) \le f(\alpha) \Rightarrow \boxed{-3 \le f(x) \le f(\alpha)}$$

**بيان أنّ :** $\frac{3}{2}\alpha^2 \le S \le -3\alpha$

$$x \in [\alpha\,;0] \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow S = \int_{\alpha}^{0} -f(x)dx$$

$$-3 \le f(x) \le f(\alpha) \Rightarrow -f(\alpha) \le -f(x) \le 3$$

$$\Rightarrow -f(\alpha)\int_{\alpha}^{0} dx \le \int_{\alpha}^{0} -f(x)dx \le 3\int_{\alpha}^{0} dx$$

$$\Rightarrow -f(\alpha)[x]_{\alpha}^{0} \le S \le 3[x]_{\alpha}^{0} \Rightarrow \alpha f(\alpha) \le S \le -3\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{3}{2}\alpha^2 \le S \le -3\alpha}$$

# الجزء الخامس

# حلول مسائل

# الدوال الأسّية

**حل التمرين 01:**

1) $e^{2x} = 1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

2) $e^{-5x} = e \Rightarrow -5x = 1 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{5}}$

3) $e^{x^2} = e^{-3(x+1)} \Rightarrow x^2 = -3(x+1) \Rightarrow x^2 + 3x + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{S = \emptyset}$

4) $e^{\frac{x+4}{6-x}} = e^{\frac{1}{x}}$ ; $D = \mathbb{R} - \{0; 6\}$

$e^{\frac{x+4}{6-x}} = e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{x+4}{6-x} = \frac{1}{x} \Rightarrow x(x+4) = 6 - x \Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$

$\Rightarrow \boxed{x_1 = -6 \; ; \; x_2 = 1}$

5) $e^{2x+1} - (e^x)^3 = 0 \Rightarrow e^{2x+1} = e^{3x} \Rightarrow 2x + 1 = 3x \Rightarrow \boxed{x = 1}$

6) $e^{2x} - e^x - 20 = 0$ ; $X = e^x$; $X^2 - X - 20 = 0 \Rightarrow X = -4$ أو $X = 5$

$\Rightarrow e^x = 5 \Rightarrow \boxed{x = \ln 5}$

7) $e^x + 18e^{-x} = 9 \Rightarrow e^x + 18e^{-x} - 9 = 0 \Rightarrow e^{2x} + 18 - 9e^x = 0$ ;

$X = e^x$ ; $X^2 - 9X + 18 = 0 \Rightarrow X = 3$ أو $X = 6 \Rightarrow e^x = 3$ أو $e^x = 6$

$\Rightarrow \boxed{x_1 = \ln 3 \; ; \; x_2 = \ln 6}$

8) $e^{2x+1} - 3\sqrt{e^{2x+2}} = -e^{1+ln2} \Rightarrow e^{2x+1} - 3\sqrt{e^{2(x+1)}} + e^{1+ln2} = 0$

$\Rightarrow e^{2x+1} - 3e^{x+1} + e^{1+ln2} = 0 \Rightarrow e.e^{2x} - 3e.e^x + e.e^{ln2} = 0$

$\Rightarrow e(e^{2x} - 3e^x + 2) = 0 \Rightarrow e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ ; $X = e^x$ ; $X^2 - 3X + 2 = 0$

$\Rightarrow X = 1$ أو $X = 1 \Rightarrow e^x = 1$ أو $e^x = 2 \Rightarrow \boxed{x_1 = 0 \; ; \; x_2 = \ln 2}$

9) $2e^{5x} - 13e^{3x} - 7e^x = 0 \Rightarrow e^x(2e^{4x} - 13e^{2x} - 7) = 0$

$\Rightarrow 2e^{4x} - 13e^{2x} - 7 = 0$ ; $X = e^{2x}$ ; $2X^2 - 13X - 7 = 0$

$\Rightarrow X = -\frac{1}{2}$ أو $X = 7 \Rightarrow e^{2x} = 7 \Rightarrow 2x = \ln 7 \Rightarrow \boxed{x = \ln\sqrt{7}}$

10) $e^{3x} - 3e^{2x} - e^x + 3 = 0 \Rightarrow e^{2x}(e^x - 3) - (e^x - 3) = 0$

$\Rightarrow (e^x - 3)(e^{2x} - 1) = 0 \Rightarrow e^x = 3$ أو $e^{2x} = 1 \Rightarrow \boxed{x_1 = \ln 3 \; ; \; x_2 = 0}$

11) $e^x - (5+e)e^{\frac{x}{2}} + 5e = 0$ ; $X = e^{\frac{x}{2}}$ ; $X^2 - (5+e)X + 5e = 0$ ;

$\Delta = (5+e)^2 - 20e = 25 + 10e + e^2 - 20e = 25 - 10e + e^2 = (5-e)^2$

$\Rightarrow X = e$ أو $X = 5 \Rightarrow e^{\frac{x}{2}} = e$ أو $e^{\frac{x}{2}} = 5 \Rightarrow \frac{x}{2} = 1$ أو $\frac{x}{2} = ln5$

$\Rightarrow \boxed{x_1 = 2 \; ; \; x_2 = 2\ln 5}$

**حل التمرين 02:**

1) $e^{2x^2} \leq e^{5x+3} \Rightarrow 2x^2 \leq 5x+3 \Rightarrow 2x^2-5x-3 \leq 0$

$\Delta = 49\ ; x' = -\frac{1}{2}; x'' = 3\ ;$ $\boxed{S = \left[-\frac{1}{2}; 3\right]}$

2) $e^{x+1} > e^{-\frac{2}{x}}\ ;\ D = \mathbb{R}^*\ ; x+1 > -\frac{2}{x} \Rightarrow x+1+\frac{2}{x} > 0$

$\Rightarrow \frac{x^2+x+2}{x} > 0\ ;\ \Delta = -7\ ;$ $\boxed{S = ]0; +\infty[}$

3) $e^{x^2} > (e^3)^4 e^{-x} \Rightarrow e^{x^2} > e^{12-x} \Rightarrow x^2 > 12-x \Rightarrow x^2+x-12 > 0$

$\Delta = 49\ ; x' = -4\ ;\ x'' = 3\ ;$ $\boxed{S = ]-\infty; -4[ \cup ]3; +\infty[}$

4) $e^{x-x^2} \geq 1 \Rightarrow e^{x-x^2} \geq e^0 \Rightarrow x-x^2 \geq 0 \Rightarrow x(1-x) \geq 0$

$\boxed{S = [0; 1]}$

5) $e^x - 3 \leq 0 \Rightarrow e^x \leq 3 \Rightarrow x \leq \ln 3\ ;$ $\boxed{S = ]-\infty; \ln 3]}$

6) $(1-e^x)(e^x-e^2) > 0; 1-e^x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0; e^x - e^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1-e^x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $e^x-e^2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(1-e^x)(e^x-e^2)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$\boxed{S = ]0; 2[}$

7) $e^{2x} - 4e^x + 3 < 0\ ; X = e^x; X^2 - 4X + 3 < 0$

$\Rightarrow X \in ]1; 3[ \Rightarrow e^x \in ]1; 3[ \Rightarrow$ $\boxed{S = ]0; \ln 3[}$

$\frac{e^x-1}{3e^x-6} \geq 0; e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0; 3e^x - 6 = 0 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $3e^x-6$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\frac{e^x-1}{3e^x-6}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | |

$\boxed{S = ]-\infty; 0] \cup ]\ln 2\ ; +\infty[}$

**حل التمرين 03:**

التحقق من صحة المساواة المعطاة من أجل كل $x$ في كل حالة من الحالات التالية:

$$1)\ \frac{e^x}{2+e^x} = \frac{e^x}{e^x(2e^{-x}+1)} = \boxed{\frac{1}{2e^{-x}+1}}$$

$$2)\ \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)} = \boxed{\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}$$

$$3)(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + e^{-2x} + 2e^x.e^{-x} = e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}} + 2 = \boxed{\frac{e^{4x}+1}{e^{2x}} + 2}$$

$$4)\ \frac{e^x}{e^x - x} = \frac{e^x}{e^x(1-xe^{-x})} = \boxed{\frac{1}{1-xe^{-x}}}$$

**حل التمرين 04:**

تعيين في كل حالة مجموعة تعريف الدالة $f$ وحساب دالتها المشتقة $f'$:

$$1)\ f(x) = e^x + 3e^{-x+2} - x\ ; Df = \mathbb{R}\ ; \boxed{f'(x) = e^x - 3e^{-x+2} - 1}$$

$$2)\ f(x) = e^{-2x} - e^{-3x} + 4\ ;\ Df = \mathbb{R}\ ; \boxed{f'(x) = -2e^{-2x} + 3e^{-3x}}$$

$$3)\ f(x) = \frac{e^x}{e^{2x}-3};\ e^{2x} - 3 = 0 \Rightarrow e^{2x} = 3 \Rightarrow 2x = \ln 3 \Rightarrow x = \frac{\ln 3}{2}$$

$$Df = \mathbb{R} - \left\{\frac{\ln 3}{2}\right\}\ ; f'(x) = \frac{e^x(e^{2x}-3) - 2e^{2x}.e^x}{(e^{2x}-3)^2} = \boxed{-\frac{e^x(e^{2x}+3)}{(e^{2x}-3)^2}}$$

$$4)\ f(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}};\ Df = \mathbb{R}\ ;$$

$$f'(x) = \frac{2e^{-2x}(1+e^{-2x}) + 2e^{-2x}(1-e^{-2x})}{(1+e^{-2x})^2} = \boxed{\frac{4e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}}$$

$$5)\ f(x) = (x-1)e^x - x^2\ ;\ Df = \mathbb{R}\ ;\ f'(x) = e^x + (x-1)e^x - 2x$$

$$\boxed{f'(x) = xe^x - 2x}$$

$$6)\ f(x) = (2x-1)e^{\frac{1}{x}}\ ;\ Df = \mathbb{R}^*\ ;\ f'(x) = 2e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}(2x-1)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(2 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \boxed{e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{2x^2-2x+1}{x^2}\right)}$$

7) $f(x)=\dfrac{e^{2x}-2e^{x}+2}{e^{x}-1}$; $e^{x}-1=0\Rightarrow e^{x}=1\Rightarrow x=0$ ; $Df=\mathbb{R}^{*}$

$$f'(x)=\frac{(2e^{2x}-2e^{x})(e^{x}-1)-e^{x}(e^{2x}-2e^{x}+2)}{(e^{x}-1)^{2}}=\boxed{\frac{e^{2x}(e^{x}-2)}{(e^{x}-1)^{2}}}$$

8) $f(x)=(x^{2}+x+1)e^{-\frac{x}{2}}$ ; $Df=\mathbb{R}$

$$f'(x)=(2x+1)e^{-\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}(x^{2}+x+1)e^{-\frac{x}{2}}=\boxed{-\frac{1}{2}(x^{2}-3x-1)e^{-\frac{x}{2}}}$$

9) $f(x)=\dfrac{e^{x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ ; $1-e^{2x}>0\Rightarrow e^{2x}<1\Rightarrow x<0$ ; $Df=]-\infty;0[$

$$f'(x)=\frac{e^{x}\sqrt{1-e^{2x}}+\dfrac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}}{1-e^{2x}}=\frac{e^{x}(1-e^{2x})+e^{3x}}{(1-e^{2x})\sqrt{1-e^{2x}}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{e^{x}}{(1-e^{2x})\sqrt{1-e^{2x}}}}$$

10) $f(x)=\sqrt{-4e^{2x}+4e^{x}+3}$ ; $-4e^{2x}+4e^{x}+3=0$ ; $X=e^{x}$

$-4X^{2}+4X+3=0$ ; $\Delta'=16$ ; $X'=\dfrac{3}{2}$ ; $X''=-\dfrac{1}{2}$ (مرفوضة)

$e^{x}=\dfrac{3}{2}\Rightarrow x=\ln\dfrac{3}{2}$ ; $Df=\left]-\infty;\ln\dfrac{3}{2}\right]$

$$f'(x)=\frac{-8e^{2x}+4e^{x}}{2\sqrt{-4e^{2x}+4e^{x}+3}}=\boxed{\frac{-2e^{x}(2e^{x}-1)}{\sqrt{-4e^{2x}+4e^{x}+3}}}$$

**حل التمرين 05:**

حساب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{2}+1)e^{x}=\boxed{+\infty}$

2) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}x+e^{\frac{2x}{x-1}}=\boxed{+\infty}$ $\left(\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}}\dfrac{2x}{x-1}=+\infty\right)$

3) $\lim\limits_{x\to0^{-}}(1-x)e^{\frac{1}{x}}+2=\boxed{2}$ $\left(\lim\limits_{x\to0^{-}}\dfrac{1}{x}=-\infty\ ;\ \lim\limits_{x\to0^{-}}e^{\frac{1}{x}}=0\right)$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}-2e^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}(e^{x}-2)=\boxed{+\infty}$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x}+e^{x}-4=\boxed{-4}$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}-x+1=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^{x}}{x}-1+\frac{1}{x}\right)=\boxed{+\infty}$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}-1\to-1}{x\to+\infty}=\boxed{0}$

8.1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x-1)e^{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\frac{e^{x}}{x}=\boxed{+\infty}$

8.2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x-1)e^{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x-1}{x}}_{\to 1} e^{x}=\boxed{+\infty}$

9) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^{x}\to 0}{x+1\to-\infty}=\boxed{0}$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{e^{x}+1}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{e^{x}(1+e^{-x})}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}\to+\infty}{1+e^{-x}\to+1}=\boxed{+\infty}$

11) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}+2\to+2}{e^{2x}-1\to-1}=\boxed{-2}$

12) $\lim\limits_{x\to0^{-}} \frac{e^{2x}-2e^{x}+3\to+2}{e^{x}-1\to0^{-}}=\boxed{-\infty}$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}+x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x}+1-\frac{1}{x}=\boxed{+\infty}$

14) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x}e^{x+1}=\boxed{+\infty}$

15) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^{2}+2x+2)e^{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2}e^{x}+2xe^{x}+2e^{x}=\boxed{0}$

16) $\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{(3x^{2}-4x)}_{\to+\infty}\underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty}=\boxed{+\infty}$

17) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{e^{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x}}-\frac{1}{e^{x}}=\boxed{0}$

18) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{2}-2e^{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x^{2}}_{+\infty}\underbrace{(1-2\frac{e^{x}}{x^{2}})}_{-\infty}=\boxed{-\infty}$

19) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+1}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x(1+e^{-x})}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{e^x}{x^2}}_{+\infty}\times\underbrace{\frac{(1+e^{-x})}{(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}}_{1}=\boxed{+\infty}$$

20) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)e^{-\frac{x}{2}}\ ;X=-\dfrac{x}{2}\Rightarrow x=-2X\ ;\ x\to+\infty\Rightarrow X\to-\infty$

$\lim\limits_{X\to-\infty}(-2X+1)e^X=\lim\limits_{X\to-\infty}-2Xe^X+e^X=\boxed{0}$

21) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-2}{e^x-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(2-\frac{2}{x})}{x(\frac{e^x}{x}-2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2-\frac{2}{x})\to+2}{(\frac{e^x}{x}-2)\to+\infty}=\boxed{0}$

22) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x};\ X=2x\ ;\ \lim\limits_{X\to0}\dfrac{e^X-1}{X}=\boxed{1}$

23) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x^2}-1}{x^2};\ X=2x^2\ ;\ \lim\limits_{X\to0}\dfrac{e^X-1}{\frac{X}{2}}=\lim\limits_{X\to0}2\underbrace{\dfrac{e^X-1}{X}}_{1}=\boxed{2}$

24) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^{-x}}{x};X=-x\ ;\ \lim\limits_{X\to0}\dfrac{1-e^X}{-X}=\lim\limits_{X\to0}\dfrac{e^X-1}{X}=\boxed{1}$

25) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x^2+2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x(x+2)}=\lim\limits_{x\to0}\underbrace{\dfrac{e^x-1}{x}}_{1}\times\underbrace{\dfrac{1}{x+2}}_{\frac{1}{2}}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$

26) $\lim\limits_{x\to\ln3}\dfrac{e^x-3}{x-\ln3}=\lim\limits_{x\to\ln3}\dfrac{e^x-e^{\ln3}}{x-\ln3}=exp'(\ln3)=e^{\ln3}=\boxed{3}$

27) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4x}-2e^{2x}+1}{4x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(e^{2x}-1)^2}{(2x)^2}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\right)^2=\boxed{1}$

28) $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{\frac{1}{x}}-x+1\ ;X=\dfrac{1}{x}\Rightarrow x=\dfrac{1}{X}\ ;\ x\to-\infty\Rightarrow X\to0$

$\lim\limits_{X\to0}\dfrac{1}{X}e^X-\dfrac{1}{X}+1=\lim\limits_{X\to0}\dfrac{e^X-1}{X}+1=\boxed{2}$

**حل التمرين 06:**

$$f(x)=\frac{e^{4x}-3}{e^{4x}+1}\ ;Df=\mathbb{R}$$

**1. حساب من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ : $f(-x)+f(x)$**

$$f(-x)+f(x)=\frac{e^{-4x}-3}{e^{-4x}+1}+\frac{e^{4x}-3}{e^{4x}+1}=\frac{e^{-4x}(1-3e^{4x})}{e^{-4x}(1+e^{4x})}+\frac{e^{4x}-3}{e^{4x}+1}$$

$$f(-x)+f(x)=\frac{1-3e^{4x}+e^{4x}-3}{e^{4x}+1}=\frac{-2(e^{4x}+1)}{e^{4x}+1}=-2$$

**تفسير النتيجة بيانيا :** المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مركز تناظر $\omega(0;-1)$

**2. بيان أنّه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ : $f(x)=\frac{1-3e^{-4x}}{1+e^{-4x}}$**

$$f(x)=\frac{e^{4x}-3}{e^{4x}+1}=\frac{e^{4x}(1-3e^{-4x})}{e^{4x}(1+e^{-4x})}=\boxed{\frac{1-3e^{-4x}}{1+e^{-4x}}}$$

**حل التمرين 07:**

$$f(x)=\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1};Df=\mathbb{R}$$

**1. بيان أنّ الدالة $f$ فردية**

$Df$ متناظر بالنسبة إلى الصفر ، ومن أجل كل $x\in Df$ ، لدينا :

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{e^{-x}(1-e^{x})}{e^{-x}(1+e^{x})}=\frac{1-e^{x}}{1+e^{x}}=-\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}=-f(x)$$

منه ، الدالة $f$ فردية

**2. بيان أنّه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ : $f(2x)=\frac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}$**

$$\frac{2f(x)}{1+[f(x)]^2}=\frac{2\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)}{1+\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^2}=\frac{2\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)}{\frac{(e^{x}+1)^2+(e^{x}-1)^2}{(e^{x}+1)^2}}$$

$$=\frac{2\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)}{\frac{2(e^{2x}+1)}{(e^{x}+1)^2}}=\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)\left[\frac{(e^{x}+1)^2}{(e^{2x}+1)}\right]=\frac{(e^{x}-1)(e^{x}+1)}{(e^{2x}+1)}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

$$=\boxed{f(2x)}$$

**حل التمرين 08:**

$$f(x) = e^{2x} - 2e^{x}; Df = \mathbb{R}$$

**1. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{2x} - 2e^{x} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x} - 2e^{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{x}(e^{x} - 2) = \boxed{+\infty}$$

$$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{x} = \boxed{2e^{x}(e^{x} - 1)}$$

$$e^{x} - 1 = 0 \Rightarrow e^{x} = 1 \Rightarrow x = 0$$

$x < 0 : f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة ; $x > 0 : f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

**تعيين الفروع اللانهائية للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x} - 2e^{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x}(e^{x} - 2) = \boxed{+\infty}$$

يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y = 0$ بجوار $(-\infty)$، كما أنّه يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه محور التراتيب

**2. تعيين إحداثيات نقط تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مع محوري الإحداثيات**

$$f(0) = -1 \Rightarrow \boxed{(Cf) \cap (yy') = \{(0; -1)\}}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow e^{2x} - 2e^{x} = 0 \Rightarrow e^{x}(e^{x} - 2) = 0 \Rightarrow e^{x} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \ln 2 \Rightarrow \boxed{(Cf) \cap (xx') = \{(\ln 2\,; 0)\}}$$

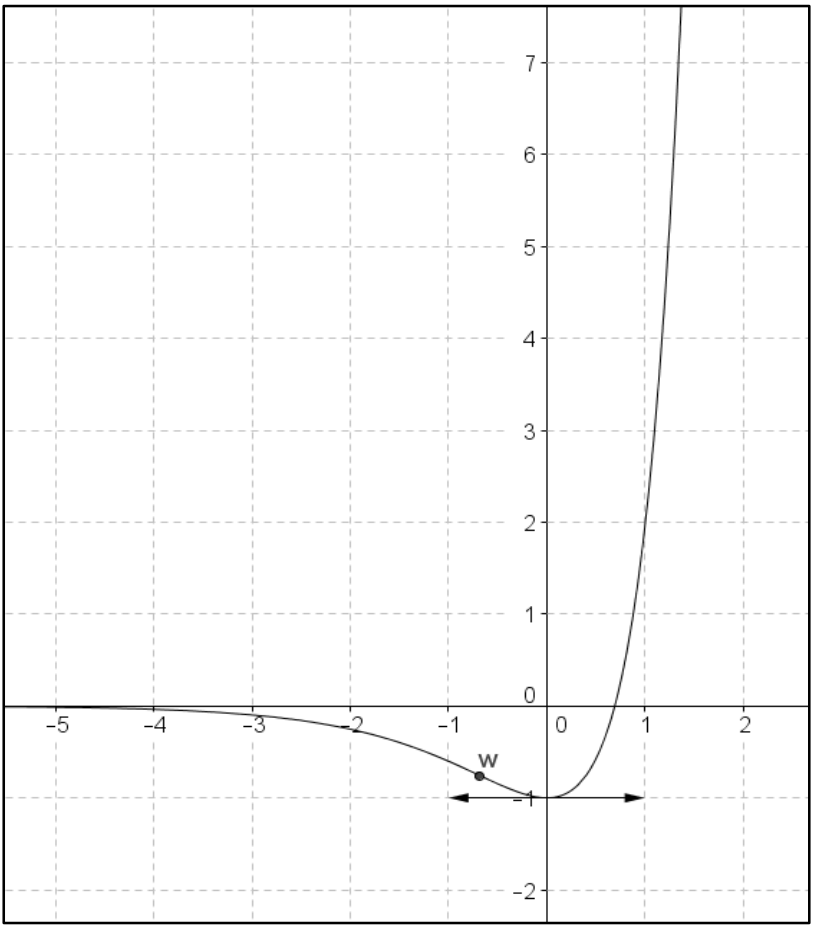
3. إثبات أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل نقطة انعطاف ω يُطلب تعيينها

$$f''(x) = 4e^{2x} - 2e^{x} = 2e^{x}(2e^{x} - 1)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 2e^{x}(2e^{x} - 1) \Rightarrow 2e^{x} - 1 = 0 \Rightarrow e^{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\ln 2$$

$$f(-\ln 2) = e^{-2\ln 2} - 2e^{-\ln 2} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{\omega\left(-\ln 2\,; -\frac{3}{4}\right)}$$

**4. رسم المنحنى ($\mathcal{C}_f$)**




**حل التمرين 09:**

$$f(x) = x^2e^{-x}; Df = \mathbb{R}$$

**1. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} (-x)^2e^{-x} = \lim_{X\to-\infty} X^2e^{X} = \boxed{0}$$

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(2-x)$$

$x \in ]-\infty; 0[ \cup ]2; +\infty[ : f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x \in [0; 2] : f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

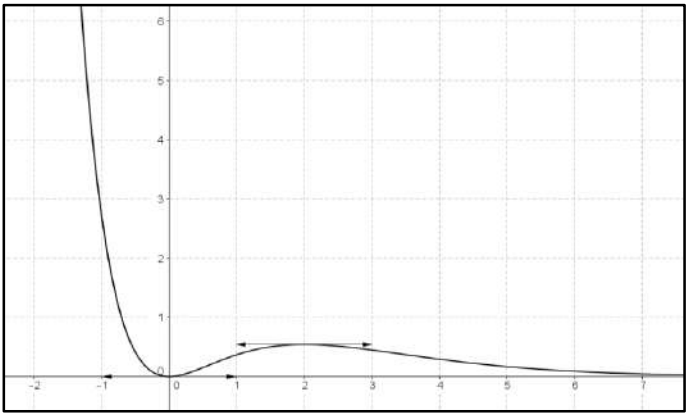
| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $4e^{-2}$ | ↘ | $0$ |

**2. دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2e^{-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}xe^{-x}=\boxed{-\infty}$$

3. يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y=0$ بجوار $(+\infty)$، كما أنّه يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه محور التراتيب

**4. رسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$)**



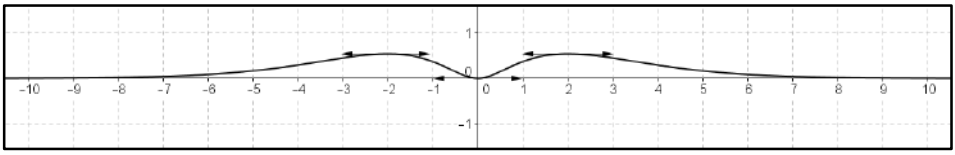
**5. استنتاج رسم المنحنى ($\Gamma$) الممثل للدالة $h$ حيث: $h(x)=x^2e^{-|x|}$**

من أجل كل $x\in Dh$ ، فإنّ $-x\in Dh$ ، ولدينا :

الدالة $h$ زوجية $\Rightarrow h(-x)=(-x)^2e^{-|-x|}=x^2e^{-|x|}=h(x)$

$x\geq 0:\ |x|=x\Rightarrow h(x)=f(x)\Rightarrow$ و $(Cf)$ متطابقان $(Ch)$

نرسم $(Ch)$ بالتناظر المحوري : $x<0$



**حل التمرين 10:**

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}\,;\, Df = \mathbb{R}$$

**1. حساب النهايتين عند $-\infty$ و $+\infty$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1} = \boxed{+\infty}$$

**2. حساب $f(-x) + f(x)$**

$$f(-x) + f(x) = -x + \ln 4 + \frac{2}{e^{-x}+1} + x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1}$$

$$= 2\ln 4 + \frac{2e^x}{1+e^x} + \frac{2}{e^x+1} = 2\ln 4 + \frac{2(e^x+1)}{e^x+1} = \boxed{2(1+\ln 4)}$$

**تفسير النتيجة هندسيا :** النقطة $\omega(0;1+\ln 4)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

**3. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$f'(x) = 1 - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)^2 - 2e^x}{(e^x+1)^2} = \boxed{\frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}}$$

$f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**4. التحقق أنّه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإنّ المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلا وحيدا**

الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$ ، و $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، منه المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلا وحيدا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**5. بيان أنّه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل : $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x+1}$**

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x+1} = x + \ln 4 + \frac{2 + 2e^x - 2e^x}{e^x+1}$$

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2(e^x+1)}{e^x+1} - \frac{2e^x}{e^x+1} = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x+1}$$

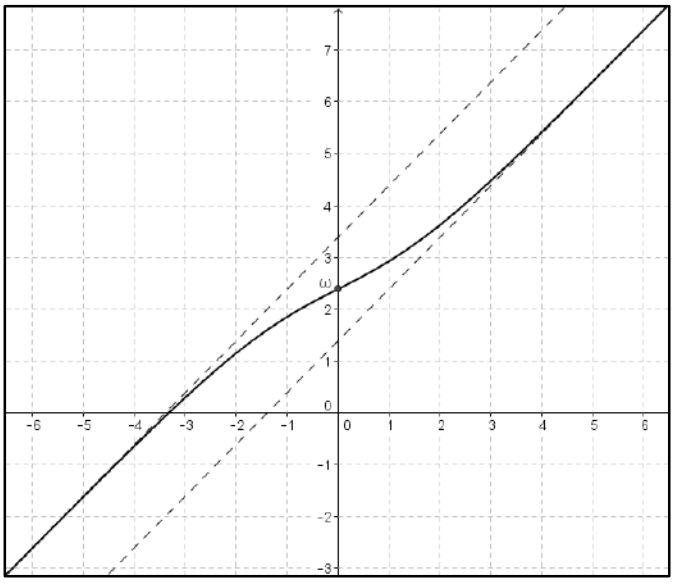
**6. بيان أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين يُطلب تعيينهما**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (x+2+\ln 4) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{2e^x}{e^x+1}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x+\ln 4) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+1} = 0$$

منه ، يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مستقيما مقاربا مائلا بجوار $(-\infty)$ معادلته $y = x+2+\ln 4$ ، وآخر بجوار $(+\infty)$ معادلته $y = x+\ln 4$

**7. رسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$)**



**حل التمرين 11:**

**1. دراسة إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$**

$$x \in \left]-\infty;\frac{1}{2}\right[ \cup\ ]2;+\infty[ : f(x) > 0\ ;\ x \in \left[\frac{1}{2};2\right] : f(x) \le 0$$

**2. جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $0$ | ↗ | $\frac{9}{e}$ | ↘ | $-e^{\frac{3}{2}}$ | ↗ | $+\infty$ |

**3. المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) = m$**

- $m < -e^{\frac{3}{2}}$ : المعادلة لا تقبل حلا
- $m = -e^{\frac{3}{2}}$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا
- $-e^{\frac{3}{2}} < m \leq 0$ : المعادلة تقبل حلين موجبين
- $0 < m < 2$ : المعادلة تقبل حلين موجبين وحلا سالبا
- $m = 2$ : المعادلة تقبل حلا سالبا وآخر معدوما وثالثا موجبا
- $2 < m < \frac{9}{e}$ : المعادلة تقبل حلين سالبين وحلا موجبا
- $m = \frac{9}{e}$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا سالبا وحلا موجبا
- $m > \frac{9}{e}$ : المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا

**4. ايجاد معادلة المماس $(\Delta)$ عند النقطة ذات الفاصلة 0**

$$(\Delta): y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow \boxed{y = -3x + 2}$$

**5. تعيين الدالة التي تمثل $f(x)$:**

$$\boxed{f(x) = f_3(x) = (2x^2 - 5x + 2)e^x}$$

**حل التمرين 12:**

$$f(x) = \frac{3e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}; Df = \mathbb{R}^*$$

**1. تعيين العددين الحقيقيين $a$ و $b$ حيث من أجل كل $x \neq 0$ : $f(x) = a + \frac{be^{2x}}{e^{2x}-1}$**

$$f(x) = a + \frac{be^{2x}}{e^{2x} - 1} = \frac{a(e^{2x} - 1) + be^{2x}}{e^{2x} - 1} = \frac{(a+b)e^{2x} - a}{e^{2x} - 1} = \frac{3e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ -a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{f(x) = -1 + \frac{4e^{2x}}{e^{2x} - 1}}$$

**2. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \boxed{-1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}(3 + e^{-2x})}{e^{2x}(1 - e^{-2x})} = \boxed{3}$$

$$\lim_{\substack{< \\ x \to 0}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \frac{3e^{2x} + 1 \to +4}{e^{2x} - 1 \to 0^-} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 0}} f(x) = \lim_{\substack{>\\ x\to 0}} \frac{3e^{2x}+1}{e^{2x}-1} \to \frac{+4}{0^+} = \boxed{+\infty}$$

$$f'(x) = \frac{6e^{2x}(e^{2x}-1) - 2e^{2x}(3e^{2x}+1)}{(e^{2x}-1)^2} = \boxed{\frac{-8e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}}$$

$f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ |
| $f(x)$ | $-1$ ↘ $-\infty$ | $\|\|$ | $+\infty$ ↘ $3$ |

**3. بيان أنّ النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$**

$Df$ متناظر بالنسبة إلى الصفر، ومن أجل كل $x \in Df$ لدينا :

$$f(-x)+f(x) = \frac{3e^{-2x}+1}{e^{-2x}-1} + \frac{3e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = \frac{e^{-2x}(3+e^{2x})}{e^{-2x}(1-e^{2x})} + \frac{3e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$$

$$f(-x)+f(x) = -\frac{3+e^{2x}}{e^{2x}-1} + \frac{3e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = \frac{2e^{2x}-2}{e^{2x}-1} = \frac{2(e^{2x}-1)}{e^{2x}-1} = \boxed{2}$$

منه ، النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$

**4. بيان أنّ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسين ميل كل منهما $(-6)$ عند نقطتين يُطلب تعيين إحداثييها**

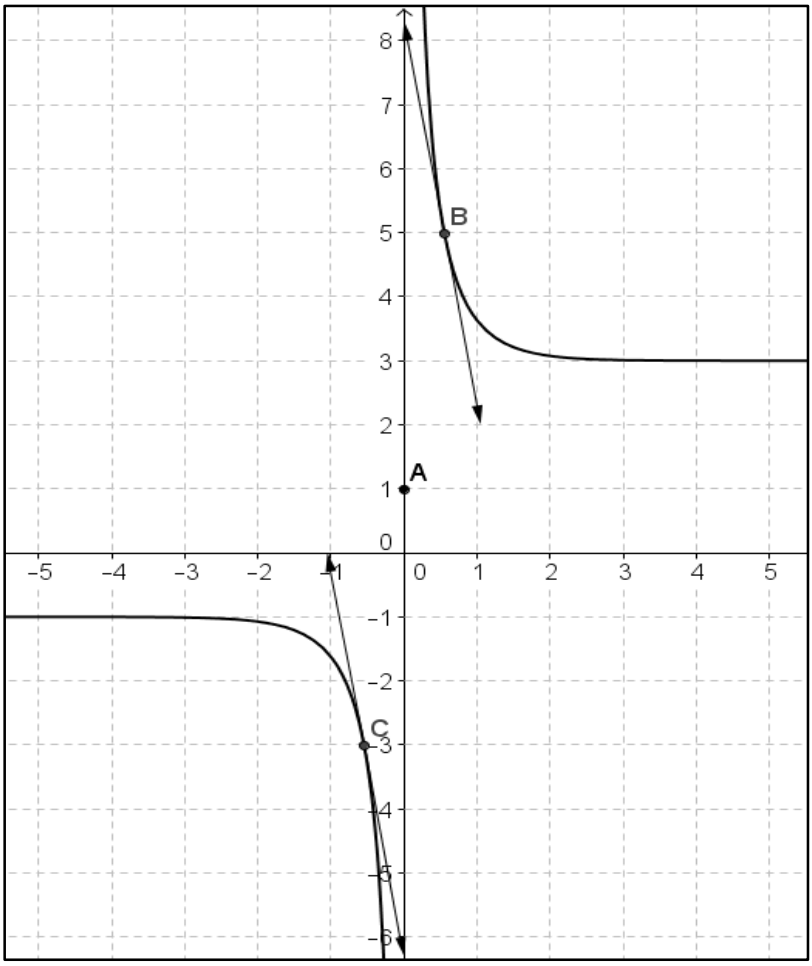
$$f'(x) = -6 \Rightarrow \frac{-8e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = -6 \Rightarrow 3(e^{2x}-1)^2 = 4e^{2x}$$

$$\Rightarrow 3e^{4x} - 10e^{2x} + 3 = 0 \; ; X = e^{2x} ; 3X^2 - 10X + 3 = 0$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{3} \text{ أو } X = 3 \Rightarrow e^{2x} = \frac{1}{3} \text{ أو } e^{2x} = 3 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}\ln 3 \text{ أو } x = \frac{1}{2}\ln 3$$

$$f\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) = 5 \; ; f\left(-\frac{1}{2}\ln 3\right) = -3 \; ; \boxed{B\left(\frac{1}{2}\ln 3 \; ; 5\right) \; ; C\left(-\frac{1}{2}\ln 3 \; ; -3\right)}$$

**5. رسم المماسين والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$**




**حل التمرين 13:**

$f(x) = \frac{2e^x}{e^x - 1}$ ; $Df = \mathbb{R}^*$

**1. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2e^x}{e^x - 1} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x}{e^x(1 - e^{-x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{1 - e^{-x}} = \boxed{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{2e^x}{e^x-1} \to \frac{+2}{0^-} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{2e^x}{e^x-1} \to \frac{+2}{0^+} = \boxed{+\infty}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x-1)-2e^{2x}}{(e^x-1)^2} = \boxed{\frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}}$$

$f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | ‖ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | ‖ $-\infty$ | ↘ | $+\infty$ ‖ $2$ |

إثبات أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل ثلاثة مستقيمات مقاربة يُطلب تعيين معادلاتهم

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ $(-\infty)$ مستقيم مقارب أفقي بجوار

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ $(+\infty)$ مستقيم مقارب أفقي بجوار

$\lim_{x\to 0} f(x) = \infty \Rightarrow x = 0$ مستقيم مقارب عمودي

**2. بيان أنّ النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**

$Df$ متناظر بالنسبة إلى الصفر، ومن أجل كل $x \in Df$ لدينا :

$$f(-x)+f(x) = \frac{2e^{-x}}{e^{-x}-1} + \frac{2e^x}{e^x-1} = \frac{2e^{-x}}{e^{-x}(1-e^x)} + \frac{2e^x}{e^x-1}$$

$$f(-x)+f(x) = -\frac{2}{e^x-1} + \frac{2e^x}{e^x-1} = \frac{2e^x-2}{e^x-1} = \frac{2(e^x-1)}{e^x-1} = \boxed{2}$$

منه ، النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)

**رسم ($\mathscr{C}_f$) :** انظر الشكل في الأسفل

**3. $g(x) = \frac{2e^x}{|e^x-1|}$**

**أ. كتابة $g(x)$ دون رمز القيمة المطلقة**

$e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

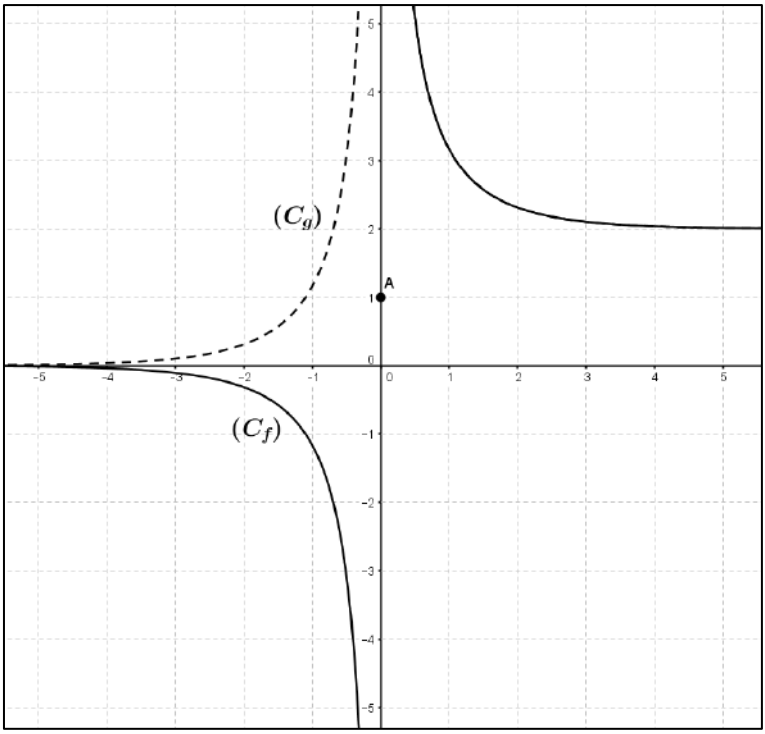
$x < 0 : e^x - 1 < 0 \Rightarrow |e^x-1| = -(e^x-1) \Rightarrow g(x) = -\frac{2e^x}{e^x-1}$

$x \geq 0 : e^x - 1 \geq 0 \Rightarrow |e^x - 1| = e^x - 1 \Rightarrow g(x) = \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$

**ب. رسم المنحنى ($\mathscr{C}_g$) باستخدام ($\mathscr{C}_f$)**

$x \geq 0 : \ g(x) = f(x) \Rightarrow$ متطابقان $(Cg)$ و $(Cf)$

$x < 0 : \ g(x) = -f(x) \Rightarrow$ متناظران بالنسبة إلى محور الفواصل $(Cg)$ و $(Cf)$




**ج. مناقشة عدد وإشارة حلول المعادلة : $(m-3)|e^x - 1| = 2e^x$**

$(m-3)|e^x - 1| = 2e^x \Rightarrow m - 3 = \dfrac{2e^x}{|e^x - 1|} \Rightarrow m - 3 = g(x)$

ندرس تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_g$) مع المستقيم ذي المعادلة : $y = m - 3$

$m - 3 \leq 0$ أي $m \leq 3$ : المعادلة لا تقبل حلولا

$0 < m - 3 \leq 2$ أي $3 < m \leq 5$ : المعادلة تقبل حلا سالبا

$m - 3 > 2$ أي $m > 5$ : المعادلة تقبل حلا سالبا وآخر موجبا

**حل التمرين 14:**

$$g(x)=\begin{cases}-1-\sqrt{-x} & ; \ x<0\\ e^x-2 & ; \ x\geq 0\end{cases}$$

**1. دراسة استمرارية الدالة $g$ عند 0**

$\lim\limits_{\substack{<\\ x\to 0}} g(x)=\lim\limits_{\substack{<\\ x\to 0}} -1-\sqrt{-x}=\boxed{-1}$ ; $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}} g(x)=\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}} e^x-2=\boxed{-1}$

بما أنّ $\lim\limits_{\substack{<\\ x\to 0}} g(x)=\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}} g(x)=g(0)$ ، فإنّ الدالة $g$ مستمرة عند 0

**2. دراسة قابلية الاشتقاق للدالة $g$ عند 0**

$$\lim_{\substack{<\\ x\to 0}} \frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{\substack{<\\ x\to 0}} \frac{-\sqrt{-x}}{x}=\lim_{\substack{<\\ x\to 0}} \frac{x}{x\sqrt{-x}}=\lim_{\substack{<\\ x\to 0}} \frac{1}{\sqrt{-x}}=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 0}} \frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{\substack{>\\ x\to 0}} \frac{e^x-1}{x}=\lim_{\substack{>\\ x\to 0}} \frac{e^x-e^0}{x}=e^0=\boxed{1}$$

بما $\lim\limits_{\substack{<\\ x\to 0}} \frac{g(x)-g(0)}{x}\neq \lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}} \frac{g(x)-g(0)}{x}$ ، فإنّ الدالة $g$ غير قابلة للاشتقاق عند 0

**3. تعيين المجالات التي تكون عليها الدالة $g$ قابلة للاشتقاق ، ثمّ حساب $g'(x)$**

الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;0[$

$$\boxed{x\in\ ]-\infty;0[\ : f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{-x}}\ ; x\in\ ]0;+\infty[\ : f'(x)=e^x}$$

**4.** $k(x)=e^{\sin x}-2\ ; Dk=\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

**أ- بيان أنّ الدالة $k$ هي مركب دالتين يُطلب تعيينهما**

$k(x)=(e^x-2)[sin(x)]=g[sin(x)]\Rightarrow \boxed{k(x)=g\ \mathrm{o}\ \sin(x)}$

**ب- التحقق أنّ الدالة $k$ قابلة للاشتقاق على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$**

بما أنّ الدالة $k$ هي مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ، فهي قابلة للاشتقاق على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ، ولدينا : $k'(x)=g'[\sin(x)]\times\cos x$ ، أي $\boxed{k'(x)=e^{\sin x}\times\cos x}$

**ج- تعيين اتجاه تغير الدالة $k$ على $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$**

من أجل $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ، لدينا $e^{\sin x}>0$ و $\cos x\geq 0$ ، منه $k'(x)\geq 0$ وتكون الدالة $k$ متزايدة تماما على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

**حل التمرين 15:**

$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ ; $Df = \mathbb{R}$

**1. حساب $f'(x)$ بدلالة $c, b, a$**

$f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x}$

$$\boxed{f'(x) = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}}$$

**2. تعيين الأعداد الحقيقية $c, b, a$**

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = -6 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b - c = -6 \\ (a - c)e^{-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b - c = -6 \\ a - c = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} c = 1 \\ b = -5 \\ a = 1 \end{cases}}$$

**3.** $f(x) = (x^2 - 5x + 1)e^{-x}$; $Df = \mathbb{R}$

**أ. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{(x^2 - 5x + 1)}_{\to +\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to +\infty} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 5x + 1)e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} x^2e^{-x} - 5xe^{-x} + e^{-x}$$

$$= \lim_{X \to -\infty} \underbrace{X^2e^X}_{\to 0} + \underbrace{5Xe^X}_{\to 0} + \underbrace{e^X}_{\to 0} = \boxed{0} \; (X = -x)$$

$$f'(x) = (2x - 5)e^{-x} - (x^2 - 5x + 1)e^{-x} = \boxed{(-x^2 + 7x - 6)e^{-x}}$$

$-x^2 + 7x - 6 = 0 \Rightarrow -(x - 1)(x - 6) = 0 \Rightarrow x = 1$ أو $x = 6$

$x \in ]-\infty; 1[ \cup ]6; +\infty[ : f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x \in [1; 6] : f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $6$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(1)$ | ↗ | $f(6)$ | ↘ | $0$ |

$f(1) = -3e^{-1} \approx -1{,}1$ ; $f(6) = 7e^{-6} \approx 0{,}02$

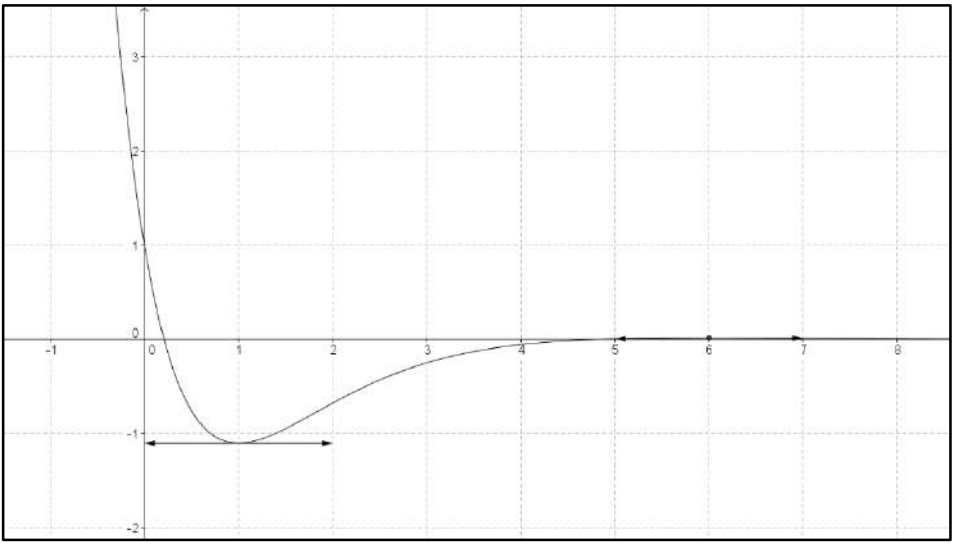
**ب. تعيين إشارة $f(x)$ واستنتاج وضعية المنحنى ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة للمستقيم المقارب الأفقي (محور الفواصل)**

$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5 - \sqrt{21}}{2}$ أو $x = \dfrac{5 + \sqrt{21}}{2}$

$x \in \left]-\infty; \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right[ \cup \left]\frac{5+\sqrt{21}}{2}; +\infty\right[ : f(x) > 0 \Rightarrow (\Delta)$ فوق $(Cf)$

$x \in \left]\frac{5-\sqrt{21}}{2}; \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right[ : f(x) < 0 \Rightarrow (\Delta)$ تحت $(Cf)$

**ج. رسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$)**



**د. المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة: $me^x + 3x = (x-1)^2$**

$$me^x + 3x = (x-1)^2 \Rightarrow me^x = x^2 - 5x + 1 \Rightarrow m = \frac{x^2 - 5x + 1}{e^x}$$

$$\Rightarrow m = (x^2 - 5x + 1)e^{-x} \Rightarrow m = f(x)$$

ندرس تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مع المستقيم ذي المعادلة : $y = m$

- $m < -3e^{-1}$ : المعادلة لا تقبل حلولا
- $m = -3e^{-1}$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا
- $-3e^{-1} < m \leq 0$ : المعادلة تقبل حلين
- $0 < m < 7e^{-6}$ : المعادلة تقبل ثلاثة حلول
- $m = 7e^{-6}$ : المعادلة تقبل حلين (أحدهما مضاعف)
- $m > 7e^{-6}$ : المعادلة تقبل حلا وحيدا

**حل التمرين 16:**

$$f(x) = ae^{2x} + be^x + c \; ; Df = \mathbb{R} \; ; f'(x) = 2ae^{2x} + be^x$$

**1. تعيين $a, b, c$**

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f'\left(\ln\frac{3}{4}\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2ae^{2\left(\ln\frac{3}{4}\right)}+be^{\left(\ln\frac{3}{4}\right)}=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} ae^{2x}+be^{x}+c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ \frac{9}{8}a+\frac{3}{4}b=0 \\ c=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=-1 \\ 9a+6b=0 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a=2 \\ b=-3 \\ c=1 \end{cases}}$$

**2. $f(x)=2e^{2x}-3e^{x}+1$**

**أ. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 2e^{2x}-3e^{x}+1=\boxed{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2e^{2x}-3e^{x}+1=\lim_{x\to+\infty} e^{x}(2e^{x}-3+e^{-x})=\boxed{+\infty}$$

$$f'(x)=4e^{2x}-3e^{x}=e^{x}(4e^{x}-3)$$

$$4e^{x}-3\geq 0\Rightarrow e^{x}\geq\frac{3}{4}\Rightarrow x\geq\ln\frac{3}{4}$$

$x\in\left]-\infty;\ln\frac{3}{4}\right[ : f'(x)<0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x\in\left[\ln\frac{3}{4};+\infty\right[ : f'(x)\geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln\left(\frac{3}{4}\right)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↘ | $-\frac{1}{8}$ | ↗ | $+\infty$ |

$$f\left(\ln\frac{3}{4}\right)=2e^{2\left(\ln\frac{3}{4}\right)}-3e^{\left(\ln\frac{3}{4}\right)}+1=\frac{9}{8}-\frac{9}{4}+1=-\frac{1}{8}$$

**ب. تعيين نقط تقاطع المنحنى ($\mathcal{C}_f$) مع حامل محور الفواصل**

$$f(x)=0\Rightarrow 2e^{2x}-3e^{x}+1=0\,;X=e^{x}\Rightarrow 2X^{2}-3X+1=0$$

$$\Rightarrow X=1 \text{ أو } X=\frac{1}{2}\Rightarrow x=0 \text{ أو } x=-\ln 2$$

منه ، يقطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) حامل محور الفواصل في المبدأ وفي النقطة $(-\ln 2\,;\,0)$

**ج. كتابة معادلة المماس ($\Delta$) للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) عند النقطة ذات الفاصلة 0**

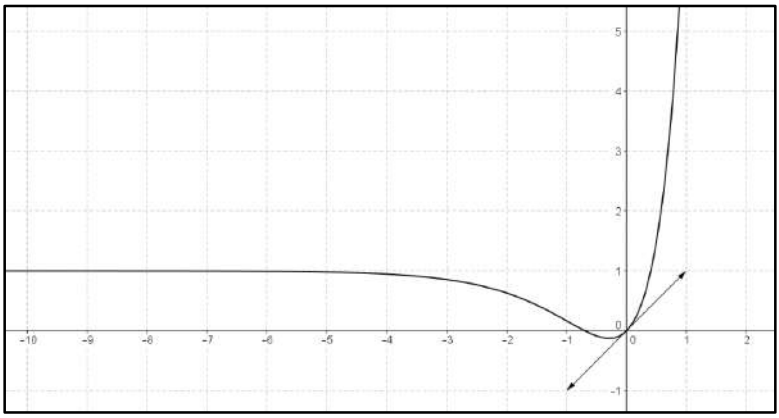
$$y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow \boxed{(\Delta): y = x}$$

**د. البرهان أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه محور التراتيب**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^{2x} - 3e^{x} + 1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}(2e^x - 3 + e^{-x}) = +\infty$$

منه ، يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) فرع قطع مكافئ باتجاه محور التراتيب

**ه. رسم المماس ($\Delta$) والمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**




**حل التمرين 17:**

$$f(x) = \frac{2-e^{2x}}{1+e^{2x}}\ ;\ Df = \mathbb{R}$$

**1. حساب نهايات الدالة $f$ عند حدود مجال تعريفها**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} = \boxed{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}(2e^{-2x} - 1)}{e^{2x}(e^{-2x} + 1)} = \boxed{-1}$$

**2. كتابة معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2 \Rightarrow y = 2$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $(-\infty)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1 \Rightarrow y = -1$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $(+\infty)$

**3. دراسة اتجاه تغير الدالة $f$**

$$f'(x)=\frac{-2e^{2x}(1+e^{2x})-2e^{2x}(2-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}=\boxed{\frac{-6e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}}$$

$f'(x)<0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $2$ | ↘ | $-1$ |

**4. بيان أنّ النقطة $\omega(0;\frac{1}{2})$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$**

$Df$ متناظر بالنسبة إلى الصفر، ومن أجل كل $x \in Df$ لدينا :

$$f(-x)+f(x)=\frac{2-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}+\frac{2-e^{2x}}{1+e^{2x}}=\frac{e^{-2x}(2e^{2x}-1)}{e^{-2x}(e^{2x}+1)}+\frac{2-e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

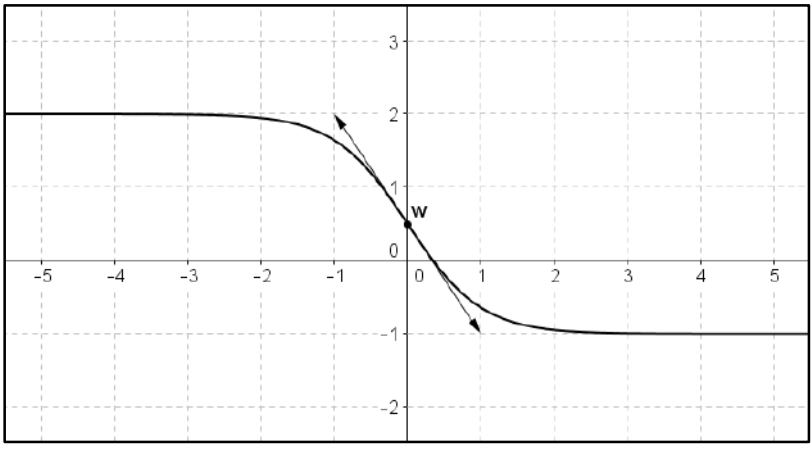
$$f(-x)+f(x)=\frac{2e^{2x}-1+2-e^{2x}}{1+e^{2x}}=\frac{1+e^{2x}}{1+e^{2x}}=\boxed{1}$$

منه ، النقطة $\omega(0;\frac{1}{2})$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

**5. كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ω**

$$y=f'(0)x+f(0) \Rightarrow \boxed{(T): y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}$$

**6. رسم المماس (T) والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$**



**7.** $g(x) = f(x) + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ ; $Df = \mathbb{R}$

**أ. بيان أنّه من أجل كل** $x \in \mathbb{R}$ **فإنّ :** $g'(x) = \frac{3(e^{2x}-1)^2}{2(1+e^{2x})^2}$

$$g'(x) = f'(x) + \frac{3}{2} = \frac{-6e^{2x}}{(1+e^{2x})^2} + \frac{3}{2} = \frac{-12e^{2x} + 3(1+e^{2x})^2}{(1+e^{2x})^2}$$

$$g'(x) = \frac{3e^{4x} - 6e^{2x} + 3}{(1+e^{2x})^2} = \frac{3(e^{4x} - 2e^{2x} + 1)}{(1+e^{2x})^2} = \boxed{\frac{3(e^{2x}-1)^2}{2(1+e^{2x})^2}}$$

**ب. حساب** $g(0)$

$$g(0) = f(0) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{0}$$

**جدول تغيرات الدالة** $g$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**ج. دراسة إشارة** $g(x)$ **واستنتاج وضعية المنحنى** $(\mathcal{C}_f)$ **بالنسبة للمماس (T)**

$x < 0 : g(x) < 0 \Rightarrow f(x) - \left(-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow (Cf)$ تحت $(T)$

$x > 0 : g(x) > 0 \Rightarrow f(x) - \left(-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right) > 0 \Rightarrow (Cf)$ فوق $(T)$

**حل التمرين 18:**

**I-** $g(x) = e^x - x$ ; $Df = \mathbb{R}$

**دراسة اتجاه تغير الدالة** $g$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x - x = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x - x = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = \boxed{+\infty}$$

$g'(x) = e^x - 1$

$e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$x \in ]-\infty; 0[ : g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

$x \in [0; +\infty[ : g'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

بيان أنّه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإنّ : $g(x) > 0$

نلاحظ من جدول التغيرات أنّ 1 قيمة حدّية صغرى للدالة $g$ ، منه $g(x) > 0$

**II- $f(x) = \frac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{x}-x}$**

**1. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{x}-x} \to \frac{+3}{+\infty} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{x}-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}(e^{x}-4+3e^{-x})}{e^{x}(1-xe^{-x})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}-4+3e^{-x}}{1-\underbrace{xe^{-x}}_{\to 0}} = \boxed{+\infty}$$

**2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $e^{2x}-4e^{x}+3>0$**

$X = e^{x}\ ; X^{2}-4x+3=0 \Rightarrow X=1$ أو $X=3 \Rightarrow x=0$ أو $x=\ln 3$

$e^{2x}-4e^{x}+3>0 \Rightarrow \boxed{x\in\ ]-\infty;0[\ \cup\ ]\ln 3\ ;+\infty[}$

**استنتاج إشارة $f(x)$**

بما أنّ $e^{x}-x>0$ ، فإنّ إشارة $f(x)$ هي نفس إشارة $e^{2x}-4e^{x}+3$ ، منه :

$x\in\ ]-\infty;0[\ \cup\ ]\ln 3\ ;+\infty[ \Rightarrow f(x)>0\ ;\ x\in[0;\ln 3] \Rightarrow f(x)\geq 0$

**3. باستعمال القراءة البيانية :**

**أ. اعطاء حصر سعته 0,2 للعددين $\alpha$ و $\beta$**

$$-1{,}5<\alpha<-1{,}3\ ;\ 0{,}5<\beta<0{,}7$$

**ب. تعيين قيم كل من: $f'(\beta), f'(0), f'(\alpha)$**

$$f'(\beta)=0\ ;\ f'(0)=-2\ ;\ f'(\alpha)=0$$

**ج. دراسة وضعية ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة للمماس (T)**

من أجل $x\in\ ]-\infty;0[$ ، يكون المنحنى ($\mathscr{C}_f$) تحت المماس (T) ، و من أجل $x\in\ ]0;+\infty[$ ، يكون المنحنى ($\mathscr{C}_f$) فوق المماس (T)

**4. لتكن الدالة $h$ المعرّفة على $]-\infty;0[$ بـ: $h(x)=\frac{1}{f(x)}$**

**جدول تغيرات الدالة $f$ على المجال $]-\infty;0[$**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $0$ |

**استنتاج جدول تغيرات الدالة $h$**

$$h(x)=\frac{1}{f(x)} \Rightarrow h'(x)=-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $\frac{1}{f(\alpha)}$ | ↗ | $+\infty$ |

**حل التمرين 19:**

$$f(x)=(x^2+x+2)e^{-x}\ ;\ Df=[-1;+\infty[$$

**1. بيان أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^2+x+2)e^{-x}=\lim_{x\to+\infty} x^2e^{-x}+xe^{-x}+2e^{-x}=0$$

استنتاج أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا يُطلب كتابة معادلته

بما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ، فإنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته : $y=0$

2. أ. دراسة اتجاه تغير الدالة $f$

$$f'(x)=(2x+1)e^{-x}-(x^2+x+2)e^{-x} \Rightarrow \boxed{f'(x)=(-x^2+x-1)e^{-x}}$$

$-x^2+x-1<0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $2e$ ↘ | $0$ |

**ب. كتابة معادلة المماس (T) لـ ($\mathscr{C}_f$) عند $x_0 = 0$**

$$y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow \boxed{(T): y = -x + 2}$$

**ج. بيان أنّ المعادلة $f(x) = 3$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $[-1; 0]$**

$f(-1) = 2e \approx 5{,}4$ ، $f(0) = 2$. الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على المجال $[-1; 0]$ و $f(0) < 3 < f(-1)$ ، منه المعادلة $f(x) = 3$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $[-1; 0]$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**اعطاء حصر للعدد $\alpha$ بتقريب $10^{-1}$**

$$f(-0{,}5) \approx 2{,}89\ ;\ f(-0{,}75) \approx 3{,}84\ ;\ f(-0{,}6) \approx 3{,}21$$

$$\Rightarrow \boxed{-0{,}6 < \alpha < -0{,}5}$$

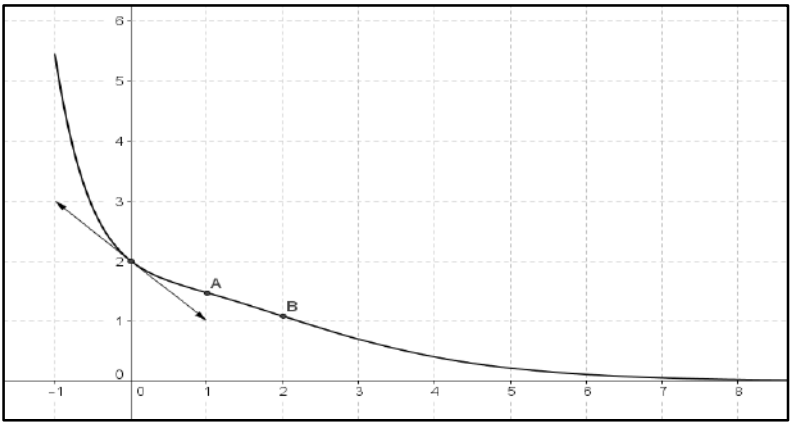
**3. أ. بيان أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل نقطتي انعطاف يُطلب تعيينهما**

$$f''(x) = (-2x + 1)e^{-x} - (-x^2 + x - 1)e^{-x} = (x^2 - 3x + 2)e^{-x}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ أو } x = 2$$

منه ، يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) نقطتي انعطاف هما : $A(1; 4e^{-1})$ و $B(2; 8e^{-2})$

**ب. رسم المماس (T) والمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**



**4.** $g(x) = [f(x)]^2$ ; $Dg = [-1; +\infty[$

**أ. بيان أنّ $g = uof$ ، حيث $u$ دالة يُطلب تعيينها**

$$g(x) = uof(x) = u[f(x)] = [f(x)]^2 \Rightarrow \boxed{u(x) = x^2}$$

**ب. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$**

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0}$$

**ج. جدول تغيرات الدالة $g$**

$$g'(x) = 2f(x) \times f'(x)$$

بما أنّ $f(x) > 0$ و $f'(x) < 0$ ، فإنّ $g'(x) < 0$ ، منه الدالة $g$ متناقصة

| $x$ | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | |
| $g(x)$ | $4e^2$ | ↘ | $0$ |

**5.** $f_m(x) = (x^2 + mx + 2)e^{-x}$ ; $Df_m = \mathbb{R}$

**تعيين قيم $m$ حتى تقبل الدالة $f_m$ قيمتين حدّيتين محليتين**

$$f'_m(x) = (2x + m)e^{-x} - (x^2 + mx + 2)e^{-x}$$

$$f'_m(x) = [-x^2 + (2 - m)x + m - 2]e^{-x}$$

$-x^2 + (2 - m)x + m - 2 = 0$ ; $\Delta = (2 - m)^2 - 4(2 - m) = m^2 - 4$

حتى تقبل الدالة $f_m$ قيمتين حدّيتين محليتين ، ينبغي لمشتقتها $f'_m(x)$ أن تنعدم مرتين ، أي :

$$\Delta > 0 \Rightarrow m^2 - 4 > 0 \Rightarrow \boxed{m \in ]-\infty; -2[ \cup ]2; +\infty[}$$

**حل التمرين 20:**

**I- $g(x) = (ax + b)e^x - 1$ ; $Dg = \mathbb{R}$**

**1. بيان أنّ $a = 1$ و $b = -1$**

$$g'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$$

$$\begin{cases} g'(0) = 0 \\ g(0) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ b - 1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{g(x) = (x - 1)e^x - 1}$$

**2. بيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]1,27 ; 1,28[$**

$g(1,27) \approx -0,04$ ، $g(1,28) \approx 0,01$. الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]1,27\,;\,1,28[$ و $g(1,27) \times g(1,28) < 0$ ، منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]1,28\,;\,1,27[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$**

$x \in ]-\infty;\alpha[ : g(x) < 0\,;\; x \in ]\alpha;+\infty[ : g(x) > 0\,;\; g(\alpha) = 0$

**II- $f(x) = \frac{e^x - 2x + 1}{x}$ ; $Df = \mathbb{R}^*$**

**1. إثبات أنّه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ فإنّ $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$**

$$f'(x) = \frac{x(e^x - 2) - (e^x - 2x + 1)}{x^2} = \frac{(x-1)e^x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

**استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ على $\mathbb{R}^*$**

$x \in ]-\infty;0[ \cup ]0;\alpha[ : f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x \in [\alpha;+\infty[ : f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**2. حساب النهايات عند حدود مجال تعريف الدالة $f$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 2x + 1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\to 0} - 2 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} = \boxed{-2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 2x + 1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\to+\infty} - 2 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{e^x - 2x + 1}{x} \begin{matrix} \to +2 \\ \to 0^- \end{matrix} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{e^x - 2x + 1}{x} \begin{matrix} \to +2 \\ \to 0^+ \end{matrix} = \boxed{+\infty}$$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-2$ | $\searrow$ | $\|\|$ $+\infty$ | $\searrow$ | $f(\alpha)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| | | $-\infty$ | | | | | |

**3. إثبات أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيمين مقاربين و فرعا لا نهائيا باتجاه حامل محور التراتيب**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2 \Rightarrow y = -2$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $(-\infty)$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty \Rightarrow x = 0$ مستقيم مقارب عمودي

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 2x + 1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = +\infty$$

منه ، يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) فرعا لا نهائيا باتجاه حامل محور التراتيب

**4. بيان أنّ $f(\alpha) = -2 + \frac{1}{\alpha-1}$ واعطاء حصر لـ $f(\alpha)$**

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow (\alpha - 1)e^{\alpha} - 1 = 0 \Rightarrow e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

$$f(\alpha) = \frac{e^{\alpha} - 2\alpha + 1}{\alpha} = \frac{e^{\alpha} - 2\alpha + 1}{\alpha} = \frac{e^{\alpha} + 1}{\alpha} - 2 = \frac{\frac{1}{\alpha - 1} + 1}{\alpha} - 2$$

$$f(\alpha) = -2 + \frac{\frac{\alpha}{\alpha - 1}}{\alpha} = \boxed{-2 + \frac{1}{\alpha - 1}}$$

$$1{,}27 < \alpha < 1{,}28 \Rightarrow 0{,}27 < \alpha - 1 < 0{,}28 \Rightarrow \frac{1}{0{,}28} < \frac{1}{\alpha - 1} < \frac{1}{0{,}27}$$

$$\Rightarrow -2 + \frac{1}{0{,}28} < -2 + \frac{1}{\alpha - 1} < -2 + \frac{1}{0{,}27} \Rightarrow \boxed{1{,}57 < f(\alpha) < 1{,}70}$$

**5. كتابة معادلة المماس (T) لـ ($\mathscr{C}_f$) عند $x_0 = 1$**

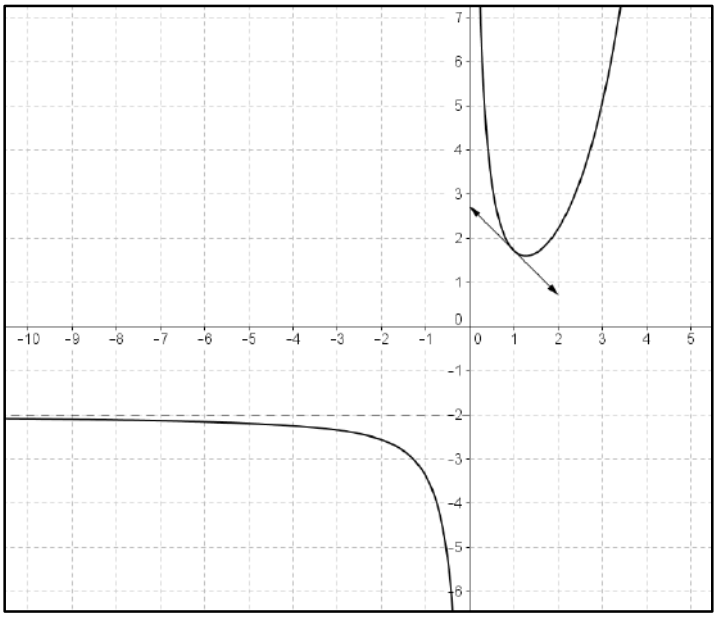
$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = -(x - 1) + e - 1 \Rightarrow \boxed{(T): y = -x + e}$$

**6. حساب $f(3)$ , $f(2)$ , $f\left(\frac{1}{2}\right)$ , $f(-1)$ , $f(-3)$**

$$f(3) = \frac{e^3 - 5}{3} \approx 5 \; ; \; f(2) = \frac{e^2 - 3}{2} \approx 2{,}2 \; ; \; f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{e} \approx 3{,}3 \; ;$$

$$f(-1) = -3 - e^{-1} \approx -3{,}4 \; ; \; f(-3) = -\frac{7}{3} - \frac{1}{3e^3} \approx -2{,}4$$

**رسم المماس (T) و($\mathscr{C}_f$)**



**حل التمرين 21:**

$$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1} \; ; Df = \mathbb{R}$$

**1. حساب نهايات الدالة $f$ عند $-\infty$ ثمّ عند $+\infty$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x + 1 - xe^{x-1} = \lim_{x\to-\infty} 2x + 1 - \frac{1}{e}\underbrace{xe^{x}}_{\to 0} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x + 1 - xe^{x-1} = \lim_{x\to+\infty} x\left(2 + \frac{1}{x} - e^{x-1}\right) = \boxed{-\infty}$$

**2. إثبات أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند $-\infty$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (2x+1) = \lim_{x\to-\infty} -xe^{x-1} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{e}xe^{x} = \boxed{0}$$

منه ، المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند $-\infty$

**دراسة وضعية المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$**

$$f(x) - (2x+1) = -xe^{x-1}$$

$$x < 0 : -xe^{x-1} > 0 \Rightarrow f(x) - (2x+1) > 0 \Rightarrow (Cf) \text{ فوق } (T)$$

$$x > 0 : -xe^{x-1} < 0 \Rightarrow f(x) - (2x+1) < 0 \Rightarrow (Cf) \text{ تحت } (T)$$

**3. أ. حساب المشتقة $f'$ والمشتقة الثانية $f''$ للدالة $f$**

$f'(x) = 2 - (e^{x-1} + xe^{x-1}) \Rightarrow \boxed{f'(x) = 2 - (x+1)e^{x-1}}$

$f''(x) = -e^{x-1} - (x+1)e^{x-1} \Rightarrow \boxed{f''(x) = -(x+2)e^{x-1}}$

**ب. جدول تغيرات $f'$ مع تحديد نهاية $f'$ عند $-\infty$**

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} 2 - (x+1)e^{x-1} = \lim_{x\to-\infty} 2 - \frac{1}{e}\underbrace{(x+1)e^{x}}_{\to 0} = \boxed{2}$$

الدالة $f'$ متزايدة $\Rightarrow x \in ]-\infty; -2[ : f''(x) > 0$

الدالة $f'$ متناقصة $\Rightarrow x \in [-2\,; +\infty[ : f''(x) \leq 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | $2$ | ↗ | $2+e^{-3}$ | ↘ | $-\infty$ |

**ج. حساب $f'(1)$ واستنتاج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$**

$f'(1) = 0\,; x < 1 \Rightarrow f'(x) > 0\,;\ x > 1 \Rightarrow f'(x) < 0$

**د. جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-\infty$ |

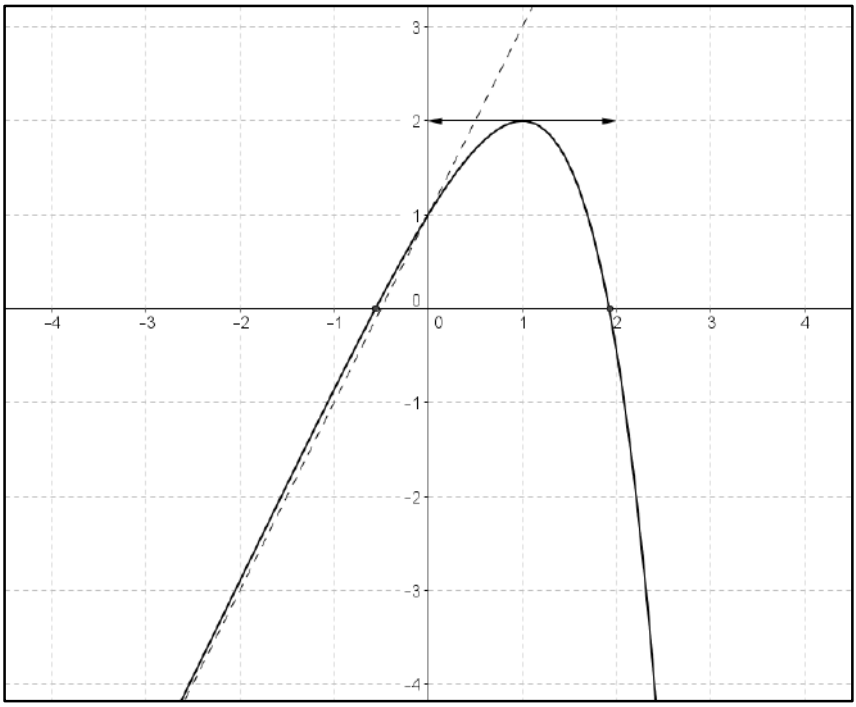
**4. بيان أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ حيث : $1,9 < \alpha < 2$ و $-0,6 < \beta < -0,5$**

$f(1,9) \approx 0,13\,;\ f(2) \approx -0,44\,;\ f(-0,6) \approx -0,08\,;\ f(-0.5) \approx 0,11$

الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على كل من المجالين $]2\,;\,1,9[$ و $]-0,5\,;\,-0,6[$ ولدينا :

$f(1,9) \times f(2) < 0\,;\ f(-0,6) \times f(-0.5) < 0$ ، منه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين $1,9 < \alpha < 2$ و $-0,6 < \beta < -0,5$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**5. رسم المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ (وحدة الرسم : $2cm$)**




**حل التمرين 22:**

$$g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} + 1 \; ; Dg = \mathbb{R}^*$$

**1. حساب النهايات عند حدود مجال تعريف الدالة $g$**

$$\lim_{|x|\to+\infty} g(x) = \lim_{|x|\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} + 1 = \boxed{2} \quad \left(\frac{1}{x} \to 0 \; ; \; e^{\frac{1}{x}} \to 1\right)$$

$$\lim_{\substack{<\\ x\to 0}} g(x) = \lim_{\substack{<\\ x\to 0}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} + 1 = \lim_{X\to-\infty} \underbrace{(1+X)e^X}_{\to 0} + 1 = \boxed{1} \quad \left(X = \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 0}} g(x) = \lim_{\substack{>\\ x\to 0}}\left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} + 1 = \lim_{X\to+\infty} \underbrace{(1+X)e^X}_{\to+\infty} + 1 = \boxed{+\infty} \quad \left(X = \frac{1}{x}\right)$$

**2. دراسة اتجاه تغير الدالة $g$**

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{g'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{2x+1}{x}\right)}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $2x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | |

$x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[ \cup \left]0; +\infty\right[ : g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

$x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right[ : g'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

**جدول تغير الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | |
| $g(x)$ | $2$ | ↘ | $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ | ↗ | $1$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $2$ |

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{e^2-1}{e^2} \approx 0{,}87$$

**3. بيان أنّه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ فإنّ $g(x) > 0$**

من الجدول السابق نلاحظ أنّ $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ قيمة حدّية صغرى للدالة $g$ ، منه $g(x) > 0$

من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$

**II- $Df = \mathbb{R}$ ;** $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

**1. دراسة استمرارية الدالة $f$ عند $x_0 = 0$**

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{x}{1+\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to 0}} = \boxed{0} \; ; \; \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{x}{1+\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to +\infty}} = \boxed{0}$$

بما أنّ $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = f(0)$ ، نستنتج أنّ الدالة $f$ مستمرة عند $0$

**2. دراسة قابلية اشتقاق $f$ عند $x_0 = 0$ وبيان أنّ $(\mathscr{C})$ يقبل نصفي مماسين $\Delta$ و $\Delta'$ يُطلب كتابة معادلتيهما**

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{1}{1+\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to 0}} = \boxed{1} \; ; \; \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{1}{1+\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to +\infty}} = \boxed{0}$$

بما أنّ $\lim\limits_{\substack{<\\x\to 0}} \frac{f(x)}{x} \neq \lim\limits_{\substack{>\\x\to 0}} \frac{f(x)}{x}$ ، نستنتج أنّ الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق عند $0$ ، ويقبل منحناها البياني $(\mathscr{C}_f)$ نصفي مماسين معادلتيهما : $(\Delta): y = x$ و $(\Delta'): y = 0$

**3. إثبات أنّه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ فإنّ $f'(x) = \frac{g(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$**

$$f'(x) = \frac{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right) - x\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}+1}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2} = \frac{g(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$

**استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ على $\mathbb{R}$**

بما أنّ $g(x) > 0$ ، فإنّ $f'(x) > 0$ ، منه الدالة $f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

**4. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \boxed{-\infty}\ ;\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \boxed{+\infty}$$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**5. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)} - \frac{1}{2\left(\frac{1}{x}\right)} + \frac{1}{4} = \lim_{X\to 0} \frac{1}{X(1+e^X)} - \frac{1}{2X} + \frac{1}{4}\ ;\left(X = \frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{X\to 0} \frac{2-(1+e^X)}{2X(1+e^X)} + \frac{1}{4} = \lim_{X\to 0} \frac{1-e^X}{2X(1+e^X)} + \frac{1}{4}$$

$$= \lim_{X\to 0} -\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{e^X-1}{X}\right)}_{\to 1}\underbrace{\left(\frac{1}{1+e^X}\right)}_{\to\frac{1}{2}} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{0}$$

بنفس الطريقة ، نجد أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = 0$

**استنتاج وجود مستقيم مقارب للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**

بما أنّ $\lim\limits_{|x|\to+\infty} f(x) - \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)$ ، فإنّ المستقيم ذي المعادلة : $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)

6. **رسم** $\Delta$ ، **'Δ والمنحنى ($\mathscr{C}_f$)** (انظر الشكل في نهاية التمرين)

7. $\begin{cases} \boldsymbol{h(x) = \frac{x}{1+e^{-\frac{1}{x}}}} \; ; \boldsymbol{x \neq 0} \\ \boldsymbol{h(0) = 0} \end{cases} ; \boldsymbol{Dh} = \mathbb{R}$

أ. **التحقق أنّ** $\boldsymbol{h(x) = -f(-x)}$

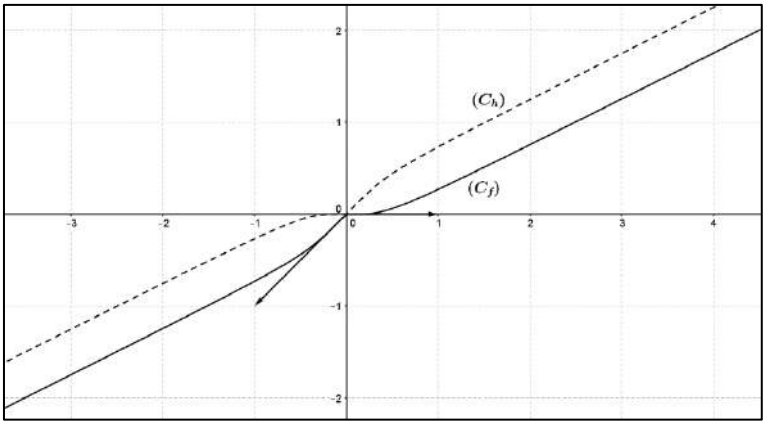
$$-f(-x) = -\left(\frac{-x}{1+e^{-\frac{1}{x}}}\right) = \frac{x}{1+e^{-\frac{1}{x}}} = h(x)$$

**بيان أنّ ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_h$) متناظران بالنسبة للمبدأ**

$$-f(-x) = h(x) \Rightarrow f(-x) = -h(x)$$

منه ، نستنتج أنّ ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_h$) متناظران بالنسبة للمبدأ

ب. **استنتاج رسم المنحنى ($\mathscr{C}_h$)**



**المعادلات التفاضلية:**

**حل التمرين 23:**

في كل حالة من الحالات التالية ، تعيين الدالة الوحيدة $f$ القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث :

1. $f' = 3f$ و $f(0) = 1$

$f' = 3f \Rightarrow f(x) = ce^{3x}\ ; f(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \boxed{f(x) = e^{3x}}$

2. $f' + 2f = 0$ والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يشمل النقطة $A(-3;2)$

$f' + 2f = 0 \Rightarrow f' = -2f \Rightarrow f(x) = ce^{-2x}$

$f(-3) = 2 \Rightarrow ce^{6} = 2 \Rightarrow c = 2e^{-6} \Rightarrow \boxed{f(x) = 2e^{-6}e^{-2x} = 2e^{-2x-6}}$

3. $2f' - 3f = 0$ و $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-2}$

$2f' - 3f = 0 \Rightarrow f' = \frac{3}{2}f \Rightarrow f(x) = ce^{\frac{3}{2}x}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-2} \Rightarrow ce^{\frac{3}{4}} = e^{-2} \Rightarrow c = e^{-2-\frac{3}{4}} = e^{-\frac{11}{4}} \Rightarrow \boxed{f(x) = e^{\frac{3}{2}x-\frac{11}{4}}}$

4. $2f' + f = 0$ و $f(\ln 4) = 1$

$2f' + f = 0 \Rightarrow f' = -\frac{1}{2}f \Rightarrow f(x) = ce^{-\frac{1}{2}x}$

$f(\ln 4) = 1 \Rightarrow ce^{-\left(\frac{\ln 4}{2}\right)} = 1 \Rightarrow c = e^{\left(\frac{\ln 4}{2}\right)} = e^{\left(\frac{2\ln 2}{2}\right)} = e^{\ln 2} = 2$

$\boxed{f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x}}$

5. $f' - 2f = 3$ و $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{2}$

$f' - 2f = 3 \Rightarrow f' = 2f + 3 \Rightarrow f(x) = ce^{2x} - \frac{3}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{2} \Rightarrow ce^{1} - \frac{3}{2} = e^{2} \Rightarrow c = \frac{e^{2}+\frac{3}{2}}{e} = e + \frac{3}{2}e^{-1}$

$\boxed{f(x) = \left(e + \frac{3}{2}e^{-1}\right)e^{2x} - \frac{3}{2}}$

**حل التمرين 24:**

1. **حل المعادلة التفاضلية التالية : $2y' + 3y = 0$**

$2y' + 3y = 0 \Rightarrow y' = -\frac{3}{2}y \Rightarrow \boxed{y = ce^{-\frac{3}{2}x}}$

**تعيين الحل $f$ الذي يحقق $f(0)=8$**

$$f(0)=8 \Rightarrow c=8 \Rightarrow \boxed{f(x)=8e^{-\frac{3}{2}x}}$$

**2. تعيين الدالة $h$ حلا للمعادلة $y'-2y+4=0$ والتي تنعدم عند $-\ln 3$**

$$h'-2h+4=0 \Rightarrow h'=2h-4 \Rightarrow h(x)=ce^{2x}+2$$

$$h(-\ln 3)=0 \Rightarrow ce^{-2\ln 3}+2=0 \Rightarrow c=-\frac{2}{e^{-2\ln 3}}=-2e^{2\ln 3}=-18$$

$$\boxed{h(x)=-18e^{2x}+2}$$

**ملاحظة: في التمارين التالية نختصر العبارة "$h$ هي حل للمعادلة $(E)$" بـ : $h \in S_{(E)}$**

**حل التمرين 25:**

**1. حل المعادلة : $(E)\ldots y'-2y=0$**

$$y'-2y=0 \Rightarrow y'=2y \Rightarrow \boxed{y=ce^{2x}}$$

**2. $(F)\ldots y'-2y=e^x$. تعيين العددين الحقيقيين $a$ و $b$ حتى تكون الدالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=ae^x+b$ حلا للمعادلة $(F)$**

$$g \in S_{(F)} \Rightarrow g'-2g=e^x \Rightarrow (ae^x+b)'-2(ae^x+b)=e^x$$

$$\Rightarrow ae^x-2ae^x-2b=e^x \Rightarrow -ae^x-2b=e^x \Rightarrow \boxed{a=-1\,;b=0}$$

**3. بيان أنّ $h$ هي حل للمعادلة $(E)$ إذا وفقط إذا $f=g+h$ هي حل للمعادلة $(F)$**

- نبرهن أنّه إذا كانت $h$ حل للمعادلة $(E)$ فإنّ $f$ حل للمعادلة $(F)$

$$h \in S_{(E)} \Rightarrow h'-2h=0 \Rightarrow (f-g)'-2(f-g)=0$$

$$\Rightarrow (f'-2f)-\underbrace{(g'-2g)}_{e^x}=0 \Rightarrow f'-2f=e^x \Rightarrow \boxed{f \in S_{(F)}}$$

- نبرهن أنّه إذا كانت $f$ حل للمعادلة $(F)$ فإنّ $h$ حل للمعادلة $(E)$

$$f \in S_{(F)} \Rightarrow f'-2f=e^x \Rightarrow (g+h)'-2(g+h)=e^x$$

$$\Rightarrow \underbrace{(g'-2g)}_{e^x}+(h'-2h)=e^x \Rightarrow h'-2h=0 \Rightarrow \boxed{h \in S_{(E)}}$$

**استنتاج حلول المعادلة $(F)$**

$$\begin{cases} g(x)=-e^x \\ h(x)=ce^{2x} \end{cases} \Rightarrow f(x)=g(x)+h(x) \Rightarrow \boxed{f(x)=-e^x+ce^{2x}}$$

**4. تعيين حل المعادلة $(F)$ التي تمثيلها البياني في معلم يمرّ من المبدأ**

$$f(0)=0 \Rightarrow -1+c=0 \Rightarrow c=1 \Rightarrow \boxed{f(x)=e^{2x}-e^x}$$

**حل التمرين 26:**

1. **حل المعادلة : $y' + 2y = 0 \dots (E)$**

$y' + 2y = 0 \Rightarrow y' = -2y \Rightarrow \boxed{y = ce^{-2x}}$

2. **$y' + 2y = 5\cos x \dots (F)$. تعيين العددين الحقيقيين $a$ و $b$ حتى تكون الدالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = a\cos x + b\sin x$ حلا للمعادلة $(F)$**

$g \in S_{(F)} \Rightarrow g' + 2g = 5\cos x$

$\Rightarrow (a\cos x + b\sin x)' + 2(a\cos x + b\sin x) = 5\cos x$

$\Rightarrow -a\sin x + b\cos x + 2a\cos x + 2b\sin x = 5\cos x$

$\Rightarrow (2b - a)\sin x + (2a + b)\cos x = 5\cos x \Rightarrow \begin{cases} 2b - a = 0 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

3. **بيان أنّ $f$ هي حل للمعادلة $(F)$ إذا وفقط إذا $f - g$ هي حل للمعادلة $(E)$**

- نبرهن أنّه إذا كانت $f$ حل للمعادلة $(F)$ فإنّ $f - g$ حل للمعادلة $(E)$

$f \in S_{(F)} \Rightarrow f' + 2f = 5\cos x \Rightarrow (f' + 2f) = \underbrace{(g' + 2g)}_{5\cos x}$

$\Rightarrow (f - g)' + 2(f - g) = 0 \Rightarrow \boxed{f - g \in S_{(E)}}$

- نبرهن أنّه إذا كانت $f - g$ حل للمعادلة $(E)$ فإنّ $f$ حل للمعادلة $(F)$

$f - g \in S_{(E)} \Rightarrow (f - g)' + 2(f - g) = 0$

$\Rightarrow (f' + 2f) - \underbrace{(g' + 2g)}_{5\cos x} = 0 \Rightarrow f' + 2f = 5\cos x \Rightarrow \boxed{f \in S_{(F)}}$

**استنتاج حلول المعادلة $(F)$**

$g(x) = 2\cos x + \sin x$ ;

$f - g = ce^{-2x} \Rightarrow \boxed{f(x) = ce^{-2x} + 2\cos x + \sin x}$

**حل التمرين 27:**

1. **حل المعادلة : $2y' + y = 0 \dots (\mathrm{I})$**

$2y' + y = 0 \Rightarrow y' = -\frac{1}{2}y \Rightarrow \boxed{y = ce^{-\frac{1}{2}x}}$

2. **بيان أنّ الدالة $g(x) = x^2 - x + 2$ حل للمعادلة $2y' + y = x^2 + 3x$ (II)**

$2g' + g = 2(2x - 1) + x^2 - x + 2 = x^2 + 3x \Rightarrow \boxed{g \in S_{(\mathrm{II})}}$

3. **بيان أنّ $h$ هي حل للمعادلة (II) إذا وفقط إذا $h - g$ هي حل للمعادلة (I)**

- نبرهن أنّه إذا كانت $h$ حلا للمعادلة (II) فإنّ $h - g$ حل للمعادلة (I)

$h \in S_{(II)} \Rightarrow 2h' + h = x^2 + 3x \Rightarrow (2h' + h) = \underbrace{(2g' + g)}_{x^2+3x}$

$\Rightarrow 2(h-g)' + (h-g) = 0 \Rightarrow \boxed{h - g \in S_{(I)}}$

- نبرهن أنّه إذا كانت $h - g$ حلا للمعادلة (I) فإنّ $h$ حل للمعادلة (II)

$h - g \in S_{(I)} \Rightarrow 2(h-g)' + (h-g) = 0$

$\Rightarrow (2h' + h) - \underbrace{(2g' + g)}_{x^2+3x} = 0 \Rightarrow 2h' + h = x^2 + 3x \Rightarrow \boxed{h \in S_{(II)}}$

**استنتاج حلول المعادلة $(F)$**

$h - g = ce^{-\frac{1}{2}x} \Rightarrow \boxed{h(x) = ce^{-\frac{1}{2}x} + x^2 - x + 2}$

**4. تعيين حل المعادلة (II) حيث $h'(0) = 1$**

$h'(x) = -\frac{1}{2}ce^{-\frac{1}{2}x} + 2x - 1\ ;\ h'(0) = 1 \Rightarrow -\frac{1}{2}c - 1 = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}c = -2$

$\Rightarrow c = -4 \Rightarrow \boxed{h(x) = -4e^{-\frac{1}{2}x} + x^2 - x + 2}$

**حل التمرين 28:**

**I- تعيين جميع حلول المعادلة $(E)$ ... $3y' + 2y = 0$**

$3y' + 2y = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2}{3}y \Rightarrow \boxed{y = ce^{-\frac{2}{3}x}}$

**II- لتكن المعادلة التفاضلية $(F)$ حيث: $3y' + 2y = 2x^2 - 1$**

**1. تعيين الدالة $h$ كثير حدود من الدرجة الثانية حلا للمعادلة $(F)$**

$h(x) = ax^2 + bx + c\ ;\ h \in S_{(F)} \Rightarrow 3h' + 2h = 2x^2 - 1$

$\Rightarrow 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 2x^2 - 1$

$\Rightarrow 2ax^2 + (6a + 2b)x + (3b + 2c) = 2x^2 - 1 \Rightarrow \begin{cases} 2a = 2 \\ 6a + 2b = 0 \\ 3b + 2c = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{h(x) = x^2 - 3x + 4}$

**2. بيان أنّه إذا كانت الدالة $g$ حلا للمعادلة $(F)$ فإنّ الدالة $(g - h)$ حل للمعادلة $(E)$**

$g \in S_{(F)} \Rightarrow 3g' + 2g = 2x^2 - 1 \Rightarrow 3g' + 2g = \underbrace{3h' + 2h}_{2x^2-1}$

$\Rightarrow 3(g-h)' + 2(g-h) = 0 \Rightarrow \boxed{(g-h) \in S_{(E)}}$

**3. بيان أنّه إذا كانت الدالة $(g-h)$ حلا للمعادلة $(E)$ فإنّ الدالة $g$ حل للمعادلة $(F)$**

$$(g-h)\in S_{(E)} \Rightarrow 3(g-h)'+2(g-h)=0 \Rightarrow 3g'+2g=\underbrace{3h'+2h}_{2x^2-1}$$

$$\Rightarrow 3g'+2g=2x^2-1 \Rightarrow \boxed{g\in S_{(F)}}$$

**4. استنتاج حلول المعادلة $(F)$**

$$(g-h)\in S_{(E)} \Rightarrow g-h=ce^{-\frac{2}{3}x} \Rightarrow \boxed{g(x)=ce^{-\frac{2}{3}x}+x^2-3x+4}$$

**تعيين الحل الذي يحقق : $g(0)=3$**

$$g(0)=3 \Rightarrow c+4=3 \Rightarrow c=-1 \Rightarrow \boxed{g(x)=-e^{-\frac{2}{3}x}+x^2-3x+4}$$

**حل التمرين 29:**

نعتبر المعادلة التفاضلية : $-y'+3y=9x+5e^{-2x+3}$ ... $(1)$

**1. حل المعادلة التفاضلية : $3y-y'=0$ ... $(2)$**

$$3y-y'=0 \Rightarrow y'=3y \Rightarrow \boxed{y=ce^{3x}}$$

**2. بيان أنّ الدالة $g(x)=3x+1+e^{-2x+3}$ حل للمعادلة التفاضلية (1)**

$$-g'+3g=-(3-2e^{-2x+3})+3(3x+1+e^{-2x+3})=9x+5e^{-2x+3}$$

منه الدالة $g$ حل للمعادلة التفاضلية $(1)$

**3. بيان أنّ $f$ هي حل للمعادلة (1) إذا وفقط إذا $g-f$ هي حل للمعادلة (2)**

- نبرهن أنّه إذا كانت $f$ حلا للمعادلة $(1)$ فإنّ $f-g$ حل للمعادلة $(2)$

$$f\in S_{(1)} \Rightarrow -f'+3f=9x+5e^{-2x+3} \Rightarrow (-f'+3f)=\underbrace{(-g'+3g)}_{9x+5e^{-2x+3}}$$

$$\Rightarrow 3(f-g)-(f-g)'=0 \Rightarrow \boxed{f-g\in S_{(2)}}$$

- نبرهن أنّه إذا كانت $f-g$ حلا للمعادلة $(2)$ فإنّ $f$ حل للمعادلة $(1)$

$$f-g\in S_{(2)} \Rightarrow 3(f-g)-(f-g)'=0$$

$$\Rightarrow (-f'+3f)-\underbrace{(-g'+3g)}_{9x+5e^{-2x+3}}=0$$

$$\Rightarrow -f'+3f=9x+5e^{-2x+3} \Rightarrow \boxed{f\in S_{(1)}}$$

**4. حل المعادلة التفاضلية (1)**

$$f-g\in S_{(2)} \Rightarrow f-g=ce^{3x} \Rightarrow \boxed{f(x)=ce^{3x}+3x+1+e^{-2x+3}}$$

**حل التمرين 30:**

نعتبر المعادلة التفاضلية : (E) ... $y' = -3y + 4e^{-2x}$

**1. تعيين العدد الحقيقي λ حتى تكون $g(x) = \lambda e^{-2x}$ حلا للمعادلة (E)**

$g \in S_{(E)} \Rightarrow g' + 3g = 4e^{-2x} \Rightarrow -2\lambda e^{-2x} + 3\lambda e^{-2x} = 4e^{-2x}$

$\Rightarrow \lambda e^{-2x} = 4e^{-2x} \Rightarrow \lambda = 4 \Rightarrow \boxed{g(x) = 4e^{-2x}}$

2. نضع : $\lambda = 4$ و $h(x) = f(x) - g(x)$ حيث $f$ هي حل للمعادلة (E)

**أ- التأكد أنّ $h$ حل للمعادلة التفاضلية : $y' + 3y = 0$ ... (E')**

$h' + 3h = (f-g)' + 3(f-g) = \underbrace{(f' + 3f)}_{4e^{-2x}} - \underbrace{(g' + 3g)}_{4e^{-2x}} = 0$

منه الدالة $h$ حل للمعادلة (E')

**ب- حل المعادلة (E')**

$y' + 3y = 0 \Rightarrow y' = -3y \Rightarrow \boxed{y = ce^{-3x}}$

**استنتاج حلول المعادلة (E)**

$h \in S_{(E')} \Rightarrow h(x) = ce^{-3x} \Rightarrow f(x) - g(x) = ce^{-3x}$

$\Rightarrow f(x) = ce^{-3x} + g(x) \Rightarrow \boxed{f(x) = ce^{-3x} + 4e^{-2x}}$

ج- تعيين الدالة $f_0$ التي يشمل منحناها البياني مبدأ المعلم

$f(0) = 0 \Rightarrow c + 4 = 0 \Rightarrow c = -4 \Rightarrow \boxed{f_0(x) = -4e^{-3x} + 4e^{-2x}}$

**د- دراسة تغيرات الدالة $f_0$**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} -4e^{-3x} + 4e^{-2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{4e^{-2x}}_{\to +\infty} \underbrace{(1 - e^{-x})}_{\to -\infty} = \boxed{-\infty}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f_0(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -4e^{-3x} + 4e^{-2x} = \boxed{0}$

$f_0'(x) = 12e^{-3x} - 8e^{-2x} = \boxed{4e^{-2x}(3e^{-x} - 2)}$

$3e^{-x} - 2 \geq 0 \Rightarrow e^{-x} \geq \frac{2}{3} \Rightarrow -x \geq \ln\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow x \leq -\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

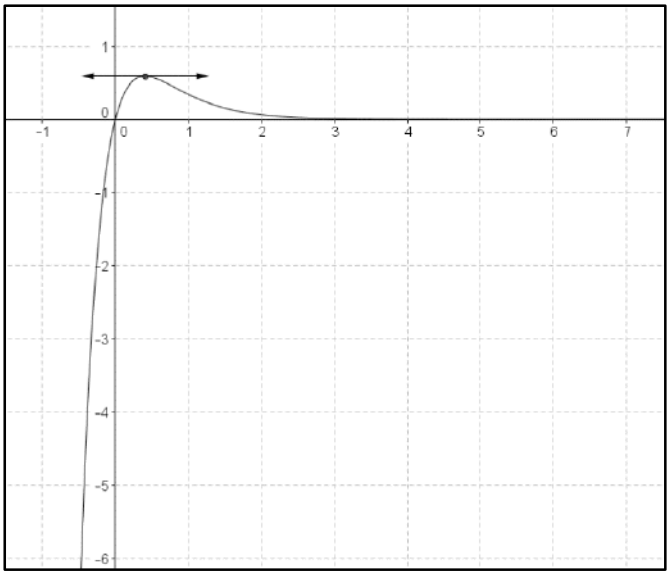
$x \in \left]-\infty; -\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right]$ : $f_0'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f_0$ متزايدة

$x \in \left]-\ln\left(\frac{2}{3}\right); +\infty\right[$ : $f_0'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f_0$ متناقصة

جدول تغيرات الدالة $f_0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_0'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f_0(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\frac{16}{27}$ | ↘ | $0$ |

ه- رسم منحنى الدالة $f_0$




3. لتكن الدالة $k(x) = 3e^{-2x} - 4$

إيجاد معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ حيث تكون الدالة $k$ حلا لها

$k(x) = 3e^{-2x} - 4 \Rightarrow k'(x) = -6e^{-2x} = -2(3e^{-2x} - 4) - 8$

$\Rightarrow k' = -2k - 8 \Rightarrow \boxed{y' = -2y - 8}$

**حل التمرين 31:**

$y' + (1 + \tan x)y = \cos x \ldots (E)$ ، $y' + y = 1 \ldots (E_0)$

1. تعيين مجموعة حلول المعادلة $(E_0)$

$y' + y = 1 \Rightarrow y' = -y + 1 \Rightarrow \boxed{y = ce^{-x} + 1}$

**2. بيان أنّ $f$ هي حل للمعادلة $(E)$ إذا وفقط إذا $g$ هي حل للمعادلة $(E_0)$**

- نبرهن أنّه إذا كانت $f$ حلا للمعادلة $(E)$ فإنّ $g$ حل للمعادلة $(E_0)$

$$f \in S_{(E)} \Rightarrow f' + (1+\tan x)f = \cos x$$
$$\Rightarrow g'(x)\cos x - g(x)\sin x + (1+\tan x)[g(x)\cos x] = \cos x$$
$$\Rightarrow g'(x)\cos x - g(x)\sin x + g(x)\cos x + g(x)\cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \cos x$$
$$\Rightarrow g'(x)\cos x - g(x)\sin x + g(x)\cos x + g(x)\sin x = \cos x$$
$$\Rightarrow [g'(x)+g(x)]\cos x = \cos x \Rightarrow g'(x)+g(x) = 1 \Rightarrow \boxed{g \in S_{(E_0)}}$$

- نبرهن أنّه إذا كانت $g$ حلا للمعادلة $(E_0)$ فإنّ $f$ حل للمعادلة $(E)$

$$g \in S_{(E_0)} \Rightarrow g'(x)+g(x) = 1 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{\cos x}\right)' + \left(\frac{f(x)}{\cos x}\right) = 1$$
$$\Rightarrow \frac{f'(x)\cos x + f(x)\sin x}{\cos^2 x} + \frac{f(x)}{\cos x} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{\cos x} + \frac{f(x)}{\cos x}\tan(x) + \frac{f(x)}{\cos x} = 1$$
$$\Rightarrow f'(x) + (1+\tan x)f(x) = \cos x \Rightarrow \boxed{f \in S_{(E)}}$$

**3. تعيين الحل $f$ للمعادلة $(E)$ حيث $f(0) = 0$**

$$g \in S_{(E_0)} \Rightarrow g(x) = ce^{-x} + 1 \Rightarrow f(x) = (ce^{-x}+1)\cos x$$
$$f(0) = 0 \Rightarrow c + 1 = 0 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow \boxed{f(x) = (-e^{-x}+1)\cos x}$$

**حل التمرين 32:**

$$y'(t) = -4{,}33 \times 10^{-4} y(t) \text{ و } y(0) = y_0$$

**1. كتابة عبارة $y(t)$ بدلالة $y_0$ و $t$**

$$y' = -4{,}33 \times 10^{-4} y \Rightarrow \boxed{y(t) = ce^{-4{,}33\times10^{-4}t}}$$
$$y(0) = y_0 \Rightarrow c = y_0 \Rightarrow \boxed{y(t) = y_0 e^{-4{,}33\times10^{-4}t}}$$

**2. حساب زمن نصف العمر للراديوم**

$$y(t) = \frac{1}{2}y_0 \Rightarrow y_0 e^{-4{,}33\times10^{-4}t} = \frac{1}{2}y_0 \Rightarrow e^{-4{,}33\times10^{-4}t} = \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow -4{,}33 \times 10^{-4}t = -\ln 2 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{4{,}33\times10^{-4}} \Rightarrow \boxed{t \approx 1601\ ans}$$

**حل التمرين 33:**

$N_0 = 1000$ ، $y'(t) = 3y(t)$

**1. حساب عدد الجراثيم في اللحظة $t = 1h30mn$**

$y' = 3y \Rightarrow y = ce^{3t}$ ; $y(0) = 10^3 \Rightarrow c = 10^3 \Rightarrow y(t) = 10^3 e^{3t}$

$y(1{,}5) = 10^3 e^{3(1{,}5)} = 1000 \times e^{4{,}5} \Rightarrow \boxed{y(1{,}5) \approx 90017}$

**2. تعيين قيمة $t$ حتى يصبح عدد الجراثيم مليون مرّة عددها في اللحظة $t = 0$**

$y(t) = 10^6 N_0 \Rightarrow 10^3 e^{3t} = 10^9 \Rightarrow e^{3t} = 10^6 \Rightarrow 3t = 6 \ln 10$

$\Rightarrow t = 2 \ln 10 = 4{,}605\ h \Rightarrow \boxed{t \approx 4h\ 36mn}$

**حل التمرين 34:**

$m(0) = 300$ ، $5y' + y = 0$ ... (E)

**1. حل المعادلة (E)**

$5y' + y = 0 \Rightarrow y' = -\frac{1}{5}y \Rightarrow \boxed{y = ce^{-\frac{1}{5}t}}$

**2. تعيين العدد $t_0$ حيث يكون : $m(t_0) = 150$**

$m(0) = 300 \Rightarrow c = 300 \Rightarrow \boxed{m(t) = 300e^{-\frac{1}{5}t}}$

$m(t_0) = 150 \Rightarrow 300e^{-\frac{1}{5}t_0} = 150 \Rightarrow e^{-\frac{1}{5}t_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{5}t_0 = -\ln 2$

$\Rightarrow t_0 = 5 \ln 2 \Rightarrow \boxed{t_0 \approx 3{,}47\ mn}$

**3. تعيين الحظة التي يكون فيها الكشف عن وجود الملح ممكنا**

$m(t) \leq 10^{-2} \Rightarrow 300e^{-\frac{1}{5}t} \leq 10^{-2} \Rightarrow e^{-\frac{1}{5}t} \leq \frac{1}{3}10^{-4}$

$\Rightarrow -\frac{1}{5}t \leq \ln\left(\frac{1}{3}10^{-4}\right) \Rightarrow t \geq -5 \ln\left(\frac{1}{3}10^{-4}\right) \Rightarrow \boxed{t \geq 51{,}5\ mn}$

**حل التمرين 35:**

نعتبر للمعادلة التفاضلية $y' + 2y = 3e^{-3x}$ ... (1)

**1. بوضع : $y = z - 3e^{-3x}$ ، إيجاد المعادلة التفاضلية (2) التي تحققها الدالة z**

$y' + 2y = 3e^{-3x} \Rightarrow (z - 3e^{-3x})' + 2(z - 3e^{-3x}) = 3e^{-3x}$

$\Rightarrow z' + 9e^{-3x} + 2z - 6e^{-3x} = 3e^{-3x} \Rightarrow \boxed{z' + 2z = 0 \ldots (2)}$

**2. حل المعادلة التفاضلية (2)**

$z' + 2z = 0 \Rightarrow z' = -2z \Rightarrow \boxed{z = ce^{-2x}}$

**استنتاج حل المعادلة التفاضلية (1)**

$y = z - 3e^{-3x} \Rightarrow \boxed{y = ce^{-2x} - 3e^{-3x}}$

**3. تعيين الحل $f$ للمعادلة (1) حيث : $f(0) = \frac{3}{2}$**

$f(0) = \frac{3}{2} \Rightarrow c - 3 = \frac{3}{2} \Rightarrow c = \frac{9}{2} \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}}$

**4. التحقق أنّ الدالة $f$ تُكتب على الشكل : $f(x) = 3e^{-2x}\left(\frac{3}{2} - e^{-x}\right)$**

$f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x} = \boxed{3e^{-2x}\left(\frac{3}{2} - e^{-x}\right)}$

**5. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 3e^{-2x}\left(\frac{3}{2} - e^{-x}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3e^{-2x}\left(\frac{3}{2} - e^{-x}\right) = 0$

$f'(x) = -9e^{-2x} + 9e^{-3x} = 9e^{-2x}(-1 + e^{-x})$

$-1 + e^{-x} \geq 0 \Rightarrow e^{-x} \geq 1 \Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$

$x \in ]-\infty\,;0] \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x \in ]0\,;+\infty[ \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\frac{3}{2}$ | ↘ | $0$ |

**6. تعيين نقط تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مع محوري الإحداثيات**

تقاطع ($\mathscr{C}_f$) مع محور التراتيب : $f(0) = \frac{3}{2}$ ، منه $(C_f) \cap (yy') = A\left(0;\frac{3}{2}\right)$

تقاطع ($\mathscr{C}_f$) مع محور الفواصل :

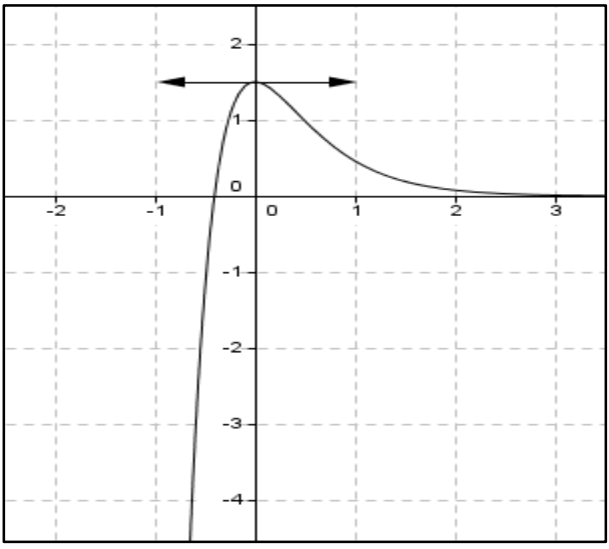
$f(x) = 0 \Rightarrow 3e^{-2x}\left(\frac{3}{2} - e^{-x}\right) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} - e^{-x} = 0$

$$\Rightarrow e^{-x} = \frac{3}{2} \Rightarrow -x = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow x = -\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

منه $(C_f) \cap (xx') = B\left(-\ln\left(\frac{3}{2}\right); 0\right)$

**7. حساب $f(1)$ ورسم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$**

$$f(1) = \frac{9}{2}e^{-2} - 3e^{-3} \Rightarrow f(1) \approx 0{,}46$$




**دراسة الدوال الأسّية:**

**حل التمرين 36:**

I- $y' - 2y = xe^x$ ... (1)

1. حل المعادلة التفاضلية (2) ... $y' - 2y = 0$

$$y' - 2y = 0 \Rightarrow y' = 2y \Rightarrow \boxed{y = ce^{2x}}$$

2. $u(x) = (ax + b)e^x$ ، $u'(x) = (ax + a + b)e^x$

أ- تعيين $a$ و $b$ حتى تكون $u$ حلا للمعادلة (1)

$$u \in S_{(1)} \Rightarrow u' - 2u = xe^x \Rightarrow (ax + a + b)e^x - 2(ax + b)e^x = xe^x$$

$$\Rightarrow (-ax + a - b)e^x = xe^x \Rightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}}$$

ب- بيان أنّ الدالة $v$ تكون حلا للمعادلة (2) إذا وفقط إذا كانت $u + v$ حلا للمعادلة (1)

- نبرهن أنّه إذا كانت $v$ حلا للمعادلة (2) فإنّ $u + v$ حل للمعادلة (1)

$v \in S_{(2)} \Rightarrow v' - 2v = 0 \Rightarrow v' - 2v + \underbrace{u' - 2u}_{xe^x} = xe^x$

$\Rightarrow (u+v)' - 2(u+v) = xe^x \Rightarrow \boxed{u+v \in S_{(1)}}$

- نبرهن أنّه إذا كانت $u+v$ حلا للمعادلة (1) فإنّ $v$ حل للمعادلة (2)

$u+v \in S_{(1)} \Rightarrow (u+v)' - 2(u+v) = xe^x$

$\Rightarrow v' - 2v + \underbrace{u' - 2u}_{xe^x} = xe^x \Rightarrow v' - 2v = 0 \Rightarrow \boxed{v \in S_{(2)}}$

**ج- استنتاج مجموعة حلول المعادلة (1)**

$\begin{cases} u(x) = (-x-1)e^x \\ v(x) = ce^{2x} \end{cases} \Rightarrow \boxed{f(x) = (u+v)(x) = (-x-1)e^x + ce^{2x}}$

**3. تعيين الحل الخاص $f$ للمعادلة (1) الذي ينعدم عند 0**

$f(0) = 0 \Rightarrow -1 + c = 0 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \boxed{f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x}$

## II- $g(x) = 2e^x - x - 2$

**1. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2e^x - x - 2 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2e^x - x - 2 = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(2\dfrac{e^x}{x} - 1 - \dfrac{2}{x}\right) = +\infty$

$g'(x) = 2e^x - 1 \; ; \; g'(x) = 0 \Rightarrow 2e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = -\ln 2$

$x \in ]-\infty; -\ln 2[ : g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

$x \in ]-\ln 2 \; ; +\infty[ : g'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $\ln 2 - 1$ | ↗ | $+\infty$ |

**2. بيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين 0 و $\alpha$ حيث : $-1,6 < \alpha < -1,5$**

$g(0) = 2 - 2 = 0 \; ; g(-1,6) \approx 0,004 \; ; g(-1,5) \approx -0,054$

الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]-1,6\ ;\ -1,5[$ و $g(-1,6) \times g(-1,5) < 0$
منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]-1,6\ ;\ -1,5[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**3. كتابة معادلة المماس لمنحنى الدالة $g$ عند 0**

$$y = g'(0)x + g(0) \Rightarrow \boxed{y = x}$$

**4. تعيين إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$**

$$x \in ]-\infty\ ;\alpha[ \cup ]0;+\infty[ : g(x) > 0\ ;\ x \in [\alpha\ ;0] : g(x) \leq 0$$

**III- $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$**

**1. حساب نهايات الدالة $f$ عند حدود مجال تعريفها**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{2x} - (x+1)e^x = \lim_{x\to-\infty} e^{2x} - xe^x - e^x = \boxed{0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x} - (x+1)e^x = \lim_{x\to+\infty} e^{2x}\left[1 - \underbrace{\frac{x+1}{e^x}}_{\to 0}\right] = \boxed{+\infty}$$

**2. حساب $f'(x)$ وبيان أنّ $f'(x)$ و $g(x)$ لهما نفس الإشارة**

$$f'(x) = 2e^{2x} - [e^x + (x+1)e^x] = \boxed{2e^{2x} - (x+2)e^x}$$

$$f'(x) = 2e^{2x} - (x+2)e^x = e^x(2e^x - x - 2) \Rightarrow \boxed{f'(x) = e^x g(x)}$$

بما أنّ $e^x > 0$ ، فإنّ إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g(x)$

**3. دراسة اتجاه تغير الدالة $f$**

$x \in ]-\infty\ ;\alpha[ \cup ]0;+\infty[ : g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x \in [\alpha\ ;0] : g(x) \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**4. بيان أنّ $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}$ ، ثمّ استنتاج حصر لـ $f(\alpha)$**

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow 2e^{\alpha} - \alpha - 2 = 0 \Rightarrow e^{\alpha} = \frac{\alpha+2}{2}$$

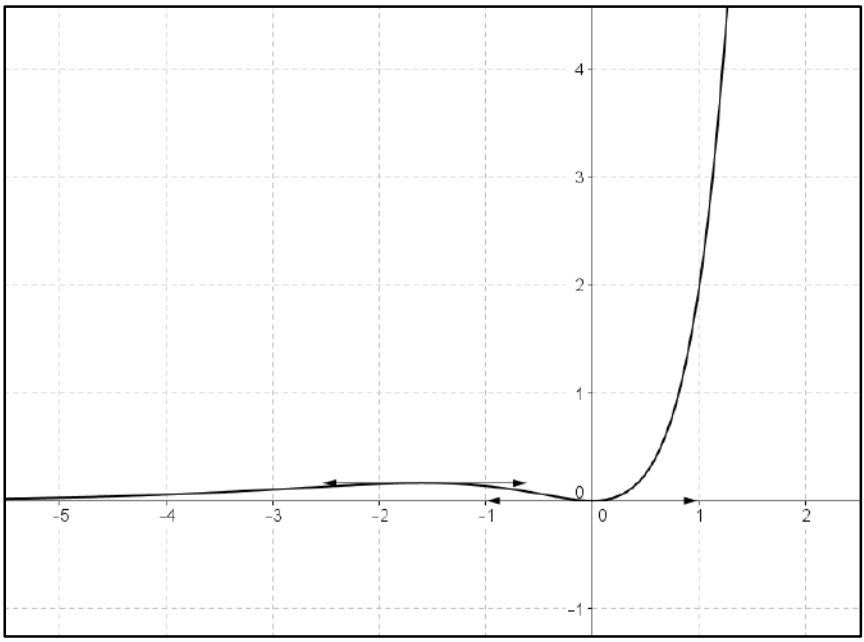
$$f(\alpha) = e^{2\alpha} - (\alpha+1)e^{\alpha} = \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)^2 - (\alpha+1)\left(\frac{\alpha+2}{2}\right)$$

$$f(\alpha) = \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\left[\left(\frac{\alpha+2}{2}\right) - (\alpha+1)\right] = \left(\frac{\alpha+2}{2}\right)\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \boxed{-\frac{\alpha^2+2\alpha}{4}}$$

$$-1{,}6 < \alpha < -1{,}5 \Rightarrow 2{,}25 < \alpha^2 < 2{,}56 \Rightarrow -0{,}95 < \alpha^2 + 2\alpha < -0{,}44$$

$$\Rightarrow 0{,}44 < -(\alpha^2+2\alpha) < 0{,}95 \Rightarrow \boxed{0{,}11 < f(\alpha) < 0{,}24}$$

**5. رسم المنحنى ($\mathcal{C}_f$) (الوحدة : $2cm$)**




**حل التمرين 37:**

**I- $g(x) = 2e^x + 2x - 5$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 2e^x + 2x - 5 = -\infty \; ; \begin{cases} e^x \to 0 \\ x \to -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2e^x + 2x - 5 = +\infty$$

$g'(x) = 2e^x + 2 \; ; g'(x) > 0 \Rightarrow$ $g$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

**2. بيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,62 < \alpha < 0,63$**

$g(0,62) = -0,042 \; ; g(0,63) = 0,015$

الدالة $g$ مستمرة و رتيبة على المجال $]0,62; 0,63[$ و $g(0,62) \times g(0,63) < 0$ ، منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0,62 < \alpha < 0,63$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

**3. تعيين إشارة $g(x)$**

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | + | + | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |

$x \in ]-\infty; \alpha[ : g(x) < 0$

$x \in [\alpha; +\infty[ : g(x) \geq 0$

**II- $f(x) = (2x-3)(1-e^{-x})$**

**1. تعيين إشارة $f(x)$**

$2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2} \; ; 1 - e^{-x} \geq 0 \Rightarrow e^{-x} \leq 1 \Rightarrow -x \leq 0 \Rightarrow x \geq 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x-3$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $1-e^{-x}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$x \in ]-\infty; 0] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right[ : f(x) \geq 0 \; ; \; x \in \left]0; \frac{3}{2}\right[ : f(x) < 0$

**2. بيان أن : $f'(x) = e^{-x}.g(x)$**

$f'(x) = 2(1 - e^{-x}) + e^{-x}(2x - 3) = 2 + 2xe^{-x} - 5e^{-x}$

$f'(x) = e^{-x}(2e^{x} + 2x - 5) = \boxed{e^{-x}.g(x)}$

**استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$**

$x \in ]-\infty; \alpha[ : f'(x) < 0 \Rightarrow$ $f$ متناقصة

$x \in [\alpha; +\infty[ : f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ $f$ متزايدة

**3. حساب نهايات الدالة $f$ عند ∞ + و ∞ -**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2x-3)(1-e^{-x}) = +\infty \; ; \begin{cases} 2x - 3 \to -\infty \\ 1 - e^{-x} \to -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x-3)(1-e^{-x}) = +\infty \; ; \begin{cases} 2x-3 \to +\infty \\ 1-e^{-x} \to 1 \end{cases}$$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

**4. بيان أن : $f(\alpha) = \frac{(2\alpha-3)^2}{2\alpha-5}$**

$f(\alpha) = (2\alpha-3)(1-e^{-\alpha})$ ; $g(\alpha) = 2e^{\alpha} + 2\alpha - 5 = 0$

$$\Rightarrow e^{\alpha} = \frac{-2\alpha+5}{2} \Rightarrow e^{-\alpha} = -\frac{2}{2\alpha-5}$$

$$f(\alpha) = (2\alpha-3)\left(1+\frac{2}{2\alpha-5}\right) = (2\alpha-3)\left(\frac{2\alpha-3}{2\alpha-5}\right) = \boxed{\frac{(2\alpha-3)^2}{2\alpha-5}}$$

**5. بيان أن المنحنى ($C_f$) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته : $y = 2x - 3$ عند $+\infty$**

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (2x-3)] = \lim_{x\to+\infty} (2x-3)(1-e^{-x}) - (2x-3)$$
$$= \lim_{x\to+\infty} (2x-3)(-e^{-x}) = \lim_{x\to+\infty} -2xe^{-x} + 3e^{-x}$$
$$= \lim_{X\to-\infty} 2Xe^{X} + 3e^{X} = 0 \; (X = -x)$$

**دراسة الوضع النسبي لـ ($C_f$) و (Δ)**

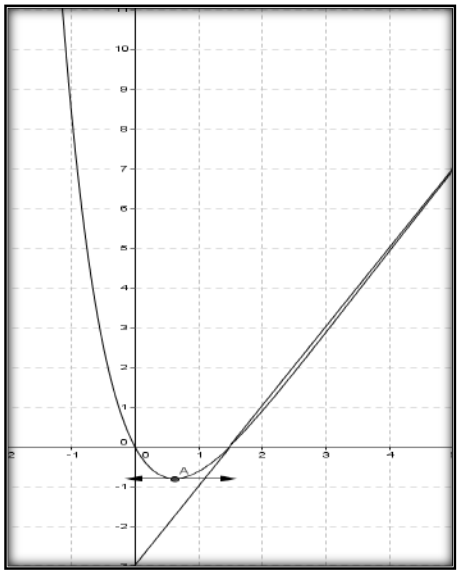
$f(x) - (2x-3) = (2x-3)(-e^{-x})$

بما أنّ $-e^{-x} < 0$ ، فإنّ إشارة الفرق هي عكس إشارة $(2x-3)$

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $2x-3$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)-(2x-3)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| الوضعية | ($C_f$) فوق (Δ) | | ($C_f$) تحت (Δ) |

يتقاطع المنحنى ($C_f$) والمستقيم (Δ) عند النقطة $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$

**6. إنشاء المنحنى $(C_f)$ و $(\Delta)$**



**حل التمرين 38:**

**I- $Df = [0; +\infty[$ ، $f(x) = -x + 2\sqrt{x} - 1$**

**1. حساب نهايات الدالة $f$**

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} -x + 2\sqrt{x} - 1 = \boxed{-1}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} -x + 2\sqrt{x} - 1 = \lim_{x\to +\infty} x\left(-1 + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right) = \boxed{-\infty}$$

2. دراسة قابلية اشتقاق الدالة $f$ على يمين 0

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)+1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x + 2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} -1 + \frac{2}{\sqrt{x}} = \boxed{+\infty}$$

منه ، الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق على يمين 0

**3. حساب $f'(x)$**

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{-x + \sqrt{x}}{x} = \boxed{\frac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{x}}$$

$$1 - \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Rightarrow x \leq 1$$

**جدول تغيرات $f$**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-\infty$ |

**II- $g(x) = -e^x + 2\sqrt{e^x} - 1$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} -e^x + 2\sqrt{e^x} - 1 = \boxed{-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} -e^x + 2\sqrt{e^x} - 1 = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(-1 + \frac{2}{\sqrt{e^x}} - \frac{1}{e^x}\right) = \boxed{-\infty}$$

$$g'(x) = -e^x + \frac{e^x}{\sqrt{e^x}} = -e^x + \sqrt{e^x} = \sqrt{e^x}\left(1 - \sqrt{e^x}\right)$$

$$1 - \sqrt{e^x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{e^x} \leq 1 \Rightarrow e^x \leq 1 \Rightarrow x \leq 0$$

$x \leq 0 \Rightarrow g'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة; $x > 0 \Rightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-1$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-\infty$ |

**ملاحظة** : يمكننا دراسة الدالة $g$ باعتبارها مركبة الدالة $f$ والدالة الأسية : $g(x) = f(e^x)$

$$x \to -\infty \Rightarrow e^x \to 0 \Rightarrow f(e^x) \to -1 \Rightarrow g(x) \to -1$$

$$x \to +\infty \Rightarrow e^x \to +\infty \Rightarrow f(e^x) \to -\infty \Rightarrow g(x) \to -\infty$$

$$g'(x) = e^x f'(e^x)\,; g'(x) \geq 0 \Rightarrow f'(e^x) \geq 0 \Rightarrow e^x \leq 1 \Rightarrow x \leq 0$$

**2. بيان أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_g$) يقبل نقطة انعطاف**

$$g''(x) = -e^x + \frac{1}{2}\sqrt{e^x} = \sqrt{e^x}\left(-\sqrt{e^x} + \frac{1}{2}\right)$$

$$g''(x) = 0 \Rightarrow -\sqrt{e^x} + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \sqrt{e^x} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\ln 4$$

منه المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ يقبل نقطة انعطاف $\boxed{\omega\left(-\ln 4\,; -\frac{1}{4}\right)}$

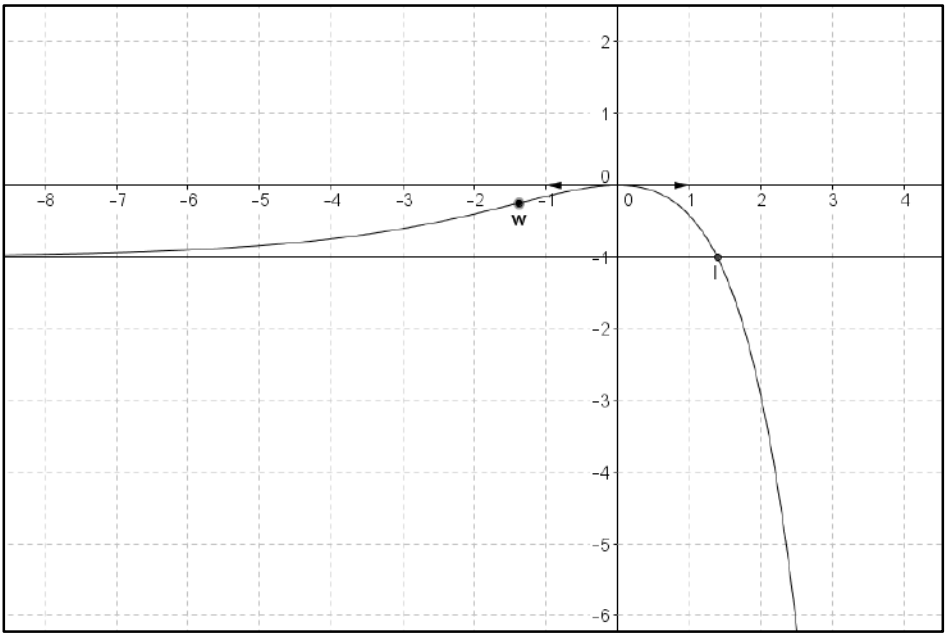
**3. تعيين نقط تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ مع المستقيم (D) ذي المعادلة : $y = -1$**

$$g(x) = -1 \Rightarrow -e^x + 2\sqrt{e^x} = 0 \Rightarrow \sqrt{e^x}\left(-\sqrt{e^x} + 2\right) = 0$$

$$\Rightarrow -\sqrt{e^x} + 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{e^x} = 2 \Rightarrow e^x = 4 \Rightarrow x = \ln 4$$

$$\Rightarrow \boxed{(Cg) \cap (D) = \{I(\ln 4\,; -1)\}}$$

**4. انشاء المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ و المستقيم (D)**




**5. بيان أنّ الدالة $g$ حل للمعادلة التفاضلية : $2y" + y' - y = -2e^x + 1$**

$$2g" + g' - g = 2(-e^x + \frac{1}{2}\sqrt{e^x}) - e^x + \sqrt{e^x} + e^x - 2\sqrt{e^x} + 1$$

$$= \boxed{-2e^x + 1}$$

منه الدالة $g$ حل للمعادلة التفاضلية : $2y" + y' - y = -2e^x + 1$.

**حل التمرين 39:**

**I- $g(x) = 1 - x - e^x$**

**1. حساب النهايات عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 - x - e^x = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 - x - e^x = \boxed{-\infty}$$

**2. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$g'(x) = -1 - e^x$ ; $g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ |

**3. حساب $g(0)$ واستنتاج إشارة $g(x)$**

$g(0) = 0$ ; $x < 0 \Rightarrow g(x) > 0$ ; $x > 0 \Rightarrow g(x) < 0$

**II- $f(x) = xe^{-x} - x + 1$**

**1. بيان أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} - x + 1 = \lim_{x\to-\infty} x\left(e^{-x} - 1 + \frac{1}{x}\right) = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} - x + 1 = \lim_{X\to-\infty} -\underbrace{Xe^X}_{\to 0} + X + 1 = -\infty \ (X = -x)$$

**2. اثبات أن : $f'(x) = e^{-x}g(x)$**

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} - 1 = e^{-x}(1 - x - e^x) = \boxed{e^{-x}g(x)}$$

**استنتاج اتجاه تغير $f$**

$x < 0 \Rightarrow g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x > 0 \Rightarrow g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**3. جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-\infty$ |

**4. بيان أن المستقيم $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى ($\mathcal{C}_f$)**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (-x+1) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{X\to-\infty} -Xe^{X} = 0 \ (X = -x)$$

منه المستقيم $(\Delta): y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحنى ($\mathcal{C}_f$) بجوار $+\infty$

**دراسة وضعية المنحنى ($\mathcal{C}_f$) بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$**

$$f(x) - (-x+1) = xe^{-x}$$

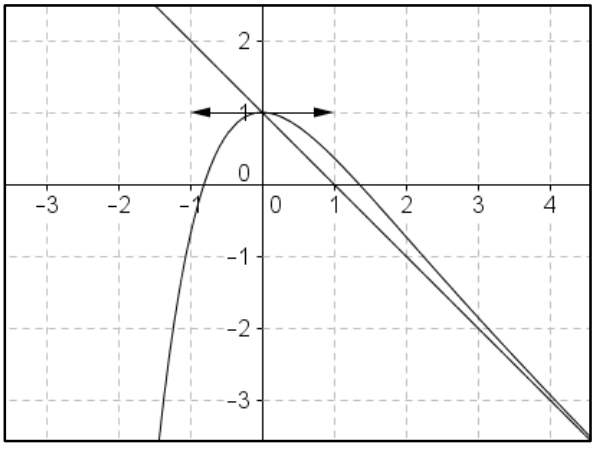
$x < 0 \Rightarrow (\Delta)$ تحت $(\mathrm{C}f)$ ; $x > 0 \Rightarrow (\Delta)$ فوق $(\mathrm{C}f)$

**5. بيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين في المجالين $[-1;0]$ و $[1;2]$**

$f(-1) \approx -0{,}72$ ; $f(0) = 1$ ; $f(1) \approx 0{,}37$ ; $f(2) \approx -0{,}73$

$f$ مستمرة ورتيبة على كل من المجالين $[-1;0]$ و $[1;2]$ ، و $f(-1) \times f(0) < 0$ و $f(1) \times f(2) < 0$ ، منه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين في المجالين $[-1;0]$ و $[1;2]$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**انشاء المنحنى ($\mathcal{C}_f$)**



**حل التمرين 40:**

$$f(x) = \frac{x}{2} + e^{-|x|}$$

1. **حساب نهايات الدالة $f$ عند $\infty +$ و $\infty -$**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} + e^{-|x|} = +\infty \; ; \left\{\frac{x}{2} \to +\infty \; ; \; e^{-|x|} \to 0\right\}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{2} + e^{-|x|} = -\infty \; ; \left\{\frac{x}{2} \to -\infty \; ; \; e^{-|x|} \to 0\right\}$$

2. **كتابة $f$ دون رمز القيمة المطلقة**

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{2} + e^{x} \; ; \; x < 0 \\ f(x) = \frac{x}{2} + e^{-x} \; ; \; x \geq 0 \end{cases}$$

3. **بيان أنّ : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-1}{x} = -\frac{1}{2}$**

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\frac{x}{2} + e^{-x} - 1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{2} - \underbrace{\frac{e^{-x}-1}{-x}}_{\to 1 \text{(العدد المشتق)}} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

**حساب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-1}{x}$**

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{\frac{x}{2} + e^{x} - 1}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{e^{x}-1}{x}}_{\to 1} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

**تفسير النتيجة بيانيا**

بما أنّ النهايتين مختلفتين ، نستنتج أنّ الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق عند النقطة ذات الفاصلة 0 ، ويقبل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند هذه النقطة نصفي مماسين

4. **بيان أنّ $f$ متزايدة تماما على المجال $]-\infty, 0[$**

$f'(x) = \frac{1}{2} + e^{x} \; ; f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]-\infty, 0[$

**دراسة اتجاه تغيّر الدالة $f$ على المجال $]0, +\infty[$**

$$f'(x) = \frac{1}{2} - e^{-x} \; ; \; \frac{1}{2} - e^{-x} \geq 0 \Rightarrow e^{-x} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -x \leq -\ln 2 \Rightarrow x \geq \ln 2$$

$x \in ]0, \ln 2[ \; : f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x \in [\ln 2 \; ; +\infty[ \; : f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**5. جدول تغيّرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $f(\ln 2)$ | ↗ | $+\infty$ |

**6. بيان أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$**

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = \lim_{|x| \to +\infty} e^{-|x|} = 0 \Rightarrow \boxed{(\Delta): y = \frac{1}{2}x \text{ مستقيم مقارب مائل}}$$

**دراسة وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ)**

$$f(x) - \frac{1}{2}x = e^{-|x|} \; ; \; f(x) - \frac{1}{2}x > 0 \Rightarrow \boxed{(\Delta) \text{ فوق } (C_f)}$$

**7. كتابة معادلة نصفي المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0**

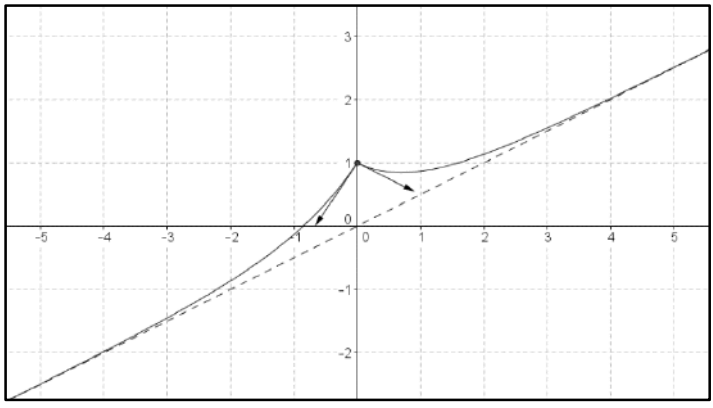
$$\boxed{(D_1): y = \frac{3}{2}x + 1 \; ; (D_2): y = -\frac{1}{2}x + 1}$$

**8. بيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ، حيث ] -0,9 ; -0,8 [ ∈ α**

الدالة $f$ مستمرة و رتيبة على المجال $]-0,8 ; -0,9[$ و $f(-0,9) \times f(-0,8) < 0$

منه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : ] -0,9 ; -0,8 [ ∈ α حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**9. انشاء نصفي المماسين ، المستقيم (Δ) و المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بدقة**



**حل التمرين 41:**

1. **تعيين معادلة $(D)$ :** $(D): y = x + 1$

2. بما أنّ النقطة $J(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ ، فإنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ $f(-x) + f(x) = 2$ .

3. **التحقّق أنّ الدالة $f'$ زوجية**

$$f(x) + f(-x) = 2 \Rightarrow [f(x) + f(-x)]' = 0 \Rightarrow f'(x) - f'(-x) = 0$$

$$\Rightarrow f'(-x) = f'(x) \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } f' \text{ زوجية}}$$

**استنتاج أنّ الدالة $\varphi$ فردية**

$$\begin{cases} f(x) = ax + b + \varphi(x) \\ \lim\limits_{|x|\to+\infty} \varphi(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow y = ax + b \text{ مستقيم مقارب مائل}$$

$$\Rightarrow ax + b = x + 1 \Rightarrow \boxed{a = b = 1}$$

$$f(x) + f(-x) = 2 \Rightarrow ax + b + \varphi(x) - ax + b + \varphi(-x) = 2$$

$$\Rightarrow 1 + \varphi(x) + 1 + \varphi(-x) = 2 \Rightarrow \varphi(-x) = -\varphi(x) \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } \varphi \text{ فردية}}$$

4. **تعيين $\alpha$ و $\beta$**

$$f(x) = x + 1 + (\alpha x + \beta)e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = 1 + \alpha e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}(\alpha x + \beta)$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = 1 + (-2\alpha x^2 - 2\beta x + \alpha)e^{-x^2}}$$

$$(T): y = f'(0)x + f(0) = (1 - e)x + 1 \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = 1 - e \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \alpha = 1 - e \\ 1 + \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -e \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{f(x) = x + 1 - x.e^{1-x^2}}$$

**حل التمرين 42:**

1) $f$ دالة متناقصة تماما على $\mathbb{R}$. الدالة $h$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة $h(x) = e^{f(-x)}$ هي دالة:

أ- متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

$$h(x) = e^{f(-x)} \Rightarrow h'(x) = e^{f(-x)}[f(-x)]' = -f'(-x) \times e^{f(-x)}$$

بما أنّ الدالة $f$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ ، فإنّ :

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f'(-x) < 0 \Rightarrow -f'(-x) > 0 \Rightarrow \boxed{h'(x) > 0}$$

2) نعتبر الدالة $g$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = xe^{-x} + 1$. التقريب التآلفي للدالة $g$ في جوار 0 يُعطى بالعلاقة : أ- $g(x) \approx x + 1$

$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}; g'(0) = 1 ; g(0) = 1$

$g(x) \approx g'(0)x + g(0) \Rightarrow \boxed{g(x) \approx x + 1}$

3) α عدد حقيقي غير معدوم. الحل العام للمعادلة التفاضلية $6y = 3y' + 2$ هو:

أ- $y = \alpha e^{2x} + \frac{1}{3}$

$6y = 3y' + 2 \Rightarrow 3y' = 6y - 2 \Rightarrow y' = 2y - \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{y = \alpha e^{2x} + \frac{1}{3}}$

**حل التمرين 43:**

**I- $h(x) = (ax + b)e^x + c$**

**1. حساب $h'(x)$ بدلالة العددين $a$ و $b$**

$h'(x) = ae^x + (ax + b)e^x \Rightarrow \boxed{h'(x) = (ax + a + b)e^x}$

**2. بيان أنّ: $h(x) = (-x + 2)e^x + 2$**

$$\begin{cases} h(0) = 4 \\ h'(1) = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = 4 \\ (2a + b)e = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{(ax + b)e^x}_{0} + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = 4 \\ 2a + b = 0 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -1 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{h(x) = (-x + 2)e^x + 2}$$

**3. تعيين حصرا للعدد $\alpha$ الذي يحقق: $h(\alpha) = 0$**

$h(\alpha) = 0 \Rightarrow \boxed{2{,}2 < \alpha < 2{,}3}$

**4. تعيين إشارة $h(x)$ من أجل كل عدد حقيقي $x$**

- $x \in ]-\infty; \alpha]: h(x) \geq 0$
- $x \in ]\alpha; +\infty[: h(x) < 0$

**II- $f(x) = \frac{x^2}{e^x + 1}$**

**1. حساب: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{e^x}{x^2}}_{\to+\infty} + \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^x + 1} = \boxed{+\infty}$$

**2. بيان أنّ: $f'(x) = \frac{xh(x)}{(e^x+1)^2}$**

$$f'(x) = \frac{2x(e^x+1) - x^2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{x(2e^x+2-xe^x)}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x[e^x(-x+2)+2]}{(e^x+1)^2} = \boxed{\frac{xh(x)}{(e^x+1)^2}}$$

**3. جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $h(x)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $0$ |

**4. بيان أنّ: $f(\alpha) = \alpha(\alpha-2)$**

$$h(\alpha) = 0 \Rightarrow (-\alpha+2)e^\alpha + 2 = 0 \Rightarrow e^\alpha = -\frac{2}{-\alpha+2} = \frac{2}{\alpha-2}$$

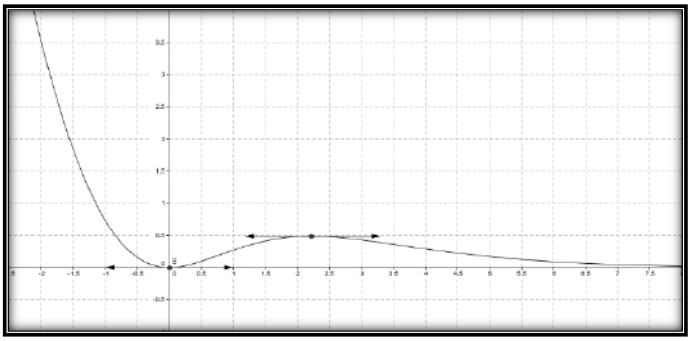
$$f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{e^\alpha+1} = \frac{\alpha^2}{\frac{2}{\alpha-2}+1} = \frac{\alpha^2(\alpha-2)}{\alpha} = \boxed{\alpha(\alpha-2)}$$

**استنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$**

$$2{,}2 < \alpha < 2{,}3 \Rightarrow 0{,}2 < \alpha - 2 < 0{,}3 \Rightarrow 0{,}44 < \alpha(\alpha-2) < 0{,}69$$

$$\Rightarrow \boxed{0{,}44 < f(\alpha) < 0{,}69}$$

**5. إنشاء المنحنى ($\mathscr{C}$)**



**حل التمرين 44:**

1. إذا كانت الدالة $u$ موجبة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$، فإنّ الدالة $v$ حيث :
$v(x) = u(x)e^x$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ (**صحيح**)

$$v'(x) = u'(x)e^x + u(x)e^x = e^x[u'(x) + u(x)]$$

$$\begin{cases} u'(x) > 0 \\ u(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow u'(x) + u(x) > 0 \Rightarrow v'(x) > 0 \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } v \text{ متزايدة}}$$

2. الدالة $h$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x) = \sqrt{x}e^{1-x}$ قابلة للاشتقاق عند الصفر على اليمين (**خطأ**)

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{\sqrt{x}e^{1-x}}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{e^{1-x}}{\sqrt{x}} \to \frac{e}{0^+} = \boxed{+\infty}$$

3. المستقيم ذي المعادلة $x = 0$ هو مستقيم مقارب للمنحنى الممثل للدالة $f$ المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ (**صحيح**)

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \; ; \left(\frac{1}{x} \to +\infty \; ; e^{\frac{1}{x}} \to +\infty\right)$$

4. من أجل عدد حقيقي $a$ ، المعادلة : $e^x + 2x = a$ تقبل دوما حلا وحيدا $\alpha$ في $\mathbb{R}$ (**صحيح**)

الدالة $f$ متزايدة $f(x) = e^x + 2x \; ; f'(x) = e^x + 2 \; ; f'(x) > 0 \Rightarrow$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} e^x + 2x = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} e^x + 2x = \boxed{+\infty}$$

الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ ،
منه المعادلة $f(x) = a$ تقبل دوما حلا وحيدا $\alpha$ في $\mathbb{R}$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**حل التمرين 45:**

**I- $g(x) = (1-x)e^x + 1$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} (1-x)e^x + 1 = \lim_{x\to -\infty} e^x - xe^x + 1 = \boxed{1}$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} (1-x)e^x + 1 = \boxed{-\infty}$$

$$g'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$$

$x \in ]-\infty;0[ \; : g'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

$x \in [0;+\infty[ \; : g'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $1$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-\infty$ |

**2. بيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $1,27 < \alpha < 1,28$**

$g(1,27) \approx 0,04$ ، $g(1,28) \approx -0,01$. الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]1,27\,;\,1,28[$ و $g(1,27) \times g(1,28) < 0$ ، منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]1,27\,;\,1,28[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**3. استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$**

$x \in ]-\infty;\alpha[ : g(x) > 0\,;\; x \in ]\alpha;+\infty[ : g(x) < 0\,;\; g(\alpha) = 0$

**II- $f(x) = (2-x)e^x + x + 1$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{(2-x)e^x}_{\to 0} + x + 1 = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2-x)e^x + x + 1 = \lim_{x\to+\infty} x\left[\underbrace{(2-x)}_{\to+\infty}\ \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\to-\infty} + 1 + \frac{1}{x}\right]$$

$$= \boxed{-\infty}$$

$$f'(x) = -e^x + (2-x)e^x + 1 = (1-x)e^x + 1 \Rightarrow \boxed{f'(x) = g(x)}$$

$x \in ]-\infty;\alpha[ : f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x \in [\alpha;+\infty[ : f'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $-\infty$ |

**2. بيان أنّ للمنحنى (𝒞) مستقيم مقارب مائل (Δ) عند $(-\infty)$ يُطلب تعيين معادلته**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=\lim_{x\to-\infty}(2-x)e^x=\lim_{x\to-\infty}2e^x-xe^x=0$$

منه ، يقبل المنحنى (𝒞) مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $(-\infty)$ معادلته : $y=x+1$

**3. دراسة الوضعية النسبية لـ (Δ) و (𝒞)**

$f(x)-(x+1)=(2-x)e^x$

$x>2\Rightarrow 2-x<0\Rightarrow f(x)-(x+1)<0\Rightarrow$ (C) تحت (Δ)

$x<2\Rightarrow 2-x>0\Rightarrow f(x)-(x+1)>0\Rightarrow$ (C) فوق (Δ)

يتقاطع المنحنى (𝒞) والمستقيم (Δ) عند النقطة $(2;3)$

**4. بيان أنّ $f(\alpha)=\frac{\alpha^2-\alpha+1}{\alpha-1}$ و استنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$**

$$g(\alpha)=0\Rightarrow(1-\alpha)e^\alpha+1=0\Rightarrow e^\alpha=\frac{1}{\alpha-1}$$

$$f(\alpha)=(2-\alpha)e^\alpha+\alpha+1=\frac{2-\alpha}{\alpha-1}+\alpha+1=\frac{2-\alpha+\alpha^2-1}{\alpha-1}$$

$$\Rightarrow\boxed{f(\alpha)=\frac{\alpha^2-\alpha+1}{\alpha-1}}$$

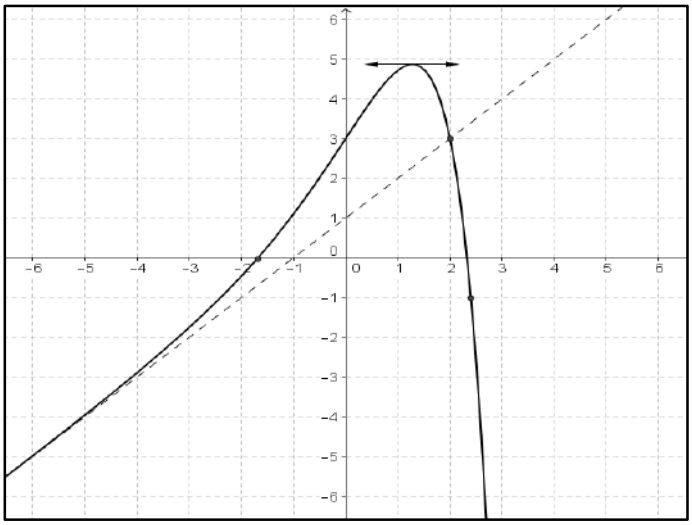
$$1{,}27<\alpha<1{,}28\Rightarrow\begin{cases}1{,}613<\alpha^2<1{,}638\\-1{,}28<-\alpha<-1{,}27\\0{,}27<\alpha-1<0{,}28\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1{,}33<\alpha^2-\alpha+1<1{,}37\\3{,}57<\dfrac{1}{\alpha-1}<3{,}70\end{cases}\Rightarrow\boxed{4{,}75<f(\alpha)<5}$$

**5. حساب $f(-1{,}7)$ ، $f(2)$ و $f(2{,}4)$**

$f(-1{,}7)\approx 0$ ، $f(2)=3$ و $f(2{,}4)\approx -1$

**انشاء المنحنى (𝒞)**



**حل التمرين 46:**

**I- نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (2x-1)e^{2x} - 1$**

**1. دراسة اتجاه تغير الدالة $g$**

$g'(x) = 2e^{2x} + 2(2x-1)e^{2x} = 4xe^{2x}$

$x \in ]-\infty; 0[ : g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

$x \in [0; +\infty[ : g'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-1$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |

**2. حساب نهاية الدالة $g$ عند $+\infty$ و $-\infty$**

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x-1)e^{2x} - 1 = \lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} - e^{2x} + 1 = \boxed{-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2x-1)e^{2x} - 1 = \boxed{+\infty}$

**3. بيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ محصورا بين 0,63 و 0,64**

$g(0,63)\approx -0,08$ ، $g(0,64)\approx 0,01$. الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]0,63\,;\,0,64[$ و $g(0,63)\times g(0,64)<0$ ، منه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]0,64\,;\,0,63[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**4. استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$**

$x\in\,]-\infty;\alpha[\,:\,g(x)<0\,;\;x\in\,]\alpha;+\infty[\,:\,g(x)>0\,;\;g(\alpha)=0$

## II- $Df=\mathbb{R}$ ، $f(x)=(x-1)e^{2x}+2-x$

**1. حساب نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$ و $-\infty$**

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{2x}+2-x=\lim_{x\to-\infty}xe^{2x}-e^{2x}+2-x=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-1)e^{2x}+2-x=\lim_{x\to+\infty}x\left(\underbrace{\frac{x-1}{x}}_{\to 1}e^{2x}+\frac{2}{x}-1\right)=\boxed{+\infty}$$

**2. كتابة $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدالة $f$**

$f'(x)=e^{2x}+2(x-1)e^{2x}-1=(2x-1)e^{2x}-1\Rightarrow\boxed{f'(x)=g(x)}$

$x\in\,]-\infty;\alpha[\,:\,f'(x)<0\Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x\in[\alpha;+\infty[\,:\,f'(x)\geq 0\Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

**3. بيان أنّ ($\mathscr{C}$) يقبل مستقيما مقاربا مائلا ($\Delta$) بجوار $-\infty$**

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)-(2-x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^{2x}=\lim_{x\to-\infty}xe^{2x}-e^{2x}=0$$

منه ، يقبل المنحنى ($\mathscr{C}$) مستقيما مقاربا مائلا ($\Delta$) عند $(-\infty)$ معادلته : $y=2-x$

**دراسة وضعية ($\mathscr{C}$) بالنسبة لـ ($\Delta$)**

$f(x)-(2-x)=(x-1)e^{2x}$

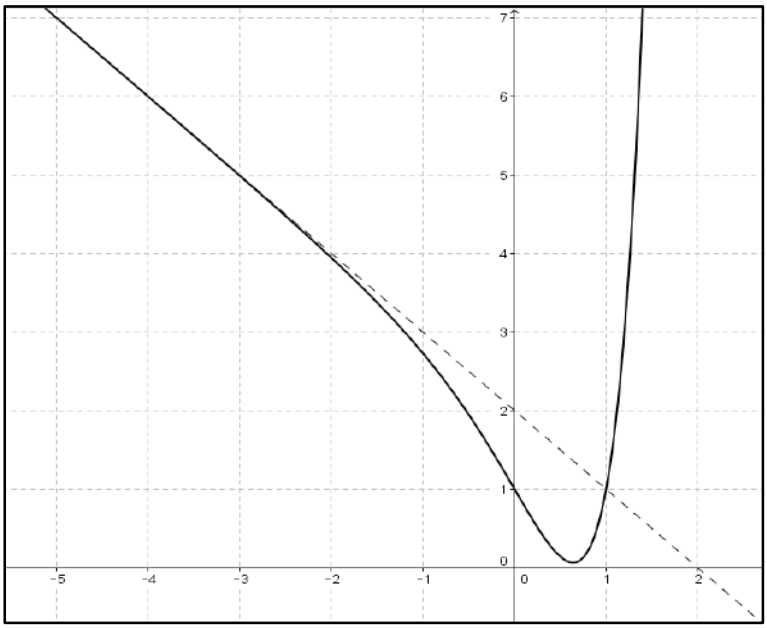
$x<1\Rightarrow x-1<0\Rightarrow f(x)-(2-x)<0\Rightarrow$ ($\Delta$) تحت ($C$)

$x>1\Rightarrow x-1>0\Rightarrow f(x)-(2-x)>0\Rightarrow$ ($\Delta$) فوق ($C$)

يتقاطع المنحنى ($\mathscr{C}$) والمستقيم ($\Delta$) عند النقطة $(1;1)$

**4. حساب $f(0)$ وانشاء $(\Delta)$ و$(\mathscr{C})$. $(\alpha \approx 0,64)$**

$f(0) = 1\ ;\ f(\alpha) \approx 0{,}07$




**5. تعيين حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد حلول المعادلة: $f(x) = m$**

- $m \in ]-\infty; f(\alpha)[$ : المعادلة لا تقبل حلولا
- $m = f(\alpha)$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا
- $m \in ]f(\alpha); +\infty[$ : المعادلة تقبل حلين متمايزين

**حل التمرين 47:**

أجب بصحيح أم خطأ مع التبرير:

1. $f$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (-x+3)e^x$ ، و $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني

أ. من أجل كل $x > 0$ لدينا: $f(x) \geq -x+3$ : **خطأ**

$$e^x > 0 \Rightarrow \begin{cases} (-x+3)e^x \geq -x+3\ ;\ 0 < x < 3 \\ (-x+3)e^x \leq -x+3\ ;\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq -x+3\ ;\ 0 < x < 3 \\ f(x) \leq -x+3\ ;\ x > 3 \end{cases}$$

ب. المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب لـ $(\mathscr{C})$ : **صحيح**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x+3)e^x = \lim_{x \to -\infty} -xe^x + 3e^x = 0$$

ج. الدالة $f$ تقبل قيمة حدّية وحيدة : **صحيح**

$$f'(x) = -e^x + (-x+3)e^x = (-x+2)e^x$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $e^2$ | ↘ | $-\infty$ |

د. المعادلة $f(x) = m$ لا تقبل حلولا أو تقبل حلين $(m \neq e^2)$ : **خطأ**
من أجل $m < 0$ ، المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلا وحيدا

2. حلول المتراجحة $e^{2x} - 3e^x - 4 \geq 0$ هي : $S = [\ln 4\,; +\infty[$ : **صحيح**

$$e^{2x} - 3e^x - 4 \geq 0 \Rightarrow (e^x - 4)\underbrace{(e^x + 1)}_{>0} \geq 0 \Rightarrow e^x - 4 \geq 0$$

$$\Rightarrow e^x \in [4; +\infty[ \Rightarrow x \in [\ln 4\,; +\infty[ \Rightarrow S = [\ln 4\,; +\infty[$$

3. $g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x) = \frac{\sin 3x}{x}$ . $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ : **خطأ**

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{\sin 3x}{3x} = \lim_{X\to 0} 3\frac{\sin X}{\underbrace{X}_{\to 1}} = 3\ ;\ (X = 3x)$$

**حل التمرين 48:**

**I- نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (3 - 2x)e^x + 2$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$\lim_{x\to -\infty} g(x) = \lim_{x\to -\infty} (3 - 2x)e^x + 2 = \lim_{x\to -\infty} 3e^x - 2xe^x + 2 = \boxed{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} (3 - 2x)e^x + 2 = \boxed{-\infty}$$

$$g'(x) = -2e^x + (3 - 2x)e^x = (1 - 2x)e^x$$

$$1 - 2x > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$$

$x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[ : g'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

$x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[ : g'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $2$ | ↗ | $g\left(\frac{1}{2}\right)$ | ↘ | $-\infty$ |

**2. بيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $\alpha \in ]1,68\ ;\ 1,69[$**

$g(1,68) \approx 0,07$ ، $g(1,69) \approx -0,06$. الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]1,68\ ;\ 1,69[$ و $g(1,68) \times g(1,69) < 0$ ، منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]1,68\ ;\ 1,69[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**3. استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$**

$x \in ]-\infty; \alpha[ : g(x) > 0\ ;\ x \in ]\alpha; +\infty[ : g(x) < 0\ ;\ g(\alpha) = 0$

**II- $\|\vec{\imath}\| = 2cm$ ، $Df = \mathbb{R}$ ، $f(x) = \frac{e^x+4x-1}{e^x+1}$**

**1. إثبات أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ فإنّ: $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x+1)^2}$**

$$f'(x) = \frac{(e^x+4)(e^x+1) - e^x(e^x+4x-1)}{(e^x+1)^2} = \frac{6e^x - 4xe^x + 4}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2[(3-2x)e^x + 2]}{(e^x+1)^2} = \boxed{\frac{2g(x)}{(e^x+1)^2}}$$

**2. إثبات أنّ $f(\alpha) = 4\alpha - 5$**

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow (3-2\alpha)e^\alpha + 2 = 0 \Rightarrow e^\alpha = \frac{2}{2\alpha - 3}$$

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha + 4\alpha - 1}{e^\alpha + 1} = \frac{\frac{2}{2\alpha-3} + 4\alpha - 1}{\frac{2}{2\alpha-3} + 1} = \frac{2 + (4\alpha-1)(2\alpha-3)}{2 + 2\alpha - 3}$$

$$f(\alpha) = \frac{8\alpha^2 - 14\alpha + 5}{2\alpha - 1} = \frac{(2\alpha-1)(4\alpha-5)}{2\alpha-1} = \boxed{4\alpha - 5}$$

**حصر العدد $f(\alpha)$**

$1{,}68 < \alpha < 1{,}69 \Rightarrow 6{,}72 < 4\alpha < 6{,}76 \Rightarrow \boxed{1{,}72 < f(\alpha) < 1{,}76}$

**3. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x + 4x - 1}{e^x + 1} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + 4x - 1}{e^x + 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1 + 4xe^{-x} - e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})}$$

$$= \lim_{X\to-\infty} \frac{1 - 4Xe^X - e^X}{1 + e^X} = \boxed{1}\,; (X = -x)$$

$x \in ]-\infty; \alpha] : g(x) \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x \in ]\alpha; +\infty[ : g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $1$ |

**4. بيان أنّ ($\mathscr{C}$) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل ($\Delta$)**

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ $(+\infty)$ مستقيم مقارب أفقي بجوار

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x + 4x - 1}{x(e^x + 1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(\frac{e^x}{x} + 4 - \frac{1}{x}\right)}{x(e^x + 1)} = 4$$

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x) - 4x] = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x + 4x - 1}{e^x + 1} - 4x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 4xe^x - 1}{e^x + 1} = -1$$

منه، يقبل المنحنى ($\mathscr{C}$) مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta): y = 4x - 1$ بجوار $(-\infty)$

**دراسة وضعية ($\mathscr{C}$) بالنسبة لـ ($\Delta$)**

$$f(x) - (4x - 1) = \frac{e^x + 4x - 1}{e^x + 1} - (4x - 1) = \frac{2e^x - 4xe^x}{e^x + 1} = \frac{2e^x(1 - 2x)}{e^x + 1}$$

$x < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2x > 0 \Rightarrow f(x) - (4x - 1) > 0 \Rightarrow$ (C) فوق $(\Delta)$

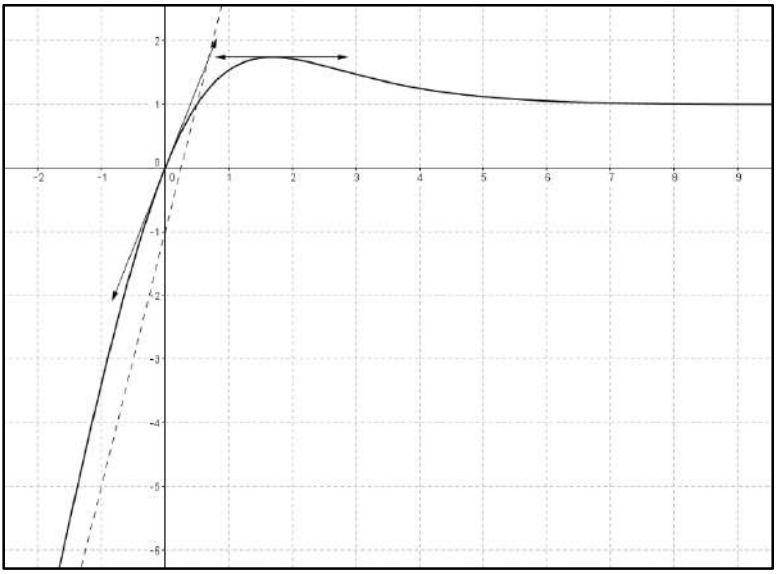
$x > \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 2x < 0 \Rightarrow f(x) - (4x - 1) < 0 \Rightarrow$ (C) تحت $(\Delta)$

يتقاطع المنحنى ($\mathscr{C}$) والمستقيم $(\Delta)$ عند النقطة $(\frac{1}{2}; 1)$

**5. كتابة معادلة المماس $(d)$ للمنحنى $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة 0**

$$y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow \boxed{(d): y = \frac{5}{2}x}$$

**انشاء $(\Delta)$ ، $(d)$ و $(\mathscr{C})$**



**6. المناقشة البيانية لعدد و إشارة حلول المعادلة : $me^x - 4x + m + 2 = 0$**

$$me^x - 4x + m + 2 = 0 \Rightarrow m(e^x + 1) = 4x - 2 \Rightarrow m = \frac{4x-2}{e^x+1}$$

$$\Rightarrow m + 1 = \frac{4x-2}{e^x+1} + 1 \Rightarrow m + 1 = \frac{e^x + 4x - 1}{e^x + 1} = f(x)$$

ندرس تقاطع المنحنى $(\mathscr{C})$ مع المستقيم ذي المعادلة : $y = m + 1$

- $m + 1 < 0$ أي $m < -1$ : المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا
- $m + 1 = 0$ أي $m = -1$ : المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما
- $0 < m + 1 \leq 1$ أي $-1 < m \leq 0$ : المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا
- $1 < m + 1 < f(\alpha)$ أي $0 < m < f(\alpha) - 1$ : المعادلة تقبل حلين موجبين
- $m + 1 = f(\alpha)$ أي $m = f(\alpha) - 1$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا
- $m + 1 > f(\alpha)$ أي $m > f(\alpha) - 1$ : المعادلة لا تقبل حلولا

**حل التمرين 49:**

I- أجب بصحيح أم خطأ مع التبرير :

1. معادلة المماس للتمثيل البياني للدالة $x \to \sqrt{x^2+3}$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 هي: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ **: صحيح**

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \; ; f'(1) = \frac{1}{2} \; ; f(1) = 2$$

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{1}{2}(x-1) + 2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$$

2. $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi} = 1$ **: خطأ**

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin x - \sin\pi}{x-\pi} = sin'(\pi) = \cos\pi = \boxed{-1}$$

3. الدالة $u(x) = e^{|x|}$ قابلة للاشتقاق عند 0 **: خطأ**

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{u(x)-u(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-x}-1}{x} = \lim_{X\to 0^+} -\underbrace{\frac{e^X - 1}{X}}_{\to 1} = \boxed{-1} \; ; (X = -x)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{u(x)-u(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x}-1}{x} = \boxed{1}$$

II- $f$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{\cos x}{x^2} + x + 1$.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ هي : أ) $+\infty$

$$-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{x^2} \le \frac{\cos x}{x^2} \le \frac{1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

2. يقبل منحنى الدالة $f$ مستقيما مقاربا $(\Delta)$ معادلته : أ) $y = x + 1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x^2} = 0$$

**حل التمرين 50:**

I- $f$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x+a)e^{-x} + b$ حيث $a$ و $b$ عددان حقيقيان

1. بقراءة بيانية للمنحنى $(\mathscr{C})$

أ. **تعيين** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ; $f'(-1)$ ; $f(0)$ ; $f(-2)$

$f(-2) = -2 \; ; f(0) = 0 \; ; f'(-1) = 0 \; ; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \; ; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$

ب. **تعيين معادلة المستقيم المقارب لـ $(\mathscr{C})$ عند** $+\infty$

$y = -2$

**ج. تعيين حسب قيم $x$ إشارة $f'(x)$**

$x \in ]-\infty;-1[ : f'(x) > 0 \; ; x \in ]-1;+\infty[ : f'(x) < 0 \; ; \; f'(-1) = 0$

د. جدول تغيرات الدالة $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(-1)$ | ↘ | $-2$ |

**ه. تعيين مع التبرير المنحنى الممثل للدالة $f'$ مشتقة الدالة $f$**

المنحنى الممثل للدالة $f'$ هو المنحنى (1) لأنّه الوحيد الذي يحقق إشارة $f'(x)$ المعينة في السؤال ج

**2. بيان أنّ $f(x) = (x+2)e^{-x} - 2$**

$f'(x) = e^{-x} - (x+a)e^{-x} = (-x-a+1)e^{-x}$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = 0 \\ (2-a)e = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow f(x) = (x+2)e^{-x} - 2$$

**3. بيان أنّ المعادلة $f(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ محصورا بين 1 و 2**

$f(1) \approx -0{,}9$ ، $f(2) \approx -1{,}46$. الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على المجال $]1\,;2[$ و $f(2) < -1 < f(1)$ ، منه المعادلة $f(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]1\,;2[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**4. المناقشة البيانية لعدد و إشارة حلول المعادلة $(x+2)e^{-x} - 2 - m = 0$**

$(x+2)e^{-x} - 2 - m = 0 \Rightarrow m = (x+2)e^{-x} - 2 \Rightarrow m = f(x)$

ندرس تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}$) مع المستقيم ذي المعادلة : $y = m$

- $m \leq -2$ : المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا
- $-2 < m < 0$ : المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة
- $m = 0$ : المعادلة تقبل حلا معدوما وآخر سالبا
- $0 < m < f(-1)$ : المعادلة تقبل حلين سالبين
- $m = f(-1)$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا سالبا
- $m > f(-1)$ : المعادلة لا تقبل حلولا

**II- $g$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:** $\begin{cases} g(x) = f(x) \; ; x \geq 0 \\ g(x) = \cos(\pi x + \frac{\pi}{2}) \; ; x < 0 \end{cases}$

1. **حساب** $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = 0$$

2. **بيان أنّ الدالة $g$ مستمرة عند 0**

بما أنّ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = g(0)$، فإنّ الدالة $g$ مستمرة عند 0

3. **بيان أنّ الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و على $]-\infty;0[$**

على المجال $]-\infty;0[$ ، الدالة $g$ هي مركبة دالة تآلفية $\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$ ودالة مثلثية $(\cos x)$ قابلتين للاشتقاق على $]-\infty;0[$ ، فهي إذن قابلة للاشتقاق على $]-\infty;0[$

أمّا على المجال $]0;+\infty[$ ، فالدالة $g$ تساوي الدالة $f$ القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، منه الدالة $g$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

**حساب $g'(x)$ على هذين المجالين**

- $x \in ]-\infty;0[ : g'(x) = -\pi \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$
- $x \in ]0;+\infty[ : g'(x) = f'(x) = (-x-1)e^{-x}$

**حل التمرين 51:**

**I- $g(x) = ax + b - \frac{4e^x}{e^x+2}$**

**تعيين قيمتي $a$ و $b$ بحيث يشمل المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ النقطة $A(\ln 2\,;\ln 2)$**

$$g(\ln 2) = \ln 2 \Rightarrow a\ln 2 + b - \frac{4e^{\ln 2}}{e^{\ln 2}+2} = \ln 2 \Rightarrow a\ln 2 + b - 2 = \ln 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b-2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

**II- $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+2}$**

1. **بيان أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x$: $f(x) = x - 2 + \frac{8}{e^x+2}$**

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x+2} = x + 2 - \frac{4(e^x+2)-8}{e^x+2}$$

$$= x + 2 - 4 + \frac{8}{e^x+2} = \boxed{x - 2 + \frac{8}{e^x+2}}$$

**2. بيان أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين ($\Delta$) و ($\Delta'$)**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+2)=\lim_{x\to-\infty} -\frac{4e^x}{e^x+2}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{(\Delta): y=x+2 \text{ مستقيم مقارب مائل بجوار } (-\infty)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-2)=\lim_{x\to+\infty} \frac{8}{e^x+2}=0$$

$$\Rightarrow \boxed{(\Delta'): y=x-2 \text{ مستقيم مقارب مائل بجوار } (+\infty)}$$

**3. تحديد وضعية المنحنى ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة لكل من ($\Delta$) و ($\Delta'$)**

$$f(x)-(x+2)=-\frac{4e^x}{e^x+2}<0 \Rightarrow (\Delta) \text{ تحت } (Cf)$$

$$f(x)-(x-2)=\frac{8}{e^x+2}>0 \Rightarrow (\Delta') \text{ فوق } (Cf)$$

**4. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+2-\frac{4e^x}{e^x+2}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-2+\frac{8}{e^x+2}=+\infty$$

$$f'(x)=1-\frac{8e^x}{(e^x+2)^2}=\frac{(e^x+2)^2-8e^x}{(e^x+2)^2}=\frac{e^{2x}-4e^x+4}{(e^x+2)^2}$$

$$=\boxed{\frac{(e^x-2)^2}{(e^x+2)^2}}$$

بما أنّ $f'(x)\geq 0$ ، فإنّ الدالة $f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

$$e^x-2=0\Rightarrow e^x=2\Rightarrow x=\ln 2$$

**جدول تغيرات الدالة $f$:**

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\ln 2$ | ↗ | $+\infty$ |

**5. بيان أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيين إحداثييها**

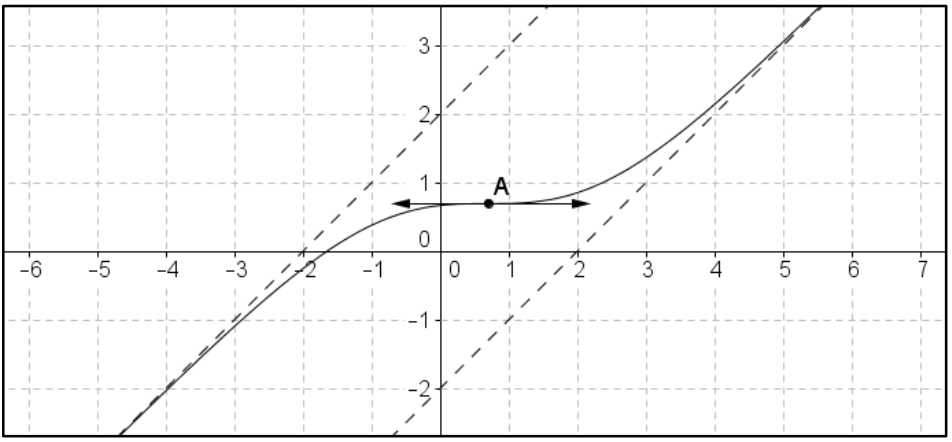
$f'(x)$ تنعدم عند $\ln 2$ ولا تغيّر إشارتها ، نستنتج أنّ النقطة $A(\ln 2\ ;\ln 2)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

**6. اثبات أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $-2 < \alpha < -1{,}5$**

$$f(-2)\approx 0{,}25\ ;\ f(-1{,}5)\approx 0{,}1$$

$f$ مستمرة ورتيبة على المجال $]-2;-1{,}5[$ و $f(-2)\times f(-1{,}5)<0$ ، منه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $-2 < \alpha < -1{,}5$ (حسب مبرهنة القيم المتوسطة)

**7. رسم $(\Delta)$ ، $(\Delta')$ و $(\mathscr{C}_f)$**




**8. المناقشة البيانية لعدد و إشارة حلول المعادلة: $f(x)=x+m$**

ندرس تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيم ذي المعادلة $y=x+m$ الموازي للمستقيمين $(\Delta)$ و$(\Delta')$

- من أجل $m\leq -2$ : المعادلة لا تقبل حلولا
- من أجل $-2 < m < f(0)\ \left(f(0)=\frac{2}{3}\right)$ : المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا
- من أجل $m=\frac{2}{3}$ : المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما
- من أجل $\frac{2}{3} < m < 2$ : المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا
- من أجل $m\geq -2$ : المعادلة لا تقبل حلا.

**<u>حل التمرين 52:</u>**

**I- نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\frac{3e^x-1}{e^x+1}$**

**1. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا: $f(-x)+f(x)=2$.**

$$f(-x)+f(x)=\frac{3e^{-x}-1}{e^{-x}+1}+\frac{3e^{x}-1}{e^{x}+1}=\frac{e^{-x}(3-e^{x})}{e^{-x}(1+e^{x})}+\frac{3e^{x}-1}{e^{x}+1}$$

$$f(-x)+f(x)=\frac{3-e^{x}+3e^{x}-1}{e^{x}+1}=\frac{2(e^{x}+1)}{e^{x}+1}=2$$

**تفسير النتيجة بيانيا**

النقطة $\omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathscr{C})$

**2. حساب نهايات الدالة $f$ و استنتاج المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathscr{C})$**

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3e^{x}-1}{e^{x}+1}=-1\Rightarrow y=-1$$ مستقيم مقارب أفقي

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3e^{x}-1}{e^{x}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x}(3-e^{-x})}{e^{x}(1+e^{-x})}=3\Rightarrow y=3$$ مستقيم مقارب أفقي

**3. دراسة اتجاه تغير الدالة $f$**

$$f'(x)=\frac{3e^{x}(e^{x}+1)-e^{x}(3e^{x}-1)}{(e^{x}+1)^{2}}=\boxed{\frac{4e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}}$$

بما أنّ $f'(x)>0$ ، فإنّ الدالة $f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | |
| $f(x)$ | $-1$ ↗ | $+3$ |

**4. تعيين معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة 0**

$$y=f'(0)x+f(0)\Rightarrow\boxed{(T):y=x+1}$$

**II- نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=f(x)-(x+1)$**

**1. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا: $g'(x)=-\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^{2}$**

$$g'(x)=f'(x)-1=\frac{4e^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}-1=\frac{4e^{x}-(e^{x}+1)^{2}}{(e^{x}+1)^{2}}$$

$$=\frac{-e^{2x}+2e^{x}-1}{(e^{x}+1)^{2}}=\boxed{-\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^{2}}$$

**2. دراسة اتجاه تغير الدالة $g$**

بما أنّ $g'(x) \leq 0$ ، فإنّ الدالة $f$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

**حساب $g(0)$ واستنتاج إشارة $g(x)$**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) - (x+1) = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = \boxed{-\infty}\,; g(0) = f(0) - 1 = \boxed{0}$$

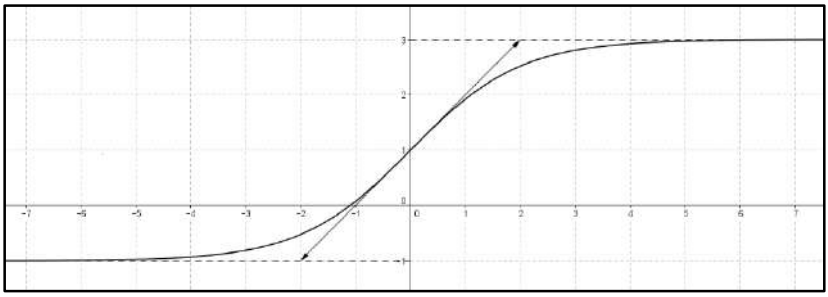
$$x < 0 : g(x) > 0\,; x > 0 : g(x) < 0$$

**3. استنتاج الوضع النسبي للمماس (T) والمنحنى ($\mathscr{C}$)**

$x < 0 : g(x) > 0 \Rightarrow f(x) - (x+1) > 0 \Rightarrow (C)$ فوق $(T)$

$x > 0 : g(x) < 0 \Rightarrow f(x) - (x+1) < 0 \Rightarrow (C)$ تحت $(T)$

**انشاء (T) و($\mathscr{C}$)**



**4. بيان أنّه إذا كان: $f(x) = x$ فإنّ: $g(x) = -1$**

$g(x) = f(x) - (x+1) = x - (x+1) = -1$

**5. بيان أنّ المستقيم $y = x$ يقطع المنحنى ($\mathscr{C}$) في نقطة وحيدة $\alpha$ حيث: $2 < \alpha < 3$**

$g(2) \approx -0{,}48$ ، $g(3) \approx -1{,}19$. الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]2\,;3[$ و $g(3) < -1 < g(2)$ ، منه المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]2\,;3[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، وبما أنّ المعادلة $g(x) = -1$ توافق المعادلة $f(x) = x$ ، نستنتج أنّ المستقيم $y = x$ يقطع المنحنى ($\mathscr{C}$) في نقطة وحيدة $\alpha$ حيث: $2 < \alpha < 3$.

**<u>حل التمرين 53:</u>**

لتكن $f$ دالة معرّفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث:

$$\begin{cases} 4f' - 3f = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1. المنحنى الممثل للدالة $f$ يشمل النقطة $A(1;\frac{3}{4})$ : **خطأ**

$4f' - 3f = 0 \Rightarrow f' = \frac{3}{4}f \Rightarrow f(x) = ce^{\frac{3}{4}x}$

$f(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow f(x) = e^{\frac{3}{4}x} \Rightarrow \boxed{f(1) = e^{\frac{3}{4}}}$

2. المنحنى الممثل للدالة $f$ يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا معامل توجيهه 1 : **خطأ**

$f'(0) = \frac{3}{4}f(0) = \boxed{\frac{3}{4}}$

3. $f$ دالة متزايدة على $\mathbb{R}$ : **صحيح**

$f'(x) = \frac{3}{4}e^{\frac{3}{4}x}; f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة على $\mathbb{R}$

4. $f$ حل للمعادلة التفاضلية: $16f" - 9f = 0$ : **صحيح**

$f''(x) = \frac{9}{16}e^{\frac{3}{4}x}$ ; $16f"(x) - 9f(x) = 16\left(\frac{9}{16}e^{\frac{3}{4}x}\right) - 9\left(e^{\frac{3}{4}x}\right) = \boxed{0}$

**حل التمرين 54:**

**I- $Df = \mathbb{R} - \{\ln 2\}$ ، $f(x) = e^x - 5 + \frac{2e^x}{e^x - 2}$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x - 5 + \frac{2e^x}{e^x - 2} = \boxed{-5}$

$\lim\limits_{\substack{x \to \ln 2 \\ < \\ x \to \ln 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \ln 2 \\ < \\ x \to \ln 2}} e^x - 5 + \frac{2e^x}{e^x - 2} \begin{matrix} \to 4 \\ \to 0^- \end{matrix} = \boxed{-\infty}$

$\lim\limits_{\substack{x \to \ln 2 \\ > \\ x \to \ln 2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to \ln 2 \\ > \\ x \to \ln 2}} e^x - 5 + \frac{2e^x}{e^x - 2} \begin{matrix} \to 4 \\ \to 0^+ \end{matrix} = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x - 5 + \frac{2e^x}{e^x - 2} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x - 5 + \frac{2}{1 - 2e^{-x}} = \boxed{+\infty}$

$f'(x) = e^x + \frac{2e^x(e^x - 2) - 2e^x e^x}{(e^x - 2)^2} = e^x - \frac{4e^x}{(e^x - 2)^2}$

$f'(x) = \frac{e^x[(e^x - 2)^2 - 4]}{(e^x - 2)^2} = \boxed{\frac{e^{2x}(e^x - 4)}{(e^x - 2)^2}}$

$e^x - 4 = 0 \Rightarrow e^x = 4 \Rightarrow x = \ln 4 = 2\ln 2$

$x \in ]-\infty; 2\ln 2[ : f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x \in [2\ln 2 ; +\infty[ : f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $\ln 2$ | | $2\ln 2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $f(x)$ | $-5$ ↘ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $3$ | ↗ | | $+\infty$ |
| | | $-\infty$ | | | | | |

**2. دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى ($\mathscr{C}$)**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -5 \Rightarrow$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $(-\infty)$ $y = -5$

$\lim\limits_{x\to\ln 2} f(x) = \infty \Rightarrow$ مستقيم مقارب عمودي $x = \ln 2$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{5}{x} + \frac{2e^x}{e^x - 2}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

منه ، يقبل المنحنى ($\mathscr{C}$) فرع قطع مكافئ باتجاه محور التراتيب بجوار $(+\infty)$

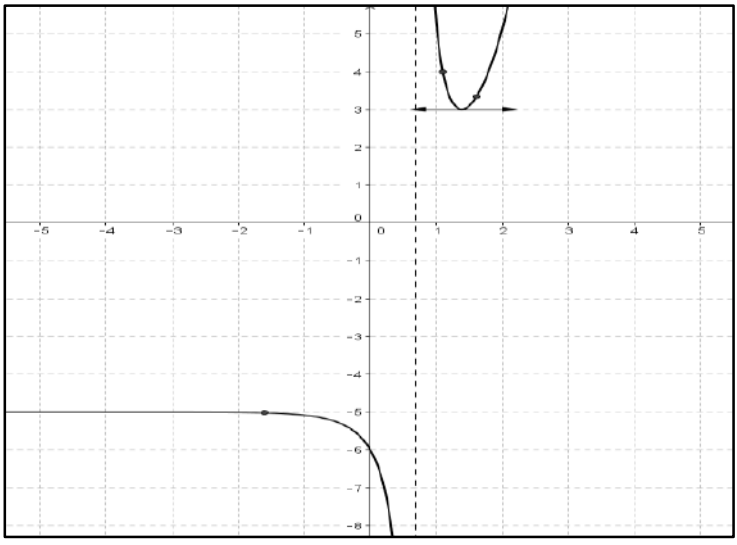
**3. كتابة معادلة المماس للمنحنى ($\mathscr{C}$) عند النقطة ذات الفاصلة 0**

$y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow \boxed{y = -3x - 6}$

**4. حساب $f(-\ln 5); f(\ln 5); f(\ln 3)$**

$f(-\ln 5) \approx -5$ ; $f(\ln 5) \approx 3{,}33$ ; $f(\ln 3) = 4$

**انشاء المنحنى ($\mathscr{C}$)**



**II- $g(x) = e^{|x|} - 5 + \frac{2e^{|x|}}{e^{|x|}-2}$**

**1. تعيين مجموعة تعريف الدالة $g$**

$e^{|x|} - 2 = 0 \Rightarrow e^{|x|} = 2 \Rightarrow |x| = \ln 2 \Rightarrow x = -\ln 2$ أو $x = \ln 2$

$Dg = \mathbb{R} - \{-\ln 2 ; \ln 2\}$

**2. دراسة قابلية اشتقاق الدالة $g$ عند 0**

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{e^{-x} + \frac{2e^{-x}}{e^{-x}-2} + 1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{(e^{-x}+1)(e^{-x}-2) + 2e^{-x}}{x(e^{-x}-2)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{e^{-2x} + e^{-x} - 2}{x(e^{-x}-2)} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} \frac{(e^{-x}-1)(e^{-x}+2)}{x(e^{-x}-2)} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ <}} -\underbrace{\frac{e^{-x}-1}{-x}}_{\to 1} \times \underbrace{\frac{e^{-x}+2}{e^{-x}-2}}_{\to -3}$$

$= \boxed{3}$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{e^{x} + \frac{2e^{x}}{e^{x}-2} + 1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{(e^{x}+1)(e^{x}-2) + 2e^{x}}{x(e^{x}-2)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{e^{2x} + e^{x} - 2}{x(e^{x}-2)} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{(e^{x}-1)(e^{x}+2)}{x(e^{x}-2)} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \underbrace{\frac{e^{x}-1}{x}}_{\to 1} \times \underbrace{\frac{e^{x}+2}{e^{x}-2}}_{\to -3} = \boxed{-3}$$

منه ، نستنتج أنّ الدالة $g$ غير قابلة للاشتقاق عند 0

**3. بيان أنّ الدالة $g$ زوجية**

$Dg$ متناظر بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل $x \in Dg$ لدينا :

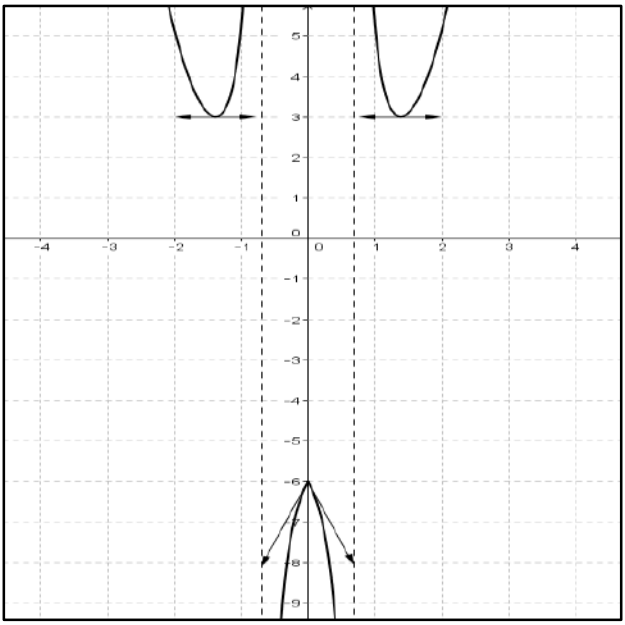
$$g(-x) = e^{|-x|} - 5 + \frac{2e^{|-x|}}{e^{|-x|}-2} = e^{|x|} - 5 + \frac{2e^{|x|}}{e^{|x|}-2} = g(x)$$

منه، الدالة $g$ زوجية

**4. شرح كيفية رسم المنحنى (Γ) الممثل للدالة $g$ انطلاقا من المنحنى ($\mathscr{C}$)**

من أجل $x > 0$ ، $|x| = x$ ، منه $g(x) = f(x)$ أي أنّ المنحنيين (Γ) و ($\mathscr{C}$) متطابقان ، وبما أنّ الدالة $g$ زوجية ، فالمنحنى (Γ) يقبل محور تناظر (محور التراتيب)

**رسم المنحنى (Γ)**



5. **المناقشة البيانية لعدد و إشارة حلول المعادلة :**

$$e^{2x} - (5 + 2\ln m)e^x + 10 + 4\ln m = 0$$

$$e^{2x} - (5 + 2\ln m)e^x + 10 + 4\ln m = 0$$

$$\Rightarrow e^{2x} - 5e^x - 2\ln m\, e^x + 10 + 4\ln m = 0$$

$$\Rightarrow e^{2x} - 5e^x + 10 = 2\ln m\,(e^x - 2)$$

$$\Rightarrow 2\ln m = \frac{e^{2x} - 5e^x + 10}{e^x - 2} = \frac{(e^x - 2)(e^x - 5) + 2e^x}{e^x - 2}$$

$$\Rightarrow 2\ln m = e^x - 5 + \frac{2e^x}{e^x - 2} \Rightarrow \boxed{2\ln m = f(x)}$$

ندرس تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}$) مع المستقيم ذي المعادلة : $y = 2\ln m$

- $2\ln m < -6$ أي $m < e^{-3}$ : المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا
- $2\ln m = -6$ أي $m = e^{-3}$ : المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما
- $-6 < 2\ln m < -5$ أي $e^{-3} < m < e^{-\frac{5}{2}}$ : المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا
- $-5 < 2\ln m < 3$ أي $e^{-\frac{5}{2}} < m < e^{\frac{3}{2}}$ : المعادلة لا تقبل حلولا
- $2\ln m = 3$ أي $m = e^{\frac{3}{2}}$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا
- $2\ln m > 3$ أي $m > e^{\frac{3}{2}}$ : المعادلة تقبل حلين موجبين.

**حل التمرين 55:**

**I- نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x + 1 + e^x$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x + 1 + e^x = \boxed{-\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 + e^x = \boxed{+\infty}$

$g'(x) = 1 + e^x ; g'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**2. بيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $\alpha \in ]-1,28 ; -1,27[$**

$g(-1,28) \approx -0,002$، $g(-1,27) \approx 0,01$. الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]-1,28 ; -1,27[$ و $g(-1,28) \times g(-1,27) < 0$ ، منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]-1,28 ; -1,27[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**3. استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$**

$x \in ]-\infty; \alpha[ : g(x) < 0 ; \ x \in ]\alpha; +\infty[ : g(x) > 0 ; \ g(\alpha) = 0$

**II- $Df = \mathbb{R}$ ، $f(x) = \frac{xe^x}{e^x+1}$**

**1. بيان أنه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، فإن : $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$**

$$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(e^x + 1) - xe^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x(e^x + x + 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

**دراسة تغيرات الدالة $f$**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{e^x + 1} = \boxed{0}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{e^x + 1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{xe^x}{e^x(1 + e^{-x})} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{1 + e^{-x}} = \boxed{+\infty}$

$x \in ]-\infty; \alpha[ : \ g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x \in [\alpha; +\infty[ : g(x) \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

**2. بيان أنّ : $f(\alpha) = \alpha + 1$ واستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$**

$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha + 1 + e^{\alpha} = 0 \Rightarrow e^{\alpha} = -\alpha - 1$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha e^{\alpha}}{e^{\alpha} + 1} = \frac{\alpha(-\alpha - 1)}{-\alpha - 1 + 1} = \frac{-\alpha(\alpha + 1)}{-\alpha} = \alpha + 1$$

$-1{,}28 < \alpha < -1{,}27 \Rightarrow \boxed{-0{,}28 < f(\alpha) < -0{,}27}$

**3. أ. كتابة معادلة المماس (T) لـ (𝒞) في النقطة O**

$$y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow \boxed{(T): y = \frac{1}{2}x}$$

**ب. إثبات أنّ (𝒞) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما (Δ) معادلته : $y = x$**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{xe^{x}}{e^{x} + 1} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{e^{x}(1 + e^{-x})}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -\frac{x}{e^{x}} \times \frac{1}{1 + e^{-x}} = \boxed{0}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0 \text{ مستقيم مقارب أفقي بجوار } (-\infty)}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x = 0 \Rightarrow \boxed{(\Delta): y = x \text{ مستقيم مقارب مائل بجوار } (+\infty)}$

**دراسة الوضعية النسبية لـ (Δ) و (𝒞)**

$$f(x) - x = \frac{-x}{e^{x}(1 + e^{-x})}$$

$x < 0 : f(x) - x > 0 \Rightarrow (C)$ فوق $(\Delta)$

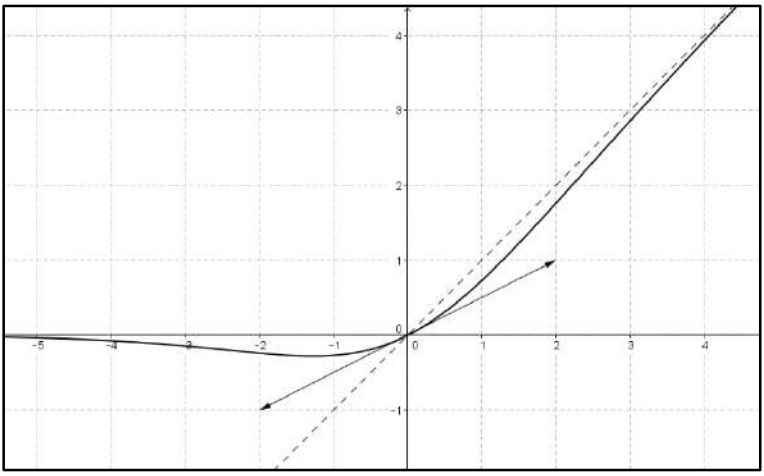
$x > 0 : f(x) - x < 0 \Rightarrow (C)$ تحت $(\Delta)$

يتقاطع المنحنى (𝒞) والمستقيم (Δ) عند المبدأ

**ج. حساب صور الأعداد 2- ، 1- ، 1 ، 2 ، 3 بالدالة $f$**

$f(3) \approx 2{,}86 \; ; f(2) \approx 1{,}76 \; ; f(1) \approx 0{,}73 \; ; f(-1) \approx -0{,}27 \; ; f(-2) \approx -0{,}24$

**انشاء في نفس المعلم (Δ) ، (T) و(𝒞)**



**حل التمرين 56:**

**I- نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 1 + (1-2x)e^{2x}$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 + (1-2x)e^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 + e^{2x} - 2xe^{2x} = \boxed{1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + (1-2x)e^{2x} = \boxed{-\infty}$

$g'(x) = -2e^{2x} + 2(1-2x)e^{2x} = -4xe^{2x}$

$x \in ]-\infty; 0[ : g'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

$x \in [0; +\infty[ : g'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $1$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-\infty$ |

2. بيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث: $\alpha \in ]0{,}6\ ;\ 0{,}7[$

$g(0{,}6) \approx 0{,}34$ ، $g(0{,}7) \approx -0{,}62$. الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]0{,}7\ ;\ 0{,}6[$ و $g(0{,}6) \times g(0{,}7) < 0$ ، منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]0{,}7\ ;\ 0{,}6[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**3. استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$**

$x \in ]-\infty;\alpha[ : g(x) > 0 \; ; \; x \in ]\alpha;+\infty[ : g(x) < 0 \; ; \; g(\alpha) = 0$

**II- $Df = \mathbb{R}$ ، $f(x) = \frac{1}{2}[x + (1-x)e^{2x}]$**

**1. حساب نهايات الدالة $f$ عند $-\infty$ و $+\infty$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}[x + (1-x)e^{2x}] = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}[x + e^{2x} - xe^{2x}] = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}[x + (1-x)e^{2x}] = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x\left(1 + \underbrace{\frac{1-x}{x}}_{\to -1} e^{2x}\right) = \boxed{-\infty}$$

**2. بيان أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = \frac{1}{2}x$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - \frac{1}{2}x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}[(1-x)e^{2x}] = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}[e^{2x} - xe^{2x}] = \boxed{0}$$

منه ، المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = \frac{1}{2}x$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $-\infty$

**دراسة وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ $(\Delta)$**

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}[(1-x)e^{2x}]$$

$x > 1 \Rightarrow 1 - x < 0 \Rightarrow f(x) - \frac{1}{2}x < 0 \Rightarrow (\Delta)$ تحت $(C)$

$x < 1 \Rightarrow 1 - x > 0 \Rightarrow f(x) - \frac{1}{2}x > 0 \Rightarrow (\Delta)$ فوق $(C)$

يتقاطع المنحنى $(\mathscr{C})$ والمستقيم $(\Delta)$ عند النقطة $(1;\frac{1}{2})$

**3. دراسة اتجاه تغير الدالة $f$**

$$f'(x) = \frac{1}{2}[1 - e^{2x} + 2(1-x)e^{2x}] = \frac{1}{2}[1 + (1-2x)e^{2x}] = \frac{1}{2}g(x)$$

$x \in ]-\infty;\alpha[ : g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x \in [\alpha;+\infty[ : g(x) \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $-\infty$ |

**تعيين حصر للعدد $f(\alpha)$**

$$g(\alpha)=0 \Rightarrow 1+(1-2\alpha)e^{2\alpha}=0 \Rightarrow e^{2\alpha}=\frac{1}{2\alpha-1}$$

$$f(\alpha)=\frac{1}{2}[\alpha+(1-\alpha)e^{2\alpha}]=\frac{1}{2}\left[\alpha+\frac{1-\alpha}{2\alpha-1}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha^2-2\alpha+1}{2\alpha-1}\right)$$

$$f(\alpha)=\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha^2-2\alpha+1}{2\alpha-1}\right)=\frac{2\alpha^2-2\alpha+1}{4\alpha-2}$$

$$0{,}6<\alpha<0{,}7 \Rightarrow \begin{cases} 0{,}72<2\alpha^2<0{,}98 \\ -1{,}4<-2\alpha<-1{,}2 \\ 0{,}4<4\alpha-2<0{,}8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0{,}32<2\alpha^2-2\alpha+1<0{,}78 \\ 1{,}25<\dfrac{1}{4\alpha-2}<2{,}5 \end{cases} \Rightarrow 0{,}4<f(\alpha)<1{,}95$$

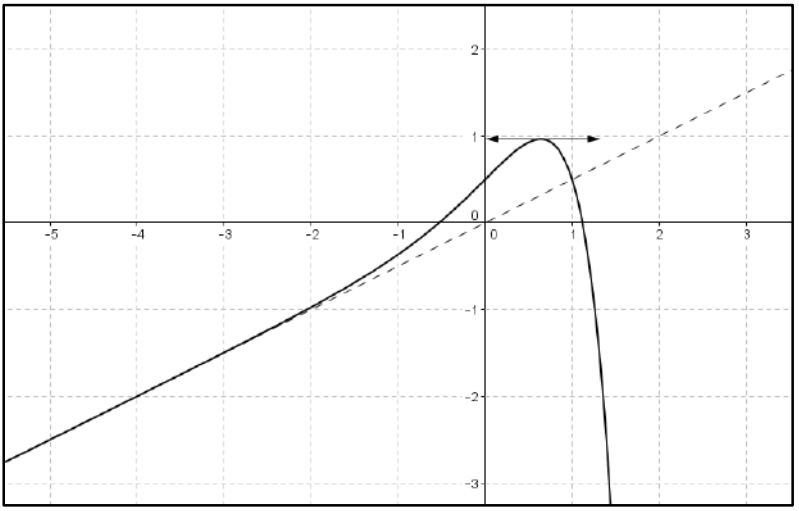
**4. حساب $f\left(\frac{3}{2}\right)$ ، $f(-1)$ و $f(1)$**

$f(1)=\frac{1}{2}$ ، $f(-1)\approx -0{,}36$ ، $f\left(\frac{3}{2}\right)\approx -4{,}27$

استنتاج إشارة $f(x)$ على المجال $]-\infty\ ;\ -1[$

الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على المجال $]-\infty\ ;\ -1[$ ، و$f(-1)\approx -0{,}36$ ، منه $f(x)<0$ على المجال $]-\infty\ ;\ -1[$

**5. انشاء في نفس المعلم المستقيم ($\Delta$) و المنحنى ($\mathscr{C}$)**



**حل التمرين 57:**

$$Df = \mathbb{R} \text{ ، } f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$$

**1. حساب نهايات الدالة $f$ عند $-\infty$ و $+\infty$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x + 1 - xe^{x-1} = \lim_{x\to-\infty} 2x + 1 - \underbrace{xe^{x}}_{\to 0}.e^{-1} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x + 1 - xe^{x-1} = \lim_{x\to+\infty} x\left(\underbrace{\frac{2x+1}{x}}_{\to 2} - \underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\to+\infty}.e^{-1}\right) = \boxed{-\infty}$$

**2. إثبات أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ عند $-\infty$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (2x+1) = \lim_{x\to-\infty} -xe^{x-1} = \lim_{x\to-\infty} -\underbrace{xe^{x}}_{\to 0}.e^{-1} = 0$$

منه ، المستقيم $(\Delta): y = 2x + 1$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C})$ عند $-\infty$

**دراسة وضعية $(\mathscr{C})$ بالنسبة لـ $(\Delta)$**

$$f(x) - (2x+1) = -xe^{x-1}$$

$x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow f(x) - (2x+1) > 0 \Rightarrow (\Delta)$ فوق $(C)$

$x > 0 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow f(x) - (2x+1) < 0 \Rightarrow (\Delta)$ تحت $(C)$

يتقاطع المنحنى $(\mathscr{C})$ والمستقيم $(\Delta)$ عند النقطة $(0;1)$

**3. أ. حساب المشتقة $f'$ و المشتقة الثانية $f''$ للدالة $f$**

$$f'(x) = 2 - e^{x-1} - xe^{x-1} = 2 - (x+1)e^{x-1}$$

$$f''(x) = -e^{x-1} - (x+1)e^{x-1} = -(x+2)e^{x-1}$$

**ب. جدول تغيرات $f'$**

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} 2 - (x+1)e^{x-1} = \lim_{x\to-\infty} 2 - \underbrace{xe^{x}}_{\to 0}.e^{-1} - e^{x}.e^{-1} = \boxed{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} 2 - (x+1)e^{x-1} = \boxed{-\infty}$$

$$f''(x) = -e^{x-1} - (x+1)e^{x-1} = -(x+2)e^{x-1}$$

$x \in ]-\infty;-2[ : f''(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f'$ متزايدة

$x \in [-2;+\infty[ : f''(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $f'$ متناقصة

$f'(-2) \approx 2{,}05$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f'(x)$ | $2$ | ↗ | $2{,}05$ | ↘ | $-\infty$ |

**ج. حساب $f'(1)$ و استنتاج إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$**

$f'(1) = 0$

$x \in ]-\infty; 1[ : f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f'$ متزايدة

$x \in [1; +\infty[ : f'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $f'$ متناقصة

**4. استنتاج جدول تغيرات الدالة $f$**

$x \in ]-\infty; 1[ : f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x \in [1; +\infty[ : f'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

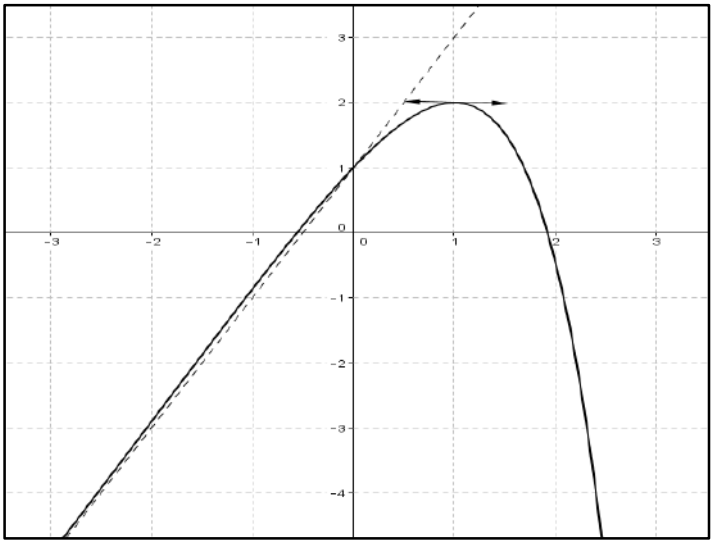
$f(1) = 2$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-\infty$ |

**5. إثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $1,9 < \alpha < 2$**

$f(1,9) \approx 0,13$ ، $f(2) \approx -0,44$. الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على المجال $]1,9 ; 2[$ و $f(1,9) \times f(2) < 0$ ، منه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]1,9 ; 2[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**6. انشاء في نفس المعلم المستقيم $(\Delta)$ و المنحنى $(\mathscr{C})$**



**حل التمرين 58:**

**I- لتكن $g$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (2-x)e^x - 1$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2-x)e^x - 1 = \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x - xe^x - 1 = \boxed{-1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2-x)e^x - 1 = \boxed{-\infty}$

$g'(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$

$x \in ]-\infty; 1[ : g'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

$x \in [1; +\infty[ : g'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-1$ | ↗ | $e-1$ | ↘ | $-\infty$ |

**2. إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين $\alpha$ و$\beta$ حيث : $-1,15 < \alpha < -1,14$ و $1,84 < \beta < 1,85$**

$g(-1,15) \approx -3.10^{-3}$ ، $g(-1,14) \approx 4.10^{-3}$ ، $g(1,84) \approx -0,046$ ، $g(1,85) \approx 7.10^{-3}$

الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على كل من المجالين $]-1,14 ; -1,15[$ و$]1,84 ; 1,85[$

$g(-1,15) \times g(-1,14) < 0$ و $g(1,84) \times g(1,85) < 0$ ، منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين $\alpha$ و$\beta$: $-1,15 < \alpha < -1,14$ و $1,84 < \beta < 1,85$

**3. استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$**

$x \in ]-\infty; \alpha[ \cup ]\beta; +\infty[ : g(x) < 0$ ; $x \in [\alpha; \beta] : g(x) \geq 0$

**II- $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$**

**1. دراسة اتجاه تغير الدالة $u(x) = e^x - x$ و تعيين إشارتها**

$u'(x) = e^x - 1; u'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$

$x \in ]-\infty; 0[ : u'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $u$ متناقصة

$x \in [0; +\infty[ : u'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $u$ متزايدة

$\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x - x = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = \boxed{+\infty}$

بما أنّ القيمة الحدّية الصغرى للدالة $u$ هي $u(0)=1$ ، نستنتج أنّ $u(x)>0$

**2. استنتاج مجموعة تعريف الدالة $f$**

$e^x-x>0 \Rightarrow Df=\mathbb{R}$

**3. بيان أنّ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x)=\frac{g(x)}{(e^x-x)^2}$**

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)^2}{(e^x-x)^2}=\frac{(2-x)e^x-1}{(e^x-x)^2}=\frac{g(x)}{(e^x-x)^2}$$

**استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$**

$x\in ]-\infty;\alpha[\cup]\beta;+\infty[ : g(x)<0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x\in[\alpha;\beta] : g(x)\geq 0 \Rightarrow f'(x)\geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**4. حساب نهايات الدالة $f$ عند حدود مجموعة تعريفها**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{e^x-x}=\boxed{0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(1-xe^{-x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-x}}{1-xe^{-x}}$$

$$=\lim_{X\to-\infty}\frac{1-e^X}{1+Xe^X}=\boxed{1};(X=-x)$$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $f(\beta)$ | ↘ | $1$ |

**5. بيان أنّ : $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}$ واستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$**

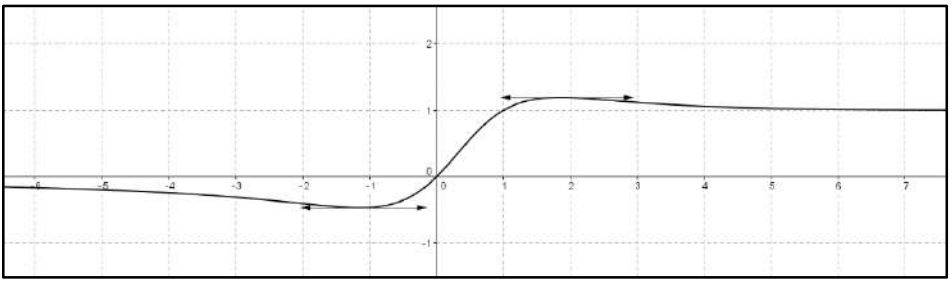
$$g(\alpha)=0 \Rightarrow (2-\alpha)e^\alpha-1=0 \Rightarrow e^\alpha=\frac{1}{2-\alpha}$$

$$f(\alpha)=\frac{e^\alpha-1}{e^\alpha-\alpha}=\frac{\frac{1}{2-\alpha}-1}{\frac{1}{2-\alpha}-\alpha}=\frac{\alpha-1}{\alpha^2-2\alpha+1}=\frac{\alpha-1}{(\alpha-1)^2}=\boxed{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$-1{,}15<\alpha<-1{,}14 \Rightarrow -2{,}15<\alpha-1<-2{,}14$$

$$\Rightarrow -0{,}467<\frac{1}{\alpha-1}<-0{,}465 \Rightarrow \boxed{-0{,}467<f(\alpha)<-0{,}465}$$

**6. انشاء المنحنى ($\mathscr{C}$)**



**الدوال الأسية في البكالوريا**

**حل التمرين 59: بكالوريا 2008 ر**

**I- $Df = \mathbb{R}$ ، $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x+1}$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x - 1 + \frac{4}{e^x+1} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - 1 + \frac{4}{e^x+1} = \boxed{+\infty}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)^2 - 4e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$$

$e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

**2. بيان أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقبل نقطة انعطاف $\omega$**

بما أنّ $f'(x)$ تنعدم عند 0 دون تغيير الإشارة ، فإنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل نقطة انعطاف إحداثييها $\boxed{\omega(0;1)}$

**كتابة معادلة لمماس ($\mathscr{C}_f$) عند النقطة $\omega$**

$y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow \boxed{y = 1}$

- **بيان أنّ $\omega$ مركز تناظر للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**

لبيان أنّ $\omega$ مركز تناظر للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) ، نبرهن أنّ $f(-x)+f(x)=2$

$$f(-x)+f(x)=-x-1+\frac{4}{e^{-x}+1}+x-1+\frac{4}{e^{x}+1}$$

$$f(-x)+f(x)=-2+\frac{4e^{x}}{1+e^{x}}+\frac{4}{e^{x}+1}=-2+\frac{4(e^{x}+1)}{e^{x}+1}=\boxed{2}$$

**3. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)]$**

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{e^{x}+1}=\boxed{0}$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)]=\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{e^{x}+1}-4=\boxed{0}$$

- **استنتاج أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيمين مقاربين يُطلب إعطاء معادلة لكل منهما**

نستنتج أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين هما : $(\Delta): y=x-1$ بجوار $+\infty$ و $(\Delta'): y=x+3$ بجوار $-\infty$

**4. بيان أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $x_0$ من المجال $]-2,77;-2,76[$**

$f(-2,77)\approx 2.10^{-3}$ ، $f(-2,76)\approx -6.10^{-3}$. الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على المجال $]-2,77\,;-2,76[$ و $f(-2,77)\times f(-2,76)<0$ ، منه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]-2,77\,;-2,76[$

- **حساب $f(1)$ و $f(-1)$**

$f(1)\approx 1,08$ ، $f(-1)\approx 0,92$

- **رسم ($\mathscr{C}_f$) ومستقيميه المقاربين (انظر الشكل في نهاية التمرين)**

II- $g(x)=-x+3-\frac{4}{e^{x}+1}$ ، $Dg=\mathbb{R}$

**1. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ فإنّ : $g(x)=f(-x)$**

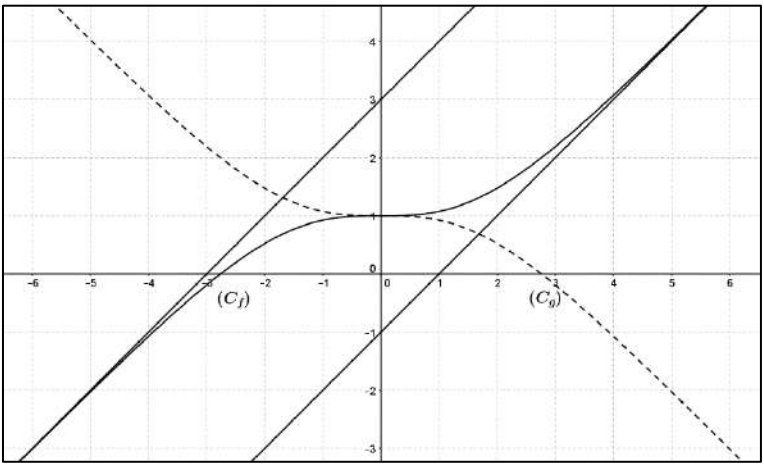
$$f(-x)=-x-1+\frac{4}{e^{-x}+1}=-x-1+\frac{4e^{x}}{1+e^{x}}=-x-1+\frac{4e^{x}+4-4}{1+e^{x}}$$

$$f(-x)=-x-1+\frac{4(e^{x}+1)}{e^{x}+1}-\frac{4}{e^{x}+1}=-x+3-\frac{4}{e^{x}+1}=g(x)$$

- **استنتاج أنّه يوجد تحويل نقطي بسيط يحوّل ($\mathscr{C}_f$) إلى ($\mathscr{C}_g$)**

بما أنّ $g(x)=f(-x)$ ، نستنتج أنّ ($\mathscr{C}_g$) هي صورة ($\mathscr{C}_f$) بالتناظر المحوري (بالنسبة لمحور التراتيب)

**2. انشاء ($\mathscr{C}_g$) (دون دراسة الدالة $g$)**




**حل التمرين 60 : بكالوريا 2008 ع ت**

**I- $Df = [-2; +\infty[$ ، $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$**

تعيين قيمتي $a$ و $b$ : $f'(x) = (-ax + a - b)e^{-x}$

$$\begin{cases} f(-1) = 1 \\ f'(-1) = -e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-a + b)e + 1 = 1 \\ (2a - b)e = -e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = 0 \\ 2a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

**II- $Dg = [-2; +\infty[$ ، $g(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$**

**1. بيان أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$**

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x - 1)e^{-x} + 1 = \lim_{x \to +\infty} -xe^{-x} - e^{-x} + 1$$
$$= \lim_{u \to -\infty} ue^{u} - e^{u} + 1 = 1 \; ; (u = -x)$$

**تفسير النتيجة بيانيا**

المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ يقبل مستقيما مقاربا أفقيا بجوار $+\infty$ معادلته : $y = 1$

**2. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$g'(x) = xe^{-x}$

$x \in ]-\infty; 0[ : g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

$x \in [0; +\infty[ : g'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $e^2+1$ | ↘ | $0$ | ↗ | $1$ |

**3. بيان أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_g$) يقبل نقطة انعطاف I يُطلب تعيين إحداثييها**

$g''(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$

$g''(x) = 0 \Rightarrow (1-x)e^{-x} = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$

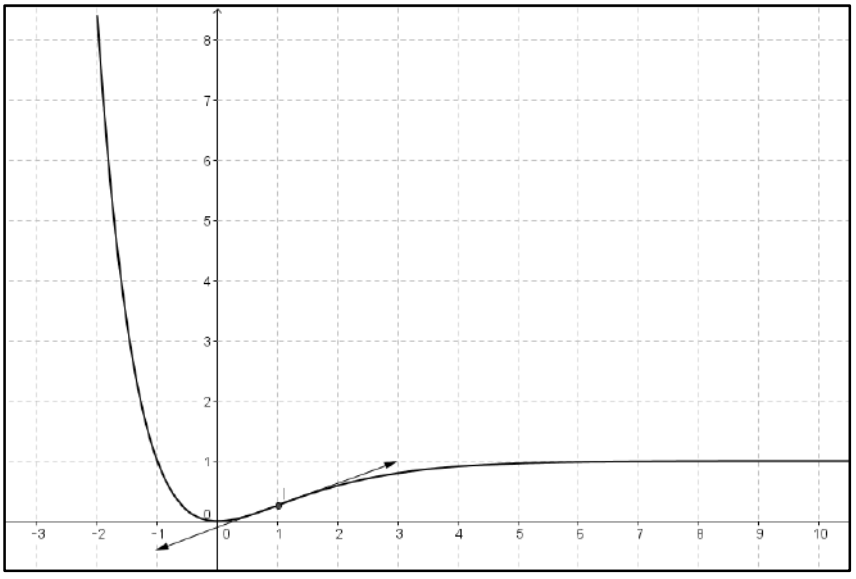
منه، يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_g$) نقطة انعطاف $\boxed{I(1; -2e^{-1}+1)}$

**4. كتابة معادلة المماس للمنحنى ($\mathscr{C}_g$) عند النقطة I**

$y = g'(1)(x-1) + g(1) = e^{-1}(x-1) - 2e^{-1} + 1$

$\boxed{y = e^{-1}x - 3e^{-1} + 1}$

**5. رسم ($\mathscr{C}_g$)**




**6.** $\boldsymbol{D_H = [-2; +\infty[}$ ، $\boldsymbol{H(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}}$

**تعيين α و $\boldsymbol{\beta}$ بحيث تكون $\boldsymbol{H}$ دالة أصلية للدالة : $\boldsymbol{x \to g(x) - 1}$**

$H'(x) = \alpha e^{-x} - (\alpha x + \beta)e^{-x} = (-\alpha x + \alpha - \beta)e^{-x}$

$$H(x) = \int [g(x) - 1]\,dx \Rightarrow H'(x) = g(x) - 1$$

$$\Rightarrow (-\alpha x + \alpha - \beta)e^{-x} = (-x - 1)e^{-x} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha = -1 \\ \alpha - \beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}}$$

**استنتاج الدالة الأصلية للدالة $g$ والتي تنعدم عند القيمة 0**

$$\int [g(x) - 1]\,dx = H(x) \Rightarrow \underbrace{\int g(x)\,dx}_{G(x)} - \underbrace{\int 1\,dx}_{x} = H(x)$$

$$\Rightarrow G(x) = H(x) + x + c = (x + 2)e^{-x} + x + c$$

$$G(0) = 0 \Rightarrow 2 + c = 0 \Rightarrow c = -2 \Rightarrow \boxed{G(x) = (x + 2)e^{-x} + x - 2}$$

**III- $Dk = [-2; +\infty[$ ، $k(x) = g(x^2)$**

**تعيين اتجاه تغير الدالة $k$**

لتكن $h$ الدالة مربع ، لدينا : $k = goh$ ، منه $k' = g'oh \times h'$ ، أي :

$$k'(x) = 2x.g'(x^2) = 2x\left(x^2e^{-x^2}\right) = 2x^3e^{-x^2}$$

$x \in ]-\infty; 0[ : k'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $k$ متناقصة

$x \in [0; +\infty[ : k'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $k$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $k$**

| $x$ | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $k'(x)$ | $-$ | | $+$ | | |
| $k(x)$ | $k(-2)$ | ↘ | $0$ | ↗ | $1$ |

$$k(-2) = g(4) = -5e^{-4} + 1\,;k(0) = g(0) = 0$$

**حل التمرين 61 : بكالوريا 2009 ت ر**

$$Df = \mathbb{R} \text{ ، } f(x) = x + \frac{2}{e^x+1}$$

**1. حساب $f(x) + f(-x)$**

$$f(x) + f(-x) = x + \frac{2}{e^x + 1} - x + \frac{2}{e^{-x} + 1} = \frac{2}{e^x + 1} + \frac{2e^x}{1 + e^x}$$

$$f(x) + f(-x) = \frac{2(e^x + 1)}{e^x + 1} = \boxed{2}$$

**استنتاج أنّ النقطة $\omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$**

بما أنّ $f(x)+f(-x)=2$ ، نستنتج أنّ النقطة $\omega(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

**2. دراسة تغيرات الدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+\frac{2}{e^x+1}=\boxed{+\infty}$$

$$f'(x)=1-\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x+1)^2-2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$$

بما أنّ $f'(x)>0$ ، فإنّ الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

**جدول تغيرات الدالة $f$ على $\mathbb{R}$**

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**3. بيان أنّ المستقيم ذي المعادلة $y=x$ هو مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند $+\infty$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+1}=\boxed{0}$$

منه، المستقيم $y=x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند $+\infty$

**حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]$ واستنتاج المستقيم المقارب لـ $(\mathscr{C}_f)$ عند $-\infty$**

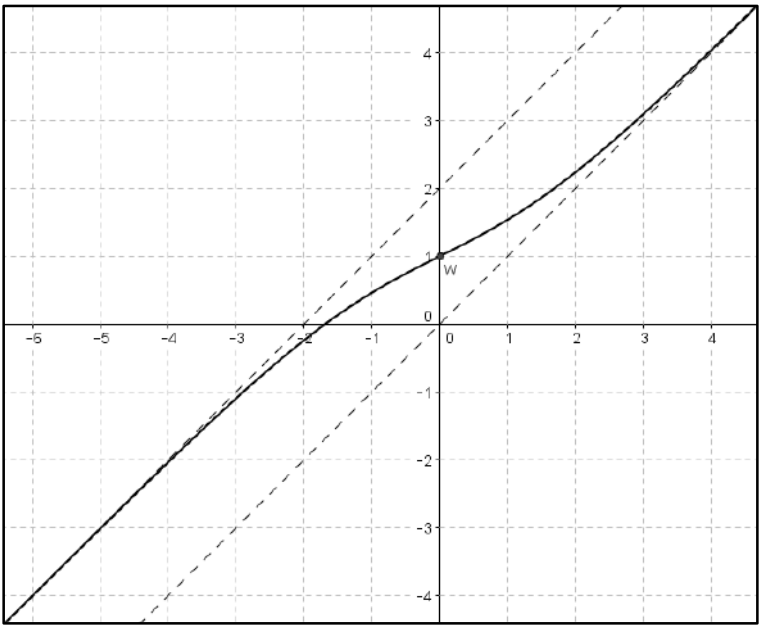
$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^x+1}-2=\boxed{0}$$

منه، المستقيم $y=x+2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند $-\infty$

**4. بيان أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $-1,7<\alpha<-1,6$**

$f(-1,7)\approx -9.10^{-3}$ ، $f(-1,6)\approx 0,06$. الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على المجال $]-1,7\,;-1,6[$ و $f(-1,7)\times f(-1,6)<0$ ، منه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]-1,7\,;-1,6[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**5. رسم $(\mathscr{C}_f)$ من أجل $x\in\mathbb{R}$**




**6. بيان أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، $f(x) = x + \frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}$**

$$f(x) = x + \frac{2}{e^x + 1} = x + \frac{e^x(2e^{-x})}{e^x(1 + e^{-x})} = x + \frac{2e^{-x}}{e^{-x} + 1}$$

**7. حساب $A(\alpha)$**

$$A(\alpha) = \int_{\alpha}^{0} [(x+2) - f(x)]\, dx = \int_{\alpha}^{0} \left(2 - \frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}\right) dx$$

$$= \int_{\alpha}^{0} \left(2 + 2\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}\right) dx = [2x + 2\ln(e^{-x}+1)]_{\alpha}^{0}$$

$$= 2\ln 2 - 2\alpha - 2\ln(e^{-\alpha}+1)$$

**بيان أنّ $A(\alpha) = 2\ln(-\alpha)$**

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha + \frac{2e^{-\alpha}}{e^{-\alpha}+1} = 0 \Rightarrow \frac{2e^{-\alpha}}{e^{-\alpha}+1} = -\alpha \Rightarrow e^{-\alpha} + 1 = \frac{2e^{-\alpha}}{-\alpha}$$

$$A(\alpha) = 2\ln 2 - 2\alpha - 2\ln(e^{-\alpha}+1) = 2\ln 2 - 2\alpha - 2\ln\left(\frac{2e^{-\alpha}}{-\alpha}\right)$$

$$= 2\ln 2 - 2\alpha - 2\ln(2e^{-\alpha}) + 2\ln(-\alpha)$$

$$= 2\ln 2 - 2\alpha - 2\ln 2 + 2\alpha + 2\ln(-\alpha)$$

$$= \boxed{2\ln(-\alpha)}$$

**استنتاج حصر للعدد $A(\alpha)$**

$-1{,}7 < \alpha < -1{,}6 \Rightarrow 1{,}6 < -\alpha < 1{,}7 \Rightarrow \ln 1{,}6 < \ln(-\alpha) < \ln 1{,}7$

$\Rightarrow 2\ln 1{,}6 < 2\ln(-\alpha) < 2\ln 1{,}7 \Rightarrow \boxed{0{,}94 < A(\alpha) < 1{,}06}$

**حل التمرين 62 : بكالوريا 2010 ر**

**I- $g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (3-x)e^x - 3$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (3-x)e^x - 3 = \lim\limits_{x\to-\infty} 3e^x - xe^x - 3 = \boxed{-3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (3-x)e^x - 3 = \boxed{-\infty}$

$g'(x) = -e^x + (3-x)e^x = (2-x)e^x$

$x \in ]-\infty; 2[ : g'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

$x \in [2; +\infty[ : g'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-3$ | ↗ | $e^2-3$ | ↘ | $-\infty$ |

**2. بيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين**

$g(0) = 0$ ، $g(2{,}82) \approx 0{,}02$ ، $g(2{,}83) \approx -0{,}1$ الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]2{,}83 ; 2{,}82[$ و $g(2{,}83) \times g(2{,}82) < 0$ ، منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر $\alpha$ حيث : $2{,}82 < \alpha < 2{,}83$

**3. استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$**

$x \in ]-\infty; 0[ \cup ]\alpha; +\infty[ : g(x) < 0$

$x \in [0; \alpha] : g(x) \geq 0$

**II- $Df = \mathbb{R}$ ، $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1} ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$**

**1. بيان أنّ الدالة $f$ تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$**

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{e^x-1}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{e^x-1}{x}}=\boxed{0}$$

منه، الدالة $f$ تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$

**كتابة معادلة لـ (T) مماس ($\mathcal{C}_f$) عند المبدأ O**

$$y=f'(0)x+f(0)\Rightarrow \boxed{(T):y=0}$$

**2. أ. بيان أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x}=0$**

$$\lim_{x\to+\infty} x^3e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x^3}}=0$$

**حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(x^3e^{-x})}{e^x(1-e^{-x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3e^{-x}}{1-e^{-x}}=\boxed{0}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{e^x-1}\begin{matrix}\to-\infty\\ \to-1\end{matrix}=\boxed{+\infty}$$

**ب. بيان أنّه من أجل $x\neq 0$ فإنّ : $f'(x)=\frac{x^2}{(e^x-1)^2}g(x)$**

$$f'(x)=\frac{3x^2(e^x-1)-x^3e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{x^2(3e^x-xe^x-3)}{(e^x-1)^2}=\frac{x^2}{(e^x-1)^2}g(x)$$

**ج. التحقق أنّ $f(\alpha)=\alpha^2(3-\alpha)$**

$$g(\alpha)=0\Rightarrow(3-\alpha)e^\alpha-3=0\Rightarrow e^\alpha=\frac{3}{3-\alpha}$$

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^3}{e^\alpha-1}=\frac{\alpha^3}{\frac{3}{3-\alpha}-1}=\frac{\alpha^3(3-\alpha)}{\alpha}=\boxed{\alpha^2(3-\alpha)}$$

**تعيين حصر لـ $f(\alpha)$**

$$2{,}82<\alpha<2{,}83\Rightarrow\begin{cases}7{,}95<\alpha^2<8{,}01\\ 0{,}17<3-\alpha<0{,}18\end{cases}\Rightarrow\boxed{1{,}35<f(\alpha)<1{,}44}$$

**د. انشاء جدول تغيرات الدالة $f$**

$x\in]-\infty;0[\cup]\alpha;+\infty[ : g(x)<0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x\in[0;\alpha] : g(x)\geq 0\Rightarrow f'(x)\geq 0\Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $0$ |

**3. حساب $f(x)+x^3$ واستنتاج الوضعية النسبية لـ ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}$)**

$$f(x)+x^3=\frac{x^3}{e^x-1}+x^3=\frac{x^3+x^3(e^x-1)}{e^x-1}=\boxed{\frac{x^3e^x}{e^x-1}}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $e^x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)+x^3$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |

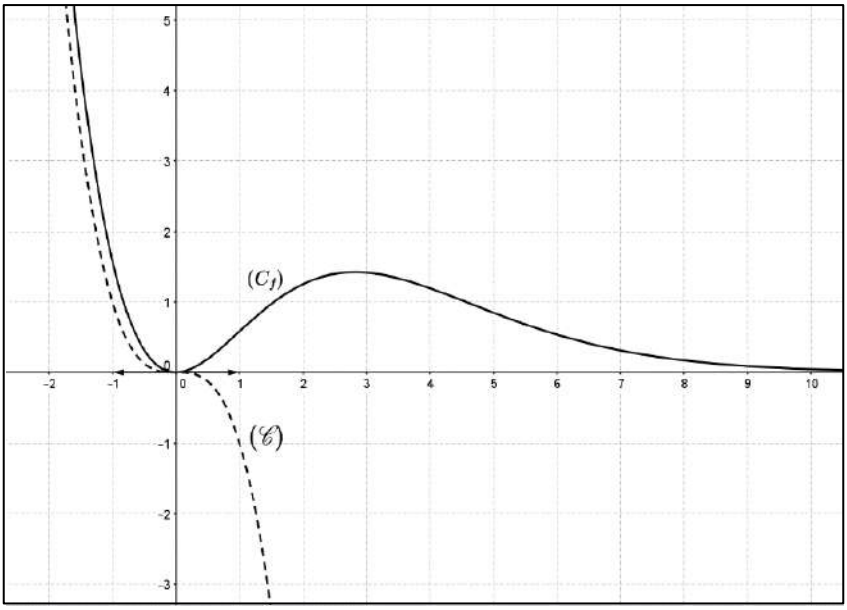
بما أنّ $f(x)+x^3\geq 0$ ، فإنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) فوق المنحنى ($\mathscr{C}$)

بيان أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x^3]=0$ وتفسير النتيجة هندسيا

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+x^3]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3e^x}{e^x-1}=\boxed{0}$$

نستنتج أنّ ($\mathscr{C}$) منحنى مقارب المنحنى ($\mathscr{C}_f$) بجوار $-\infty$

**4. انشاء في نفس المعلم المماس (T) و المنحنيين ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}$)**




**حل التمرين 63 : بكالوريا 2010 ت ر**

$$\boldsymbol{Df = \mathbb{R}^*} \text{ ، } \boldsymbol{f(x) = \frac{3xe^x - 3x - 4}{3(e^x - 1)}}$$

**1. تعيين العددين الحقيقيين $a$ و $b$ بحيث : $\boldsymbol{f(x) = ax + \frac{b}{3(e^x - 1)}}$**

$$f(x) = \frac{3xe^x - 3x - 4}{3(e^x - 1)} = \frac{3x(e^x - 1) - 4}{3(e^x - 1)} = x - \frac{4}{3(e^x - 1)} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \end{cases}$$

**2. حساب نهايات الدالة $f$ عند أطراف مجالات تعريفها**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x - \frac{4}{3(e^x - 1)} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} x - \frac{4}{3(e^x - 1)} = \boxed{+\infty} \quad \left(e^x - 1 \to 0^- \Rightarrow -\frac{4}{3(e^x - 1)} \to +\infty\right)$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x - \frac{4}{3(e^x - 1)} = \boxed{-\infty} \quad \left(e^x - 1 \to 0^+ \Rightarrow -\frac{4}{3(e^x - 1)} \to -\infty\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x - \frac{4}{3(e^x - 1)} = \boxed{+\infty}$$

**3. بيان أنّ $f$ متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها**

$$f'(x) = 1 + \frac{12e^x}{9(e^x-1)^2} = 1 + \frac{4e^x}{3(e^x-1)^2}$$

بما أنّ $f'(x) > 0$ ، فإنّ الدالة $f$ متزايدة تماما على كل مجال من مجالي تعريفها

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**4. $(D'): y = x + \frac{4}{3}$ ، $(D): y = x$**

**أ. بيان أنّ $(D)$ و$(D')$ مقاربان للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - \left(x + \frac{4}{3}\right) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{4}{3(e^x-1)} - \frac{4}{3} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} -\frac{4}{3(e^x-1)} = \boxed{0}$$

نستنتج أنّ $(D)$ مستقيم مقارب لـ $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$ ، و$(D')$ مقارب لـ $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $-\infty$

**تحديد وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة لكل منهما**

$$f(x) - \left(x + \frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3(e^x-1)} - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{e^x-1} + 1\right) = -\frac{4}{3}\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)$$

$$f(x) - x = -\frac{4}{3(e^x-1)}$$

نلاحظ أنّ للعبارتين $f(x) - \left(x + \frac{4}{3}\right)$ و $f(x) - x$ نفس الإشارة :

من أجل $x < 0$ تكون العبارتان موجبتين ، منه $(\mathscr{C}_f)$ فوق $(D)$ و$(D')$

من أجل $x > 0$ تكون العبارتان سالبتين ، منه $(\mathscr{C}_f)$ تحت $(D)$ و$(D')$

**ب. بيان أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين $x_0$ و $x_1$ حيث :**

**$-1,66 < x_1 < -1,65$ و $0,9 < x_0 < 0,91$**

$f(0,9) \approx -0,01$ ، $f(0,91) \approx 0,01$ ، $f(-1,66) \approx -0,01$ ، $f(-1,65) \approx 3.10^{-4}$. الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على كل من المجالين $]0,9 ; 0,91[$ و$]-1,66 ; -1,65[$. $f(0,9) \times f(0,91) < 0$

و $f(-1,66) \times f(-1,65) < 0$ ، منه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين $x_0$ و $x_1$ حيث $0,9 < x_0 < 0,91$ و $-1,66 < x_1 < -1,65$

**ج. حساب من أجل كل عدد حقيقي $x$ غير معدوم $f(x) + f(-x)$**

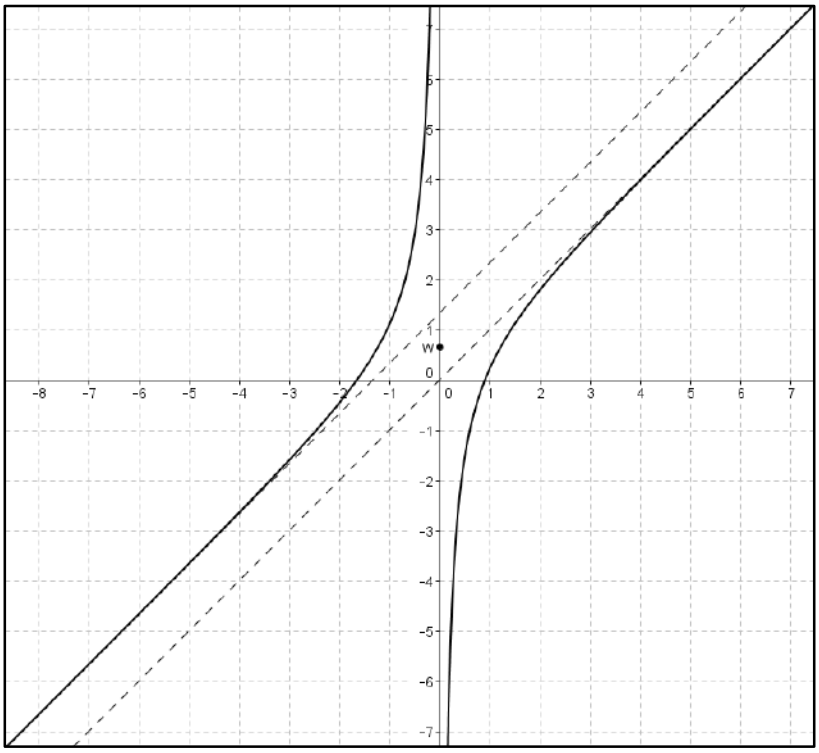
$$f(x) + f(-x) = x - \frac{4}{3(e^x - 1)} - x - \frac{4}{3(e^{-x} - 1)}$$

$$f(x) + f(-x) = -\frac{4}{3(e^x - 1)} - \frac{4e^x}{3(1 - e^x)} = \frac{4(e^x - 1)}{3(e^x - 1)} = \boxed{\frac{4}{3}}$$

**تفسير النتيجة هندسيا**

النقطة $\omega\left(0; \frac{2}{3}\right)$ مركز تناظر للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

**د. رسم $(D)$ ، $(D')$ و $(\mathscr{C}_f)$**




**ه. المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$**

ندرس تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيمات $(D_m)$ الموازية للمستقيمين $(D)$ و$(D')$

- $m \in ]-\infty; 0[ \cup \left]\frac{4}{3}; +\infty\right[$ : المعادلة تقبل حلا وحيدا
- $m \in \left[0; \frac{4}{3}\right]$ : المعادلة لا تقبل حلولا

**5.** $\boldsymbol{Dg = ]0;+\infty[}$ ، $\boldsymbol{g(x) = [f(x)]^2}$

**دراسة تغيرات الدالة $g$ دون حساب $g(x)$ بدلالة $x$**

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \boxed{+\infty}$

$g'(x) = 2f(x) \times f'(x)$

بما أنّ $f'(x) > 0$ ، فإنّ إشارة $g'(x)$ هي نفس إشارة $f(x)$ ، منه :

$x \in ]0; x_0[ : f(x) < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$ ⇒ الدالة $g$ متناقصة

$x \in [x_0; +\infty[ : f(x) \geq 0 \Rightarrow g'(x) \geq 0$ ⇒ الدالة $g$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $0$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**حل التمرين 64 : بكالوريا 2010 ع ت**

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$

**1. أ. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x - \frac{1}{e^x - 1} = -\infty \; ; \; \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$$

ب. حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$ وتفسير النتيجة هندسيا

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x - \frac{1}{e^x - 1} = -\infty \left(e^x - 1 \to 0^+ \Rightarrow -\frac{1}{e^x - 1} \to -\infty\right)$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} x - \frac{1}{e^x - 1} = -\infty \left(e^x - 1 \to 0^- \Rightarrow -\frac{1}{e^x - 1} \to +\infty\right)$$

**التفسير الهندسي** : المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ مستقيم مقارب عمودي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

**2. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$f'(x) = 1 + \frac{e^x}{(e^x-1)^2}$ ; $f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**3. أ. بيان أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين ($\Delta$) و($\Delta'$) معادلتيهما على الترتيب : $y = x$ و $y = x + 1$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{e^x-1} - 1 = \boxed{0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{e^x-1} = \boxed{0}$$

نستنتج أنّ ($\Delta$) مستقيم مقارب لـ ($\mathscr{C}_f$) بجوار $+\infty$ ، و($\Delta'$) مقارب لـ ($\mathscr{C}_f$) بجوار $-\infty$

**ب. دراسة وضعية ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة إلى كل من ($\Delta$) و ($\Delta'$)**

$$f(x) - x = -\frac{1}{e^x-1} \; ; \; f(x) - (x+1) = -\frac{1}{e^x-1} - 1 = -\frac{e^x}{e^x-1}$$

نلاحظ أنّ للعبارتين $f(x) - (x+1)$ و $f(x) - x$ نفس الإشارة :

من أجل $x < 0$ تكون العبارتان موجبتين ، منه ($\mathscr{C}_f$) فوق ($\Delta$) و($\Delta'$)

من أجل $x > 0$ تكون العبارتان سالبتين ، منه ($\mathscr{C}_f$) تحت ($\Delta$) و($\Delta'$)

**4. اثبات أنّ النقطة $\omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**

من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ ، $(-x) \in \mathbb{R}^*$ ، و لدينا :

$$f(-x) + f(x) = -x - \frac{1}{e^{-x}-1} + x - \frac{1}{e^x-1} = -\frac{e^x}{1-e^x} - \frac{1}{e^x-1}$$

$$= \frac{e^x-1}{e^x-1} = 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

منه النقطة $\omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى ($\mathscr{C}_f$).

**5. أ. بيان أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ حيث $\ln 2 < \alpha < 1$ ، $-1,4 < \beta < -1,3$**

$f(\ln 2) \approx -0,31$ ; $f(1) \approx 0,42$ ; $f(-1,4) \approx -0,07$ ; $f(-1,3) \approx 0,07$

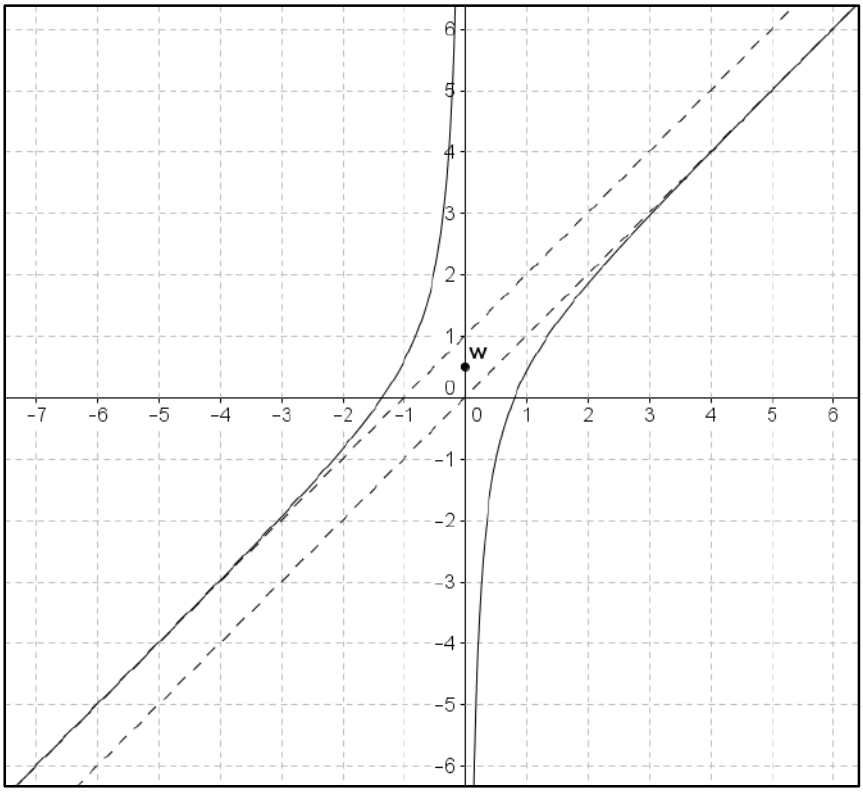
الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على كل من المجالين $]1\ ;\ 2\ln[$ و $]-1{,}4\ ;\ -1{,}3[$ ،
$f(\ln 2) \times f(1) < 0$ ، كما أنّ $f(-1{,}4) \times f(-1{,}3) < 0$ ، منه حسب
مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ حيث :
$\ln 2 < \alpha < 1$ و $-1{,}4 < \beta < -1{,}3$

**ب. تعيين مماسات لـ ($\mathscr{C}_f$) توازي المستقيم ($\Delta$)**

$$f'(x) = 1 \Rightarrow 1 + \frac{e^x}{(e^x-1)^2} = 1 \Rightarrow \frac{e^x}{(e^x-1)^2} = 0 \Rightarrow e^x = 0 \text{ (مستحيل)}$$

منه لا توجد مماسات لـ ($\mathscr{C}_f$) توازي المستقيم ($\Delta$)

**ج. رسم ($\Delta$) ، ($\Delta'$) و($\mathscr{C}_f$)**




**د. المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة : $(m-1)e^{-x} = m$**

$(m-1)e^{-x} = m \Rightarrow me^{-x} - e^{-x} = m \Rightarrow m(e^{-x}-1) = e^{-x}$

$$\Rightarrow m = \frac{e^{-x}}{e^{-x}-1} \Rightarrow m = \frac{1}{1-e^{x}} \Rightarrow x + m = x + \frac{1}{1-e^{x}} = x - \frac{1}{e^{x}-1}$$
$$\Rightarrow x + m = f(x)$$

ندرس تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مع المستقيمات ($\Delta_m$) الموازية لـ ($\Delta$) و ($\Delta'$)

- $m < 0$ : المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا
- $0 \leq m \leq 1$ : المعادلة لا تقبل حلولا
- $m > 1$ : المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا

**حل التمرين 65 : بكالوريا 2011 ع ت**

**$Df = \mathbb{R}$ ، $f(x) = e^x - ex - 1$**

**1. أ. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x - ex - 1 = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x - ex - 1 = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - e - \frac{1}{x}\right) = \boxed{+\infty}$$

**ب. حساب $f'(x)$ ودراسة إشارتها**

$$f'(x) = e^x - e$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - e = 0 \Rightarrow e^x = e \Rightarrow x = 1$$
$x \in ]-\infty; 1[ : f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة
$x \in [1; +\infty[ : f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**ج. جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**2. أ. بيان أنّ المستقيم $(\Delta): y = -ex - 1$ مقارب مائل لـ ($\mathscr{C}_f$) بجوار $(-\infty)$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (-ex - 1) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

منه، المستقيم $(\Delta): y = -ex - 1$ مقارب مائل لـ ($\mathscr{C}_f$) بجوار $(-\infty)$

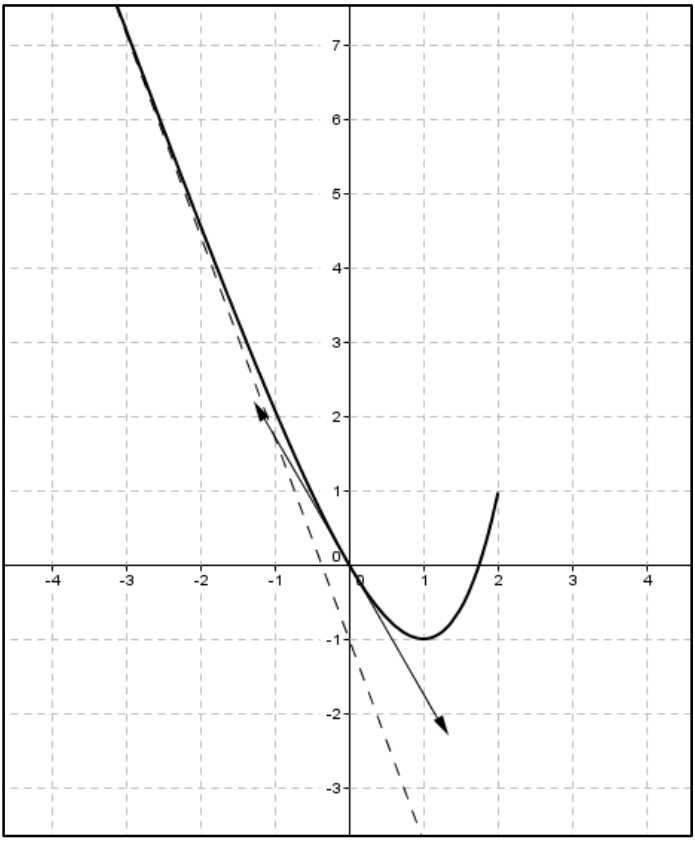
**ب. كتابة معادلة للمستقيم $(T)$ مماس المنحنى ($\mathscr{C}_f$) في النقطة ذات الفاصلة 0**

$y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow \boxed{(T): y = (1-e)x}$

**ج. بيان أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]1,75\ ;\ 1,76[$ حلا وحيدا $\alpha$**

$f(1,75) \approx -2.10^{-3}$ ، $f(1,76) \approx 0,03$. الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على المجال $]1,75\ ;\ 1,76[$ و $f(1,75) \times f(1,76) < 0$ ، منه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]1,75\ ;\ 1,76[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

**د. رسم $(\Delta)$ ، $(T)$ و$(\mathcal{C}_f)$ على المجال $]-\infty; 2[$**




**3. أ. حساب المساحة $A(\alpha)$ بدلالة $\alpha$**

$$A(\alpha) = \int_0^{\alpha} -f(x)\,dx = -\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = -\int_0^{\alpha} (e^x - ex - 1)\,dx$$

$$= -\left[e^x - \frac{e}{2}x^2 - x\right]_0^{\alpha} = \boxed{\left(-e^{\alpha} + \frac{e}{2}\alpha^2 + \alpha + 1\right) ua}$$

**ب. اثبات أنّ :** $A(\alpha) = \left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha\right)ua$

$f(\alpha) = 0 \Rightarrow e^{\alpha} - e\alpha - 1 = 0 \Rightarrow e^{\alpha} = e\alpha + 1$

$A(\alpha) = -e^{\alpha} + \frac{e}{2}\alpha^2 + \alpha + 1 = -e\alpha - 1 + \frac{e}{2}\alpha^2 + \alpha + 1$

$= \boxed{\left(\frac{1}{2}e\alpha^2 - e\alpha + \alpha\right)ua}$

**حل التمرين 66 : بكالوريا 2012 ر**

**I- $Dg = \mathbb{R}$ ، $g(x) = 2 - xe^x$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2 - xe^x = \boxed{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 - xe^x = \boxed{-\infty}$

$g'(x) = -e^x - xe^x = \boxed{(-x-1)e^x}$

$x < -1 \Rightarrow -x - 1 > 0 \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

$x \geq -1 \Rightarrow -x - 1 \leq 0 \Rightarrow g'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $2$ | ↗ | $2+e^{-1}$ | ↘ | $-\infty$ |

**2. بيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيد $\alpha$ على $\mathbb{R}$**

الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(-1) = 2 + e^{-1}$ ،

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ ، منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيد $\alpha$ على المجال $]-1;+\infty[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، وهذا الحل هو الوحيد على $\mathbb{R}$ لأنّ الدالة $g$ تتزايد على المجال $]-\infty;-1[$ من القيمة 2 إلى القيمة $2 + e^{-1}$ ، فهي لا تنعدم .

**التحقق أنّ $0,8 < \alpha < 0,9$**

$g(0{,}8) \approx 0{,}2\ ;\ g(0{,}9) \approx -0{,}2 \Rightarrow 0{,}8 < \alpha < 0{,}9$

**3. تعيين حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$**

$x < \alpha \Rightarrow g(x) > 0\ ; x \geq \alpha \Rightarrow g(x) \leq 0$

**II- $Df = \mathbb{R}$ ، $f(x) = \frac{2x+2}{e^x+2}$**

**1. بيان أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+2}{e^x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}+\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{2}{x}}{\frac{e^x}{x}+\frac{2}{x}} = \boxed{0}$$

**تفسير النتيجة هندسيا**

يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مستقيما مقاربا معادلته $y = 0$ (محور الفواصل) بجوار $+\infty$

**2. أ. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+2}{e^x+2} = \boxed{-\infty}$$

**ب. بيان أنّ المستقيم $(\Delta')$ ذا المعادلة $y = x+1$ مستقيم مقارب لـ ($\mathscr{C}_f$)**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+2}{e^x+2} - x - 1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{-xe^x - e^x}{e^x+2} = 0$$

منه، المستقيم $(\Delta')$ ذا المعادلة $y = x+1$ مستقيم مقارب مائل لـ ($\mathscr{C}_f$) بجوار $-\infty$

**3. دراسة وضعية ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة إلى كل من $(\Delta')$ و $(\Delta)$**

$$f(x) - (x+1) = \frac{(-x-1)e^x}{e^x+2}$$

من أجل $x < -1$ ، $f(x) - (x+1) > 0$ منه ($\mathscr{C}_f$) فوق $(\Delta')$

من أجل $x > -1$ ، $f(x) - (x+1) < 0$ منه ($\mathscr{C}_f$) تحت $(\Delta')$

يتقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) والمستقيم $(\Delta')$ عند النقطة $(-1;0)$

$$f(x) - x = \frac{2x+2}{e^x+2} - x = \frac{2-xe^x}{e^x+2} = \frac{g(x)}{e^x+2}$$

من أجل $x < \alpha$ ، $f(x) - x > 0$ منه ($\mathscr{C}_f$) فوق $(\Delta)$

من أجل $x > \alpha$ ، $f(x) - x < 0$ منه ($\mathscr{C}_f$) تحت $(\Delta)$

يتقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) والمستقيم $(\Delta)$ عند النقطة $(\alpha;\alpha)$

**4. أ. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x+2)^2}$**

$$f'(x) = \frac{2(e^x + 2) - (2x + 2)e^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{2(2 - xe^x)}{(e^x + 2)^2} = \boxed{\frac{2g(x)}{(e^x + 2)^2}}$$

**استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$**

$x < \alpha \Rightarrow g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x \geq \alpha \Rightarrow g(x) \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

ب. بيان أنّ $f(\alpha) = \alpha$

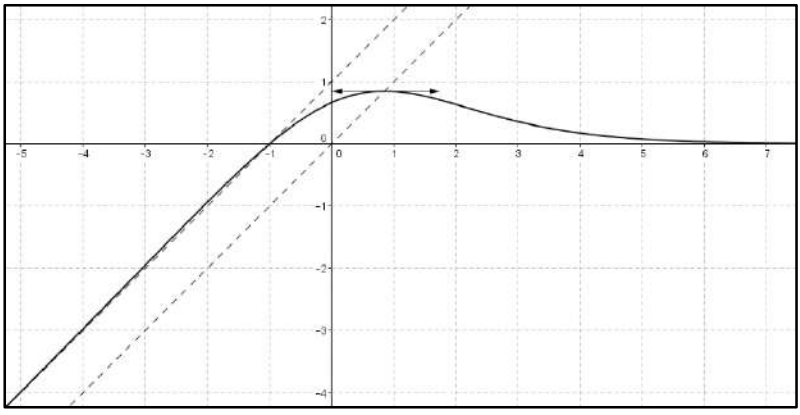
$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow 2 - \alpha e^{\alpha} = 0 \Rightarrow e^{\alpha} = \frac{2}{\alpha}$$

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha + 2}{e^{\alpha} + 2} = \frac{2\alpha + 2}{\frac{2}{\alpha} + 2} = \frac{\alpha(2\alpha + 2)}{2\alpha + 2} = \alpha$$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\alpha$ | ↘ | $0$ |

**5. رسم $(\Delta)$ ، $(\Delta')$ و $(\mathcal{C}_f)$**



**6. المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة : $f(x) = f(m)$**

ندرس تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيم ذي المعادلة $y = f(m)$ الموازي لمحور الفواصل والذي يتحرك وفق تغيرات الدالة $f$ على النحو التالي :

- المعادلة تقبل حلا وحيدا : $f(m) \in ]-\infty; 0] \Rightarrow m \in ]-\infty; -1]$
- المعادلة تقبل حلين متمايزين : $f(m) \in ]0; f(\alpha)[ \Rightarrow m \in ]-1; \alpha[ \cup ]\alpha; +\infty[$
- المعادلة تقبل حلا مضاعفا : $f(m) = f(\alpha) \Rightarrow m = \alpha$

**III) $u_0 = 0$ ، $u_{n+1} = f(u_n)$**

**1. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0 \leq u_n < \alpha$**

تحقيق التراجع : $0 \leq u_0 < \alpha$ (محققة لأنّ $u_0 = 0$)

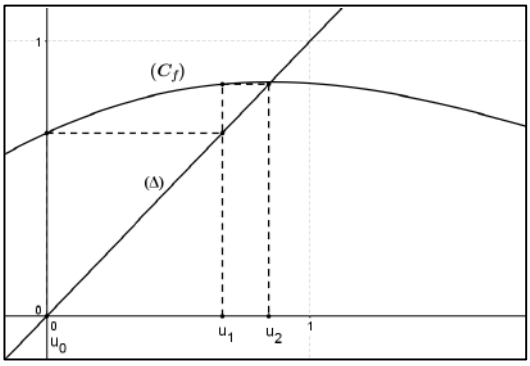
فرض التراجع : نفرض أنّ $0 \leq u_n < \alpha$

برهان التراجع : نبرهن أنّ $0 \leq u_{n+1} < \alpha$

$$0 \leq u_n < \alpha \xrightarrow[\text{لأنّ } f \text{ متزايدة على } [0;\alpha[]{} \underbrace{f(0)}_{0} \leq \underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}} < \underbrace{f(\alpha)}_{\alpha} \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} < \alpha$$

منه، نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $0 \leq u_n < \alpha$

**2. تمثيل الحدود : $u_0$ ، $u_1$ و $u_2$ على محور الفواصل**




**تخمين اتجاه تغيّر $(u_n)$**

من البيان يمكننا التخمين أنّ المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما

**3. برهان أنّ المتتالية $(u_n)$ متقاربة وحساب نهايتها**

$$f(x) - x = \frac{g(x)}{e^x + 2} \Rightarrow f(u_n) - u_n = \frac{g(u_n)}{e^{u_n} + 2} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{g(u_n)}{e^{u_n} + 2}$$

$$u_n < \alpha \xrightarrow[\text{حسب I.3}]{} g(u_n) > 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow \text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة}$$

بما أنّ المتتالية $(u_n)$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\alpha$ ، فهي إذن متقاربة نرمز بـ $l$ إلى نهاية المتتالية $(u_n)$. لدينا :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{g(u_n)}{e^{u_n} + 2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{g(l)}{e^l+2}=0 \Rightarrow g(l)=0 \Rightarrow \boxed{l=\alpha}$$

**حل التمرين 67 : بكالوريا 2012 ت ر**

**I- $Dg=\mathbb{R}$ ، $g(x)=-4+(4-2x)e^x$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} -4+(4-2x)e^x=\lim_{x\to-\infty} -4+\underbrace{4e^x}_{\to 0}-\underbrace{2xe^x}_{\to 0}=-4$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} -4+(4-2x)e^x=-\infty$$

$$g'(x)=-2e^x+(4-2x)e^x=(2-2x)e^x$$

$x<1: g'(x)>0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة ; $x\geq 1: g'(x)\leq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-4$ | ↗ | $-4+2e$ | ↘ | $-\infty$ |

**2. بيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين**

$g(0)=-4+4=0$ ; $g(1{,}59)\approx 0{,}02$ ; $g(1{,}60)\approx -0{,}04$

الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]1{,}59;1{,}60[$ و $g(1{,}59)\times g(1{,}60)<0$ ،

منه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $1{,}59<\alpha<1{,}60$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، بالإضافة إلى الحل الآخر المعدوم.

**3. استنتاج إشارة $g(x)$**

$x\in ]-\infty;0[\cup]\alpha;+\infty[ : g(x)<0$ ; $x\in[0;\alpha] : g(x)\geq 0$

**II- $f$ هي الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\frac{2x-2}{e^x-2x}$**

**1. بيان أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتهما على الترتيب $y=-1$ و $y=0$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-2}{e^x-2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-2\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(2-\frac{2}{x}\right)}{\left(\frac{e^x}{x}-2\right)} \begin{matrix}\to 2\\ \to -2\end{matrix} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x-2}{e^x-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-2\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(2-\frac{2}{x}\right)}{\left(\frac{e^x}{x}-2\right)} \begin{matrix}\to 2\\ \to +\infty\end{matrix} = 0$$

**2. أ. برهان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$**

$$f'(x) = \frac{2(e^x-2x)-(2x-2)(e^x-2)}{(e^x-2x)^2} = \frac{4e^x-2xe^x-4}{(e^x-2x)^2}$$

$$= \frac{(4-2x)e^x-4}{(e^x-2x)^2} = \boxed{\frac{g(x)}{(e^x-2x)^2}}$$

**ب. استنتاج إشارة $f'(x)$**

$x \in ]-\infty;0[ \cup ]\alpha;+\infty[ : g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

$x \in [0;\alpha] : g(x) \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$

**جدول تغير الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $0$ |

**ج. حساب $f(1)$ ، ثمّ استنتاج حسب قيم $x$ إشارة $f(x)$**

$f(1) = 0\ ;\ x < 1 \Rightarrow f(x) < 0\ ; x > 1 \Rightarrow f(x) > 0$

**3. أ. بيان أنّ $f(\alpha) = -1 + \frac{1}{\alpha-1}$**

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow -4 + (4-2\alpha)e^\alpha = 0 \Rightarrow e^\alpha = \frac{4}{4-2\alpha}$$

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha-2}{e^\alpha-2\alpha} = \frac{2\alpha-2}{\frac{4}{4-2\alpha}-2\alpha} = \frac{(2\alpha-2)(4-2\alpha)}{4\alpha^2-8\alpha+4} = \frac{4(\alpha-1)(2-\alpha)}{4(\alpha-1)^2}$$

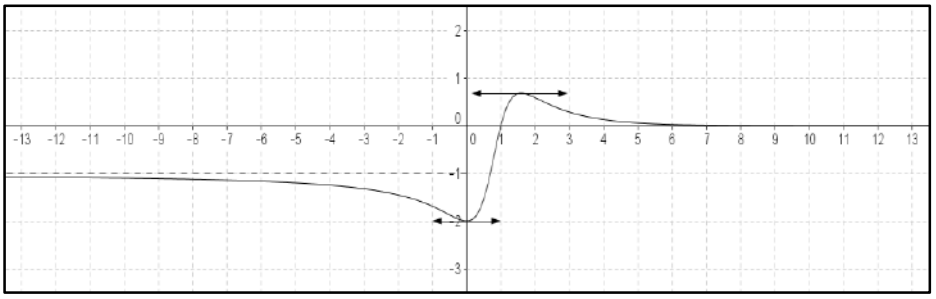
$$f(\alpha) = \frac{2-\alpha}{\alpha-1} = \frac{-(\alpha-1)+1}{\alpha-1} = \boxed{-1+\frac{1}{\alpha-1}}$$

**ب. استنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$**

$$1{,}59 < \alpha < 1{,}60 \Rightarrow 0{,}59 < \alpha - 1 < 0{,}60 \Rightarrow \frac{1}{0{,}60} < \frac{1}{\alpha - 1} < \frac{1}{0{,}59}$$

$$\Rightarrow -1 + \frac{1}{0{,}60} < -1 + \frac{1}{\alpha - 1} < -1 + \frac{1}{0{,}59} \Rightarrow \boxed{0{,}67 < f(\alpha) < 0{,}69}$$

**ج. رسم $(\mathscr{C}_f)$**



**4. المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة: $2x - 2 = (e^x - 2x)(m + 1)$**

$$2x - 2 = (e^x - 2x)(m + 1) \Rightarrow m + 1 = \frac{2x - 2}{e^x - 2x} \Rightarrow m + 1 = f(x)$$

- $m + 1 < -2 \Rightarrow m < -3$ : المعادلة لا تقبل حلا
- $m + 1 = -2 \Rightarrow m = -3$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا معدوما
- $-2 < m + 1 < -1 \Rightarrow -3 < m < -2$ : المعادلة تقبل حلين مختلفين في الإشارة
- $-1 \leq m + 1 \leq 0 \Rightarrow -2 \leq m \leq -1$ : المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا
- $0 < m + 1 < f(\alpha) \Rightarrow -1 < m < f(\alpha) - 1$ : المعادلة تقبل حلين موجبين
- $m + 1 = f(\alpha) \Rightarrow m = f(\alpha) - 1$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا موجبا
- $m + 1 > f(\alpha) \Rightarrow m > f(\alpha) - 1$ : المعادلة لا تقبل حلا

**5. $h(x) = [f(x)]^2$**

**أ. حساب $h'(x)$ بدلالة كل من $f'(x)$ و $f(x)$**

$$h'(x) = 2f(x) \times f'(x)$$

**استنتاج إشارة $h'(x)$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**جدول تغيرات الدالة $h$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(x)$ | $1$ | ↗ | $4$ | ↘ | $0$ | ↗ | $h(\alpha)$ | ↘ | $0$ |

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = 1$
- $f(0) = -2 \Rightarrow h(0) = 4$
- $f(1) = 0 \Rightarrow h(1) = 0$
- $0{,}67 < f(\alpha) < 0{,}69 \Rightarrow 0{,}45 < h(\alpha) < 0{,}48$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 0$

**حل التمرين 68 : بكالوريا 2012 ع ت**

**I- لتكن $g$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 1 - xe^x$**

**1. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 - xe^x = \boxed{1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 - xe^x = \boxed{-\infty}$$

**2. دراسة اتجاه تغير الدالة $g$**

$$g'(x) = -e^x - xe^x = \boxed{(-x-1)e^x}$$

$x < -1 \Rightarrow -x - 1 > 0 \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

$x \geq -1 \Rightarrow -x - 1 \leq 0 \Rightarrow g'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $1$ | ↗ | $1+e^{-1}$ | ↘ | $-\infty$ |

**3. أ. بيان أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]-1;+\infty[$**

الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]-1;+\infty[$ ، $g(-1)=1+e^{-1}$ ،

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ ، منه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيد $\alpha$ على المجال $]-1;+\infty[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**ب. التحقق أنّ $0,5<\alpha<0,6$**

$f(0,5)\approx 0,2; f(0,6)\approx -0,1; f(0,5)\times f(0,6)<0 \Rightarrow 0,5<\alpha<0,6$

**استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$**

$x<\alpha \Rightarrow g(x)>0\ ;\ x>\alpha \Rightarrow g(x)<0\ ;\ g(\alpha)=0$

**II- $f(x)=(x-1)e^x-x-1$ ، $Df=]-\infty;2]$**

**1. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$**

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x-x-1=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x-e^x-x-1=+\infty$

**2. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-\infty;2]$ فإنّ : $f'(x)=-g(x)$**

$f'(x)=e^x+(x-1)e^x-1=xe^x-1=-(1-xe^x)=-g(x)$

**استنتاج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$**

$x\in]-\infty;\alpha]: g(x)>0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x\in[\alpha;2]: g(x)\leq 0 \Rightarrow f'(x)\geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $e^2-3$ |

**3. بيان أنّ $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$ واستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$**

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow 1 - \alpha e^{\alpha} = 0 \Rightarrow e^{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

$$f(\alpha) = (\alpha - 1)e^{\alpha} - \alpha - 1 = \frac{\alpha - 1}{\alpha} - \alpha - 1 = \frac{\alpha - 1 - \alpha(\alpha + 1)}{\alpha}$$

$$\boxed{f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}}$$

$$0{,}5 < \alpha < 0{,}6 \Rightarrow \begin{cases} 1{,}25 < \alpha^2 + 1 < 1{,}36 \\ 1{,}67 < \frac{1}{\alpha} < 2 \end{cases} \Rightarrow 2{,}09 < \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} < 2{,}72$$

$$\Rightarrow \boxed{-2{,}72 < f(\alpha) < -2{,}09}$$

**4. أ. بيان أنّ $(\Delta): y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل لـ ($\mathscr{C}_f$) بجوار $-\infty$**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (-x - 1) = \lim_{x \to -\infty} (x - 1)e^x = \lim_{x \to -\infty} xe^x - e^x = 0$$

منه، المستقيم $(\Delta): y = -x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل لـ ($\mathscr{C}_f$) بجوار $-\infty$

**ب. دراسة وضعية المنحنى ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة إلى $(\Delta)$**

$$f(x) - (-x - 1) = (x - 1)e^x$$

من أجل $x < 1$ ، $f(x) - (-x - 1) < 0$ منه ($\mathscr{C}_f$) تحت $(\Delta)$

من أجل $x > 1$ ، $f(x) - (-x - 1) > 0$ منه ($\mathscr{C}_f$) فوق $(\Delta)$

يتقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) والمستقيم $(\Delta)$ عند النقطة $(-2; -1)$

**5. أ. بيان أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين $x_1$ و $x_2$ حيث :**

**$-1{,}6 < x_1 < -1{,}5$ و $1{,}5 < x_2 < 1{,}6$**

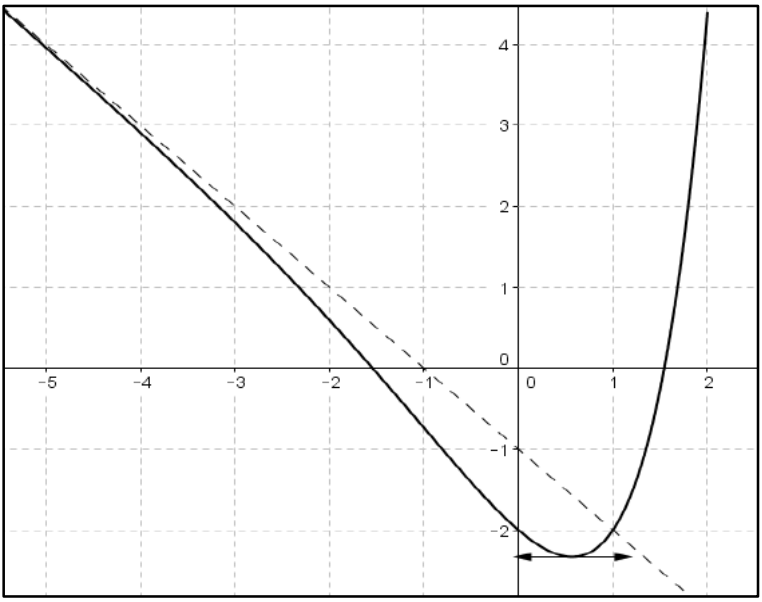
$f(-1{,}6) \approx 0{,}08 \; ; f(-1{,}5) \approx -0{,}06 \; ; f(1{,}6) \approx 0{,}37 \; ; f(1{,}5) \approx -0{,}26$

الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على كل من المجالين $]-1{,}5 ; -1{,}6[$ و $]1{,}5 ; 1{,}6[$ ،

$f(-1{,}5) \times f(-1{,}6) < 0$ ، كما أنّ $f(1{,}5) \times f(1{,}6) < 0$ ، منه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين $x_1$ و $x_2$ حيث $-1{,}6 < x_1 < -1{,}5$ و $1{,}5 < x_2 < 1{,}6$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**ب. انشاء $(\Delta)$ و ($\mathscr{C}_f$)**




**6.** $h(x) = (ax + b)e^x$

**أ. تعيين $a$ و $b$ بحيث تكون $h$ دالة أصلية للدالة $x \to xe^x$ على $\mathbb{R}$**

$$h'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$$

$$h(x) = \int xe^x\,dx \Rightarrow h'(x) = xe^x \Rightarrow ax + a + b = x \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{h(x) = (x - 1)e^x}$$

**ب. استنتاج دالة أصلية للدالة $g$ على $\mathbb{R}$**

$$G(x) = \int g(x)\,dx = \int (1 - xe^x)\,dx = \boxed{x - (x - 1)e^x}$$

**حل التمرين 69 : بكالوريا 2013 ر**

**I- الدالة $g$ معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + (x^2 - 1)e^{-x}$**

**1. أ. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 + (x^2 - 1)e^{-x} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + (x^2 - 1)e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \underbrace{x^2e^{-x}}_{\to 0} - e^{-x} = \boxed{1}$$

**ب. دراسة اتجاه تغير الدالة $g$**

$g'(x) = 2xe^{-x} - (x^2 - 1)e^{-x} = \boxed{(-x^2 + 2x + 1)e^{-x}}$

بما أنّ $e^{-x} > 0$ ، فإنّ إشارة $g'(x)$ من إشارة $-x^2 + 2x + 1$

$-x^2 + 2x + 1 = 0$ ; $\Delta' = 2$ ; $x' = 1 - \sqrt{2}$ ; $x'' = 1 + \sqrt{2}$

$x \in ]-\infty ; 1 - \sqrt{2}[ \cup ]1 + \sqrt{2} ; +\infty[ : g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

$x \in [1 - \sqrt{2} ; 1 + \sqrt{2}] : g'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $1-\sqrt{2}$ | | $1+\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-0,25$ | ↗ | $1,43$ | ↘ | $1$ |

**2. أ. بيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$**

نلاحظ من جدول التغيّرات أنّ الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجالين $]-\infty ; 1 - \sqrt{2}[$ وتغيّر إشارتها مرتين على هذين المجال ، منه نستنتج أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$

**التحقق أنّ أحد الحلين معدوم والآخر $\alpha$ حيث : $-0,8 < \alpha < -0,7$**

$g(0) = 0$ ، $g(-0,8) \approx 0,2$ ، $g(-0,7) \approx -0,03$

$g(-0,8) \times g(-0,7) < 0 \Rightarrow -0,8 < \alpha < -0,7$

**ب. استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي $x$**

$x \in ]-\infty ; \alpha[ \cup ]0 ; +\infty[ : g(x) > 0$

$x \in [\alpha ; 0] : g(x) \leq 0$

**II- $Df = \mathbb{R}$ ، $f(x) = x - (x+1)^2 e^{-x}$**

**1. أ. حساب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x - \underbrace{(x+1)^2 e^{-x}}_{\to +\infty} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x - (x+1)^2 e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} x - x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - e^{-x} = +\infty$$

**ب. بيان أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = x$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند $+\infty$**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} -(x+1)^2 e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - e^{-x} = 0$$

منه، المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = x$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند $+\infty$

**ج. دراسة وضعية ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة إلى المستقيم ($\Delta$)**

$f(x) - x = -(x+1)^2 e^{-x}$

بما أنّ $f(x) - x \leq 0$ ، فإنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) تحت ($\Delta$) ، ويتماسّان عند النقطة $(-1;-1)$

**2. أ. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x) = g(x)$**

$f'(x) = 1 - 2(x+1)e^{-x} + (x+1)^2 e^{-x} = 1 + (x^2-1)e^{-x} = g(x)$

**ب. جدول تغيرات الدالة $f$ على $\mathbb{R}$**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

**3. أ. بيان أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مماسين ، معامل توجيه كل منهما يساوي 1**

$f'(x) = 1 \Rightarrow 1 + (x^2-1)e^{-x} = 1 \Rightarrow (x^2-1)e^{-x} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$

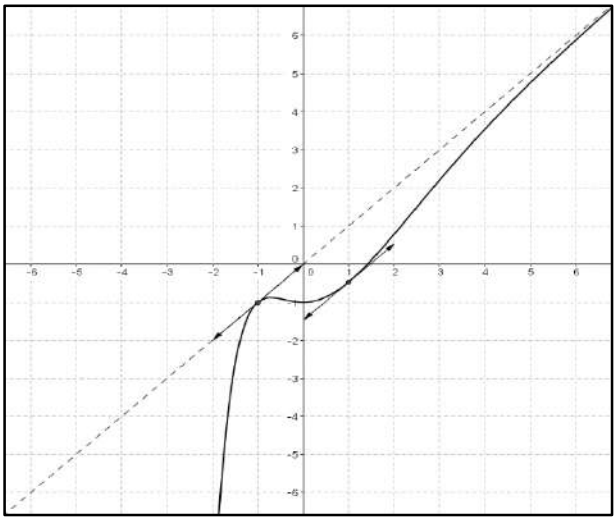
$\Rightarrow x_1 = -1 \; ; \; x_2 = 1$

منه، يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مماسين معامل توجيه كل منهما يساوي 1 وهما :

$(T_1): y = x + 1 + f(-1) = x$

$(T_2): y = x - 1 + f(1) = x - \frac{4}{e}$

**ب. تمثيل ($\Delta$) ، المماسين والمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**



**ج. المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة: $(x+1)^2 + me^x = 0$**

$(x+1)^2 + me^x = 0 \Rightarrow me^x = -(x+1)^2 \Rightarrow m = -(x+1)^2 e^{-x}$

$\Rightarrow x + m = x - (x+1)^2 e^{-x} \Rightarrow x + m = f(x)$

ندرس تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيمات $(D_m): y = x + m$ الموازية للمستقيم $(\Delta)$

- $m \in \left]-\infty; -\frac{4}{e}\right[$ : المعادلة تقبل حلا وحيدا
- $m = -\frac{4}{e}$ : المعادلة تقبل حلين أحدهما مضاعف
- $m \in \left]-\frac{4}{e}; 0\right[$ : المعادلة تقبل ثلاثة حلول
- $m = 0$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا
- $m \in ]0; +\infty[$ : المعادلة لا تقبل حلا.

**4. $H(x) = (-x^2 - 4x - 5)e^{-x}$**

**أ. بيان أنّ $H$ دالة أصلية للدالة : $x \to (x+1)^2 e^{-x}$ على $\mathbb{R}$**

$H'(x) = (-2x-4)e^{-x} - (-x^2 - 4x - 5)e^{-x} = (x^2 + 2x + 1)e^{-x}$

$H'(x) = (x+1)^2 e^{-x} \Rightarrow \boxed{H(x) = \int (x+1)^2 e^{-x}\, dx}$

**ب. حساب المساحة**

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} [x - f(x)]\, dx = \int_{-1}^{0} (x+1)^2 e^{-x}\, dx = H(0) - H(-1)$$

$$= (-5 + 2e)ua = 4(-5 + 2e)\, cm^2 = \boxed{(8e - 20)\, cm^2}$$

**III) $u_{n+1} = f(u_n)$ ، $u_0 = \alpha$**

**1. برهان بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $-1 \le u_n \le \alpha$**

تحقيق التراجع : $-1 \le u_0 \le \alpha$ (محققة لأنّ $u_0 = \alpha$)

فرض التراجع : نفرض أنّ $-1 \le u_n \le \alpha$

برهان التراجع : نبرهن أنّ $-1 \le u_{n+1} \le \alpha$

$$-1 \le u_n \le \alpha \xrightarrow[\text{لأنّ } f \text{ متزايدة على } [-1;\alpha]]{} \underbrace{f(-1)}_{-1} \le \underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}} \le \underbrace{f(\alpha)}_{\alpha} \Rightarrow -1 \le u_{n+1} \le \alpha$$

منه، نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $-1 \le u_n \le \alpha$

**2. بيان أنّ المتتالية $(u_n)$ متناقصة**

$$-1 \le u_n \le \alpha \xrightarrow[\text{حسب I.1ج}]{} f(u_n) \le u_n \Rightarrow u_{n+1} - u_n \le 0 \Rightarrow \boxed{(u_n) \text{ متناقصة}}$$

**3. استنتج أنّ المتتالية $(u_n)$ متقاربة وحساب نهايتها**

بما أنّ المتتالية $(u_n)$ متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 1- ، فهي إذن متقاربة

نرمز بـ $l$ إلى نهاية المتتالية $(u_n)$. لدينا :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l \Rightarrow f(l) = l \xrightarrow[\text{حسب II.1ج}]{} \boxed{l = -1}$$

**حل التمرين 70 : بكالوريا 2013 ت ر**

**I- الدالة $g$ معرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = (x-1)e^x$**

1. **دراسة تغيرات $g$**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-1)e^x = \lim_{x\to-\infty} xe^x - e^x = \boxed{0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-1)e^x = \boxed{+\infty}$$

$g'(x) = e^x + (x-1)e^x = xe^x$

$x < 0 : g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

$x \geq 0 : g'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

2. **بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $1 + (x-1)e^x \geq 0$**

نلاحظ من جدول التغيرات أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $g(x) \geq -1$ ، أي :

$(x-1)e^x \geq -1$ ، منه $1 + (x-1)e^x \geq 0$

**II-** $Df = ]0;+\infty[$ ، $\begin{cases} f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \\ f(0) = 1 \end{cases}$

1. **أ. بيان أنّ $f$ مستمرة على $]0;+\infty[$**

الدالة $f$ هي حاصل قسمة دالتين مستمرتين على $]0;+\infty[$ ، فهي إذن مستمرة على $]0;+\infty[$

ب. **حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} = \boxed{+\infty}$$

**2. أ. التحقّق أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]0;+\infty[$ : $f'(x) = \frac{1+(x-1)e^x}{x^2}$**

$$f'(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \boxed{\frac{1 + (x-1)e^x}{x^2}}$$

**ب. استنتاج اتجاه تغيّر الدالة $f$**

بما أنّ $1 + (x-1)e^x \geq 0$ ، فإنّ $f'(x) \geq 0$ ، منه الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ ↗ | $+\infty$ |

**III- $n \geq 1$ ، $Df = ]0;+\infty[$ ، $f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + n\ln x$**

**1. دراسة اتجاه تغير الدالة $f_n$ على $]0;+\infty[$**

$$f'_n(x) = \frac{1 + (x-1)e^x}{x^2} + \frac{n}{x} = \frac{nx + 1 + (x-1)e^x}{x^2}$$

بما أنّ $1 + (x-1)e^x \geq 0$ و $nx > 0$ ، فإنّ $f'_n(x) \geq 0$ ، منه الدالة $f_n$ متزايدة

**2. حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$**

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f_n(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\to 1} + n\ln x = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\to+\infty} + n\ln x = \boxed{+\infty}$$

**3. دراسة الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_n)$ و $(\mathscr{C}_{n+1})$**

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{e^x - 1}{x} + (n+1)\ln x - \frac{e^x - 1}{x} - n\ln x = \ln x$$

من أجل $x \in ]0;1[ : f_{n+1}(x) - f_n(x) < 0$ ، منه $(\mathscr{C}_n)$ فوق $(\mathscr{C}_{n+1})$

من أجل $x \in ]1;+\infty[ : f_{n+1}(x) - f_n(x) > 0$ ، منه $(\mathscr{C}_n)$ تحت $(\mathscr{C}_{n+1})$

يتقاطع المنحنيان $(\mathscr{C}_n)$ و $(\mathscr{C}_{n+1})$ في النقطة $(1;e-1)$

**4. بيان أنّ جميع المنحنيات تمرّ من نقطة ثابتة $B$ يُطلب تعيين إحداثيتيها**

بما أنّ المنحنيين $(\mathscr{C}_n)$ و $(\mathscr{C}_{n+1})$ يتقاطعان في النقطة $(1;e-1)$ ، نستنتج أنّ جميع المنحنيات تمرّ من نقطة ثابتة $B(1;e-1)$

**5. أ. بيان أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_1$ من $]0,3;0,4[$ بحيث $f_1(\alpha_1)=0$**

$f_1(0,3)\approx -0,04$ ، $f_1(0,4)\approx 0,3$. الدالة $f_1$ مستمرة ورتيبة على المجال $]0,3;0,4[$ و $f_1(0,3)\times f_1(0,4)<0$ ، منه المعادلة $f_1(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha_1$ على المجال $]0,3;0,4[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**ب. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n\geq 1$ فإنّ : $f_n(\alpha_1)<0$**

لدينا $\alpha_1\in ]0,3;0,4[$ ، منه $f_n(\alpha_1)<f_1(\alpha_1)$ (حسب السؤال 3) ، نستنتج إذا أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n\geq 1$ فإنّ : $f_n(\alpha_1)<0$

برهان أنّه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha_n$ من $]\alpha_1;1[$ بحيث $f_n(\alpha_n)=0$

$f_n(1)=e-1$. الدالة $f_n$ مستمرة ورتيبة على المجال $]\alpha_1;1[$ ، $f_n(\alpha_1)\times f_n(1)<0$ ، منه المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha_n$ على المجال $]\alpha_1;1[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**6. أ. بيان أنّه من أجل كل $x$ من $[0;1]$ : $\frac{e^x-1}{x}\leq e-1$**

بما أنّ الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $[0;1]$ ، فإنّ :

$$x\leq 1\Rightarrow f(x)\leq f(1)\Rightarrow \boxed{\frac{e^x-1}{x}\leq e-1}$$

**ب. استنتاج أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ حيث $n\geq 1$ : $\ln(\alpha_n)\geq \frac{1-e}{n}$**

$$f_n(\alpha_n)=0\Rightarrow \frac{e^{\alpha_n}-1}{\alpha_n}+n\ln\alpha_n=0\Rightarrow n\ln\alpha_n=-\frac{e^{\alpha_n}-1}{\alpha_n}$$

$$\Rightarrow n\ln\alpha_n\geq -(e-1)\Rightarrow \boxed{\ln(\alpha_n)\geq \frac{1-e}{n}}$$

**استنتاج أنّ : $\alpha_n\geq e^{\frac{1-e}{n}}$**

$$\ln(\alpha_n)\geq \frac{1-e}{n}\Rightarrow \boxed{\alpha_n\geq e^{\frac{1-e}{n}}}$$

**جـ. حساب نهاية المتتالية $(\alpha_n)$**

لدينا : $e^{\frac{1-e}{n}}\leq \alpha_n\leq 1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{\frac{1-e}{n}}=1$ ، ومنه $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1}$

**حل التمرين 71 : بكالوريا 2013 ع ت**

**I- $Df=]-\infty;1[$ ، $f(x)=\frac{x}{x-1}+e^{\frac{1}{x-1}}$**

1. **حساب** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **و** $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)$ **، واستنتاج المستقيمين المقاربين للمنحنى** $(\mathscr{C})$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{x}{x-1}}_{\to 1} + \underbrace{e^{\frac{1}{x-1}}}_{\to 1} = 2$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} \underbrace{\frac{x}{x-1}}_{\to -\infty} + \underbrace{e^{\frac{1}{x-1}}}_{\to 0} = -\infty$$

منه ، نستنتج أنّ للمنحنى $(\mathscr{C})$ مستقيمين مقاربين هما : $(\Delta): x = 1$ و $(\Delta'): y = 2$

2. **حساب** $f'(x)$ **وبيان أنّ الدالة** $f$ **متناقصة تماما على المجال** $]-\infty; 1[$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}} = -\frac{1}{(x-1)^2}\left(1 + e^{\frac{1}{x-1}}\right)$$

من أجل كل $x \in Df$ ، $f'(x) < 0$ ، منه الدالة $f$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 1[$

**جدول تغيرات الدالة** $f$ **:**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $2$ | ↘ | $-\infty$ |

3. **بيان أنّ المعادلة** $f(x) = 0$ **تقبل في** $]-\infty; 1[$ **حلا وحيدا** $\alpha$

الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على المجال $]-\infty; 1[$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \times \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) < 0$ ،

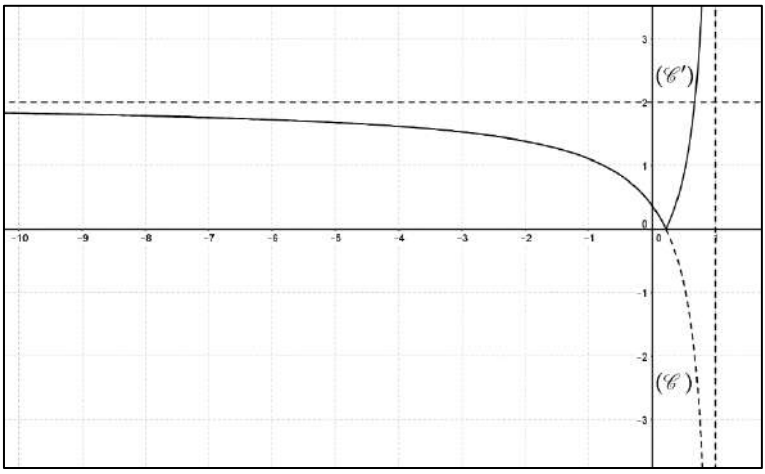
منه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]-\infty; 1[$ حلا وحيدا $\alpha$.

باستعمال جدول القيم نجد : $0{,}21 < \alpha < 0{,}22$.

4. **رسم المستقيمين المقاربين والمنحنيين** $(\mathscr{C})$ **و** $(\mathscr{C}')$ **الممثل للدالة** $|f|$

من أجل $x \in ]-\infty; \alpha]$ ، لدينا : $f(x) \geq 0$ ، أي $|f(x)| = f(x)$ ، منه يكون المنحنيان $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ متطابقان

من أجل $x \in ]\alpha; 1[$ ، لدينا : $f(x) < 0$ ، أي $|f(x)| = -f(x)$ ، منه يكون المنحنيان $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ متناظران بالنسبة إلى محور الفواصل




**5. تعيين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية $m$ التي من أجلها يكون للمعادلة: $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة**

مجموعة قيم الأعداد الحقيقية $m$ التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)| = m$ حلان مختلفان في الإشارة هي $]0; e^{-1}[$ ، أي المجال $]f(0); 2[$ (على المجال $]e^{-1}; 2[$. المعادلة $|f(x)| = m$ تقبل حلين موجبين).

**II- $g(x) = f(2x-1)$ ، $Dg = ]-\infty; 1[$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $g$ على $]-\infty; 1[$**

بما أنّ الدالة $g$ هي مركبة الدالة $f$ والدالة $h(x) = 2x - 1$ القابلتين للاشتقاق على $]-\infty; 1[$ ، فهي إذن قابلة للاشتقاق على $]-\infty; 1[$ ، ودالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = f'oh(x) \times h'(x) = 2f'(2x-1)$$

الدالة $g$ متناقصة $\Rightarrow g'(x) < 0 \Rightarrow f'(2x-1) < 0 \Rightarrow 2x - 1 < 1 \Rightarrow x < 1$

**جدول تغيرات الدالة $g$ :**

| $x$ | $-\infty$ $\quad$ $1$ |
|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ |
| $g(x)$ | $2 \searrow -\infty$ |

**2. أ. التحقق من أنّ : $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 0$**

$$g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = f\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - 1\right) = f(\alpha) = 0$$

بيان أنّ : $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$

$$g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right) = 2f'(\alpha)$$

**ب. استنتاج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$**

$$(T): y = g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right)+g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 2f'(\alpha)\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right)}$$

**ج. التحقق أنّ : $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ ، معادلة للمستقيم (T)**

$$f(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha-1} + e^{\frac{1}{\alpha-1}} = 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{\alpha-1}} = -\frac{\alpha}{\alpha-1}$$

$$f'(\alpha) = -\frac{1}{(\alpha-1)^2}\left(1+e^{\frac{1}{\alpha-1}}\right) = -\frac{1}{(\alpha-1)^2}\left(1-\frac{\alpha}{\alpha-1}\right) = \frac{1}{(\alpha-1)^3}$$

$$y = 2f'(\alpha)\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right) = \frac{2}{(\alpha-1)^3}\left(x-\frac{\alpha+1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}}$$

**حل التمرين 72: بكالوريا 2014 ر**

**I- $Dg = \mathbb{R}$ ، $g(x) = (2-x)e^x - 1$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}(2-x)e^x - 1 = \lim_{x\to-\infty} 2e^x - xe^x - 1 = \boxed{-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(2-x)e^x - 1 = \boxed{-\infty}$$

$$g'(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$$

$x \in ]-\infty;1[ : g'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

$x \in [1;+\infty[ : g'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | ↗ | $e-1$ | ↘ | $-\infty$ |

**2. إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين $\alpha$ و$\beta$**

$g(1,9)\approx -0,3$ ، $g(1,8)\approx 0,2$ ،$g(-1,1)\approx 0,03$ ، $g(-1,2)\approx -0,04$

الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على كل من المجالين $]-1,2\ ;\ -1,1[$ و$]1,8\ ;\ 1,9[$

$g(-1,2)\times g(-1,1)<0$ و $g(1,8)\times g(1,9)<0$ ، منه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين $\alpha$ و$\beta$: $-1,2<\alpha<-1,1$ و $1,8<\beta<1,9$

**3. استنتاج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$**

$x\in\ ]-\infty;\alpha[\cup]\beta;+\infty[\ :\ g(x)<0\ ;\ x\in[\alpha;\beta]:g(x)\geq 0$

**II- $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$**

**1. حساب نهاية الدالة $f$ عند $-\infty$ وعند $+\infty$**

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{e^x-x}=\boxed{0}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(1-xe^{-x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-x}}{1-xe^{-x}}$$

$$=\lim_{X\to-\infty}\frac{1-e^X}{1+Xe^X}=\boxed{1}\ ;(X=-x)$$

**تفسير النتيجتين هندسيا:** يقبل المنحنى ($\mathscr{C}$) مستقيمين مقاربين أفقيين، الأول $(\Delta):y=0$ بجوار $-\infty$ والثاني $(\Delta'):y=1$ بجوار $+\infty$

**2. بيان أنّ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x)=\frac{g(x)}{(e^x-x)^2}$**

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)^2}{(e^x-x)^2}=\frac{(2-x)e^x-1}{(e^x-x)^2}=\frac{g(x)}{(e^x-x)^2}$$

**استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$**

$x\in\ ]-\infty;\alpha[\cup]\beta;+\infty[\ :\ g(x)<0\Rightarrow f'(x)<0$ الدالة $f$ متناقصة

$x\in[\alpha;\beta]:g(x)\geq 0\Rightarrow f'(x)\geq 0$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $\beta$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $f(\beta)$ | ↘ | $1$ |

**3. بيان أنّ : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$ واستنتاج حصر للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$**

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow (2-\alpha)e^{\alpha} - 1 = 0 \Rightarrow e^{\alpha} = \frac{1}{2-\alpha}$$

$$f(\alpha) = \frac{e^{\alpha}-1}{e^{\alpha}-\alpha} = \frac{\frac{1}{2-\alpha}-1}{\frac{1}{2-\alpha}-\alpha} = \frac{\alpha-1}{\alpha^2-2\alpha+1} = \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)^2} = \boxed{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$-1{,}2 < \alpha < -1{,}1 \Rightarrow -2{,}2 < \alpha - 1 < -2{,}1$$

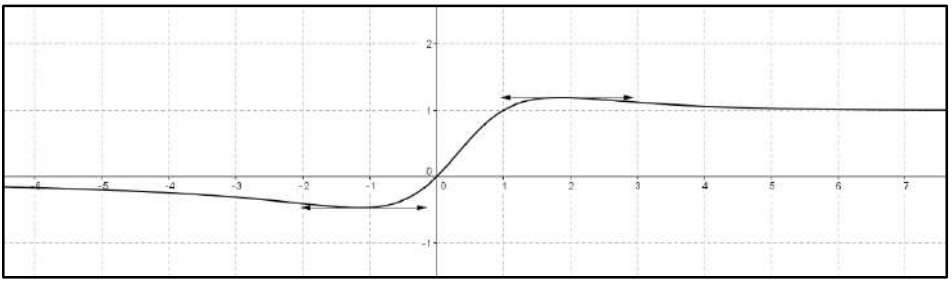
$$\Rightarrow -0{,}48 < \frac{1}{\alpha-1} < -0{,}46 \Rightarrow \boxed{-0{,}48 < f(\alpha) < -0{,}46}$$

$$1{,}8 < \beta < 1{,}9 \Rightarrow 0{,}8 < \beta - 1 < 0{,}9$$

$$\Rightarrow 1{,}1 < \frac{1}{\beta-1} < 1{,}3 \Rightarrow \boxed{1{,}1 < f(\beta) < 1{,}3}$$

**4. حساب $f(1)$ وانشاء المنحنى $(\mathcal{C})$**

$f(1) = 1$



**5. $\lambda$ عدد حقيقي أكبر أو يساوي 1**

**أ. حساب العدد $a(\lambda)$ بدلالة $\lambda$**

$$a(\lambda) = \int_1^{\lambda} [f(x)-1]\,dx = \int_1^{\lambda} \left[\frac{e^x-1}{e^x-x} - 1\right] dx = \left[\ln\left|\underbrace{e^x - x}_{>0}\right| - x\right]_1^{\lambda}$$

$$= [\ln(e^x - x) - x]_1^{\lambda} = \boxed{\ln(e^{\lambda} - \lambda) - \lambda - \ln(e-1) + 1}$$

**ب. حساب نهاية $a(\lambda)$ عندما يؤول $\lambda$ إلى $+\infty$**

$$\lim_{\lambda\to+\infty} a(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty} \ln\left(e^{\lambda}-\lambda\right) - \lambda - \ln(e-1) + 1$$
$$= \lim_{\lambda\to+\infty} \ln\left[e^{\lambda}(1-\lambda e^{-\lambda})\right] - \lambda - \ln(e-1) + 1$$
$$= \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda + \ln(1-\lambda e^{-\lambda}) - \lambda - \ln(e-1) + 1$$
$$= \lim_{\lambda\to+\infty} \ln(1-\underbrace{\lambda e^{-\lambda}}_{\to 0}) - \ln(e-1) + 1 = \boxed{1-\ln(e-1)}$$

**حل التمرين 73 : بكالوريا 2014 ت ر**

$Df = \mathbb{R}$ ، $f(x) = (x-1)e^{x}$

**1. تعيين نهاية $f$ عند كل من $-\infty$ و$+\infty$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-1)e^{x} = \lim_{x\to-\infty} xe^{x} - e^{x} = \boxed{0}$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-1)e^{x} = \boxed{+\infty}$$

**2. دراسة اتجاه تغير الدالة $f$ على $\mathbb{R}$**

$f'(x) = e^{x} + (x-1)e^{x} = \boxed{xe^{x}}$

$x < 0 : f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

$x \geq 0 : f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

**3. أ. بيان أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على $\mathbb{R}$**

من أجل $x \in ]-\infty;0]$ ، $-1 < f(x) < 0$ ، منه المعادلة $f(x) = 1$ لا تقبل حلولا على المجال $]-\infty;0]$ ، ومن أجل $x \in [0;+\infty[$ ، $f(x) \in [-1;+\infty[$ الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على $[0;+\infty[$ و $]-1;+\infty[$ ، $1 \in ]-1;+\infty[$ منه تقبل المعادلة $f(x) = 0$ حلا وحيدا $\alpha$ على $\mathbb{R}$

**التحقق أنّ $1,27 < \alpha < 1,28$**

$$\begin{cases} f(1{,}27) \approx 0{,}96 \\ f(1{,}28) \approx 1{,}01 \\ f(1{,}27) < 1 < f(1{,}28) \end{cases} \Rightarrow \boxed{1{,}27 < \alpha < 1{,}28}$$

**ب. كتابة معادلة لـ $(T)$ مماس المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1**

$y = f'(1)(x-1) + f(1) = e(x-1) \Rightarrow \boxed{(T): y = ex - e}$

**تحديد وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى $(T)$**

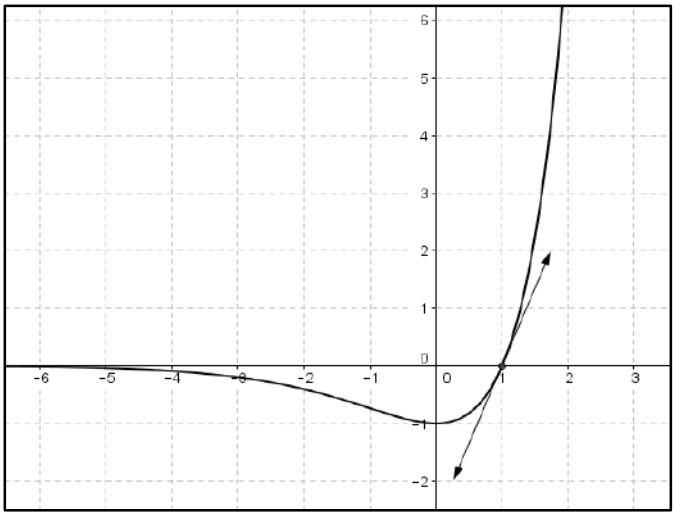
$f(x) - e(x-1) = (x-1)(e^x - e)$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ ; $e^x - e = 0 \Rightarrow e^x = e \Rightarrow x = 1$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $e^x-e$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(x-1)(e^x-e)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | |

بما أنّ $f(x) - e(x-1) \geq 0$ ، فإنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يكون فوق المماس $(T)$ ويتماسّان عند النقطة $(1;0)$

**جـ. رسم $(T)$ و $(\mathscr{C}_f)$**




4. **تعيين قيم العدد الحقيقي $m$ التي من أجلها تقبل المعادلة :**

$(x-1)e^x - (m-1)e^m = -1$ حلا واحدا في $\mathbb{R}$

$(x-1)e^x - (m-1)e^m = -1 \Rightarrow f(x) - f(m) = -1 \Rightarrow f(x) = f(m) - 1$

نلاحظ من المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ أنّ المعادلة $f(x) = f(m) - 1$ تقبل حلا واحدا إذا كان :
$f(m) - 1 = -1$ أو $f(m) - 1 \geq 0$ ، منه $f(m) = 0$ أو $f(m) \geq 1$ ، أي
$m = 1$ أو $m \geq \alpha$

**5.** $\boldsymbol{Dh = \mathbb{R}}$ ، $\boldsymbol{h(x) = (|x| + 1)e^{-|x|}}$

**أ. بيان أنّ الدالة $h$ زوجية**

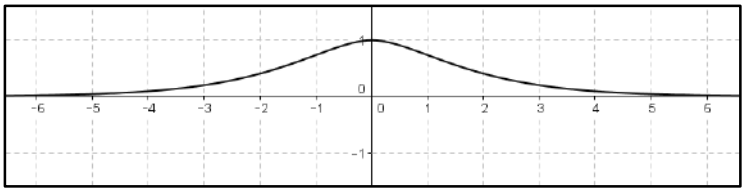
$Dh$ متناظر بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا :

$$h(-x) = (|-x| + 1)e^{-|-x|} = (|x| + 1)e^{-|x|} = h(x)$$

منه، الدالة $h$ زوجية

**ب. رسم $(\mathscr{C}_h)$ مستعينا بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$**

من أجل $x \leq 0$ ، لدينا $h(x) = (-x + 1)e^x = -f(x)$ ، منه $(\mathscr{C}_h)$ نظير $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى محور الفواصل على المجال $]-\infty; 0]$ ، ونكمل الرسم على المجال $]0; +\infty[$ بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لأنّ الدالة $h$ زوجية




**6.** $\boldsymbol{Dg = \mathbb{R}}$ ، $\boldsymbol{g(x) = (ax + b)e^x}$

تعيين $a$ ، $b$ حتى يكون من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $g'(x) = f(x)$

$$g'(x) = ae^x + (ax + b)e^x = (ax + a + b)e^x$$

$$g'(x) = f(x) \Rightarrow (ax + a + b)e^x = (x - 1)e^x \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a + b = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{g(x) = (x - 2)e^x}$$

**تمرين 74 : بكالوريا 2011 ر**

$\boldsymbol{D_f = \mathbb{R}}$ ، $\boldsymbol{f(x) = (3x + 4)e^x}$

**1. أ. حساب $f'$ ، $f''$**

$$f'(x) = 3e^x + (3x + 4)e^x = \boxed{(3x + 7)e^x}$$

$$f''(x) = 3e^x + (3x + 7)e^x = \boxed{(3x + 10)e^x}$$

**برهان بالتراجع أنّ : $f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4)e^x$**

تحقيق التراجع: $f^{(1)}(x) = (3x + 7)e^x$ (محققة)

فرض التراجع: نفرض أنّ $f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4)e^x$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $f^{(n+1)}(x) = (3x + 3n + 7)e^x$

$$f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]' = 3e^x + (3x + 3n + 4)e^x = (3x + 3n + 7)e^x$$

منه، نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n \neq 0$ : $f^{(n)}(x) = (3x + 3n + 4)e^x$

**ب. استنتاج حل المعادلة التفاضلية $y'' = (3x + 16)e^x$**

$$y'' = (3x + 16)e^x \Rightarrow y'' = f^{(4)}(x) \Rightarrow y = f^{(2)}(x) + ax + b$$

$$\Rightarrow \boxed{y = (3x + 10)e^x + ax + b} \; ; (a; b) \in \mathbb{R}^2$$

**2. أ. بيان أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ وتفسير النتيجة هندسيا**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (3x + 4)e^x = \lim_{x\to-\infty} 3xe^x + 4e^x = \boxed{0}$$

المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا بجوار $(-\infty)$ معادلته $y = 0$ (محور الفواصل)

**ب. دراسة اتجاه تغير الدالة $f$**

$$f'(x) = (3x + 7)e^x$$

- $x < -\frac{7}{3} : f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة
- $x \geq -\frac{7}{3} : f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (3x + 4)e^x = \boxed{+\infty} \; ; f\left(-\frac{7}{3}\right) = -3e^{-\frac{7}{3}} \approx -0{,}3$$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{7}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-3e^{-\frac{7}{3}}$ | ↗ | $+\infty$ |

**3. أ. كتابة معادلة للمماس $(\Delta)$ للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في النقطة $\omega$ التي فاصلتها $-\frac{10}{3}$**

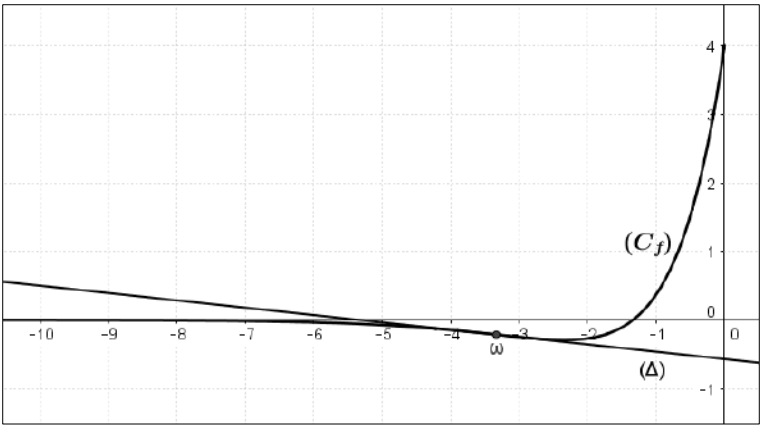
$$(\Delta): y = \underbrace{f'\left(-\frac{10}{3}\right)}_{-3e^{-\frac{10}{3}}}\left(x + \frac{10}{3}\right) + \underbrace{f\left(-\frac{10}{3}\right)}_{-6e^{-\frac{10}{3}}} \Rightarrow \boxed{y = -3e^{-\frac{10}{3}} - 16e^{-\frac{10}{3}}}$$

**ب. بيان أنّ $\omega$ هي نقطة انعطاف للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$**

$$f''(x) = 0 \Rightarrow (3x+10)e^x = 0 \Rightarrow 3x+10 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{10}{3}}$$

بما أنّ $f''(x)$ تنعدم وتغيّر إشارتها عند النقطة ذات الفاصلة $-\frac{10}{3}$ ، نستنتج أنّ $\omega$ نقطة انعطاف للمنحنى $(C_f)$

**جـ. رسم $(\Delta)$ و $(\mathscr{C}_f)$ على المجال $]-\infty; 0]$**




**4. أ. حساب $\int_{-1}^{x} te^t\,dt$**

$$\begin{cases} u(t) = t \Rightarrow u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^t \Rightarrow v(t) = e^t \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{x} te^t\,dt = [te^t]_{-1}^{x} - \int_{-1}^{x} e^t\,dt = [te^t]_{-1}^{x} - [e^t]_{-1}^{x} = [(t-1)e^t]_{-1}^{x}$$

$$= \boxed{(x-1)e^x + 2e^{-1}}$$

**استنتاج دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]-\infty; 0]$**

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (3x+4)e^x\,dx = \int 3xe^x + 4e^x\,dx$$

$$= 3(x-1)e^x + 4e^x \Rightarrow \boxed{F(x) = (3x+1)e^x}$$

**ب. حساب المساحة $A(\lambda)$**

$$A(\lambda) = -\int_{\lambda}^{-\frac{4}{3}} f(x)\,dx = F(\lambda) - F\left(-\frac{4}{3}\right) = \boxed{\left[(3\lambda+1)e^{\lambda} + 3e^{-\frac{4}{3}}\right] ua}$$

**حساب $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$**

$$\lim_{\lambda \to -\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \to -\infty} \left[(3\lambda+1)e^{\lambda} + 3e^{-\frac{4}{3}}\right] = \boxed{3e^{-\frac{4}{3}}}$$

**تمرين 75 : بكالوريا 2011 ت ر**

**I)** $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x+1}$

**1. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3 - \frac{4}{e^x+1} = \boxed{-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3 - \frac{4}{e^x+1} = \boxed{3}$$

$$f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} \; ; f'(x) > 0 \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } f \text{ متزايدة تماما على } \mathbb{R}}$$

جدول **تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | ‖ |
| $f(x)$ | $-1$ | ↗ | $3$ |

**2. تعيين المستقيمات المقاربة للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$**

يقبل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مستقيمين مقاربين أفقيين ، أحدهما معادلته $y = -1$ بجوار $-\infty$ والآخر معادلته $y = 3$ بجوار $+\infty$

**3. بيان أنّ للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ نقطة انعطاف $\omega$**

$$f''(x) = \frac{4e^x(e^x+1)^2 - 8e^{2x}(e^x+1)}{(e^x+1)^4} = \frac{4e^x(-e^x+1)}{(e^x+1)^4}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -e^x + 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

بما أنّ $f''(x)$ تنعدم وتغيّر إشارتها عند النقطة ذات الفاصلة 0 ، نستنتج أنّ $\omega(0;1)$ نقطة انعطاف المنحنى $(\mathscr{C}_f)$

**كتابة معادلة لمماس $(\mathscr{C}_f)$ عند $\omega$**

$$(T): y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow \boxed{y = x + 1}$$

**4.** $D_g = \mathbb{R}$ ، $g(x) = f(x) - x$

**أ. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = -\infty$$

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2} - 1 = \frac{4e^x - (e^x+1)^2}{(e^x+1)^2} = -\frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$$

$g'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة على $\mathbb{R}$

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $-$ | ‖ |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↘ | $-\infty$ |

**ب. بيان أنّ $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $2,7 < \alpha < 2,8$**

الدالة $g$ مستمرو ورتيبة على المجال $]2,7;2,8[$ و $g(2,8) < 0$ ، $g(2,7) \times g(2,8)$

$g(2,7) \approx 0,05$ و $g(2,8) \approx -0,03$

منه نستنتج أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $2,7 < \alpha < 2,8$

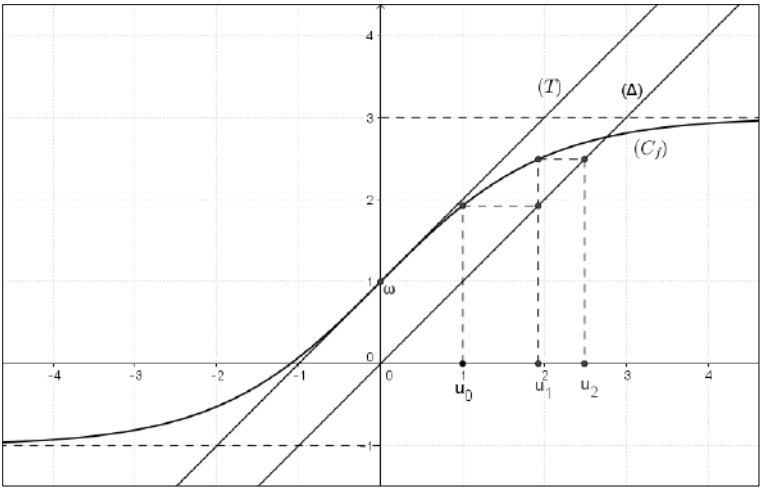
حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**5. أ. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $f(x) = 0$**

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3 - \frac{4}{e^x+1} = 0 \Rightarrow 3 = \frac{4}{e^x+1} \Rightarrow e^x + 1 = \frac{4}{3} \Rightarrow e^x = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -\ln 3}$$

**ب. رسم المماس والمستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته : $y = x$ والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$**



**II) $u_{n+1} = f(u_n)$ ، $u_0 = 1$**

**1. تمثيل $u_0$ ، $u_1$ و $u_2$ على حامل محور الفواصل**

**2. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ ، $1 \leq u_n < \alpha$**

تحقيق التراجع : $1 \leq u_0 < \alpha$ (محققة لأنّ $u_0 = 1$)

فرض التراجع : نفرض أنّ $1 \leq u_n < \alpha$

برهان التراجع : نبرهن أنّ $1 \leq u_{n+1} < \alpha$

$$1 \leq u_n < \alpha \xrightarrow[\text{لأنّ } f \text{ متزايدة على } \mathbb{R}]{} \underbrace{f(1)}_{\approx 1,9} \leq \underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}} < \underbrace{f(\alpha)}_{\alpha} \Rightarrow 1 \leq u_{n+1} < \alpha$$

منه، نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $1 \leq u_n < \alpha$

$(g(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\alpha) - \alpha = 0 \Rightarrow f(\alpha) = \alpha)$

**3. بيان أنّ المتتالية $(u_n)$ متزايدة تماما**

$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$

$$u_n < \alpha \xrightarrow[\text{لأنّ } g \text{ متناقصة}]{} g(u_n) > g(\alpha) \Rightarrow g(u_n) > 0 \Rightarrow \boxed{(u_n) \text{ متزايدة تماما}}$$

**4. استنتاج أنّ $(u_n)$ متقاربة وبيان أنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$**

بما أنّ المتتالية $(u_n)$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $\alpha$ ، فهي إذن متقاربة

نرمز بـ $l$ إلى نهاية المتتالية $(u_n)$. لدينا :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l \Rightarrow f(l) = l \Rightarrow f(l) - l = 0 \Rightarrow g(l) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{l = \alpha}$$

**تمرين 76 : بكالوريا 2015 ع ت**

**I) $D_g = \mathbb{R}$ ، $g(x) = 1 - 2x - e^{2x-2}$**

**1. دراسة اتجاه تغير الدالة $g$ على $\mathbb{R}$**

$g'(x) = -2 - 2e^{2x-2}$ ; $g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

**2. بيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $\mathbb{R}$**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 - 2x - e^{2x-2} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 - 2x - e^{2x-2} = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x} - 2 - \frac{e^{2x-2}}{x}\right) = \boxed{-\infty}$$

بما أنّ الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ ،

نستنتج أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $\mathbb{R}$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**التحقق أنّ : $0,36 < \alpha < 0,37$**

$g(0,36) \approx 0,002 \; ; g(0,37) \approx -0,024 \Rightarrow \boxed{0,36 < \alpha < 0,37}$

**3. استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$**

$x < \alpha : g(x) > 0 \; ; x > \alpha : g(x) < 0 \; ; g(\alpha) = 0$

**II) $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = xe^{2x+2} - x + 1$**

**1. أ. بيان أنّ من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $f'(x) = e^{2x+2}\, g(-x)$**

$f'(x) = e^{2x+2} + 2xe^{2x+2} - 1 = e^{2x+2}(1 + 2x - e^{-2x-2})$

$= e^{2x+2}\left(1 - 2(-x) - e^{2(-x)-2}\right) = \boxed{e^{2x+2}g(-x)}$

**ب. استنتاج أنّ $f$ متناقصة تماما على $]-\infty; -\alpha]$ ومتزايدة تماما على $[-\alpha; +\infty[$**

$x \in ]-\infty; -\alpha] \Rightarrow -x \in [\alpha; +\infty[ \Rightarrow g(-x) \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Rightarrow \boxed{f \text{ متناقصة}}$

$x \in [-\alpha; +\infty[ \Rightarrow -x \in ]-\infty; \alpha] \Rightarrow g(-x) \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow \boxed{f \text{ متزايدة}}$

**2. حساب نهاية $f$ عند $+\infty$ وعند $-\infty$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{xe^{2x+2}}_{\to 0} - x + 1 = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{2x+2} - x + 1 = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{2x+2} - 1 + \frac{1}{x}\right) = \boxed{+\infty}$$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(-\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

**3. حساب $\lim_{x\to-\infty}[f(x) + x - 1]$ وتفسير النتيجة هندسيا**

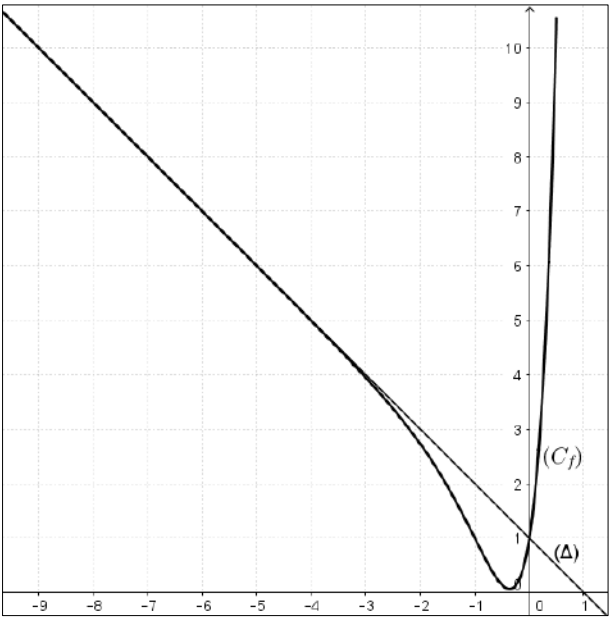
$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) + x - 1] = \lim_{x\to-\infty} xe^{2x+2} = \boxed{0}$$

نستنتج أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا بجوار $-\infty$ معادلته : $y = -x + 1$

**4. دراسة وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y = -x + 1$**

$$f(x) - y = f(x) + x - 1 = xe^{2x+2} \; ; \begin{cases} x < 0 : \; (\Delta) \text{ تحت } (\mathcal{C}_f) \\ x > 0 : \; (\Delta) \text{ فوق } (\mathcal{C}_f) \\ (\mathcal{C}_f) \cap (\Delta) = \{(0;1)\} \end{cases}$$

**5. انشاء $(\Delta)$ و $(\mathscr{C}_f)$ على المجال $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$**




**6. أ. التحقق أنّ : $2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$**

$2f(x)=2xe^{2x+2}-2x+2\,;f'(x)=(2x+1)e^{2x+2}-1\,;$

$f''(x)=2e^{2x+2}+2(2x+1)e^{2x+2}=(4x+4)e^{2x+2}$

$2f(x)+f'(x)-f''(x)$

$=2xe^{2x+2}-2x+2+(2x+1)e^{2x+2}-1-(4x+4)e^{2x+2}$

$=\boxed{1-2x-3e^{2x+2}}$

**ب. استنتاج دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$**

$2f(x)+f'(x)-f''(x)=1-2x-3e^{2x+2}$

$\Rightarrow 2f(x)=-f'(x)+f''(x)+1-2x-3e^{2x+2}$

$\Rightarrow 2F(x)=-f(x)+f'(x)+x-x^2-\frac{3}{2}e^{2x+2}$

$\Rightarrow 2F(x)=-xe^{2x+2}+x-1+(2x+1)e^{2x+2}-1+x-x^2-\frac{3}{2}e^{2x+2}$

$\Rightarrow 2F(x)=xe^{2x+2}-\frac{1}{2}e^{2x+2}-x^2+2x-2$

$\Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{1}{2}xe^{2x+2}-\frac{1}{4}e^{2x+2}-\frac{1}{2}x^2+x-1}$

**تمرين 77 : بكالوريا 2015 ر**

**$f(0)=0$ ومن أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-\infty;0[$ : $f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}}$**

**1. دراسة استمرارية الدالة $f$ عند 0 من اليسار**

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}(x-1)e^{\frac{1}{x}}=0=f(0)\Rightarrow$ الدالة $f$ مستمرة على يسار 0

**2. حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{f(x)}{x}$ وتفسير النتيجة هندسيا**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{f(x)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{X\to-\infty}\left(\frac{1}{X}-1\right)Xe^{X}=\boxed{0};\left(X=\frac{1}{x}\right)$$

يقبل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ نصف مماس موازٍ لحامل محور الفواصل عند النقطة $O$

**3. أ. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{(x-1)}_{\to-\infty}\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to 1}=\boxed{-\infty}$$

**ب. دراسة اتجاه تغير الدالة $f$**

$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^2}(x-1)e^{\frac{1}{x}}=\boxed{\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}$$

$x^2-x+1>0(\Delta<0)\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة تماما على $]-\infty;0[$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | ‖ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ |

**4. أ. بيان أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=0$**

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to-\infty}\left[(x-1)e^{\frac{1}{x}}-x\right]=\lim_{\substack{X\to 0\\ <}}\left[\left(\frac{1}{X}-1\right)e^{X}-\frac{1}{X}\right]$$

$$=\lim_{\substack{X\to 0\\ <}}\left[\frac{e^X}{X}-e^X-\frac{1}{X}\right]=\lim_{\substack{X\to 0\\ <}}\left[\underbrace{\frac{e^X-1}{X}}_{\to 1}-\underbrace{e^X}_{\to 1}\right]=\boxed{0}$$

**ب. استنتاج أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ بجوار $-\infty$ وتعيين معادلة له**

بما أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=0$ ، نستنتج أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ بجوار $-\infty$ معادلته $y=x$

**5.** $\boldsymbol{D_g=]-\infty;0[}$ ، $\boldsymbol{g(x)=\frac{f(x)}{x}}$

**أ. حساب** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)}$

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\underbrace{\frac{x-1}{x}}_{\to1}\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}_{\to1}=\boxed{1}$$

**ب. دراسة اتجاه تغير الدالة** $\boldsymbol{g}$

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x^2}=\boxed{\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}}$$

$x<0\Rightarrow g'(x)<0\Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة تماما على $]-\infty;0[$

**جدول تغيرات الدالة** $\boldsymbol{g}$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | ‖ |
| $g(x)$ | $1$ | ↘ | $0$ |

(لاحظ أنّ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}\frac{f(x)}{x}=0$ حسب السؤال 2) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}g(x)$

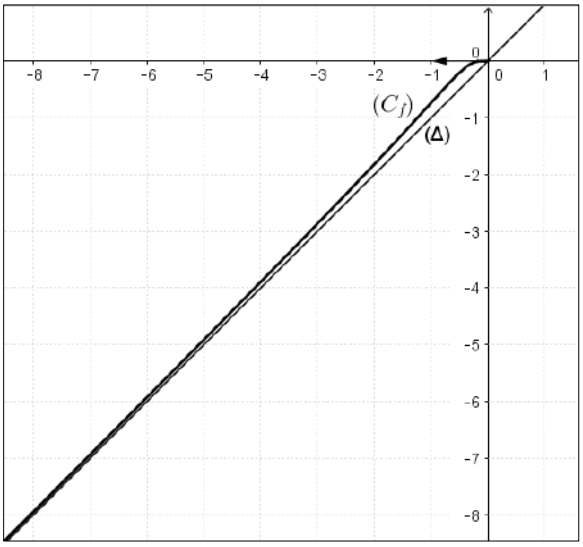
**6. أ. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $\boldsymbol{x}$ من المجال $\boldsymbol{]-\infty;0[}$ : $\boldsymbol{f(x)>x}$**

$$x\in]-\infty;0[:0<g(x)<1\Rightarrow0<\frac{f(x)}{x}<1\xrightarrow[x\text{ بالضرب في }]{}\boxed{x<f(x)<0}$$

**ب. استنتاج وضعية المنحنى** $\boldsymbol{(\mathscr{C}_f)}$ **بالنسبة إلى المستقيم** $(\Delta)$

بما أنّ $f(x)>x$ و $f(0)=0$ ، نستنتج أنّه من أجل $x<0$ ، يكون $(\mathscr{C}_f)$ فوق $(\Delta)$ ويتقاطعان في النقطة $O$

**ج. انشاء المنحنى** $\boldsymbol{(\mathscr{C}_f)}$




**7.** $\boldsymbol{u_{n+1} = f(u_n)}$ ، $\boldsymbol{u_0 = -3}$

**أ. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي $\boldsymbol{n}$ ، $\boldsymbol{u_n < 0}$**

تحقيق التراجع : $u_0 < 0$ (محققة لأنّ $u_0 = -3$)

فرض التراجع : نفرض أنّ $u_n < 0$

برهان التراجع : نبرهن أنّ $u_{n+1} < 0$

$$u_n < 0 \xRightarrow[\text{لأنّ } f \text{ متزايدة على } ]-\infty;0[]{} \underbrace{f(u_n)}_{u_{n+1}} < \underbrace{f(0)}_{0} \Rightarrow u_{n+1} < 0$$

منه، نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n < 0$

**ب. تحديد اتجاه تغيّر المتتالية $(\boldsymbol{u_n})$**

$$u_n < 0 \xRightarrow[\text{حسب 6.أ}]{} f(u_n) > u_n \Rightarrow u_{n+1} > u_n \Rightarrow \boxed{\text{المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة}}$$

**ج. بيان أنّ المتتالية $(\boldsymbol{u_n})$ متقاربة وتعيين $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n}$**

بما أنّ المتتالية $(u_n)$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد $0$ ، فهي متقاربة نرمز بـ $l$ إلى نهاية المتتالية $(u_n)$. لدينا :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = l \Rightarrow f(l) = l \xRightarrow[\text{حسب 6.ب}]{} \boxed{l = 0}$$

**8.** $\boldsymbol{D_{h_m} = ]-\infty;0[}$ ، $\boldsymbol{h_m(x) = xe^{\frac{1}{x}} - mx}$

**أ. حساب $\boldsymbol{h'_m(x)}$**

$$h'_m(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} - m = \frac{(x-1)e^{\frac{1}{x}}}{x} - m = \boxed{\frac{f(x)}{x} - m}$$

**ب. المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $h'_m(x) = 0$**

$h'_m(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x} - m = 0 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x} = m \Rightarrow f(x) = mx$

ندرس تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيم $(\Delta_m)$ ذي المعادلة $y = mx$

(مناقشة دورانية مع الأخذ بعين الاعتبار أنّ $x \neq 0$)

من أجل $m \in ]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$ المعادلة $h'_m(x) = 0$ لا تقبل حلا

من أجل $m \in ]0; 1[$ : تقبل المعادلة $h'_m(x) = 0$ حلا وحيدا.

**تمرين 78 : بكالوريا 2015 ت ر**

**I) $g(x) = (x+2)e^x - 2$ ، $D_g = \mathbb{R}$**

**1. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$**

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+2)e^x - 2 = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{(x+2)e^x}_{\to 0} - 2 = \boxed{-2}$$

**2. دراسة اتجاه تغير الدالة $g$**

$g'(x) = e^x + (x+2)e^x = \boxed{(x+3)e^x}$

- $x < -3 : g'(x) < 0 \Rightarrow ]-\infty; -3[$ الدالة $g$ متناقصة تماما على المجال
- $x \geq -3 : g'(x) \geq 0 \Rightarrow [-3; +\infty[$ الدالة $g$ متزايدة تماما على المجال

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ |
| $g(x)$ | $-2$ | ↘ | $g(-3)$ | ↗ | $+\infty$ |

$g(-3) = -e^{-3} - 2 \approx -2{,}05$

**3. حساب $g(0)$ واستنتاج إشارة $g(x)$**

$g(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x < 0 : g(x) < 0 \\ x > 0 : g(x) > 0 \end{cases}$

**II) $f(x) = 2x + 3 - (x+1)e^x$ ، $D_f = \mathbb{R}$**

**1. بيان أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2x+3-(x+1)e^x = \lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\frac{2x+3}{x+1}-e^x\right]$$
$$= \boxed{-\infty}$$

**حساب** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x+3-\underbrace{(x+1)e^x}_{\to 0} = \boxed{-\infty}$$

**2. أ. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x) = -g(x)$**

$$f'(x) = 2-e^x-(x+1)e^x = 2-(x+2)e^x = -[(x+2)e^x-2]$$
$$= \boxed{-g(x)}$$

**ب. استنتاج إشارة $f'(x)$**

الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]-\infty;0[$ $x<0 : g(x)<0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow$

الدالة $f$ متناقصة تماما على المجال $[0;+\infty[$ $x\geq 0 : g(x)\geq 0 \Rightarrow f'(x)\leq 0 \Rightarrow$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-\infty$ |

**ج. بيان أنّ المستقيم $(\Delta)$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند $-\infty$**

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(2x+3)] = \lim_{x\to-\infty} -(x+1)e^x = \boxed{0}$$

منه، نستنتج أنّ $(\Delta)$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند $-\infty$

**دراسة وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$**

$$f(x)-(2x+3) = -(x+1)e^x$$

- $x<-1 : -(x+1)e^x>0 \Rightarrow (\Delta)$ فوق $(C_f)$
- $x>-1 : -(x+1)e^x<0 \Rightarrow (\Delta)$ تحت $(C_f)$
- $x=-1 : -(x+1)e^x=0 \Rightarrow (\Delta)\cap(C_f)=\{(-1;1)\}$

**3. أ. بيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ حيث : $0,92<\alpha<0,93$ و $-1,56<\beta<-1,55$**

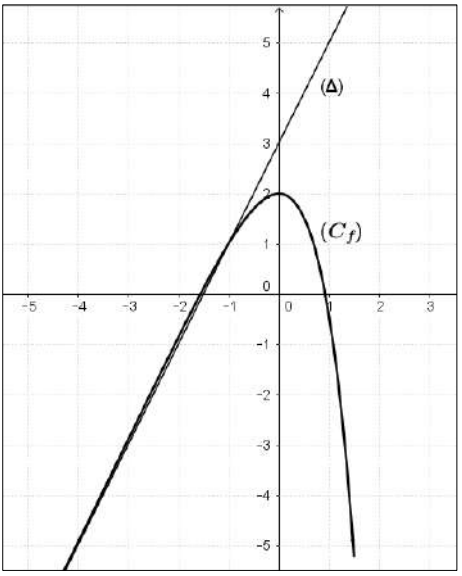
الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على كل من المجالين $]0,92;0,93[$ و $]-1,56;-1,55[$

$\underbrace{f(0,93)}_{-0,032}\times\underbrace{f(0,92)}_{0,022}<0$ و $\underbrace{f(-1,55)}_{0,017}\times\underbrace{f(-1,56)}_{-0,002}<0$ ، منه نستنتج

أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ حيث :

$0{,}92 < \alpha < 0{,}93$ و $-1{,}56 < \beta < -1{,}55$

**ب. رسم المستقيم $(\Delta)$ والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ على المجال $\left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$**




**4. أ. بيان أن الدالة $x \to xe^x$ هي دالة أصلية للدالة $x \to (x+1)e^x$ على $\mathbb{R}$**

$(xe^x)' = e^x + xe^x = (x+1)e^x \Rightarrow \boxed{\int (x+1)e^x\,dx = xe^x}$

**ب. حساب $A$**

$A = \int_0^{\alpha} [2x + 3 - f(x)]\,dx = \int_0^{\alpha} (x+1)e^x\,dx = [xe^x]_0^{\alpha} = \boxed{\alpha e^{\alpha}\ ua}$

**ج. تعيين حصر للعدد $A$**

$0{,}92 < \alpha < 0{,}93 \Rightarrow 0{,}92e^{0{,}92} < \alpha e^{\alpha} < 0{,}93e^{0{,}93} \Rightarrow \boxed{2{,}31 < A < 2{,}36}$

**تمرين 79 : بكالوريا 2016 ع ت**

**I) $D_g = \mathbb{R}$ ، $g(x) = 1 + (x^2 + x - 1)e^{-x}$**

**1. أ. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$**

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \underbrace{(x^2+x-1)}_{\to+\infty}\ \underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty} = \boxed{+\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \underbrace{(x^2+x-1)e^{-x}}_{\to 0} = \boxed{1}$$

**ب. دراسة اتجاه تغير الدالة $g$**

$$g'(x) = (2x+1)e^{-x} - (x^2+x-1)e^{-x} = \boxed{(-x^2+x+2)e^{-x}}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow -x^2+x+2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1\,;\, x_2 = 2$$

- $x \in ]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[ : g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة
- $x \in [-1;2] : g'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $g(-1)$ | ↗ | $g(2)$ | ↘ | $1$ |

$$g(-1) = 1-e \approx -1{,}7\,;\, g(2) = 1+5e^{-2} \approx 1{,}7$$

**2. أ. بيان أن للمعادلة $g(x)=0$ حلين في $\mathbb{R}$ أحدهما معدوم والآخر $\alpha$ حيث : $-1{,}52 < \alpha < -1{,}51$**

لدينا : $g(0) = 0$ ؛ والدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]-1{,}52;-1{,}51[$

و $\underbrace{g(-1{,}52)}_{0{,}04} \times \underbrace{g(-1{,}51)}_{-0{,}04} < 0$ ، منه نستنتج أنّ للمعادلة $g(x)=0$ حلين في $\mathbb{R}$ أحدهما معدوم والآخر $\alpha$ حيث $-1{,}52 < \alpha < -1{,}51$ حسب م ق م.

**ب. استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$**

- $x \in ]-\infty;\alpha[\cup]0;+\infty[ : g(x) > 0$
- $x \in ]\alpha;0[ : g(x) < 0$
- $g(\alpha) = g(0) = 0$

**II) $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = -x + (x^2+3x+2)e^{-x}$**

**1. أ. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x + (x^2+3x+2)e^{-x} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x + \underbrace{(x^2+3x+2)e^{-x}}_{\to 0} = \boxed{-\infty}$$

**ب. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f'(x) = -g(x)$**

$$f'(x) = -1 + (2x+3)e^{-x} - (x^2+3x+2)e^{-x}$$
$$= -1 - (x^2+x-1)e^{-x} = \boxed{-g(x)}$$

**ج. جدول تغيرات الدالة $f$**

بما أنّ $f'(x) = -g(x)$، فإنّ إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-\infty$ |

**د. تعيين دون حساب : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ وتفسير النتيجة هندسيا**

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} = f'(\alpha) = -g(\alpha) = 0$$

نستنتج أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل عند النقطة ذات الفاصلة $\alpha$ مماسا أفقيا معادلته $y = f(\alpha)$

**2. أ. بيان أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = -x$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند $+\infty$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) + x = \lim_{x\to+\infty} (x^2+3x+2)e^{-x} = \boxed{0}$$

نستنتج أنّ $(\Delta)$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند $+\infty$

**ب. دراسة وضعية المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$**

$f(x) + x = (x^2+3x+2)e^{-x}$ ; $x^2+3x+2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = -2$

- $x \in ]-\infty;-2[ \cup ]-1;+\infty[ : f(x)+x > 0 \Rightarrow (\Delta)$ فوق $(C_f)$
- $x \in ]-2;-1[ : f(x)+x < 0 \Rightarrow (\Delta)$ تحت $(C_f)$
- $(\Delta) \cap (C_f) = \{(-2;2) ; (-1;1)\}$

**ج. بيان أنّ للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ نقطتي انعطاف يُطلب تعيين إحداثييهما**

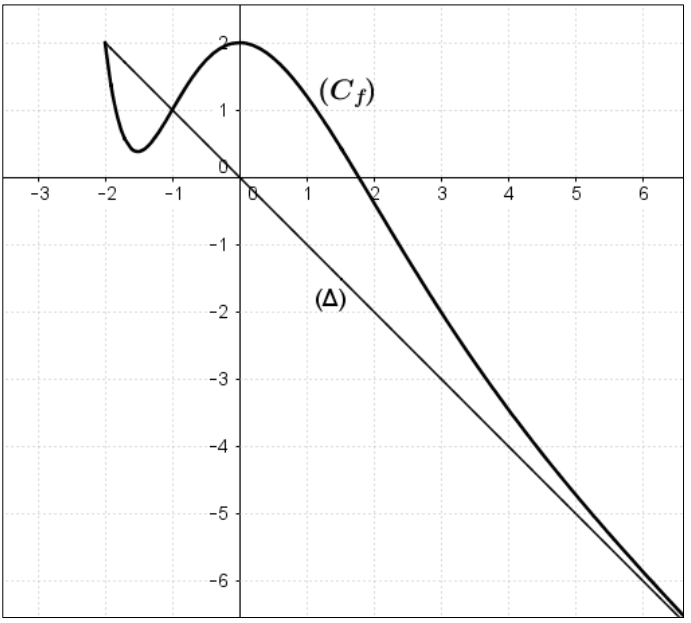
$f'(x) = -g(x) \Rightarrow f''(x) = -g'(x)$

بيّنا في السؤال 1.ب من الجزء I أنّ $g'(x)$ تنعدم عند $1-$ و $2$ وتغيّر إشارتها ،

منه نستنتج أنّ للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ نقطتي انعطاف هما :

$\omega_1(-1;1)$ و $\omega_2(2;-2+12e^{-2})$

**د. رسم $(\Delta)$ و $(\mathscr{C}_f)$ على المجال $[-2;+\infty[$**




**هـ. المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة :**

**$(m-x)e^x+(x^2+3x+2)=0$ على المجال $[-2;+\infty[$**

$(m-x)e^x+(x^2+3x+2)=0 \Rightarrow (x-m)e^x=(x^2+3x+2)$

$\Rightarrow x-m=(x^2+3x+2)e^{-x} \Rightarrow -m=f(x)$

ندرس تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيم الأفقي ذي المعادلة $y=-m$

من أجل $-m<f(\alpha)$ أي $m>-f(\alpha)$ : تقبل المعادلة حلا وحيدا موجبا

من أجل $-m=f(\alpha)$ أي $m=-f(\alpha)$ : تقبل المعادلة حلا موجبا وآخر مضاعف سالب

من أجل $f(\alpha)<-m<2$ أي $-2<m<-f(\alpha)$ : تقبل المعادلة حلين سالبين وحلا موجبا

من أجل $-m=2$ أي $m=-2$ : تقبل المعادلة حلا سالبا وآخر مضاعف معدوم

من أجل $-m>2$ أي $m<-2$ : لا تقبل المعادلة حلا

**III) $h$ و $H$ الدالتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ بـ :**

$$h(x)=x+f(x) \quad \text{و} \quad H(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$$

**1. تعيين الأعداد الحقيقية $a$ ، $b$ و $c$ حتى تكون الدالة $H$ دالة أصلية للدالة $h$ على $\mathbb{R}$**

$H'(x)=(2ax+b)e^{-x}-(ax^2+bx+c)e^{-x}$

$=[-ax^2+(2a-b)x+b-c]e^{-x}$

$h(x)=(x^2+3x+2)e^{-x}$

$$H(x)=\int h(x)\,dx \Rightarrow H'(x)=h(x) \Rightarrow \begin{cases} -a=1 \\ 2a-b=3 \\ b-c=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-5 \\ c=-7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(x)=(-x^2-5x-7)e^{-x}}$$

**2. أ. حساب $A(\lambda)$**

$$A(\lambda)=\int_0^{\lambda} h(x)\,dx=[H(x)]_0^{\lambda}=H(\lambda)-H(0)=\left(-\lambda^2-5\lambda-7\right)e^{-\lambda}+7$$

**تفسير النتيجة هندسيا**

$$A(\lambda)=\int_0^{\lambda} h(x)\,dx=\int_0^{\lambda}[f(x)-(-x)]\,dx$$

منه، نستنتج أنّ $A(\lambda)$ هي مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ ، المستقيم $(\Delta)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما : $x=0$ و $x=\lambda$

**ب. حساب $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$**

$$\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty} \underbrace{\left(-\lambda^2-5\lambda-7\right)e^{-\lambda}}_{\to 0}+7=\boxed{7}$$

**تمرين 80 : بكالوريا 2016 ع ت**

**I) $g(x)=2e^x-x^2-x$ ، $D_g=\mathbb{R}$**

**1. أ. حساب $g'(x)$**

$$g'(x)=2e^x-2x-1$$

**دراسة اتجاه تغير الدالة $g'$**

$$g''(x)=2e^x-2\,;\, g''(x)=0 \Rightarrow 2e^x-2=0 \Rightarrow e^x=1 \Rightarrow x=0$$

$x<0 : g''(x)<0 \Rightarrow$ الدالة $g'$ متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0[$

$x\geq 0 : g''(x)\geq 0 \Rightarrow$ الدالة $g'$ متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$

**ب. بيان أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)>0$**

بما أنّ الدالة $g'$ متناقصة على $]-\infty;0[$ و متزايدة على $[0;+\infty[$ ، فهي تقبل قيمة حدّية صغرى عند 0 تساوي $g'(0)=1$ ، ومنه نستنتج أنّ $g'(x)>0$

**جـ. حساب نهايتي الدالة $g$ عند كل من $+\infty$ و $-\infty$**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} 2e^x-x^2-x=\lim_{x\to-\infty} x^2\left(2\frac{e^x}{x^2}-1-\frac{1}{x}\right)=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 2e^x-x^2-x=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(2\frac{e^x}{x^2}-1-\frac{1}{x}\right)=\boxed{+\infty}$$

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ | ‖ |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**2. بيان أن $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $-1,38<\alpha<-1,37$**

الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]-1,38;-1,37[$

و $\underbrace{g(-1,38)}_{-0,021}\times\underbrace{g(-1,37)}_{0,001}<0$ ، منه نستنتج أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $-1,38<\alpha<-1,37$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

**3. استنتاج إشارة $g(x)$**

$x<\alpha : g(x)<0 \; ; x>\alpha : g(x)>0 \; ; g(\alpha)=0$

**II) $D_f=\mathbb{R}$ ، $f(x)=\frac{x^2e^x}{e^x-x}$**

**1. أ. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2e^x}{e^x-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1-\underbrace{xe^{-x}}_{\to 0}}=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2e^x}{e^x-x}\begin{matrix}\to 0\\ \to+\infty\end{matrix}=\boxed{0}$$

**ب. بيان أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=\frac{xe^xg(x)}{(e^x-x)^2}$**

$$f'(x)=\frac{(2xe^x+x^2e^x)(e^x-x)-(x^2e^x)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}$$

$$=\frac{xe^x[(2+x)(e^x-x)-x(e^x-1)]}{(e^x-x)^2}=\frac{xe^x(2e^x-x^2-x)}{(e^x-x)^2}$$

$$=\boxed{\frac{xe^x.g(x)}{(e^x-x)^2}}$$

**جـ. دراسة اتجاه تغير الدالة $f$**

إشارة $f'(x)$ من إشارة الجداء $xg(x)$

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | ‖ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ |
| $g(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | ‖ |
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ |

من جدول إشارة $f'$ ، نستنتج أنّ الدالة $f$ متزايدة على المجال $]-\infty;\alpha[\cup]0;+\infty[$ ومتناقصة على المجال $[\alpha;0]$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**2. أ. بيان أنّ $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\frac{2}{\alpha-1}$**

$$g(\alpha)=0\Rightarrow 2e^{\alpha}-\alpha^2-\alpha=0\Rightarrow e^{\alpha}=\frac{\alpha^2+\alpha}{2}$$

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^2e^{\alpha}}{e^{\alpha}-\alpha}=\frac{\alpha^2\left(\frac{\alpha^2+\alpha}{2}\right)}{\frac{\alpha^2+\alpha}{2}-\alpha}=\frac{\alpha^4+\alpha^3}{\alpha^2-\alpha}=\frac{\alpha^3+\alpha^2}{\alpha-1}$$

$$=\frac{(\alpha-1)(\alpha^2+2\alpha+2)+2}{\alpha-1}=\boxed{\alpha^2+2\alpha+2+\frac{2}{\alpha-1}}$$

**استنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$**

$$-1{,}38<\alpha<-1{,}37\Rightarrow\begin{cases}(-1{,}37)^2<\alpha^2<(-1{,}38)^2\\-2{,}38<\alpha-1<-2{,}37\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(-1{,}37)^2-2(1{,}38)+2<\alpha^2+2\alpha+2<(-1{,}38)^2-2(1{,}37)+2\\-\frac{2}{2{,}37}<\frac{2}{\alpha-1}<-\frac{2}{2{,}38}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\boxed{0{,}27<f(\alpha)<0{,}32}$$

**ب. حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x^2]$

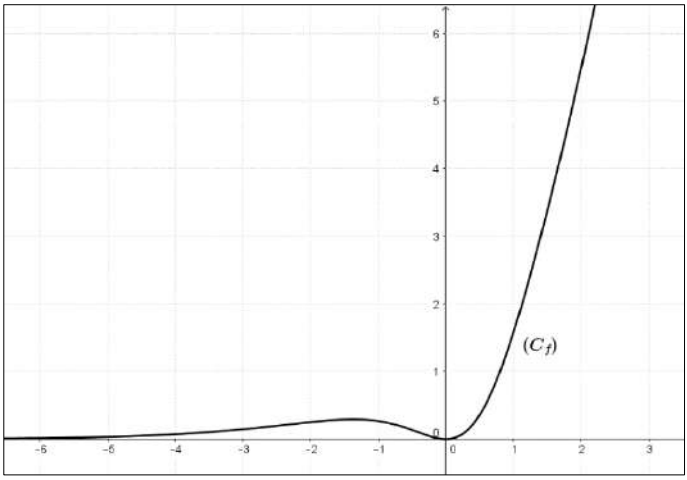
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x^2]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2e^x}{e^x-x}-x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{e^x-x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{x^3}{e^x}}_{\to0}\underbrace{\left(\frac{1}{1-xe^{-x}}\right)}_{\to1}=0$$

**تفسير النتيجة هندسيا**

منحنى الدالة مربّع مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند $+\infty$

**جـ. انشاء المنحنى $(\mathscr{C}_f)$**




**تمرين 81 : بكالوريا 2016 ر**

**I) $D_\varphi=\mathbb{R}$ ، $\varphi(x)=(x^2-x+1)e^{-x+1}-1$**

**1. أ. حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2-x+1)e^{-x+1}-1=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{(x^2-x+1)e^{-x+1}}_{\to0}-1=\boxed{-1}$$

**ب. دراسة اتجاه تغير الدالة $\varphi$**

$$\varphi'(x)=(2x-1)e^{-x+1}-(x^2-x+1)e^{-x+1}=\boxed{(-x^2+3x-2)e^{-x+1}}$$

$$\varphi'(x)=0\Rightarrow-x^2+3x-2=0\Rightarrow x_1=1\,;x_2=2$$

$x \in ]-\infty;1[ \cup ]2;+\infty[ : \varphi'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $\varphi$ متناقصة

$x \in [1;2] : \varphi'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $\varphi$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $\varphi$**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\phi'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ |
| $\phi(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $\phi(2)$ | ↘ | $-1$ |

$\varphi(2) = 3e^{-1} - 1 \approx 0{,}1$

**2. بيان أن المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلا $\alpha$ يختلف عن 1**

الدالة $\varphi$ مستمرة ورتيبة على المجال $]2;+\infty[$ ، $\varphi(2) \approx 0{,}1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \boxed{-1}$ ،

منه نستنتج أنّ المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $\alpha > 2$

**التحقق أنّ : $2{,}79 < \alpha < 2{,}80$**

$$\begin{cases} \varphi(2{,}79) \approx 0{,}0008 \\ \varphi(2{,}80) \approx -0{,}0016 \end{cases} \Rightarrow \boxed{2{,}79 < \alpha < 2{,}80}$$

**3. استنتاج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$**

$x \in ]-\infty;\alpha] : \varphi(x) \geq 0 \; ; \; x \in ]\alpha;+\infty[ : \varphi(x) < 0$

**II) $f(x) = (2x-1)e^{-x+1}$ ، $g(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$ ، $D_f = D_g = \mathbb{R}$**

**1. أ. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{(2x-1)}_{\to-\infty} \underbrace{e^{-x+1}}_{\to+\infty} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x-1)e^{-x+1} = \boxed{0}$$

**ب. دراسة اتجاه تغيّر الدالة $f$**

$$f'(x) = 2e^{-x+1} - (2x-1)e^{-x+1} = \boxed{(-2x+3)e^{-x+1}}$$

$x \in \left]-\infty;\frac{3}{2}\right] : f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x \in \left]\frac{3}{2};+\infty\right[ : f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\frac{2}{\sqrt{e}}$ | ↘ | $0$ |

**2. بيان أنّ للمنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ مماسا مشتركا $(T)$ في النقطة ذات الفاصلة 1**

$f'(1) = 1 \; ; f(1) = 1$

$$g'(x) = \frac{2(x^2 - x + 1) - (2x - 1)^2}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2x + 1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

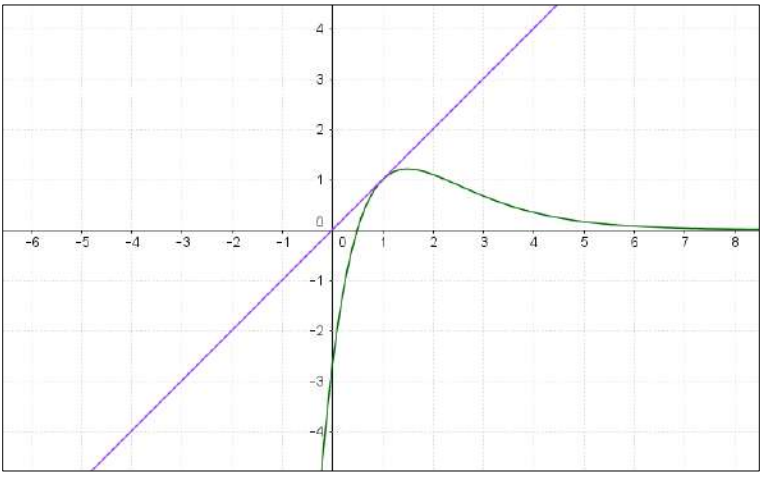
$g'(1) = 1 \; ; g(1) = 1$

بما أنّ $f'(1) = g'(1)$ و $f(1) = g(1)$ ، نستنتج أنّ للمنحنيين $(C_f)$ و $(C_g)$ مماسا مشتركا $(T)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1

**كتابة معادلة المماس $(T)$**

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \Rightarrow \boxed{(T): y = x}$$

**3. رسم المماس $(T)$ والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$**




**4. أ. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ ، $f(x) - g(x) = \frac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$**

$$f(x) - g(x) = (2x - 1)e^{-x+1} - \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}$$

$$= \frac{(2x - 1)[(x^2 - x + 1)e^{-x+1} - 1]}{x^2 - x + 1} = \boxed{\frac{(2x - 1)\varphi(x)}{x^2 - x + 1}}$$

**ب. دراسة إشارة الفرق $f(x)-g(x)$**

بما أنّ $x^2-x+1>0$ ، فإنّ إشارة الفرق من إشارة البسط

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x-1$ | ‖ | − | 0 | + | ‖ | + | ‖ | + | ‖ |
| $\phi(x)$ | ‖ | + | ‖ | + | 0 | + | 0 | − | ‖ |
| $f(x)-g(x)$ | ‖ | − | 0 | + | 0 | + | 0 | − | ‖ |

**استنتاج الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$**

$x\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\,]\alpha;+\infty[\,:\ f(x)-g(x)<0\Rightarrow (C_g)$ تحت $(C_f)$

$x\in\left]\frac{1}{2};1\right[\cup\,]1;\alpha[\,:\ f(x)-g(x)>0\Rightarrow (C_g)$ فوق $(C_f)$

يتقاطع المنحنيان $(C_f)$ و $(C_g)$ عند النقاط ذات الفواصل $\frac{1}{2}$، $1$ و $\alpha$

**جـ. حساب $\int_1^x f(t)\,dt$**

$$\int_1^x f(t)\,dt=\int_1^x (2t-1)e^{-t+1}\,dt\ ;\ \begin{cases}u=2t-1\Rightarrow u'=2\\ v'=e^{-t+1}\Rightarrow v=-e^{-t+1}\end{cases}$$

$$\int_1^x f(t)\,dt=[-(2x-1)e^{-t+1}]_1^x-\int_1^x -2e^{-t+1}\,dt$$

$$=[-(2t-1)e^{-t+1}]_1^x-[2e^{-t+1}]_1^x$$

$$\int_1^x f(t)\,dt=[(-2t-1)e^{-t+1}]_1^x=\boxed{(-2x-1)e^{-x+1}+3}\ \ldots ①$$

**د. حساب المساحة**

$$\mathcal{A}=\int_1^2[f(x)-g(x)]\,dx=\underbrace{\int_1^2(2x-1)e^{-x+1}\,dx}_{I}-\underbrace{\int_1^2\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx}_{J}$$

$I=\boxed{-5e^{-1}+3}$ (نعوّض $x$ بـ $2$ في ①)

$$J=\int_1^2\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx=[\ln(x^2-x+1)]_1^2=\boxed{\ln 3}$$

$$\boxed{\mathcal{A}=(-5e^{-1}+3-\ln 3)\ ua}$$

**(III**

**1. حساب $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$**

$$f'(x) = (-2x+3)e^{-x+1} \Rightarrow \begin{cases} f''(x) = (2x-5)e^{-x+1} \\ f^{(3)}(x) = (-2x+7)e^{-x+1} \\ f^{(4)}(x) = (2x-9)e^{-x+1} \end{cases}$$

**اعطاء تخمين لعبارة $f^{(n)}(x)$**

$$f^{(n)}(x) = [(-1)^n(2x-(2n+1))]e^{-x+1}$$

**2. برهان بالتراجع أنّ : $f^{(n)}(x) = (-1)^n[2x-(2n+1)]e^{1-x}$**

تحقيق التراجع: $f^{(1)}(x) = -[(2x-3)]e^{1-x} = (-2x+3)e^{1-x}$ (محققة)

فرض التراجع: نفرض أنّ $f^{(n)}(x) = (-1)^n[2x-(2n+1)]e^{1-x}$

برهان التراجع: نبرهن أنّ $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}[2x-(2n+3)]e^{1-x}$

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]' &= ((-1)^n[2x-(2n+1)]e^{1-x})' \\ &= (-1)^n[2e^{1-x} - (2x-(2n+1))e^{1-x}] \\ &= (-1)^n(-1)[2x-(2n+3))e^{1-x}] \\ &= (-1)^{n+1}[2x-(2n+3)]e^{1-x} \end{aligned}$$

منه، نستنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n[2x-(2n+1)]e^{1-x}$$

**3. $u_n = f^{(n)}(1)$**

**أ. حساب المجموع : $u_k + u_{k+1}$**

$$u_n = f^{(n)}(1) = (-1)^n(1-2n)$$

$$\begin{aligned} u_k + u_{k+1} &= (-1)^k(1-2k) + (-1)^{k+1}(-1-2k) \\ &= (-1)^k(1-2k) + (-1)^k(1+2k) \\ &= (-1)^k(1-2k+1+2k) = \boxed{2(-1)^k} \end{aligned}$$

**ب. استنتاج المجموع : $u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n}$**

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{2n} = \underbrace{2(-1)^1}_{u_1+u_2} + \underbrace{2(-1)^3}_{u_3+u_4} + \cdots + \underbrace{2(-1)^{2n-1}}_{u_{2n-1}+u_{2n}}$$

$$= \underbrace{-2-2\ldots-2}_{n \text{ حد}} \Rightarrow \boxed{S_n = -2n}$$

**تمرين 82 : بكالوريا 2017 ع ت**

**I)** $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = 2 - x^2e^{1-x}$

**1. بيان أنّ** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ **واعطاء تفسير هندسي لهذه النتيجة**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 2 - \underbrace{x^2e^{1-x}}_{\to 0} = \boxed{2}$$

يقبل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y = 2$ بجوار $+\infty$

**حساب** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2 - \underbrace{x^2e^{1-x}}_{\to+\infty} = \boxed{-\infty}$$

**2. أ. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي** $x$ ، $f'(x) = x(x-2)e^{1-x}$

$$f'(x) = -2xe^{1-x} + x^2e^{1-x} = \boxed{x(x-2)e^{1-x}}$$

**ب. دراسة اتجاه تغير الدالة** $f$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0\,;x_2 = 2$

- $x \in ]-\infty;0[\cup]2;+\infty[ : f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة
- $x \in [0;2] : f'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة** $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↘ | $2-4e^{-1}$ | ↗ | $2$ |

**3. كتابة معادلة لـ** $(T)$ **المماس للمنحنى** $(\mathscr{C}_f)$ **عند النقطة ذات الفاصلة 1**

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1) = -(x-1) + 1 \Rightarrow \boxed{(T): y = -x + 2}$$

**II)** $D_h = \mathbb{R}$ ، $h(x) = 1 - xe^{1-x}$

**1. بيان أنّه من أجل كل** $x$ **من** $\mathbb{R}$ **فإنّ :** $h(x) \geq 0$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 - \underbrace{xe^{1-x}}_{\to-\infty} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 - \underbrace{xe^{1-x}}_{\to 0} = \boxed{1}$$

$$h'(x) = -e^{1-x} + xe^{1-x} = (x-1)e^{1-x}$$

الدالة $h$ متناقصة على المجال $]-\infty;1]$ ومتزايدة على المجال $[1;\infty[$ وتقبل قيمة حدّية صغرى عند الفاصلة 1 قيمتها $h(1) = 0$ ، منه نستنتج أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ فإنّ : $h(x) \geq 0$

**دراسة الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمماس $(T)$**

$$f(x) - y = 2 - x^2e^{1-x} + x - 2 = x(1 - xe^{1-x}) = x.h(x)$$

- $x \in ]-\infty; 0[ : f(x) - y < 0 \Rightarrow (T)$ تحت $(C_f)$
- $x \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[ : f(x) - y > 0 \Rightarrow (T)$ فوق $(C_f)$
- $(C_f) \cap (T) = \{(0; 2); (1; 1)\}$

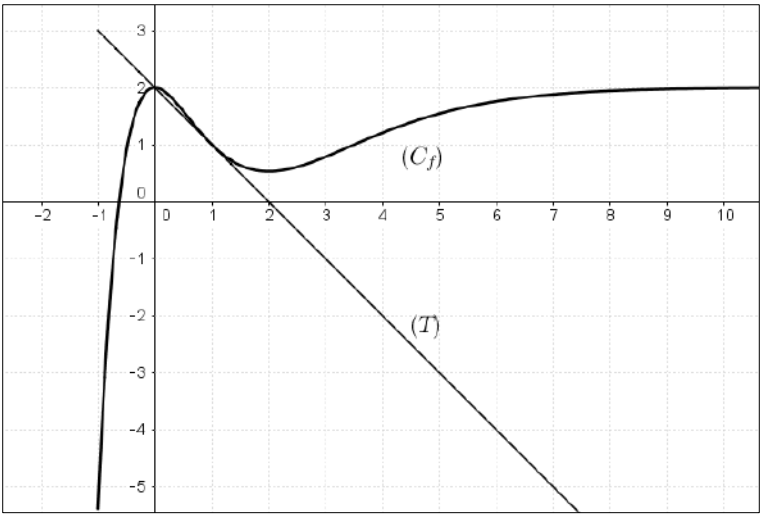
**2. بيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $-0,7 < \alpha < -0,6$**

الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على المجال $]-0,7; -0,6[$ و $\underbrace{f(-0,7)}_{-0,66} \times \underbrace{f(-0,6)}_{0,22} < 0$

منه نستنتج أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $-0,7 < \alpha < -0,6$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

**3. انشاء المماس $(T)$ والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ على المجال $]-1; +\infty[$**




**4. $D_F = \mathbb{R}$ ، $F(x) = 2x + (x^2 + 2x + 2)e^{1-x}$**

**التحقق أنّ $F$ دالة أصلية للدالة $f$ على $\mathbb{R}$**

$$F'(x) = 2 + (2x + 2)e^{1-x} - (x^2 + 2x + 2)e^{1-x} = 2 - x^2e^{1-x} = f(x)$$

$$F'(x) = f(x) \Rightarrow F(x) = \int f(x)\, dx$$

**حساب المساحة**

$$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)\, dx = F(1) - F(0) = \boxed{(7 - 2e)\ ua}$$

**تمرين 83 : بكالوريا 2017 ر**

**I)** $D_f = \mathbb{R}$ ، $f(x) = (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1}$

**1. أ. حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{(-x^3+2x^2)}_{\to+\infty}\underbrace{e^{-x+1}}_{\to+\infty} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{-x^3e^{-x+1}}_{\to0} + \underbrace{2x^2e^{-x+1}}_{\to0} = \boxed{0}$$

**استنتاج وجود مستقيم مقارب للمنحنى** $(\mathscr{C}_f)$ **وتعيين معادلة له**

بما أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، فإنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا أفقيا بجوار $+\infty$

معادلته : $\boxed{y = 0}$

**ب. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي** $x$ ، $f'(x) = x(x^2 - 5x + 4)e^{-x+1}$

$$f'(x) = (-3x^2+4x)e^{-x+1} - (-x^3+2x^2)e^{-x+1}$$
$$= (x^3 - 5x^2 + 4x)e^{-x+1} = \boxed{x(x^2-5x+4)e^{-x+1}}$$

**استنتاج اتجاه تغير الدالة** $f$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x(x^2-5x+4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0\,;x_2 = 1\,;x_3 = 4$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x^2-5x+4$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

- $x \in ]-\infty;0[ \cup ]1;4[ : f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة
- $x \in [0;1] \cup [4;+\infty[ : f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة** $f$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-32e^{-3}$ | ↗ | $0$ |

**2. كتابة معادلة** $(T)$ **مماس المنحنى** $(\mathscr{C}_f)$ **في النقطة ذات الفاصلة 2**

$$(T): y = f'(2)(x-2) + f(2) = -4e^{-1}(x-2) = \boxed{-4e^{-1}x + 8e^{-1}}$$

**3.** $D_h = [0; +\infty[$ ، $h(x) = x^2e^{-x+2} - 4$

**دراسة اتجاه تغير الدالة $h$**

$h'(x) = 2xe^{-x+2} - x^2e^{-x+2} = x(2-x)e^{-x+2}$

$h'(x) = 0 \Rightarrow x(2-x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0\,; x_2 = 2$

- $x \in [0; 2] : h'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $h$ متزايدة
- $x \in ]2; +\infty[ : h'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $h$ متناقصة

**استنتاج إشارة $h(x)$**

الدالة $h$ متزايدة على المجال $[0; 2]$ ومتناقصة على المجال $]2; \infty[$ وتقبل قيمة حدّية كبرى عند الفاصلة 2 قيمتها $h(2) = 0$ ، منه نستنتج أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ فإنّ : $h(x) \leq 0$

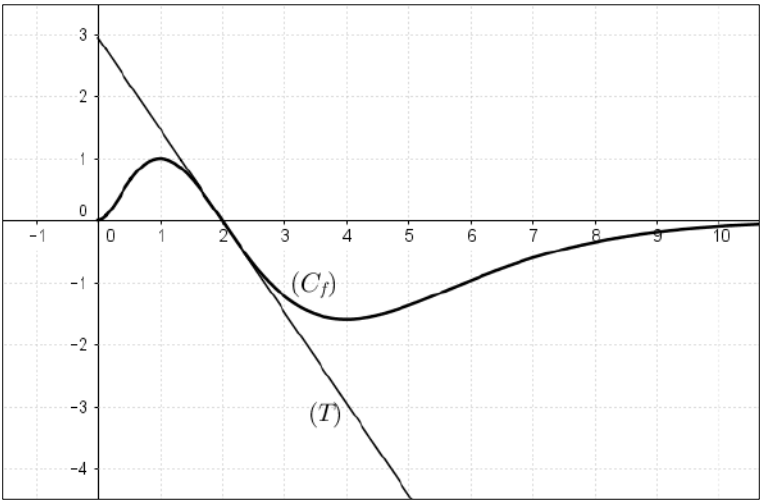
**تحديد وضعية المنحنى ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة إلى ($T$) على المجال $[0; +\infty[$**

$$f(x) - y = (-x^3 + 2x^2)e^{-x+1} + 4e^{-1}x - 8e^{-1}$$
$$= -xe^{-1}(x^2e^{-x+2} - 4) + 2e^{-1}(x^2e^{-x+2} - 4)$$
$$= \boxed{(2-x)e^{-1}.h(x)}$$

منه، نستنتج أنّ إشارة الفرق $f(x) - y$ عكس إشارة $2 - x$.

- $x \in ]0; 2[ : f(x) - y < 0 \Rightarrow (T)$ تحت $(C_f)$
- $x \in ]2; +\infty[ : f(x) - y > 0 \Rightarrow (T)$ فوق $(C_f)$
- $(C_f) \cap (T) = \{(2; 0)\}$

**4. رسم المماس ($T$) والمنحنى ($\mathscr{C}_f$) على المجال $[0; +\infty[$**



**5. المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة $(E) \dots f(x) = m(x-2)$**

ندرس تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيم $(\Delta_m)$ ذي المعادلة : $y = m(x-2)$

الذي يدور حول نقطة تقاطع $(\mathscr{C}_f)$ و$(T)$ ذات الإحداثيتين $(2;0)$.

من أجل $m \in ]-\infty; -4e^{-1}[$ : تقبل المعادلة $(E)$ حلا وحيدا (يساوي 2)

من أجل $m = -4e^{-1}$ : تقبل المعادلة $(E)$ حلا مضاعفا (يساوي 2)

من أجل $m \in ]-4e^{-1}; 0[$ : تقبل المعادلة $(E)$ ثلاثة حلول

من أجل $m = 0$ : تقبل المعادلة $(E)$ حلين متمايزين

من أجل $m \in ]0; +\infty[$ : تقبل المعادلة $(E)$ حلا وحيدا (يساوي 2)

**6. $D_g = ]0; +\infty[$ ، $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$**

**جدول تغيرات الدالة $g$**

$g'(x) = -\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f'\left(\frac{1}{x}\right)$ إشارة $g'(x)$ عكس إشارة

- $\frac{1}{x} \in ]1; 4[ \Rightarrow x \in \left]\frac{1}{4}; 1\right[ : f'\left(\frac{1}{x}\right) < 0 \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة
- $\frac{1}{x} \in ]0; 1] \cup [4; +\infty[ \Rightarrow x \in \left]0; \frac{1}{4}\right] \cup [1; +\infty[ : f'\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0 \Rightarrow g'(x) \leq 0$

$\Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

$$\lim_{x \to 0^{>}} g(x) = \lim_{x \to 0^{>}} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{X \to +\infty} f(X) = \boxed{0}\,; \left(X = \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{X \to 0^{>}} f(X) = \boxed{0}\,; \text{(حسب السؤال 1.أ)}$$

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{4}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ | ↘ | $-32e^{-3}$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = f(4) = -32e^{-3}\,; g(1) = f(1) = 1$$

# الجزء السادس

# حلول مسائل

# الدوال اللوغاريتمية

**حل التمرين 01 :**

**بسّط ما يلي :**

$$1)\ \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)-\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)=\ln\frac{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)}=\ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{2}{4}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\boxed{-\ln 2}$$

$$2)\ \ln\sqrt{e}-\ln\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2}\ln e+\ln e=\frac{1}{2}+1=\boxed{\frac{3}{2}}$$

$$3)\ \exp(\ln 3-\ln 5+\ln 15)=\exp\left(\ln\frac{3}{5}+\ln 15\right)=\exp\left[\ln\left(\frac{3}{5}\times 15\right)\right]$$

$$e^{\ln 9}=\boxed{9}$$

$$4)\ \ln 2+\ln(8e)-\ln(4e^2)=\ln 2+\ln 8+\ln e-\ln 4-\ln e^2$$

$$=\ln\frac{16}{4}+\ln e-2\ln e=\boxed{\ln 4-\ln e}$$

$$5)\ \ln\left(\frac{1}{e}\right)^2-\ln^2\left(\frac{1}{e}\right)=2\ln(e^{-1})-\ln^2 e^{-1}=-2-(-1)^2=\boxed{-3}$$

**حل التمرين 02 :**

**تعيين مجموعة تعريف الدالة $f$ في كل حالة من الحالات التالية :**

$$1)\ f(x)=\ln(x^2+2x-3)$$

$$x^2+2x-3>0\Rightarrow(x-1)(x+3)>0\Rightarrow\boxed{Df=]-\infty;-3[\cup]1;+\infty[}$$

$$2)\ f(x)=\ln(x+2)^2$$

$$(x+2)^2>0\Rightarrow x\neq-2\Rightarrow\boxed{Df=]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[}$$

$$3)\ f(x)=\ln|x+1|$$

$$|x+1|>0\Rightarrow x\neq-1\Rightarrow\boxed{Df=]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[}$$

$$4)\ f(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$$

$$\frac{x+2}{x-1}>0\Rightarrow\boxed{Df=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[}$$

$$5)\ f(x)=\ln(x+2)-\ln(x-1)$$

$\begin{cases} x+2>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>1 \end{cases} \Rightarrow x \in ]-2;+\infty[ \cap ]1;+\infty[ \Rightarrow \boxed{Df = ]1;+\infty[}$

6) $f(x) = \ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|$

$\left|\frac{x+2}{x-1}\right| > 0 \Rightarrow x \notin \{-2;1\} \Rightarrow \boxed{Df = ]-\infty;-2[ \cup ]-2;1[ \cup ]1;+\infty[}$

7) $f(x) = \ln|x+1| - \ln|x|$

$\begin{cases} |x+1|>0 \\ |x|>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Df = ]-\infty;-1[ \cup ]-1;0[ \cup ]0;+\infty[}$

8) $f(x) = \ln(-2x+3)$

$-2x+3>0 \Rightarrow x < \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{Df = \left]-\infty;\frac{3}{2}\right[}$

9) $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$

$\begin{cases} x>0 \\ \ln x - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \neq e \end{cases} \Rightarrow \boxed{Df = ]0;e[ \cup ]e;+\infty[}$

10) $f(x) = \ln[ln(x)]$

$\begin{cases} x>0 \\ \ln x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>1 \end{cases} \Rightarrow x \in ]0;+\infty[ \cap ]1;+\infty[ \Rightarrow \boxed{Df = ]1;+\infty[}$

11) $f(x) = \frac{\ln(x+2)}{\ln(x-2)}$

$\begin{cases} x+2>0 \\ x-2>0 \\ \ln(x-2) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>2 \\ x-2 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>2 \\ x \neq 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{Df = ]2;3[ \cup ]3;+\infty[}$

12) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

$\begin{cases} x>0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in ]0;+\infty[ \cap [1;+\infty[ \Rightarrow \boxed{Df = [1;+\infty[}$

13) $f(x) = \sqrt{1-(\ln x)^2}$

$\begin{cases} x>0 \\ 1-(\ln x)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ (1-\ln x)(1+\ln x) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ -1 \geq \ln x \geq 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ e^{-1} \geq x \geq e \end{cases} \Rightarrow x \in ]0;+\infty[ \cap [e^{-1};e] \Rightarrow \boxed{Df = [e^{-1};e]}$

14) $f(x) = \sqrt{1+\ln x}$

$\begin{cases} x>0 \\ 1+\ln x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \geq e^{-1} \end{cases} \Rightarrow \boxed{Df = [e^{-1};+\infty[}$

15) $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1-|\ln x|}$

$\begin{cases} x>0 \\ 1-|\ln x| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ |\ln x| \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x \neq 1 \\ \ln x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \neq e \\ x \neq e^{-1} \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{Df=]0;e^{-1}[\cup]e^{-1};e[\cup]e;+\infty[}$

16) $f(x)=\ln(-x^2-x+2)$

$-x^2-x+2>0 \Rightarrow -(x-1)(x+2)>0 \Rightarrow \boxed{Df=]-2;1[}$

17) $f(x)=\sqrt{1-\ln x}-\ln(x^2+1)$

$\begin{cases} x>0 \\ x^2+1>0 \ (\text{محققة}) \\ 1-\ln x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ \ln x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \leq e \end{cases} \Rightarrow x \in ]0;+\infty[\cap]-\infty;e]$

$\Rightarrow \boxed{Df=]0;e]}$

**حل التمرين 03 :**

**حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :**

1) $\ln(2x-3)=\ln(x-3)+\ln 5$

$\begin{cases} 2x-3>0 \\ x-3>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\dfrac{3}{2} \\ x>3 \end{cases} \Rightarrow D=]3;+\infty[$

$\ln(2x-3)=\ln(x-3)+\ln 5 \Rightarrow \ln(2x-3)=\ln 5(x-3)$

$\Rightarrow 2x-3=5x-15 \Rightarrow 3x=12 \Rightarrow x=4$

$4 \in D \Rightarrow \boxed{S=\{4\}}$

2) $\ln(x^2-5)-\ln(4-x)=2\ln 2$

$\begin{cases} x^2-5>0 \\ 4-x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in ]-\infty;-\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5};+\infty[ \\ x \in ]-\infty;4[ \end{cases}$

$\Rightarrow D=]-\infty;-\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5};4[$

$\ln(x^2-5)-\ln(4-x)=2\ln 2 \Rightarrow \ln\dfrac{x^2-5}{4-x}=\ln 4 \Rightarrow \dfrac{x^2-5}{4-x}=4$

$\Rightarrow x^2-5=16-4x \Rightarrow x^2+4x-21=0 \Rightarrow (x-3)(x+7)=0$

$\Rightarrow x=3$ أو $x=-7; \begin{cases} -7 \in D \\ 3 \in D \end{cases} \Rightarrow \boxed{S=\{-7;3\}}$

3) $2\ln x=\ln(x+4)+\ln 2x$

$\begin{cases} x > 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -4 \end{cases} \Rightarrow D = ]0; +\infty[$

$2\ln x = \ln(x + 4) + \ln 2x \Rightarrow \ln x^2 = \ln 2x(x + 4) \Rightarrow x^2 = 2x^2 + 8x$

$\Rightarrow x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(x + 8) = 0 \Rightarrow x = 0$ أو $x = -8$

$\begin{cases} 0 \notin D \\ -8 \notin D \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \emptyset}$

4) $\ln(4 - x) = \ln(x - 12) - \ln(x + 2)$

$\begin{cases} 4 - x > 0 \\ x - 12 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x > 12 \\ x > -2 \end{cases} \Rightarrow D = \emptyset$

5) $\ln(3 - x) - \ln\sqrt{x + 1} = \frac{1}{2}\ln 2x$

$\begin{cases} 3 - x > 0 \\ x + 1 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ x > -1 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow D = ]0; 3[$

$\ln(3 - x) - \ln\sqrt{x + 1} = \frac{1}{2}\ln 2x \Rightarrow \ln\frac{(3 - x)}{\sqrt{x + 1}} = \ln\sqrt{2x}$

$\Rightarrow 3 - x = \sqrt{2x(x + 1)} \Rightarrow (3 - x)^2 = 2x(x + 1) \Rightarrow x^2 + 8x - 9 = 0$

$\Rightarrow (x + 9)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -9$ أو $x = 1$

$\begin{cases} -9 \notin D \\ 1 \in D \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \{1\}}$

6) $\ln|x - 4| + \ln(7 - 3x) = \ln 2$

$\begin{cases} x - 4 \neq 0 \\ 7 - 3x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 4 \\ x < \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow D = \left]-\infty; \frac{7}{3}\right[$

$x \in \left]-\infty; \frac{7}{3}\right[ \Rightarrow x - 4 < 0 \Rightarrow |x - 4| = 4 - x$

$\ln|x - 4| + \ln(7 - 3x) = \ln 2 \Rightarrow \ln(4 - x)(7 - 3x) = \ln 2$

$\Rightarrow 3x^2 - 19x + 26 = 0 \Rightarrow x = 2$ أو $x = \frac{13}{3}$

$\begin{cases} \frac{13}{3} \notin D \\ 2 \in D \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \{2\}}$

7) $\ln(4x - 10) + \ln(2x - 2)^2 - 2\ln(4x - 4) = 0$

$\begin{cases} 4x-10>0 \\ 2x-2\neq 0 \\ 4x-4>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{5}{2} \\ x\neq 1 \\ x>1 \end{cases} \Rightarrow D=\left]\frac{5}{2};+\infty\right[$

$\ln(4x-10)+\ln(2x-2)^2-2\ln(4x-4)=0$

$\Rightarrow \ln(4x-10)+\ln(2x-2)^2=\ln(4x-4)^2$

$\Rightarrow (4x-10)(2x-2)^2=[2(2x-2)]^2 \Rightarrow (2x-2)^2(4x-14)=0$

$\Rightarrow x=1$ أو $x=\frac{7}{2}$ ; $\begin{cases} 1\notin D \\ \frac{7}{2}\in D \end{cases} \Rightarrow \boxed{S=\left\{\frac{7}{2}\right\}}$

8) $(\ln x)^2-\ln x-6=0$

$x>0 \Rightarrow D=]0;+\infty[$ ; $\ln x=X$

$(\ln x)^2-\ln x-6=0 \Rightarrow X^2-X-6=0 \Rightarrow (X-3)(X+2)=0$

$\Rightarrow X=3$ أو $X=-2 \Rightarrow x=e^3$ أو $x=e^{-2}$

$\begin{cases} e^{-2}\in D \\ e^3\in D \end{cases} \Rightarrow \boxed{S=\{e^{-2};e^3\}}$

9) $\ln x^2-\ln\sqrt{x}-6=0$

$x>0 \Rightarrow D=]0;+\infty[$

$\ln x^2-\ln\sqrt{x}-6=0 \Rightarrow 2\ln x-\frac{1}{2}\ln x=6 \Rightarrow \frac{3}{2}\ln x=6 \Rightarrow \ln x=4$

$\Rightarrow x=e^4$ ; $e^4\in D \Rightarrow \boxed{S=\{e^4\}}$

10) $2(\ln x)^3-7(\ln x)^2+3\ln x=0$

$x>0 \Rightarrow D=]0;+\infty[$ ; $\ln x=X$

$2(\ln x)^3-7(\ln x)^2+3\ln x=0 \Rightarrow 2X^3-7X^2+3X=0$

$\Rightarrow X(2X^2-7X+3)=0 \Rightarrow X=0$ أو $X=3$ أو $X=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow x=1$ أو $x=e^3$ أو $x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e} \Rightarrow \boxed{S=\left\{1;e^3;\sqrt{e}\right\}}$

11) $(\ln x)^4-10(\ln x)^2+9=0$

$x>0 \Rightarrow D=]0;+\infty[$ ; $(\ln x)^2=X$

$(\ln x)^4-10(\ln x)^2+9=0 \Rightarrow X^2-10X+9=0$

$\Rightarrow (X-1)(X-9)=0 \Rightarrow X=1$ أو $X=9 \Rightarrow (\ln x)^2=1$ أو $(\ln x)^2=9$

$\Rightarrow \ln x=1$ أو $\ln x=-1$ أو $\ln x=3$ أو $\ln x=-3$

$\Rightarrow x=e$ أو $x=e^{-1}$ أو $x=e^3$ أو $x=e^{-3} \Rightarrow \boxed{S=\{e;e^{-1};e^3;e^{-3}\}}$

12) $(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 4 = 0$

$x > 0 \Rightarrow D = ]0; +\infty[$ ; $\ln x = X$

$(\ln x)^3 + 3(\ln x)^2 - 4 = 0 \Rightarrow X^3 + 3X^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow (X-1)(X^2 + 4X + 4) = 0 \Rightarrow X = 1$ أو $X = -2$

$\Rightarrow x = e$ أو $x = e^{-2} \Rightarrow \boxed{S = \{e; e^{-2}\}}$

13) $\ln(\sin x) + \ln(\cos x) = \ln\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Rightarrow D = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$

$\ln(\sin x) + \ln(\cos x) = \ln\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \ln(\sin x)(\cos x) = \ln\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right\}}$

**حل التمرين 04 :**

**حل في $\mathbb{R}$ جمل المعادلات التالية :**

1) $\begin{cases} \ln x + \ln y = \ln 10 \\ x + y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln xy = \ln 10 \\ x + y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 10 \\ x + y = 7 \end{cases}$

$X^2 - 7X + 10 = 0 \Rightarrow X = 2$ أو $X = 5 \Rightarrow \boxed{S = \{(2;5), (5;2)\}}$

2) $\begin{cases} \ln x + \ln y = 1 \\ \frac{3}{\ln x} - \frac{2}{\ln y} = 2 \end{cases}$ ; $\ln x = X$ ; $\ln y = Y \Rightarrow \begin{cases} X + Y = 1 \\ \frac{3}{X} - \frac{2}{Y} = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} Y = 1 - X \\ \frac{3Y - 2X}{XY} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y = 1 - X \\ 3(1-X) - 2X = 2X(1-X) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} Y = 1 - X \\ 2X^2 - 7X + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 3 \\ Y = -2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} X = \frac{1}{2} \\ Y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = e^3 \\ y = e^{-2} \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = e^{\frac{1}{2}} \\ y = e^{\frac{1}{2}} \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{S = \{(e^3; e^{-2}), (\sqrt{e}; \sqrt{e})\}}$

3) $\begin{cases}\ln(x+1)+2\ln(y-2)=4\\3\ln(x+1)-\ln(y-2)=5\end{cases}$ ; $X=\ln(x+1)$ ; $Y=\ln(y-2)$

$\begin{cases}X+2Y=4\\3X-Y=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}X=2\\Y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln(x+1)=2\\\ln(y-2)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+1=e^2\\y-2=e\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}x=e^2-1\\y=e+2\end{cases}\Rightarrow\boxed{S=\{(e^2-1;e+2)\}}$

4) $\begin{cases}\ln x+\ln y=\ln\sqrt{3}-2\ln 2\\2(x+y)=\sqrt{3}+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln xy=\ln\dfrac{\sqrt{3}}{4}\\2(x+y)=\sqrt{3}+1\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}xy=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\\2(x+y)=\sqrt{3}+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xy=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\\x+y=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\end{cases}$

$X^2-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}X+\dfrac{\sqrt{3}}{4}=0\Rightarrow 4X^2-2\left(\sqrt{3}+1\right)X+\sqrt{3}=0$

$\Rightarrow X=\dfrac{1}{2}$ أو $X=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\boxed{S=\left\{\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2}\right)\right\}}$

5) $\begin{cases}\ln x+\ln y=2\ln 2+\ln 15\\x+y=19\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln xy=\ln 60\\x+y=19\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xy=60\\x+y=19\end{cases}$

$X^2-19X+60=0\Rightarrow X=4$ أو $X=15\Rightarrow\boxed{S=\{(4;15),(15;4)\}}$

6) $\begin{cases}\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=-\ln 3\\x^2+2y=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)\\x^2+2y=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{3}\\x^2+2y=16\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}3x=y\\x^2+2y=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x=y\\x^2+6x-16=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-8\\y=-24\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=2\\y=6\end{cases}$

$\Rightarrow\boxed{S=\{(-8;-24),(2;6)\}}$

**حل التمرين 05 :**

**1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2-4x-5=0$**

$x^2-4x-5=0\Rightarrow(x+1)(x-5)=0\Rightarrow\boxed{S=\{-1;5\}}$

**2. استنتاج حلول المعادلات التالية :**

$a)\ (\ln x)^2 - 4\ln x - 5 = 0\ ;\ln x = X \Rightarrow X^2 - 4X - 5 = 0$

$\Rightarrow X = -1$ أو $X = 5 \Rightarrow \ln x = -1$ أو $\ln x = 5 \Rightarrow \boxed{S = \{e^{-1}; e^5\}}$

$b)\ \ln(x-3) + \ln(x-1) = 3\ln 2 \Rightarrow \ln(x-3)(x-1) = \ln 8$

$\Rightarrow (x-3)(x-1) = 8 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x \in \{-1; 5\} \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{S = \{5\}}$

$c)\ e^x - 4 = 5e^{-x} \Rightarrow e^{-x}(e^{2x} - 4e^x - 5) = 0 \Rightarrow e^{2x} - 4e^x - 5 = 0$

$e^x = X \Rightarrow X^2 - 4X - 5 = 0 \Rightarrow X = -1$ (مرفوضة) أو $X = 5 \Rightarrow e^x = 5$

$\Rightarrow \boxed{S = \{\ln 5\}}$

**حل التمرين 06 :**

**حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية :**

$1)\ \ln x^2 - 1 \leq 0\ ;\ D = \mathbb{R}^*$

$\ln x^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow \ln x^2 - \ln e \leq 0 \Rightarrow \ln x^2 \leq \ln e \Rightarrow x^2 \leq e$

$\Rightarrow \boxed{S = [-\sqrt{e}; 0[ \cup ]0; \sqrt{e}]}$

$2)(\ln x)^2 - 1 \leq 0\ ;\ D = ]0; +\infty[$

$(\ln x)^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow (\ln x - 1)(\ln x + 1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq \ln x \leq 1$

$\Rightarrow e^{-1} \leq x \leq e \Rightarrow \boxed{S = [e^{-1}; e]}$

$3)\ \ln(2x+3) < 4\ ;\ D = \left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$

$$\ln(2x+3) < 4 \Rightarrow 2x + 3 < e^4 \Rightarrow x < \frac{e^4 - 3}{2} \Rightarrow \boxed{S = \left]-\frac{3}{2}; \frac{e^4 - 3}{2}\right[}$$

$4)\ \ln(x^2 - 2x) > \ln(4x - 5)$

$$\begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ 4x - 5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in ]-\infty; 0[ \cup ]2; +\infty[ \\ x > \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow D = \left]\frac{5}{4}; +\infty\right[$$

$\ln(x^2 - 2x) > \ln(4x - 5) \Rightarrow x^2 - 2x > 4x - 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 > 0$

$\Rightarrow x \in (]-\infty; 1[ \cup ]5; +\infty[) \cap \left]\frac{5}{4}; +\infty\right[ \Rightarrow \boxed{S = ]5; +\infty[}$

$5)\ \ln(x-2)^2 \geq 1\ ;\ D = \mathbb{R} - \{2\}$

$\ln(x-2)^2 \geq 1 \Rightarrow (x-2)^2 \geq e \Rightarrow (x - 2 - \sqrt{e})(x - 2 + \sqrt{e}) \geq 0$

$\Rightarrow \boxed{S = ]-\infty\ ; 2 - \sqrt{e}] \cup [2 + \sqrt{e}\ ; +\infty[}$

6) $2\ln(x)+\ln(2x+5)\le\ln(2-x)\ldots(*)$

$$\begin{cases} x>0 \\ 2x+5>0 \\ 2-x>0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x>0 \\ x>-\dfrac{5}{2} \\ x<2 \end{cases}\Rightarrow D=]0;2[$$

$(*)\Rightarrow\ln[x^2(2x+5)]\le\ln(2-x)\Rightarrow x^2(2x+5)\le 2-x$

$2x^3+5x^2+x-2\le 0\Rightarrow(x+1)(2x^2+3x-2)\le 0$

$\Rightarrow x\in\left(]-\infty;-2]\cup\left[-1;\dfrac{1}{2}\right]\right)\cap]0;2[\Rightarrow\boxed{S=\left]0;\dfrac{1}{2}\right]}$

7) $\ln(2x-3)+2\ln(x+1)<\ln(x-3)\ldots(*)$

$$\begin{cases} 2x-3>0 \\ x+1>0 \\ x-3>0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x>\dfrac{3}{2} \\ x>-1 \\ x>3 \end{cases}\Rightarrow D=]3;+\infty[$$

$(*)\Rightarrow\ln(2x-3)+\ln(x+1)^2<\ln(x-3)$

$\Rightarrow\ln(2x-3)(x+1)^2<\ln(x-3)\Rightarrow(2x-3)(x+1)^2<x-3$

$\Rightarrow 2x^3+x^2-5x<0\Rightarrow x(2x^2+x-5)<0$

$\Rightarrow x\in\left(\left]-\infty;\dfrac{-\sqrt{41}-1}{4}\right[\cup\left]0;\dfrac{\sqrt{41}-1}{4}\right[\right)\cap]3;+\infty[\Rightarrow\boxed{S=\emptyset}$

8) $\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)\le 0\ ;\ \dfrac{2x-1}{x+3}>0\Rightarrow D=]-\infty;-3[\cup\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

$\ln\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)\le 0\Rightarrow\dfrac{2x-1}{x+3}\le 1\Rightarrow\dfrac{2x-1}{x+3}-1\le 0\Rightarrow\dfrac{x-4}{x+3}\le 0$

$\Rightarrow S=(]-3;4])\cap\left(]-\infty;-3[\cup\left]\dfrac{1}{2};+\infty\right[\right)\Rightarrow\boxed{S=\left]\dfrac{1}{2};4\right]}$

**حل التمرين 07 :**

**دراسة إشارة العبارات التالية :**

1) $(\ln x-1)\ln x\ ;D=]0;+\infty[$

$\ln x\ge 0\Rightarrow x\ge 1\ ;\ \ln x-1\ge 0\Rightarrow\ln x\ge 1\Rightarrow x\ge e$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\ln x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(\ln x)(\ln x-1)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

2) $2x\ln(1-x)$ ; $D=]-\infty\,;1[$

$\ln(1-x)\geq 0\Rightarrow 1-x\geq 1\Rightarrow x\leq 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\ln(1-x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $2x\ln(1-x)$ | | $-$ | $0$ | $-$ | |

3) $\dfrac{2-\ln x}{1+\ln x}$ ; $D=]0\,;e^{-1}[\cup]e^{-1}\,;+\infty[$

$2-\ln x\geq 0\Rightarrow \ln x\leq 2\Rightarrow x\leq e^{2}$; $1+\ln x\geq 0\Rightarrow \ln x\geq -1\Rightarrow x\geq e^{-1}$

| $x$ | $0$ | | $e^{-1}$ | | $e^{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2-\ln x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $1+\ln x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{2-\ln x}{1+\ln x}$ | | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

4) $\ln^2 x-\ln x-6$ ; $D=]0\,;+\infty[$

$X=\ln x$ ; $X^2-X-6=0\Rightarrow (X-3)(X+2)=0\Rightarrow X=3$ أو $X=-2$

$\Rightarrow x=e^{3}$ أو $x=e^{-2}$

| $x$ | $0$ | | $e^{-2}$ | | $e^{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\ln^2 x-\ln x-6$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**حل التمرين 08 :**

**تعيين الدالة المشتقة للدالة $f$ في المجموعة التي تكون فيها قابلة للاشتقاق:**

1) $f(x)=\ln(x^2+4x-5)\,;Df=]-\infty;-5[\cup]1;+\infty[$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2x+4}{x^2+4x-5}}$$

2) $f(x)=2x-1+\ln|2x-1|\;;\;Df=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

$$f'(x)=\begin{cases}2+\dfrac{-2}{-2x+1}\;;x<\dfrac{1}{2}\\ 2+\dfrac{2}{2x-1}\;;x>\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\boxed{f'(x)=\frac{4x}{2x-1}}$$

3) $f(x)=\ln(-x)+\ln\sqrt{2x+3}$

$$\begin{cases}-x>0\\2x+3>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<0\\x>-\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow Df=\left]-\frac{3}{2};0\right[$$

$$f'(x)=\frac{-1}{-x}+\frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}}{\sqrt{2x+3}}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2x+3}\Rightarrow\boxed{f'(x)=\frac{3x+3}{2x^2+3x}}$$

4) $f(x)=x\ln x-\ln(\ln x)$

$$\begin{cases}x>0\\\ln x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\x>1\end{cases}\Rightarrow Df=]1;+\infty[$$

$$f'(x)=\ln x+1-\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\Rightarrow\boxed{f'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x\ln x}}$$

5) $f(x)=\frac{1+2\ln x}{x+1}\;;\;Df=]0;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{\frac{2}{x}(x+1)-(1+2\ln x)}{(x+1)^2}\Rightarrow\boxed{f'(x)=\frac{x+2-2x\ln x}{x(x+1)^2}}$$

6) $f(x)=\dfrac{1+\ln x^2}{x+1}$

$$\begin{cases}x^2>0\\x+1\neq0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq0\\x\neq-1\end{cases}\Rightarrow Df=\mathbb{R}-\{-1;0\}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{2x}{x^2}(x+1)-\left(1+\ln x^2\right)}{(x+1)^2}\Rightarrow\boxed{f'(x)=\frac{x+2-2x\ln x}{x(x+1)^2}}$$

7) $f(x)=x+\ln\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)$

$$\frac{2x-1}{2x+1}>0\Rightarrow Df=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$$

$$f'(x)=1+\frac{\frac{4}{(2x+1)^2}}{\frac{2x-1}{2x+1}}=1+\frac{4}{(2x+1)(2x-1)}\Rightarrow\boxed{f'(x)=\frac{4x^2+3}{4x^2-1}}$$

8) $f(x)=\sqrt{\ln x}+(\ln x)^2$

$$\begin{cases}x>0\\ \ln x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\ x>1\end{cases}\Rightarrow Df=]1;+\infty[$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}}+\frac{2\ln x}{x}\Rightarrow\boxed{f'(x)=\frac{\sqrt{\ln x}}{2x\ln x}+\frac{2\ln x}{x}}$$

**حل التمرين 09 :**

**حساب النهايات التالية :**

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x+\ln(2x+3)=\boxed{+\infty}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(\underbrace{x^2+x-2}_{\to+\infty})=\boxed{+\infty}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln x-x=\lim\limits_{x\to+\infty}x(\ln x-1)=\boxed{+\infty}$

4) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}}\frac{1+\ln x\to-\infty}{x^2\to0^+}=\boxed{-\infty}$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}2x-1+\ln(-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-x\left(-2+\frac{1}{x}+\frac{\ln(-x)}{-x}\right)$

$$=\lim_{X\to+\infty}X\left(-2-\frac{1}{X}+\underbrace{\frac{\ln X}{X}}_{\to0}\right)=\boxed{-\infty}\ (X=-x)$$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{1+\frac{1}{x}}=\boxed{+\infty}$

7) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}}\frac{x+1}{x}+\ln x=\lim\limits_{\substack{x\to0\\ >}}\frac{1}{x}(x+1+\underbrace{x\ln x}_{\to0})=\boxed{+\infty}$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\boxed{0}$

9) $\lim\limits_{x\to-\infty}x+\ln\underbrace{\left(\frac{x}{x-2}\right)}_{\to1}=\boxed{-\infty}$

10) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} x+\ln\underbrace{\left(\frac{x-2}{x+2}\right)}_{\to 0^+}=\boxed{-\infty}$

11) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} x+\ln\underbrace{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)}_{\to +\infty}=\boxed{+\infty}$

12) $\lim\limits_{x\to -\infty}\ln\underbrace{\left|\frac{x+1}{x^2-4}\right|}_{\to 0^+}=\boxed{-\infty}$

13) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+2)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\underbrace{\frac{x+2}{x}}_{\to 1}\times\underbrace{\frac{\ln(x+2)}{x+2}}_{\to 0}=\boxed{0}$

14) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(x^2+3)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln\left[x\left(x+\frac{3}{x}\right)\right]}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{\ln\left(x+\frac{3}{x}\right)}{x}}_{\to 0}=\boxed{0}$

15) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\underbrace{\frac{x^2+1}{x^2}}_{\to 1}\times\underbrace{\frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}}_{\to 0}=\boxed{0}$

16) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{(x+1)^2}=\lim\limits_{x\to +\infty}\underbrace{\frac{x}{(x+1)^2}}_{\to 0}\times\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}=\boxed{0}$

17) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\sqrt{x}\ln x-\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}\right)^2-\sqrt{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}-\sqrt{x}$

$=\lim\limits_{X\to 0^+}2\underbrace{X\ln X}_{\to 0}-X=\boxed{0};(X=\sqrt{x})$

18) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x^2-x=\lim\limits_{x\to 0^+}2\underbrace{x\ln x}_{\to 0}-x=\boxed{0}$

19) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}(1-x)\ln(1-x)=\lim\limits_{X\to 0^+}\underbrace{X\ln X}_{\to 0}=\boxed{0};(X=1-x)$

20) $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x^2-1)-\ln(x+2)=\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\underbrace{\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right)}_{\to +\infty}=\boxed{+\infty}$

21) $\lim\limits_{x\to +\infty}x^2-2-\ln(x-1)=\lim\limits_{x\to +\infty}(x-1)\left[\underbrace{\frac{x^2-2}{x-1}}_{\to +\infty}-\underbrace{\frac{\ln(x-1)}{x-1}}_{\to +\infty}\right]=\boxed{+\infty}$

22) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x-\ln x}{x+\ln x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x\left(2-\frac{\ln x}{x}\right)}{x\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2-\frac{\ln x}{x}}{1+\frac{\ln x}{x}}=\boxed{2}$

23) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\ln(x+1)}{x^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x}\times\underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x}}_{\to 1}=\boxed{+\infty}$

24) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln(2x+1)}{x} = \boxed{2}\,; f(x) = \ln(2x+1)\,;\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln(2x+1)}{x} = f'(0) = 2$

25) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{\ln(x-1)}{x-2} = \boxed{1}\,; f(x) = \ln(x-1)\,;\ \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{\ln(x-1)}{x-2} = f'(2) = 1$

26) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to 0^+} \frac{1}{X}\ln(1+X) = \lim\limits_{X\to 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = \boxed{1}\,; \left(X = \frac{1}{x}\right)$

27) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{\ln(1+X)}{X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \underbrace{\frac{1+X}{X}}_{\to 1} \times \underbrace{\frac{\ln(1+X)}{1+X}}_{\to 0} = \boxed{0}\,; \left(X = \frac{1}{x}\right)$

28) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln(1+3x-x^2)}{x} = \boxed{3}\,; f(x) = \ln(1+3x-x^2)\,;$

$f'(x) = \frac{3-2x}{1+3x-x^2}\,; \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln(1+3x-x^2)}{x} = f'(0) = 3$

29) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln(1+3x)}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\substack{X\to 0\\ >}} \frac{\ln(1+3X^2)}{X} = \boxed{0}\,; (X = \sqrt{x})$

$f(X) = \ln(1+3X^2)\ ; f'(X) = \frac{6X}{1+3X^2}\ ;\ \lim\limits_{\substack{X\to 0\\ >}} \frac{\ln(1+3X^2)}{X} = f'(0)$

30) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{x^2+2x-2\ln(1-2x)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} x + 2 - 2\frac{\ln(1-2x)}{x} = \boxed{6}$

$f(x) = \ln(1-2x)\ ; f'(x) = \frac{-2}{1-2x}\ ;\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{\ln(1-2x)}{x} = f'(0) = -2$

**حل التمرين 10 :**

$\boldsymbol{Df = ]0;+\infty[\ ،\ f(x) = \ln x + (\ln x)^2}$

**1. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x + (\ln x)^2 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x\,(1+\ln x) = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x + (\ln x)^2 = \boxed{+\infty}$

$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2\ln x}{x} = \boxed{\frac{1+2\ln x}{x}}$

$1 + 2\ln x \geq 0 \Rightarrow \ln x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow x \geq e^{-\frac{1}{2}}$

$x \in \left]0; e^{-\frac{1}{2}}\right[ : f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x \in \left[e^{-\frac{1}{2}}; +\infty\right[ : f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $0$ | | $e^{-\frac{1}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-\frac{1}{4}$ | ↗ | $+\infty$ |

$$f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \ln e^{-\frac{1}{2}} + \left(\ln e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

**2. تعيين إحداثيات نقط تقاطع ($\mathscr{C}_f$) مع حامل محور الفواصل**

$f(x) = 0 \Rightarrow \ln x + (\ln x)^2 = 0 \Rightarrow \ln x\,(1 + \ln x) = 0$

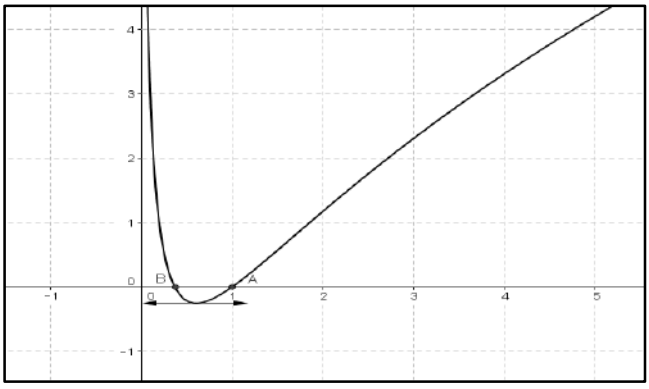
$\Rightarrow \ln x = 0$ أو $\ln x = -1 \Rightarrow x = 1$ أو $x = e^{-1}$

$(Cf) \cap (xx') = \boxed{\{A(1;0); B(e^{-1};0)\}}$

**3. تعيين معادلة المماس للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) عند النقطة التي فاصلتها 1**

$y = f'(1)(x-1) + f(1) \Rightarrow \boxed{y = x - 1}$

**4. رسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$)**



**حل التمرين 11 :**

$Df = ]0; +\infty[$ ، $f(x) = \frac{x+\ln x}{x}$

**1. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{x+\ln x}{x} \begin{matrix} \to -\infty \\ \to 0^+ \end{matrix} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0} = \boxed{1}$$

$$f'(x) = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right) - (x+\ln x)}{x^2} = \boxed{\frac{1-\ln x}{x^2}}$$

$1 - \ln x \geq 0 \Rightarrow \ln x \leq 1 \Rightarrow x \leq e$

$x \in ]0; e[ : f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x \in [e; +\infty[ : f'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $f(e)$ | ↘ | $1$ |

$$f(e) = \frac{e+1}{e} \approx 1{,}37$$

**2. كتابة معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى ($\mathcal{C}_f$)**

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$ مستقيم مقارب عمودي

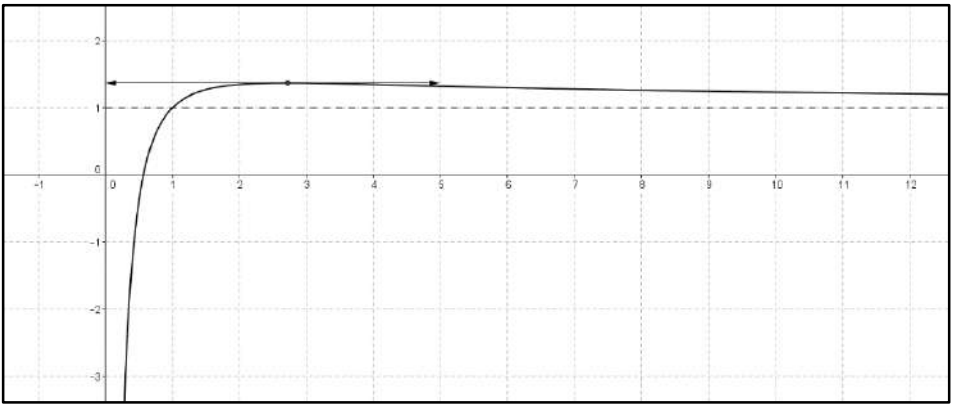
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1$ مستقيم مقارب أفقي

**3. بيان أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$**

$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0{,}39$ ، $f(1) = 1$. الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على المجال $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$

$f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(1) < 0$ ، منه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

**4. رسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$)**



**حل التمرين 12 :**

$\boldsymbol{Df = ]0; +\infty[}$ ، $\boldsymbol{f(x) = (\ln x)^2 - \ln x - 2}$

**1. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} (\ln x)^2 - \ln x - 2 = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (\ln x)^2 - \ln x - 2 = \lim_{x \to +\infty} \ln x \left(\ln x - 1 - \frac{2}{\ln x}\right) = \boxed{+\infty}$$

$$f'(x) = \frac{2 \ln x}{x} - \frac{1}{x} = \boxed{\frac{2 \ln x - 1}{x}}$$

$2 \ln x - 1 \geq 0 \Rightarrow \ln x \geq \frac{1}{2} \Rightarrow x \geq e^{\frac{1}{2}}$

$x \in \left]0; e^{\frac{1}{2}}\right[ : f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x \in \left[e^{\frac{1}{2}}; +\infty\right[ : f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $0$ | | $e^{\frac{1}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-\frac{9}{4}$ | ↗ | $+\infty$ |

$$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \left(\ln e^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \ln e^{\frac{1}{2}} - 2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4}$$

**2. تعيين نقط تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مع محوري الإحداثيات**

$f(x) = 0 \Rightarrow (\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0 \Rightarrow (\ln x + 1)(\ln x - 2) = 0$

$\Rightarrow \ln x = -1$ أو $\ln x = 2 \Rightarrow x = e^{-1}$ أو $x = e^2$

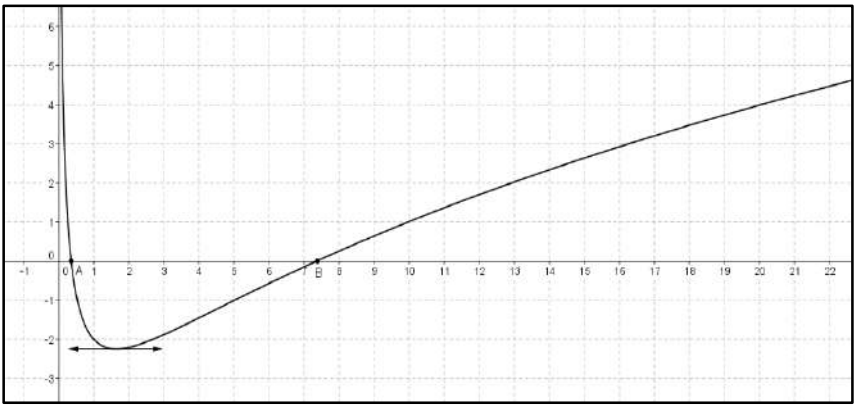
$(Cf) \cap (xx') = \boxed{\{A(e^{-1}; 0); B(e^2; 0)\}}$

**3. دراسة الفروع اللانهائية للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x} = 0$$

منه، يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) فرع قطع مكافئ باتجاه محور الفواصل

**4. رسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$)**



**حل التمرين 13 :**

$$\boldsymbol{Df = \mathbb{R}^*} \text{ ، } \boldsymbol{f(x) = \frac{1+\ln(x^2)}{x}}$$

**1. دراسة شفعية الدالة $f$**

$$f(-x) = \frac{1+\ln[(-x)^2]}{-x} = -\frac{1+\ln(x^2)}{x} = -f(x)$$

$Df$ متناظر بالنسبة إلى 0، ومن أجل كل $x \in Df : f(-x) = -f(x)$ ، منه الدالة $f$ فردية

**2. دراسة تغيرات الدالة $f$ على المجال $]0; +\infty[$**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1+\ln(x^2)}{x} \begin{matrix} \to -\infty \\ \to 0^+ \end{matrix} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\ln(x^2)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \underbrace{\frac{2\ln x}{x}}_{\to 0} = \boxed{0}$$

$$f'(x) = \frac{x\left(\frac{2x}{x^2}\right) - (1+\ln(x^2))}{x^2} = \boxed{\frac{1-\ln x^2}{x^2}}$$

$$1 - \ln x^2 \geq 0 \Rightarrow 2\ln x \leq 1 \Rightarrow \ln x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x \leq e^{\frac{1}{2}}$$

$x \in \left]0; e^{\frac{1}{2}}\right[ : f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x \in \left[e^{\frac{1}{2}}; +\infty\right[ : f'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $0$ | | $e^{\frac{1}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$ | ↘ | $0$ |

$$f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1+\ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1+1}{e^{\frac{1}{2}}} = 2e^{-\frac{1}{2}} \approx 1{,}2$$

**3. كتابة معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى ($\mathcal{C}_f$)**

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty \Rightarrow x = 0$ مستقيم مقارب عمودي

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ مستقيم مقارب أفقي

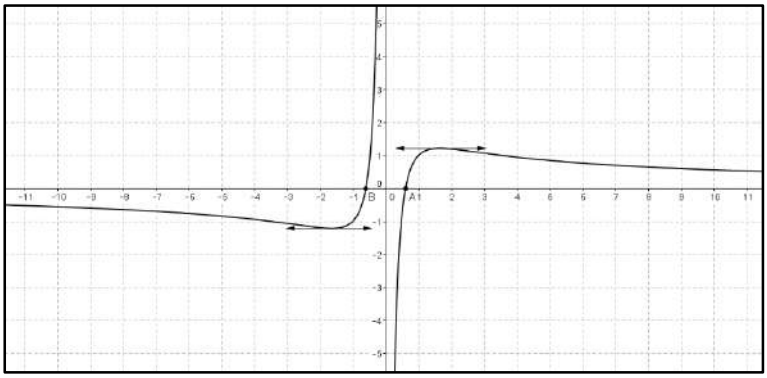
**4. تعيين نقط تقاطع المنحنى ($\mathcal{C}_f$) مع محوري الإحداثيات**

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1+\ln(x^2)}{x} = 0 \Rightarrow 1+\ln(x^2) = 0$$

$$\Rightarrow \ln x^2 = -1 \Rightarrow x^2 = e^{-1} \Rightarrow x = \sqrt{e^{-1}} \text{ أو } x = -\sqrt{e^{-1}}$$

$$(Cf) \cap (xx') = \boxed{\left\{A\left(\sqrt{e^{-1}};0\right); B(-\sqrt{e^{-1}};0)\right\}}$$

**5. رسم المنحنى ($\mathcal{C}_f$)**



**حل التمرين 14 :**

$$\boldsymbol{Df = \mathbb{R}^* - \{-2\}} \text{ ، } \boldsymbol{f(x) = x + 2 + \ln\left|\frac{x}{x+2}\right|}$$

**1. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$f(x) = \begin{cases} x+2+\ln\left(\dfrac{x}{x+2}\right) ; x \in ]-\infty;-2[ \cup ]0;+\infty[ \\ x+2+\ln\left(-\dfrac{x}{x+2}\right) ; x \in ]-2;0[ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x+2+\ln\underbrace{\left(\frac{x}{x+2}\right)}_{\to 1} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to-2\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-2\\ <}} x+2+\ln\underbrace{\left(\frac{x}{x+2}\right)}_{\to+\infty} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to -2^{>}} f(x) = \lim_{x\to -2^{>}} x+2+\ln\underbrace{\left(-\frac{x}{x+2}\right)}_{\to +\infty} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to 0^{<}} f(x) = \lim_{x\to 0^{<}} x+2+\ln\underbrace{\left(-\frac{x}{x+2}\right)}_{\to 0^{+}} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to 0^{>}} f(x) = \lim_{x\to 0^{>}} x+2+\ln\underbrace{\left(\frac{x}{x+2}\right)}_{\to 0^{+}} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x+2+\ln\underbrace{\left(\frac{x}{x+2}\right)}_{\to 1} = \boxed{+\infty}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1+\dfrac{\dfrac{2}{(x+2)^2}}{\dfrac{x}{x+2}} = \dfrac{x^2+2x+2}{x(x+2)} \; ; x\in\,]-\infty;-2[\,\cup\,]0;+\infty[ \\ 1+\dfrac{-\dfrac{2}{(x+2)^2}}{-\dfrac{x}{x+2}} = \dfrac{x^2+2x+2}{x(x+2)} \; ; x\in\,]-2;0[ \end{cases}$$

بما أنّ $x^2+2x+2>0$ ، فإنّ إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $x(x+2)$

الدالة $f$ متزايدة $\Rightarrow x\in\,]-\infty;-2[\,\cup\,]0;+\infty[: f'(x)>0$

الدالة $f$ متناقصة $\Rightarrow x\in\,]-2;0[: f'(x)<0$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | | ↘ | $-\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ $+\infty$ |

**2. بيان أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيما مقاربا مائلا ($\Delta$) يُطلب إعطاء معادلته**

$$\lim_{|x|\to +\infty}[f(x)-(x+2)] = \lim_{|x|\to +\infty}\ln\underbrace{\left(\frac{x}{x+2}\right)}_{\to 1} = \boxed{0}$$

منه ، يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مستقيما مقاربا مائلا ($\Delta$) معادلته : $\boxed{y=x+2}$

**3. تعيين النقطة $\omega$ تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مع المستقيم ($\Delta$)**

$$\omega(x;y)\in(Cf)\cap(\Delta) \Rightarrow x+2+\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| = x+2 \Rightarrow \ln\left|\frac{x}{x+2}\right| = 0$$

$\Rightarrow \left|\frac{x}{x+2}\right| = 1 \Rightarrow \frac{x}{x+2} = 1$(مستحيل) أو $\frac{x}{x+2} = -1 \Rightarrow x = -x-2$

$\Rightarrow x = -1\,; y = 1 \Rightarrow \omega(-1;1)$

**إثبات أنّ النقطة $\omega$ مركز تناظر لـ ($\mathscr{C}_f$)**

لإثبات أنّ النقطة $\omega$ مركز تناظر لـ ($\mathscr{C}_f$) ، يكفي أن نثبت :

- من أجل كل $x \in Df$ ، $(-2-x) \in Df$
- $f(-2-x) + f(x) = 2$

$x \in Df \Rightarrow x \notin \{-2;0\} \Rightarrow -x \notin \{2;0\} \Rightarrow -2-x \notin \{-2;0\} \Rightarrow (-2-x) \in Df$

$f(-2-x) + f(x) = -2-x+2+\ln\left|\frac{-2-x}{-2-x+2}\right| + x + 2 + \ln\left|\frac{x}{x+2}\right|$

$f(-2-x) + f(x) = 2 + \ln\left|\frac{-2-x}{-x}\right| + \ln\left|\frac{x}{x+2}\right| = 2 + \ln\left|\frac{x+2}{x}\right| + \ln\left|\frac{x}{x+2}\right|$

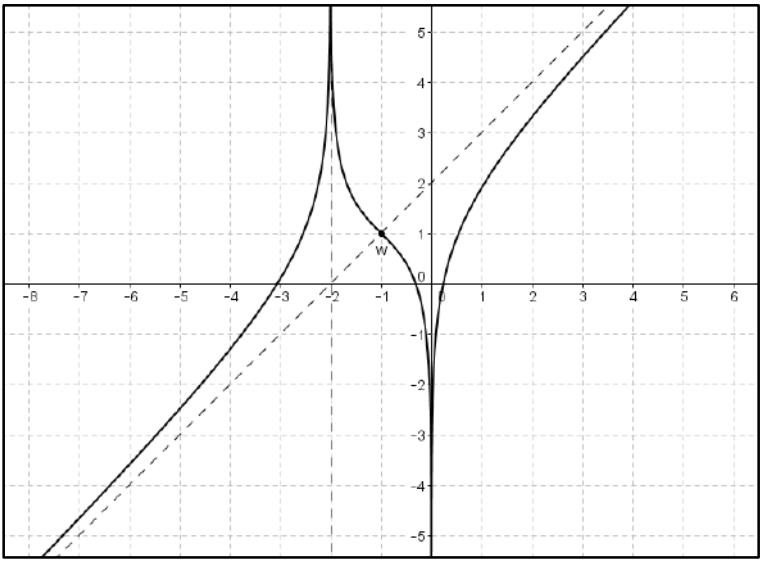
$f(-2-x) + f(x) = 2 + \ln\underbrace{\left|\left(\frac{x+2}{x}\right)\left(\frac{x}{x+2}\right)\right|}_{1} = 2$

منه ، النقطة $\omega$ مركز تناظر لـ ($\mathscr{C}_f$)

**4. حساب $f(-4)\,; f(-3)\,; f(-\frac{5}{2})$**

$f(-4) = -2 + \ln 2 \approx -1{,}3\,; f(-3) = -1 + \ln 3 \approx 0{,}1\,; f\left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \ln 5 \approx 1{,}1$

**رسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$)**



**حل التمرين 15 :**

$$\boldsymbol{Df = \mathbb{R} - \{-1\}} \text{ ، } \boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1|}$$

**1. دراسة تغيرات الدالة $f$ والفروع اللانهائية للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(-x-1) \ ; x \in ]-\infty;-1[ \\ \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1) \ ; x \in ]-1;+\infty[ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(-x-1) = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1 \\ <}} \frac{1}{2}x^2 - x + \ln \underbrace{(-x-1)}_{\to 0^+} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1 \\ >}} \frac{1}{2}x^2 - x + \ln \underbrace{(x+1)}_{\to 0^+} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1) = \boxed{+\infty}$$

$$f'(x) = \begin{cases} x - 1 + \frac{-1}{-x-1} = x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1} \ ; x \in ]-\infty;-1[ \\ x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1} \ ; x \in ]-1;+\infty[ \end{cases}$$

$x \in ]-\infty;-1[ : f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x \in ]-1;+\infty[ : f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}x - 1 + \underbrace{\frac{\ln(-x-1)}{x}}_{\to 0} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x-1+\underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x}}_{\to 0}=\boxed{+\infty}$$

منه، يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) فرع قطع مكافئ باتجاه محور التراتيب

**2. برهان أنّه توجد نقطتا انعطاف للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) يُطلب تعيين إحداثييها**

$$f''(x)=\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}=0\Rightarrow x(x+2)=0\Rightarrow x=0 \text{ أو } x=-2$$

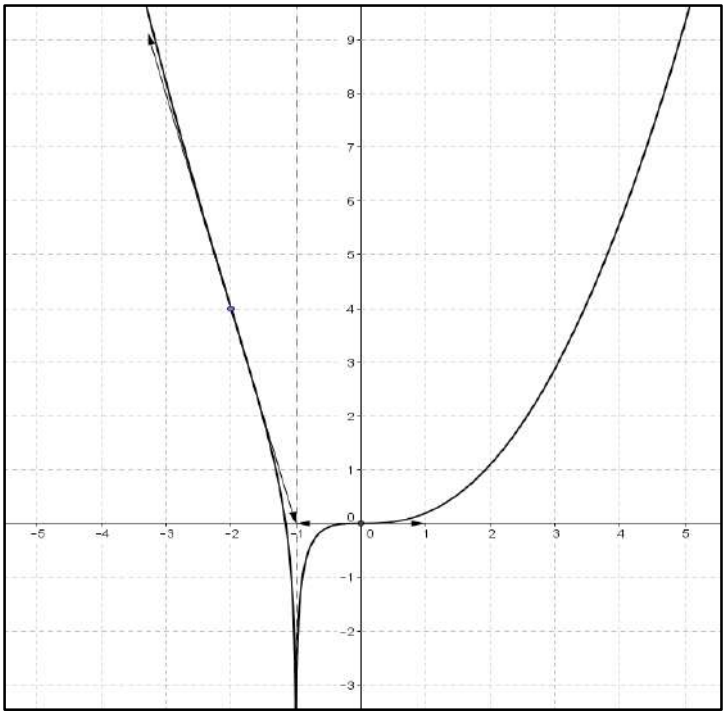
منه، يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) نقطتي انعطاف هما: $O(0;0)$ و $A(-2;4)$

**3. إيجاد معادلة كل من المماسين للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) عند نقطتي الانعطاف**

$$y=f'(0)x+f(0)\Rightarrow\boxed{(\Delta):y=0}$$

$$y=f'(-2)(x+2)+f(-2)=-4(x+2)+4\Rightarrow\boxed{(\Delta'):y=-4x-4}$$

**4. رسم المماسين والمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**



**حل التمرين 16 :**

**I- $g(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$ ، $Dg = ]0;+\infty[$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} x^3 - 1 + 2\ln x = \boxed{-\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 1 + 2\ln x = \boxed{+\infty}$

$g'(x) = 3x^2 + \dfrac{2}{x} = \boxed{\dfrac{3x^3+2}{x}}$ ; $g'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

**2. حساب $g(1)$ واستنتاج إشارة $g(x)$**

$g(1) = 0$ ; $x \in ]0;1[ \Rightarrow g(x) < 0$ ; $x \in [1;+\infty[ \Rightarrow g(x) \geq 0$

**II- $f(x) = x - \dfrac{\ln x}{x^2}$ ، $Df = ]0;+\infty[$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} x - \underbrace{\dfrac{\ln x}{x^2}}_{\to 0^+ \ \to -\infty} = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x - \underbrace{\dfrac{\ln x}{x^2}}_{\to 0} = \boxed{+\infty}$

$f'(x) = 1 - \dfrac{\frac{1}{x}(x^2) - 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} = \boxed{\dfrac{g(x)}{x}}$

$x \in ]0;1[ : g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x \in [1;+\infty[ : g(x) \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

**2. بيان أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة : $y = x$ مقارب مائل للمنحنى ($\mathcal{C}_f$)**

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow (\Delta): y = x$ مستقيم مقارب مائل

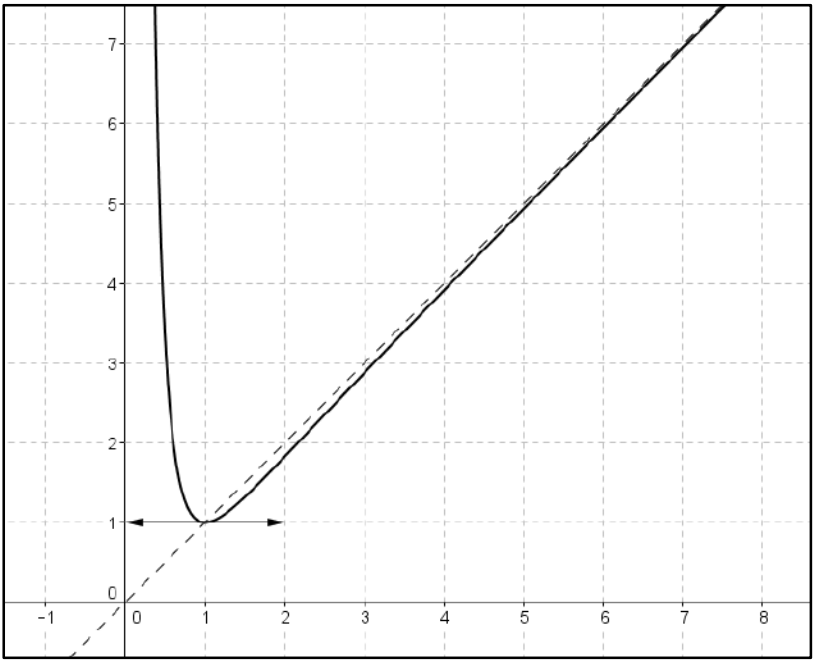
**3. دراسة الوضع النسبي للمنحنى ($\mathcal{C}_f$) بالنسبة إلى (Δ)**

$$f(x) - x = -\frac{\ln x}{x^2}$$

$x \in ]0;1[ : \ln x < 0 \Rightarrow f(x) - x > 0 \Rightarrow (\Delta)$ فوق $(Cf)$

$x \in [1;+\infty[ : \ln x \geq 0 \Rightarrow f(x) - x \leq 0 \Rightarrow (\Delta)$ تحت $(Cf)$

**4. رسم المستقيم (Δ) والمنحنى ($\mathcal{C}_f$)**



**حل التمرين 17 :**

**I- $Dg = ]0;+\infty[$ ، $g(x) = 2x^2 - 3 + \ln x$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} 2x^2 - 3 + \ln x = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x^2 - 3 + \ln x = \boxed{+\infty}$$

$g'(x) = 4x + \frac{1}{x} = \boxed{\frac{4x^2+1}{x}}$ ; $g'(x) > 0$ $\Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

2. بيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $\left]1;\frac{3}{2}\right[$

$g(1) = -1$ ، $g\left(\frac{3}{2}\right) \approx 1{,}9$. الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $\left]1;\frac{3}{2}\right[$

و $g(1) \times g\left(\frac{3}{2}\right) < 0$ ، منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $\left]1;\frac{3}{2}\right[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**3. استنتاج إشارة $g(x)$**

$g(\alpha) = 0$ ; $x \in ]0;\alpha[ \Rightarrow g(x) < 0$ ; $x \in ]\alpha;+\infty[ \Rightarrow g(x) > 0$

**II- $Df = ]0;+\infty[$ ، $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x} + 2x - 5$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to +\infty} - \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to -\infty} + 2x - 5 = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0} + 2x - 5 = \boxed{+\infty}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} - \frac{\frac{1}{x}(x) - \ln x}{x^2} + 2 = \frac{2x^2 - 3 + \ln x}{x^2} = \boxed{\frac{g(x)}{x^2}}$$

$x \in ]0; \alpha[ : g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ الدالة $f$ متناقصة

$x \in [\alpha; +\infty[ : g(x) \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

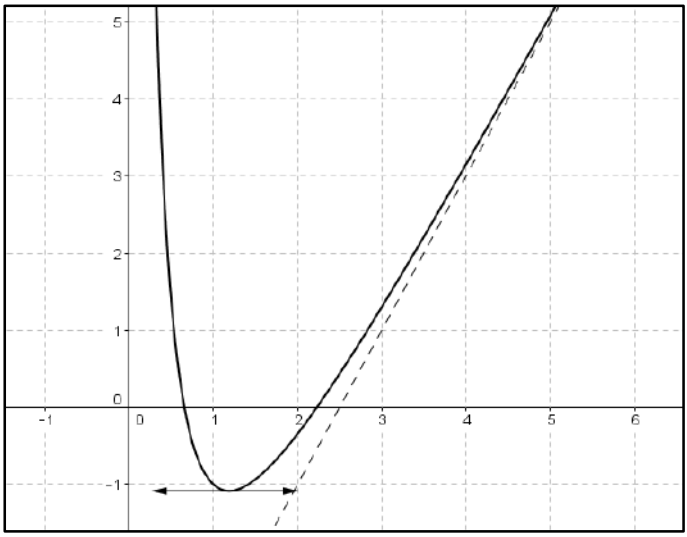
| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

**2. بيان أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة : $y = 2x - 5$ مقارب مائل للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (2x-5) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{2}{x}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0} = 0$$

منه، المستقيم (Δ) ذي المعادلة : $y = 2x - 5$ مقارب مائل للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)

**3. رسم المستقيم (Δ) والمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**



**حل التمرين 18 :**

**I- $Dg = ]0;+\infty[$ ، $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 1 - x^2 - \ln x = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 - x^2 - \ln x = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x} - x - \frac{\ln x}{x}\right) = \boxed{-\infty}$$

$g'(x) = -2x - \frac{1}{x} = \boxed{\frac{-2x^2-1}{x}}$ ; $g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ |

**2. حساب $g(1)$ واستنتاج إشارة $g(x)$**

$g(1) = 0$ ; $x \in ]0;1[ \Rightarrow g(x) > 0$ ;

$x \in [1;+\infty[ \Rightarrow g(x) \leq 0$

**II- $Df = ]0;+\infty[$ ، $f(x) = 3 - x + \frac{\ln x}{x}$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 3 - x + \frac{\ln x}{x} \begin{matrix}\to -\infty\\ \to 0^+\end{matrix} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3 - x + \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0} = \boxed{-\infty}$$

$$f'(x) = -1 + \frac{\frac{1}{x}(x) - \ln x}{x^2} = \frac{-x^2 + 1 - \ln x}{x^3} = \boxed{\frac{g(x)}{x}}$$

$x \in ]0;1[ : g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x \in [1;+\infty[ : g(x) \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-\infty$ |

**2. بيان أنّ المنحنى ($\mathcal{C}_f$) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يُطلب تعيين معادلته**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(3-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0 \Rightarrow y=3-x$ مستقيم مقارب مائل

**3. دراسة وضعية المنحنى ($\mathcal{C}_f$) بالنسبة إلى ($\Delta$)**

$f(x)-(3-x)=\dfrac{\ln x}{x}$

$x\in\,]0;1[:\ln x<0 \Rightarrow f(x)-(3-x)<0 \Rightarrow (\Delta)$ تحت $(Cf)$

$x\in[1;+\infty[:\ln x\geq 0 \Rightarrow f(x)-(3-x)\geq 0 \Rightarrow (\Delta)$ فوق $(Cf)$

**4. بيان أنّ المنحنى ($\mathcal{C}_f$) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما $x_0$ و $x_1$ حيث :**

$$\frac{1}{4}<x_0<1 \quad \text{و} \quad 3<x_1<4$$

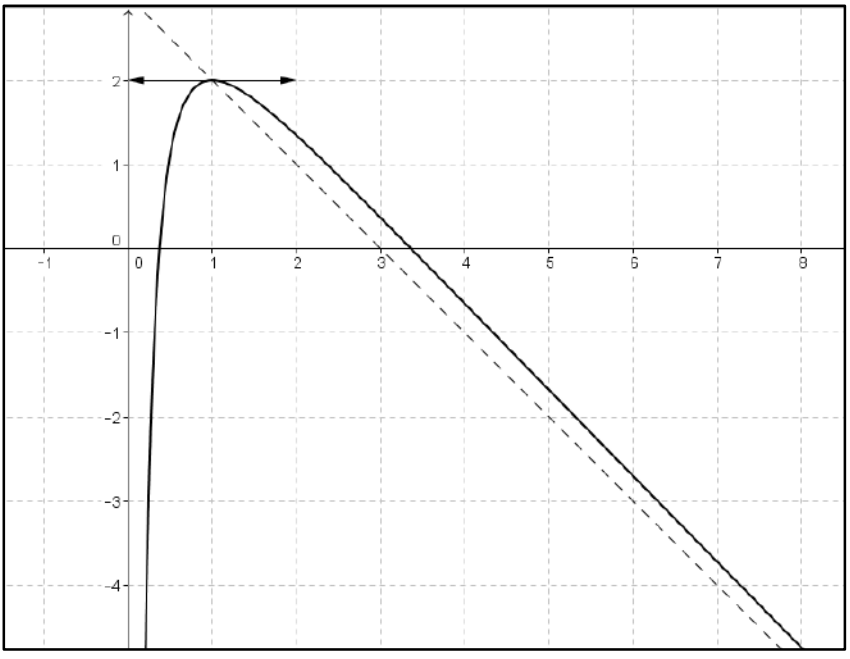
$f(1)=2$ ، $f\left(\frac{1}{4}\right)\approx -2{,}8$ ، $f(3)\approx 0{,}37$ ، $f(4)\approx -0{,}65$.

الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على كل من المجالين $\left]\frac{1}{4};1\right[$ و $]3;4[$ ، $f\left(\frac{1}{4}\right)\times f(1)<0$

و $f(3)\times f(4)<0$، منه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $x_0$ و $x_1$ حيث :

$\frac{1}{4}<x_0<1$ و $3<x_1<4$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**5. رسم المستقيم ($\Delta$) والمنحنى ($\mathcal{C}_f$)**



**حل التمرين 19 :**

**I- $Df = ]-3;1[$ ، $f(x) = a\ln(3+x) + b\ln(1-x) - 2$**

**تعيين العددين الحقيقيين $a$ و $b$ : $f'(x) = \frac{a}{3+x} - \frac{b}{1-x}$**

$$\begin{cases} f(0) = -2 + 3\ln 3 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\ln 3 - 2 = -2 + 3\ln 3 \\ \frac{a}{3} - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}}$$

**II- $Df = ]-3;1[$ ، $f(x) = 3\ln(3+x) + \ln(1-x) - 2$**

**1. أ. حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to -3 \\ >}} f(x)$**

$$\lim_{\substack{x\to -3 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -3 \\ >}} 3\ln\underbrace{(3+x)}_{\to 0^+} + \ln(1-x) - 2 = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ <}} 3\ln(3+x) + \ln\underbrace{(1-x)}_{\to 0^+} - 2 = \boxed{-\infty}$$

**استنتاج أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيمين مقاربين يُطلب كتابة معادلتيهما**

$\lim\limits_{\substack{x\to -3 \\ >}} f(x) = -\infty \Rightarrow (\Delta): x = -3$ مستقيم مقارب عمودي

$\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ <}} f(x) = -\infty \Rightarrow (\Delta'): x = 1$ مستقيم مقارب عمودي

**ب. دراسة اتجاه تغير الدالة $f$**

$$f'(x) = \frac{3}{3+x} - \frac{1}{1-x} = \frac{3(1-x) - (3+x)}{(1-x)(3+x)} = \frac{-4x}{(1-x)(3+x)}$$

بما أنّ المقام موجب دوما على المجال $]-3;1[$ ، فإنّ إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $x$

$x \in ]-3;0[: f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x \in [0;1[: f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-3$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $f(0)$ | ↘ | ‖ $-\infty$ |

**ج. دراسة قابلية المنحنى ($\mathscr{C}_f$) لنقطة انعطاف**

$$f''(x)=\frac{-3}{(3+x)^2}-\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{-3(1-x)^2-(3+x)^2}{(3+x)^2(1-x)^2}=\frac{-4x^2-12}{(3+x)^2(1-x)^2}$$

بما أنّ $f''(x)<0$ ، فإنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) لا يقبل نقطة انعطاف

**2. كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) عند النقطة التي فاصلتها $x_0$**

$$f'(x_0)=1\Rightarrow\frac{-4x_0}{(1-x_0)(3+x_0)}=1\Rightarrow -4x_0=(1-x_0)(3+x_0)$$

$$\Rightarrow x_0^2-2x_0-3=0\Rightarrow \boxed{x_0=-1}$$ أو $x_0=3$(مرفوضة)

$$y=f'(-1)(x+1)+f(-1)\Rightarrow \boxed{(T):y=x-1+4\ln 2}$$

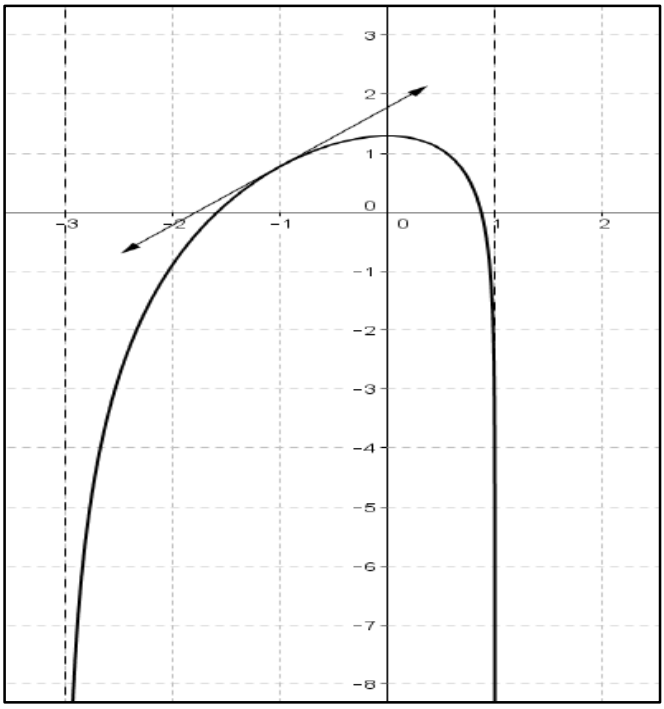
**3. أ. بيان أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما $\alpha$ و $\beta$**

$f(-2)\approx -0{,}9$ ، $f(-1)\approx 0{,}8$ ، $f(0{,}5)\approx 1$ ، $f(0{,}9)\approx -0{,}2$.

الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على كل من المجالين $]-1;-2[$ و $]0{,}5;0{,}9[$ ،

$f(-2)\times f(-1)<0$ و $f(0{,}5)\times f(0{,}9)<0$، منه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ حيث $-2<\alpha<-1$ و $0{,}5<\beta<1$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**ب. رسم المماس (T) والمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**



**4. المناقشة الجبرية لعدد حلول المعادلة : $f(x) = 2\ln(3+x) - 2 + \ln m$**

$f(x) = 2\ln(3+x) - 2 + \ln m \Rightarrow \ln m = \ln(3+x) + \ln(1-x)$

$\Rightarrow m = (3+x)(1-x) \Rightarrow x^2 + 2x + m - 3 = 0$

$\Delta' = 1 - (m-3) = 4 - m$

- $4 - m < 0 \Rightarrow m > 4$ : المعادلة لا تقبل حلولا
- $4 - m = 0 \Rightarrow m = 4$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا
- $4 - m > 0 \Rightarrow 0 < m < 4$ : المعادلة تقبل حلين

**حل التمرين 20 :**

**1. بقراءة بيانية ، تعيين :**

أ. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \boxed{-\infty}$

**ب. اتجاه تغيّر كل من $f$ و $g$ على المجال $[0;+\infty[$**

الدالة $f$ متزايدة و الدالة $g$ متناقصة على المجال $[0;+\infty[$

**ج. إشارة كل من $f(x)$ و $g(x)$ على المجال $[0;+\infty[$**

بما أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ فوق محور الفواصل ، فإنّ $f(x) \geq 0$ ، وبما أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ تحت محور الفواصل ، فإنّ $g(x) \leq 0$

**2. $D = [0;+\infty[$ ، $g(x) = \ln(x+1) - x$ ، $f(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}$**

أ. **حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(x+1) - x\left(1 - \frac{x}{2}\right) = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+1)\left[\underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x+1}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{x}{x+1}}_{\to 1}\right] = \boxed{-\infty}$$

**ب. دراسة اتجاه تغيّر كل من $f$ و $g$ على المجال $[0;+\infty[$**

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x = \frac{1 + (x-1)(x+1)}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{1 - (x+1)}{x+1} = \frac{-x}{x+1}$$

لدينا $f'(x) \geq 0$ ، منه الدالة $f$ متزايدة على المجال $[0;+\infty[$ ، و$g'(x) \leq 0$ ، منه الدالة $g$ متناقصة على المجال $[0;+\infty[$

**ج. استنتاج إشارة كل من $f$ و $g$ على المجال $[0;+\infty[$**

لدينا : الدالة $f$ متزايدة ، $f(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ منه ، $f(x)\geq 0$

الدالة $g$ متناقصة ، $g(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ منه ، $g(x)\leq 0$

**3. استنتاج أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب فإنّ : $x-\frac{x^2}{2}\leq \ln(x+1)\leq x$**

$$\begin{cases} f(x)\geq 0 \\ g(x)\leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(x+1)-x+\frac{x^2}{2}\geq 0 \\ \ln(x+1)-x\leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(x+1)\geq x-\frac{x^2}{2} \\ \ln(x+1)\leq x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x-\frac{x^2}{2}\leq \ln(x+1)\leq x}$$

**4. استنتاج القيمة التقريبية إلى $10^{-3}$ بالزيادة للعدد $\ln(1,1)$**

$$\ln(1,1)=\ln(0,1+1)\Rightarrow 0,1-\frac{0,1^2}{2}\leq \ln(1,1)\leq 0,1\Rightarrow \ln(1,1)\approx 0,095$$

**حل التمرين 21 :**

**I- $g(x)=\frac{2e-x}{x}-\ln x$ ، $Dg=]0;+\infty[$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2e-x}{\underbrace{x}_{\to+\infty}}-\underbrace{\ln x}_{\to-\infty}=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} \frac{2e-x}{\underbrace{x}_{\to-1}}-\underbrace{\ln x}_{\to+\infty}=\boxed{-\infty}$$

$g'(x)=\frac{-x-(2e-x)}{x^2}-\frac{1}{x}=\boxed{\frac{-2e-x}{x^2}}$ ; $g'(x)<0\Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ ↘ | $-\infty$ |

**2. حساب $g(e)$ واستنتاج إشارة $g(x)$**

$g(e) = 0 \; ; x \in ]0; e[ \Rightarrow g(x) > 0 \; ; \; x \in [e; +\infty[ \Rightarrow g(x) \leq 0$

**II- $Df = \mathbb{R}^*$ ، $f(x) = (2e - |x|)(\ln|x|)$**

**1. برهان أنّ الدالة $f$ زوجية**

لدينا $Df$ متناظر بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل $x \in Df$ :

$f(-x) = (2e - |-x|)(\ln|-x|) = (2e - |x|)(\ln|x|) = f(x)$

منه ، الدالة $f$ زوجية.

**2. دراسة تغيرات الدالة $f$**

بما أنّ الدالة $f$ زوجية ، نقتصر دراستها على المجال $]0; +\infty[$ ، ثمّ نستنتج رسم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ على المجال $]-\infty; 0[$ بالتناظر المحوري

$x \in ]0; +\infty[ : f(x) = (2e - x)\ln(x)$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{(2e - x)}_{\to 2e} \underbrace{\ln(x)}_{\to -\infty} = \boxed{-\infty}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{(2e - x)}_{\to -\infty} \underbrace{\ln(x)}_{\to +\infty} = \boxed{-\infty}$

$f'(x) = -\ln(x) + \dfrac{2e - x}{x} = \boxed{g(x)}$

$x \in ]0; e[ : g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x \in [e; +\infty[ : g(x) \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

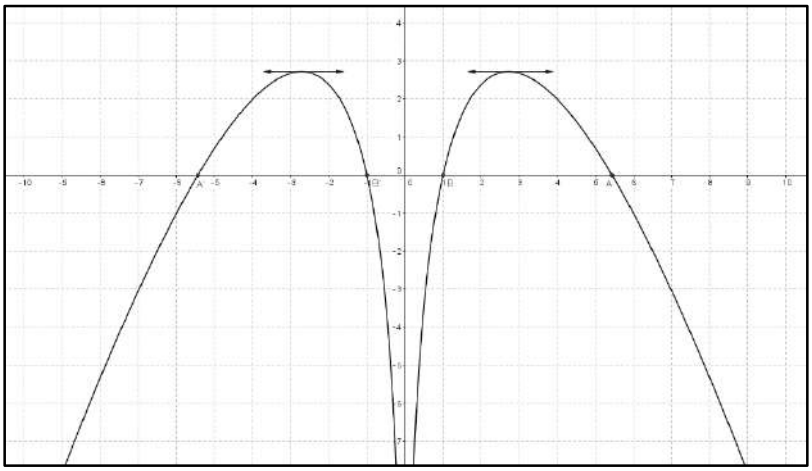
| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $e$ | ↘ | $-\infty$ |

**3. تعيين إحداثيات نقط تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مع حامل محور الفواصل**

$f(x) = 0 \Rightarrow (2e - x)\ln(x) = 0 \Rightarrow x = 2e$ أو $x = 1$

$\boxed{(Cf) \cap (xx') = \{A(2e; 0); B(1; 0); A'(-2e; 0); B'(-1; 0)\}}$

**4. رسم المنحنى ($\mathcal{C}_f$)**



**حل التمرين 22 :**

$$\boldsymbol{Df} = \mathbb{R} - \{\mathbf{0}\,;\,\mathbf{1}\}\ ،\ \boldsymbol{f(x)} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x} + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$$

**1. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) ; x \in ]-\infty; 0[ \cup ]1; +\infty[ \\ -\frac{1}{2}x + \ln\left(\frac{1-x}{x}\right) ; x \in ]0; 1[ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}x + \ln\underbrace{\left(\frac{x-1}{x}\right)}_{\substack{\to 1 \\ \to 0}} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}0} f(x) = \lim_{x\overset{<}{\to}0} -\frac{1}{2}x + \ln\underbrace{\left(\frac{x-1}{x}\right)}_{\substack{\to+\infty \\ \to+\infty}} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}0} f(x) = \lim_{x\overset{>}{\to}0} -\frac{1}{2}x + \ln\underbrace{\left(\frac{1-x}{x}\right)}_{\substack{\to+\infty \\ \to+\infty}} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} -\frac{1}{2}x + \underbrace{\ln\underbrace{\left(\frac{1-x}{x}\right)}_{\to 0^+}}_{\to -\infty} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} -\frac{1}{2}x + \underbrace{\ln\underbrace{\left(\frac{x-1}{x}\right)}_{\to 0^+}}_{\to -\infty} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} -\frac{1}{2}x + \underbrace{\ln\underbrace{\left(\frac{x-1}{x}\right)}_{\to 1}}_{\to 0} = \boxed{-\infty}$$

من أجل $x \in ]-\infty; 0[ \cup ]1; +\infty[$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x(x-1)} = \frac{-x^2+x+2}{2x(x-1)}$$

من أجل $x \in ]0; 1[$

$$f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1-x}{x}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{x(x-1)} = \frac{-x^2+x+2}{2x(x-1)}$$

$-x^2+x+2=0 \Rightarrow x=-1$ أو $x=2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2+x-2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x(x-1)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{-x^2+x-2}{x(x-1)}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$x \in ]-\infty; -1[ \cup ]0; 1[ \cup ]2; +\infty[: f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x \in [-1; 0[ \cup ]1; 2]: f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(-1)$ | ↗ | $+\infty$ $\|$ $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ $\|$ $-\infty$ | ↗ | $f(2)$ | ↘ | $-\infty$ |

**2. بيان أنّ $(d): y = -\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) + \frac{1}{2}x = \lim_{|x|\to+\infty} \underbrace{\ln\underbrace{\left(\frac{x-1}{x}\right)}_{\to 1}}_{\to 0} = \boxed{0}$$

منه، $(d): y = -\frac{1}{2}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)

**3. دراسة وضعية المنحنى ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة إلى $(d)$**

$$f(x) + \frac{1}{2}x = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$$

$$\ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = 0 \Rightarrow \left|\frac{x-1}{x}\right| = 1 \Rightarrow \frac{x-1}{x} = 1 \text{ (مستحيل) أو } \frac{x-1}{x} = -1$$

$$\Rightarrow x - 1 = -x \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$x \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[ \cup ]1; +\infty[ \Rightarrow \left|\frac{x-1}{x}\right| < 1 \Rightarrow \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| < 0 \Rightarrow (Cf)$ تحت $(d)$

$x \in ]-\infty; 0[ \cup \left]0; \frac{1}{2}\right[ \Rightarrow \left|\frac{x-1}{x}\right| > 1 \Rightarrow \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| > 0 \Rightarrow (Cf)$ فوق $(d)$

يتقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) والمستقيم $(d)$ عند النقطة $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$

**4. برهان أنّ النقطة $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**

$$\begin{cases} x \in Df \Rightarrow (1-x) \in Df \\ f(1-x) + f(x) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$ يعني : $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر لـ ($\mathscr{C}_f$)

$$x \in Df \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x \neq 0 \\ -x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-x \neq 1 \\ 1-x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(1-x) \in Df}$$

$$f(1-x) + f(x) = -\frac{1}{2}(1-x) + \ln\left|\frac{1-x-1}{1-x}\right| - \frac{1}{2}x + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$$

$$= -\frac{1}{2} + \ln\left|\frac{-x}{1-x}\right| + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = -\frac{1}{2} + \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$$

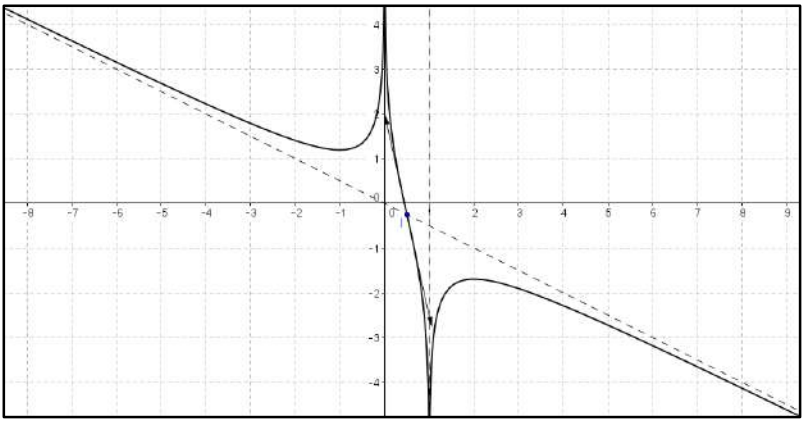
$$= -\frac{1}{2} + \ln\left|\left(\frac{x}{x-1}\right)\left(\frac{x-1}{x}\right)\right| = -\frac{1}{2} + \ln 1 = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

منه، النقطة $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)

**كتابة معادلة المماس عند هذه النقطة**

$$y = f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{9}{2}x + 2}$$

5. رسم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$



**6. المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) = -\frac{1}{2}x + m$**

ندرس تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيمات الموازية للمستقيم $(d)$

- $m \in ]-\infty; 0[$ : تقبل المعادلة حلين موجبين
- $m = 0$ : تقبل المعادلة حلا وحيدا موجبا
- $m \in ]0; +\infty[$ : تقبل المعادلة حلا موجبا وآخر سالبا

**حل التمرين 23 :**

I- ليكن كثير الحدود $P(x)$ المعرّف كما يلي : $P(x) = 3x^3 - x - 2$

**1. حساب $P(1)$ وتحليل $P(x)$**

$$P(1) = 0 \Rightarrow P(x) = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$$

**2. استنتاج إشارة كثير الحدود $P(x)$**

بما أنّ $3x^2 + 3x + 2 > 0$ ، فإنّ إشارة $P(x)$ من إشارة $(x-1)$ ، منه:

$$x \in ]-\infty; 1[ : P(x) < 0; x \in [1; +\infty[ : P(x) \geq 0$$

**II- $g(x) = x^3 - x + 1 - 2\ln x$ ، $Dg = ]0; +\infty[$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^3 - x + 1 - 2\ln x = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 - x + 1 - 2\ln x = \lim_{x\to+\infty} x\left(x^2 - 1 + \frac{1}{x} - 2\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\right)$$

$$= \boxed{+\infty}$$

$$g'(x) = 3x^2 - 1 - \frac{2}{x} = \frac{3x^3 - x - 2}{x} = \boxed{\frac{P(x)}{x}}$$

$x \in ]0;1[ : P(x) < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$ الدالة $g$ متناقصة

$x \in [1;+\infty[ : P(x) \geq 0 \Rightarrow g'(x) \geq 0$ الدالة $g$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $1$ | ↗ | $+\infty$ |

**1. استنتاج إشارة $g(x)$**

من جدول تغيرات الدالة $g$ ، نستنتج أنّ $g(x) > 0$

**III- $Df = ]0;+\infty[$ ، $f(x) = x + 1 + \frac{x+\ln x}{x^2}$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x + 1 + \frac{x + \ln x}{x^2} \begin{matrix} \to -\infty \\ \to 0^+ \end{matrix} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + 1 + \frac{x + \ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} x + 1 + \frac{1}{x} + \underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_{\to 0} = \boxed{+\infty}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 2x(x + \ln x)}{x^4} = 1 + \frac{x + 1 - 2x - 2\ln x}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{x^3 - x + 1 - 2\ln x}{x^3} = \boxed{\frac{g(x)}{x^3}}$$

بما أنّ $g(x) > 0$ ، فإنّ $f'(x) > 0$ ، منه الدالة $f$ متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

**2. بيان أنّ : $(d): y = x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} + \underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_{\to 0} = \boxed{0}$$

منه، $(d): y = x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)

**3. بيان أنّ المستقيم $(d)$ يقطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$ حيث : $0,56 < \alpha < 0,57$**

$$f(x) = (x+1) \Rightarrow f(x) - (x+1) = 0 \Rightarrow \frac{x + \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow x + \ln x = 0$$

لتكن $h$ الدالة المعرّفة على $]0;+\infty[$ بـ : $h(x) = x + \ln x$ ، منه : $h'(x) = 1 + \frac{1}{x}$

الدالة $h$ مستمرة ومتزايدة تماما على $]0;+\infty[$ و $\underbrace{h(0,56)}_{-0,02} \times \underbrace{h(0,57)}_{0,008} < 0$ ، منه تقبل المعادلة $h(x) = 0$ حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $0,56 < \alpha < 0,57$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

ومنه نستنتج أنّ المستقيم $(d)$ يقطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$

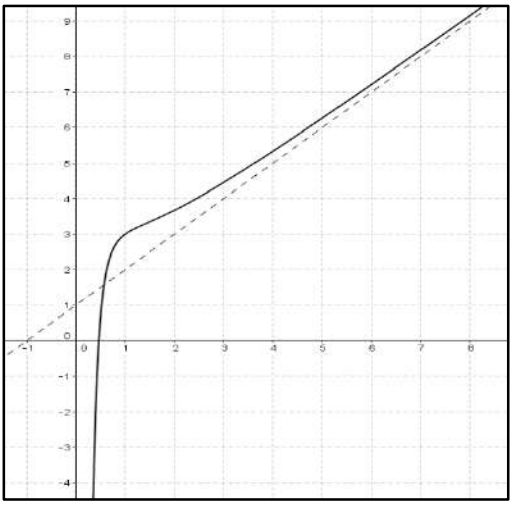
استنتاج وضعية المنحنى ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة إلى $(d)$

$x \in ]0;\alpha[ : h(x) < 0 \Rightarrow f(x) - (x+1) < 0 \Rightarrow (Cf)$ تحت $(d)$

$x \in ]\alpha;+\infty[ : h(x) > 0 \Rightarrow f(x) - (x+1) > 0 \Rightarrow (Cf)$ فوق $(d)$

يتقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) والمستقيم $(d)$ عند النقطة $(\alpha; \alpha + 1)$

**4. رسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$)**



**حل التمرين 24 :**

$\boldsymbol{Df = ]-2;+\infty[}$ ، $\boldsymbol{f(x) = 1 + x\ln(x+2)}$

**1. حساب $\boldsymbol{f'(x)}$ و $\boldsymbol{f"(x)}$**

$$f'(x) = \ln(x+2) + \frac{x}{x+2} \; ; f''(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{x+4}{(x+2)^2}$$

**2. تعيين إشارة $\boldsymbol{f"(x)}$ ، ثمّ دراسة اتجاه تغير الدالة $\boldsymbol{f'}$**

بما أنّ $x > -2$ فإنّ $f''(x) > 0$ ، منه الدالة $f'$ متزايدة تماما على $]-2;+\infty[$

**3. بيان أنّ المعادلة $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ تقبل حلا وحيدا $\boldsymbol{\alpha}$ في المجال $\boldsymbol{]-0,6;-0,5[}$**

الدالة $f'$ مستمرة ورتيبة على $]-0,6;-0,5[$ و $\underbrace{f'(-0,6)}_{-0,09} \times \underbrace{f'(-0,5)}_{0,07} < 0$ ،

منه تقبل المعادلة $f'(x) = 0$ حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-0,6;-0,5[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

**استنتاج إشارة $\boldsymbol{f'(x)}$**

$x \in ]-2;\alpha[ : f'(x) < 0 \; ; \; x \in [\alpha;+\infty[ : f'(x) \geq 0$

**4. دراسة تغيرات الدالة $\boldsymbol{f}$**

$$\lim_{x \to -2^{>}} f(x) = \lim_{x \to -2^{>}} 1 + x\ln(x+2) = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 + x\ln(x+2) = \boxed{+\infty}$$

$x \in ]-2;\alpha[ : f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x \in [\alpha;+\infty[ : f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-2$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

**5. بيان أنّ $f(\alpha)=\frac{-\alpha^2+\alpha+2}{\alpha+2}$**

$$f'(\alpha)=0 \Rightarrow \ln(\alpha+2)+\frac{\alpha}{\alpha+2}=0 \Rightarrow \ln(\alpha+2)=-\frac{\alpha}{\alpha+2}$$

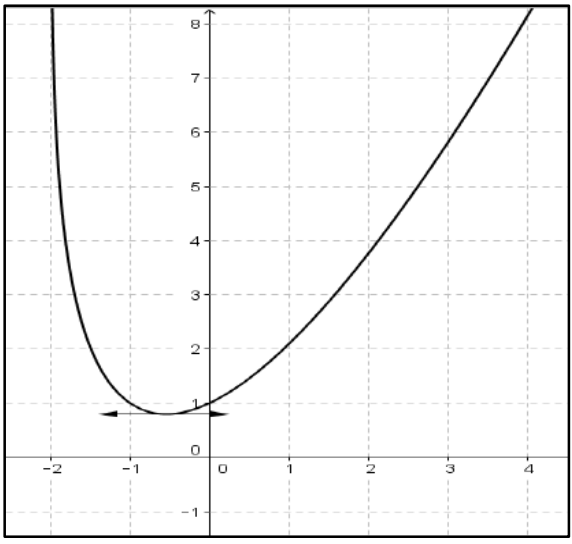
$$f(\alpha)=1+\alpha\ln(\alpha+2)=1+\alpha\left(-\frac{\alpha}{\alpha+2}\right)=1-\frac{\alpha^2}{\alpha+2}=\frac{-\alpha^2+\alpha+2}{\alpha+2}$$

**استنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$**

$$-0{,}6<\alpha<-0{,}5 \Rightarrow \begin{cases} -0{,}36<-\alpha^2<-0{,}25 \\ 1{,}4<\alpha+2<1{,}5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1{,}04<-\alpha^2+\alpha+2<1{,}25 \\ 0{,}67<\dfrac{1}{\alpha+2}<0{,}71 \end{cases} \Rightarrow \boxed{0{,}7<f(\alpha)<0{,}9}$$

**6. رسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$)**



**حل التمرين 25 :**

**I- $D_g = ]1;+\infty[$ ، $g(x) = 2x - (x-1)\ln(x-1)$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} 2x - (x-1)\ln(x-1) = \lim_{X\to 0} 2(X+1) - \underbrace{X\ln X}_{\to 0}$$

$$= \boxed{2} \; ; \; (X = x-1)$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} 2x - (x-1)\ln(x-1) = \boxed{-\infty}$$

$$g'(x) = 2 - \ln(x-1) - \frac{x-1}{x-1} = \boxed{1 - \ln(x-1)}$$

$$g'(x) \geq 0 \Rightarrow 1 - \ln(x-1) \geq 0 \Rightarrow \ln(x-1) \leq 1 \Rightarrow x - 1 \leq e$$

$$\Rightarrow x \leq e + 1$$

$x \in ]1; e+1]: g'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

$x \in ]e+1; +\infty[: g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | 1 | | $e+1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $2$ | ↗ | $e+2$ | ↘ | $-\infty$ |

**2. بيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]e+1; e^3+1[$**

الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]e+1; e^3+1[$

و $\underbrace{g(e+1)}_{\approx 4,7} \times \underbrace{g(e^3+1)}_{\approx -18} < 0$ ، منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$

على المجال $]e+1; e^3+1[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**استنتاج إشارة $g(x)$**

$x \in ]1; \alpha[ \Rightarrow g(x) > 0 \; ; \; x \in ]\alpha; +\infty[ \Rightarrow g(x) < 0 \; ; g(\alpha) = 0$

**II- $D_f = ]1;+\infty[$ ، $f(x) = \frac{\ln(x^2-1)}{x}$**

**1. حساب $f'(x)$ ، وبيان أنّ إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $g(x^2)$**

$$f'(x) = \frac{x\left(\frac{2x}{x^2-1}\right) - \ln(x^2-1)}{x^2} = \frac{2x^2 - (x^2-1)\ln(x^2-1)}{x^2(x^2-1)}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}}$$

بما أنّ $x>1$ ، فإنّ $x^2-1>0$ ، منه إشارة $f'(x)$ هي من إشارة $g(x^2)$

**2. دراسة تغيرات الدالة $f$ ، ثمّ استنتاج إشارة $f(x)$**

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 1}} f(x)=\lim_{\substack{>\\ x\to 1}} \frac{\ln(x^2-1)}{x}=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2-1)}{x}=\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln[(x-1)(x+1)]}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x-1)+\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{\ln(x-1)}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x}}_{\to 0}=\boxed{0}$$

$$f'(x)=\frac{g(x^2)}{x^2(x^2-1)}$$

$x^2\in\,]1;\alpha[\Rightarrow x\in\,]1;\sqrt{\alpha}[\,:g(x^2)>0\Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x^2\in\,]\alpha;+\infty[\Rightarrow x\in\,]\sqrt{\alpha};+\infty[\,:g(x^2)<0\Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$$f'(\sqrt{\alpha})=\frac{g(\alpha)}{\alpha(\alpha-1)}=0$$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $1$ | | $\sqrt{\alpha}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(\sqrt{\alpha})$ | ↘ | $0$ |

**III- $Dh=\,]0;+\infty[$ ، $h(x)=f(e^x)$**

**1. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ و $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}} h(x)$**

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to+\infty} h(x)=0}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}} e^x=1\\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty\end{cases}\Rightarrow\boxed{\lim_{\substack{>\\ x\to 0}} h(x)=-\infty}$$

**2. دراسة اتجاه تغير الدالة $h$**

$h'(x) = e^x f'(e^x)$

$e^x \in ]1;\sqrt{\alpha}[ \Rightarrow x \in ]0;\ln\sqrt{\alpha}[ : f'(e^x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $h$ متزايدة

$e^x \in ]\sqrt{\alpha};+\infty[ \Rightarrow x \in ]\ln\sqrt{\alpha};+\infty[ : f'(e^x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $h$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $h$**

| $x$ | $0$ | | $ln\sqrt{\alpha}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $h(ln\sqrt{\alpha})$ | ↘ | $0$ |

**3. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي موجب لدينا : $h(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$**

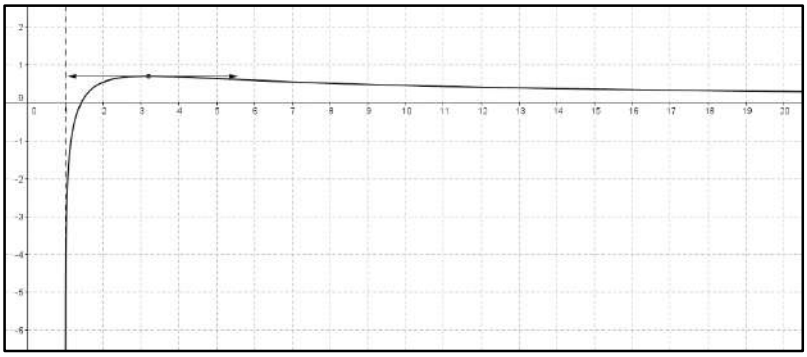
من جدول تغيرات الدالة $h$ نلاحظ أنّه من أجل كل عدد حقيقي موجب: $h(x) \leq h(\ln\sqrt{\alpha})$

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow 2\alpha - (\alpha-1)\ln(\alpha-1) = 0 \Rightarrow \ln(\alpha-1) = \frac{2\alpha}{\alpha-1}$$

$$h\left(\ln\sqrt{\alpha}\right) = f\left(e^{\ln\sqrt{\alpha}}\right) = f\left(\sqrt{\alpha}\right) = \frac{\ln(\alpha-1)}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$$

منه، نستنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي موجب لدينا : $h(x) \leq \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha-1}$

**4. رسم المنحنى ($\mathcal{C}_f$). (نأخذ $\alpha = 10$)**



**حل التمرين 26 :**

I- لتكن الدالة $g$ المعرّفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = x - (x+1)\ln(x+1) \; ; x > -1 \\ g(-1) = -1 \end{cases}$$

**1. دراسة قابلية الاشتقاق للدالة $g$ عند $x_0 = -1$**

$$\lim_{x \to -1^{>}} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} = \lim_{x \to -1^{>}} \frac{x+1-(x+1)\ln(x+1)}{x+1}$$
$$= \lim_{x \to -1^{>}} 1 - \ln(x+1) = \boxed{+\infty}$$

منه، الدالة $g$ غير قابلة للاشتقاق عند $x_0 = -1$

**تفسير النتيجة هندسيا**

يقبل $(\mathscr{C}_g)$ نصف مماس عمودي متجها إلى الأعلى عند النقطة ذات الفاصلة $-1$

**2. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x - (x+1)\ln(x+1)$$
$$= \lim_{x \to +\infty} (x+1)\left[\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)\right] = \boxed{-\infty}$$

$$g'(x) = 1 - \ln(x+1) - \frac{x+1}{x+1} = \boxed{-\ln(x+1)}$$

$g'(x) = 0 \Rightarrow -\ln(x+1) = 0 \Rightarrow x+1 = 1 \Rightarrow x = 0$

$x \in ]-1;0[ : g'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

$x \in [0;+\infty[ : g'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-1$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-\infty$ |

**استنتاج إشارة $g(x)$**

من جدول تغيرات الدالة $g$ نستنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq -1 : g(x) \leq 0$

**II- $Df = \mathbb{R}$ ، $f(x) = e^{-x}\ln(e^x+1)$**

**1. برهان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x) = \frac{g(e^x)}{e^x(e^x+1)}$**

$$f'(x) = -e^{-x}\ln(e^x+1) + e^{-x}\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) = -\frac{\ln(e^x+1)}{e^x} + \frac{1}{e^x+1}$$
$$= \frac{e^x - (e^x+1)\ln(e^x+1)}{e^x(e^x+1)} = \boxed{\frac{g(e^x)}{e^x(e^x+1)}}$$

**استنتاج إشارة $f'(x)$**

بما أنّ $e^x > 0$ فإنّ $g(e^x) < 0$ أي $f'(x) < 0$ ، منه الدالة $f$ متناقصة تماما

**2. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}\ln(e^x+1) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(e^x+1)}{e^x}$$

$$= \lim_{\substack{X\to 0\\ >}} \frac{\ln(X+1)}{X} = \boxed{1}\,;(X=e^x)$$

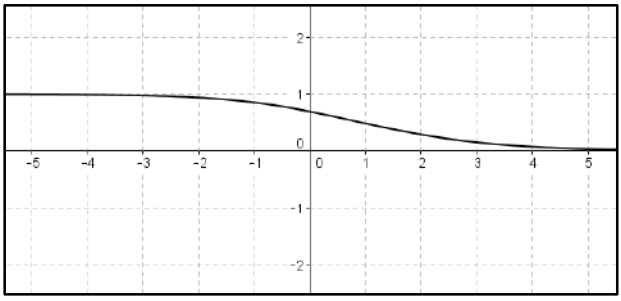
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\ln(e^x+1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x+1)}{e^x}$$

$$= \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X+1)}{X} = \boxed{0}\,;(X=e^x)$$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | 1 | ↘ | 0 |

**3. رسم المنحنى ($\mathcal{C}_f$)**




**حل التمرين 27 :**

**I- $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$ ، $Dg = ]0;+\infty[$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x^2 + 2 - 2\ln x = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 + 2 - 2\ln x = \lim_{x\to+\infty} x\left(x + \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x}\right) = \boxed{+\infty}$$

$$g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \boxed{\frac{2(x^2-1)}{x}}$$

$x \in ]0;1[ : g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

$x \in [1;+\infty[ : g'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $3$ | ↗ | $+\infty$ |

**2. بيان أنّه من أجل كل $x > 0$ فإنّ $g(x) > 0$**

من جدول تغيرات الدالة $g$ ، نستنتج أنّه من أجل كل $x > 0$ فإنّ $g(x) \geq 3$

**II- $Df = ]0;+\infty[$ ، $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\ln x}{x}$**

**1. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} + \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \frac{x}{2} + \frac{\ln x \to -\infty}{x \to 0^+} = \boxed{-\infty}$$

استنتاج أنّ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما $(\Delta)$ معادلته $y = \frac{x}{2}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = -\infty \Rightarrow$ مستقيم مقارب عمودي $x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow (+\infty)$ مستقيم مقارب مائل بجوار $y = \frac{x}{2}$

**دراسة وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$**

$$f(x) - \frac{x}{2} = \frac{\ln x}{x}$$

$x \in ]0;1[ : \ln x < 0 \Rightarrow f(x) - \frac{x}{2} < 0 \Rightarrow (\Delta)$ تحت $(Cf)$

$x \in [1;+\infty[ : \ln x \geq 0 \Rightarrow f(x) - \frac{x}{2} \geq 0 \Rightarrow (\Delta)$ فوق $(Cf)$

**2. دراسة اتجاه تغير الدالة $f$**

$$f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{x}(x)-\ln x}{x^2}=\frac{1}{2}+\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2+2-2\ln x}{2x^2}=\boxed{\frac{g(x)}{2x^2}}$$

بما أنّ $g(x)>0$ فإنّ $f'(x)>0$ ، منه الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

**3. بيان أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها $\alpha$ حيث : $0,7<\alpha<0,8$**

الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على المجال $]0,7;0,8[$ و $\underbrace{f(0,7)}_{\approx -0,16}\times\underbrace{f(0,8)}_{\approx 0,12}<0$ ، منه

المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $0,7<\alpha<0,8$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، منه يقطع ($\mathscr{C}_f$) محور الفواصل في النقطة التي فاصلتها $\alpha$

**4. إثبات أنّ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل نقطة انعطاف $\omega$ يُطلب تعيينها**

$$f''(x)=\frac{2x^2\left(2x-\frac{2}{x}\right)-4x(x^2+2-2\ln x)}{4x^4}=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow 2\ln x-3=0\Rightarrow \ln x=\frac{3}{2}\Rightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$$

منه ، يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) يقبل نقطة انعطاف $\boxed{\omega\left(e^{\frac{3}{2}};f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)\right)}$

**5. كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) والذي يوازي ($\Delta$)**

$$f'(x)=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{x^2+2-2\ln x}{2x^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow 2x^2+4-4\ln x=2x^2$$

$$\Rightarrow 4-4\ln x=0\Rightarrow \ln x=1\Rightarrow x=e$$

$$y=f'(e)(x-e)+f(e)=\frac{1}{2}(x-e)+\frac{e}{2}+\frac{1}{e}\Rightarrow\boxed{(T):y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{e}}$$

**6. دراسة قابلية المنحنى ($\mathscr{C}_f$) لمماس يشمل المبدأ**

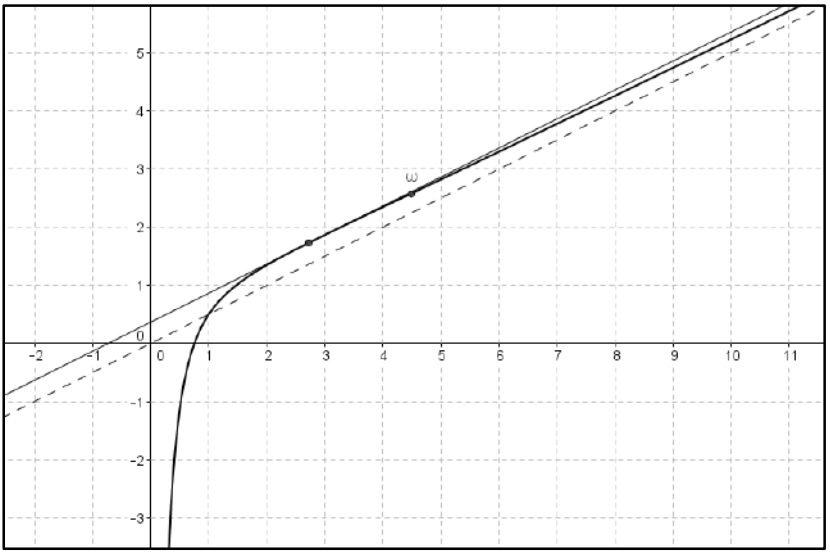
ليكن $(T_a)$ المماس للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) عند النقطة ذات الفاصلة $a$ والذي يشمل المبدأ

$(T_a): y = f'(a)(x-a) + f(a)\ ; O \in (T_a) \Rightarrow f'(a)(-a) + f(a) = 0$

$\Rightarrow \dfrac{a^2 + 2 - 2\ln a}{2a^2}(-a) + \dfrac{a}{2} + \dfrac{\ln a}{a} = 0 \Rightarrow \dfrac{4\ln a - 2}{2a} = 0$

$\Rightarrow 4\ln a - 2 = 0 \Rightarrow \ln a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{e}}$

**7. رسم (Δ) ، (T) والمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**




**8. المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة : $mx - \ln x = 0$**

$mx - \ln x = 0 \Rightarrow m = \dfrac{\ln x}{x} \Rightarrow \dfrac{x}{2} + m = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\ln x}{x} \Rightarrow \boxed{\dfrac{x}{2} + m = f(x)}$

ندرس تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) مع المستقيم $(d): \frac{x}{2} + m$ الموازي لـ (Δ) و (T)

- $m \leq 0$ : المعادلة تقبل حلا وحيدا
- $0 < m < \frac{1}{e}$ : المعادلة تقبل حلين
- $m = \frac{1}{e}$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا
- $m > \frac{1}{e}$ : المعادلة لا تقبل حلولا

**III- $Dh = \mathbb{R}^*$ ، $h(x) = \frac{x}{2} + \frac{\ln|x|}{x}$**

- **إثبات أنّ الدالة $h$ فردية**

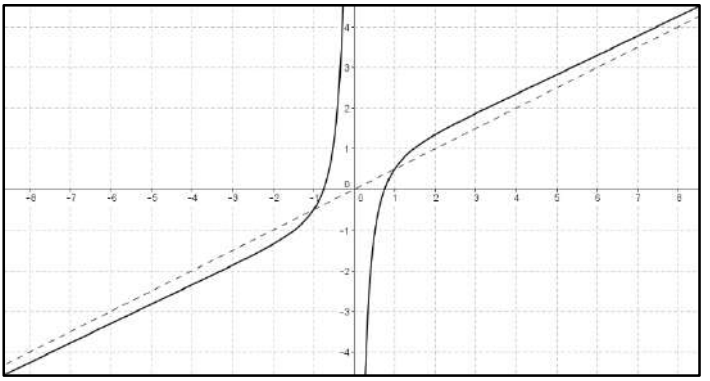
$Dh$ متناظر بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل $x$ من $Dh$ لدينا :

$$h(-x)=\frac{-x}{2}+\frac{\ln|-x|}{-x}=-\frac{x}{2}-\frac{\ln|x|}{x}=-\left(\frac{x}{2}+\frac{\ln|x|}{x}\right)=-h(x)$$

منه، الدالة $h$ فردية

**رسم ($\mathscr{C}_h$)**

على المجال $]0;+\infty[$ لدينا $h(x)=f(x)$ ، منه ($\mathscr{C}_h$) متطابق مع ($\mathscr{C}_f$) ، ونكمل رسم ($\mathscr{C}_h$) على المجال $]0;-\infty[$ بالتناظر المركزي بالنسبة للمبدأ لأنّ الدالة $h$ فردية



**حل التمرين 28 :**

$$Df=[-4;+\infty[\ ،\ \begin{cases} f(x)=x^2+2x-2\ln(1-2x)\ ;\ -4\le x\le 0 \\ f(x)=\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)\ ;x>0 \end{cases}$$

**1. حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{f(x)-f(0)}{x}$. نضع $X=-2x$ ، منه $x=-\frac{1}{2}X$**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}\frac{x^2+2x-2\ln(1-2x)}{x}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}}x+2-2\frac{\ln(1-2x)}{x}=\lim_{\substack{X\to 0\\ >}}-\frac{1}{2}X+2+4\underbrace{\frac{\ln(1+X)}{X}}_{\to 1}=\boxed{6}$$

- **إثبات أنّ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{2}$. نضع $X=e^x$ منه $x=\ln X$**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}{x}=\lim_{X\to 1}\frac{\ln\left(\frac{1+X}{2}\right)}{\ln X}=\lim_{X\to 1}\frac{\frac{\ln\left(\frac{1+X}{2}\right)}{X-1}}{\frac{\ln X}{X-1}}$$

$\lim_{X\to 1}\frac{\ln X}{X-1}=1$ ; $\lim_{X\to 1}\frac{\ln\left(\frac{1+X}{2}\right)}{X-1}=\lim_{X\to 1}\frac{h(X)-h(1)}{X-1}=h'(1)=\boxed{\frac{1}{2}}$

حيث : $h(X)=\ln\left(\frac{1+X}{2}\right)$ و $h'(X)=\frac{X}{1+X}$.

منه، نستنتج أنّ $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{2}$

- يمكننا القول أنّ الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق عند الصفر ويقبل المنحنى ($\mathscr{C}_f$) عند المبدأ نصفي مماسين.

**2. بيان أنّ $f(x)=x-\ln 2+\ln(1+e^{-x})$ لمّا $x>0$**

$$f(x)=\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)=\ln(1+e^x)-\ln 2=\ln[e^x(e^{-x}+1)]-\ln 2$$

$$=\ln(e^x)+\ln(e^{-x}+1)-\ln 2=\boxed{x-\ln 2+\ln(1+e^{-x})}$$

- **استنتاج أنّ المستقيم $(\Delta): y=x-\ln 2$ مستقيم مقارب لـ ($\mathscr{C}_f$) عند $+\infty$**

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-(x-\ln 2)=\lim_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})=0$$

منه، نستنتج أنّ المستقيم $(\Delta): y=x-\ln 2$ مستقيم مقارب لـ ($\mathscr{C}_f$) عند $+\infty$

**3. دراسة تغيرات الدالة $f$ على المجال $]-4;+\infty[$**

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)=+\infty$$

**أ. دراسة اتجاه تغير الدالة $f$ على المجال $[-4;0]$**

$$f'(x)=2x+2-2\left(-\frac{2}{1-2x}\right)=2x+2+\frac{4}{1-2x}$$

$$=\frac{(2x+2)(1-2x)+4}{1-2x}=\frac{4x^2+2x-6}{2x-1}=\boxed{\frac{2(x-1)(2x+3)}{2x-1}}$$

| $x$ | $-4$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | |
| $2x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $2x-1$ | | $-$ | | $-$ | |
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**ب. دراسة اتجاه تغير الدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$**

$$f'(x) = \frac{\frac{e^x}{2}}{\frac{1+e^x}{2}} = \boxed{\frac{e^x}{1+e^x}}$$

بما أنّ $f'(x) > 0$ ، فإنّ الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-4$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ |
| $f(x)$ | $f(-4)$ | ↘ | $f\left(-\frac{3}{2}\right)$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

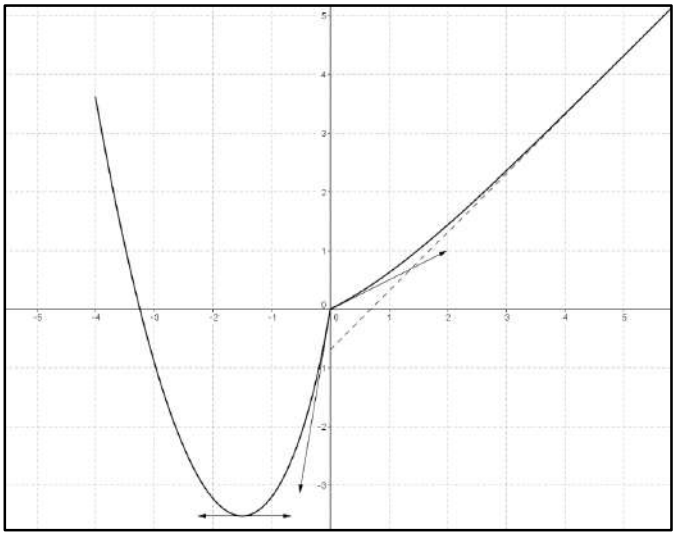
- **بيان أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين**

$f(0) = 0\,;\, f(-4) \approx 3{,}6\,;\, f\left(-\frac{3}{2}\right) \approx -3{,}5$

الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على المجال $\left]-4;-\frac{3}{2}\right[$ و $f(-4) \times f\left(-\frac{3}{2}\right) < 0$ ، منه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $\left]-4;-\frac{3}{2}\right[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

$f(-3) \approx -0{,}9\,;\, f\left(-\frac{7}{2}\right) \approx 1{,}1 \Rightarrow \boxed{-\frac{7}{2} < \alpha < -3}$

- **رسم المستقيم (Δ) والمنحنى ($\mathscr{C}_f$) (وحدة الرسم $2cm$)**



**4.** $(\boldsymbol{m \in \mathbb{R}^*})$ ، $\boldsymbol{Dg_m = [-4;0]}$ ، $\boldsymbol{g_m(x) = 1 + mf(x)}$

- **بيان أنّ جميع المنحنيات $(\mathscr{C}_m)$ الممثلة للدالة $g_m$ تشمل نقطتين ثابتتين $(0\,;1)$ و $(\alpha\,;1)$**

$$g_m(0) = 1 + m\underbrace{f(0)}_{0} = 1\ ;\ g_m(\alpha) = 1 + m\underbrace{f(\alpha)}_{0} = 1$$

منه، جميع المنحنيات $(\mathscr{C}_m)$ الممثلة للدالة $g_m$ تشمل نقطتين ثابتتين $(1\ ;\ 0)$ و $(\alpha\ ;\ 1)$

**حل التمرين 29 :**

**I-** $\boldsymbol{Dg = \mathbb{R}}$ ، $\boldsymbol{g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)}$

**1. حساب $g'(x)$ وبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $g'(x) < 0$**

$$g'(x) = \frac{e^x(1+2e^x) - 2e^{2x}}{(1+2e^x)^2} - \frac{2e^x}{1+2e^x} = \frac{e^x - 2e^x(1+2e^x)}{(1+2e^x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{e^x[1-2(1+2e^x)]}{(1+2e^x)^2} = \frac{e^x(-4e^x-1)}{(1+2e^x)^2} = \boxed{-\frac{e^x(4e^x+1)}{(1+2e^x)^2}}$$

بما أنّ العبارات $e^x$ ، $4e^x + 1$ و $(1+2e^x)^2$ موجبة تماما ، نستنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $g'(x) < 0$

**2. تعيين نهاية الدالة $g$ عند $-\infty$ و $+\infty$**

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x) = \boxed{0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{-x}+2} - \ln(1+2e^x) = \boxed{-\infty}$$

**3. جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ ↘ | $-\infty$ |

**استنتاج إشارة $g(x)$**

من جدول تغيرات الدالة $g$ ، نستنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $g(x) < 0$

**II- $Df = \mathbb{R}$ ، $f(x) = e^{-2x}\ln(1+2e^x)$**

**1. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ : $f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$**

$$f'(x) = -2e^{-2x}\ln(1+2e^x) + e^{-2x}\left(\frac{2e^x}{1+2e^x}\right)$$

$$= 2e^{-2x}\left[\frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)\right] = \boxed{2e^{-2x}g(x)}$$

2. **تعيين نهاية الدالة $f$ عند $-\infty$ و $+\infty$ .** نضع : $X = 1+2e^x \Rightarrow e^x = \frac{X-1}{2}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-2x}\ln(1+2e^x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+2e^x)}{e^{2x}}$$

$$= \lim_{\substack{X\to1\\ >}}\frac{\ln X}{\left(\frac{X-1}{2}\right)^2} = \lim_{\substack{X\to1\\ >}} 4\frac{\ln X}{(X-1)^2} = \lim_{\substack{X\to1\\ >}}\underbrace{\frac{4}{X-1}}_{\to+\infty}\times\underbrace{\frac{\ln X}{X-1}}_{\to1} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-2x}\ln(1+2e^x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+2e^x)}{e^{2x}}$$

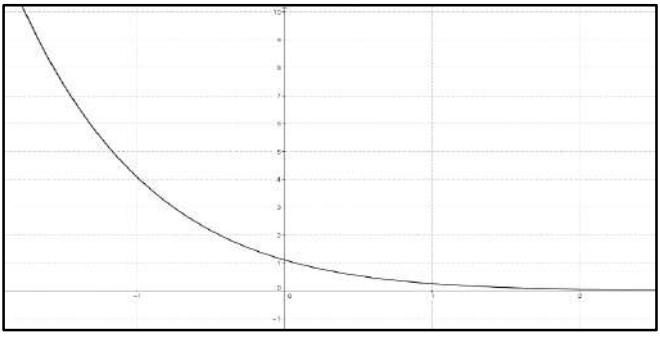
$$= \lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{\left(\frac{X-1}{2}\right)^2} = \lim_{X\to+\infty} 4\frac{\ln X}{(X-1)^2} = \lim_{X\to+\infty}\underbrace{\frac{4}{X-1}}_{\to0}\times\underbrace{\frac{\ln X}{X-1}}_{\to0} = \boxed{0}$$

**3. جدول تغيرات الدالة $f$**

بما أنّ $f'(x) = 2e^{-2x}\,g(x)$ ، فإنّ $f'(x) < 0$ ، منه الدالة $f$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $0$ |

**4. رسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$**



**III- $(E): y' + 2y = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}$**

**1. التحقق أنّ الدالة $f$ المدروسة في الجزء الثاني حل للمعادلة $(E)$**

$$f' + 2f = 2e^{-2x}\left[\frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)\right] + 2e^{-2x}\ln(1+2e^x)$$

$$= 2e^{-2x}\left(\frac{e^x}{1+2e^x}\right) = \boxed{2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}}$$

منه، الدالة $f$ حل للمعادلة $(E)$

**2. بيان أنّ $h$ هي حل للمعادلة $(E)$ إذا وفقط إذا $h - f$ حل المعادلة التفاضلية:**

**$(E'): y' + 2y = 0$**

- نبرهن أنّه إذا كانت $h$ حلا للمعادلة $(E)$ فإنّ $h - f$ حل للمعادلة $(E')$

$$h \in S_{(E)} \Rightarrow h' + 2h = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x} \Rightarrow h' + 2h = \underbrace{(f' + 2f)}_{2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}}$$

$$\Rightarrow (h-f)' + 2(h-f) = 0 \Rightarrow \boxed{h - f \in S_{(E')}}$$

- نبرهن أنّه إذا كانت $h - f$ حلا للمعادلة $(E')$ فإنّ $h$ حل للمعادلة $(E)$

$$h - f \in S_{(E')} \Rightarrow (h-f)' + 2(h-f) = 0$$

$$\Rightarrow (h' + 2h) - \underbrace{(f' + 2f)}_{2\frac{e^{-x}}{1+2e^x}} = 0 \Rightarrow h' + 2h = 2\frac{e^{-x}}{1+2e^x} \Rightarrow \boxed{h \in S_{(E)}}$$

**3. حل المعادلة التفاضلية $(E')$**

$$y' + 2y = 0 \Rightarrow y' = -2y \Rightarrow y = ce^{-2x}$$

**استنتاج حلول المعادلة $(E)$**

$$h - f \in S_{(E')} \Rightarrow h - f = ce^{-2x} \Rightarrow h = f + ce^{-2x}$$

$$\Rightarrow h = e^{-2x}\ln(1+2e^x) + ce^{-2x} \Rightarrow \boxed{h = e^{-2x}[\ln(1+2e^x) + c]}$$

**حل التمرين 30:**

**I- $Df = \mathbb{R}$ ، $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} - 4(x-1)e^x - 2$**

**1. أ. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x}}_{\to 0} - 4\underbrace{(x-1)e^x}_{\to 0} - 2 = \boxed{-2}$$

**تفسير النتيجة هندسيا**

يقبل المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y = -2$ بجوار $-\infty$

**ب. بيان أنّ :** $\boldsymbol{f(x) = (x-1)e^x(e^x-4) + \frac{1}{2}(e^{2x}-4)}$

$$(x-1)e^x(e^x-4) + \frac{1}{2}(e^{2x}-4) = (x-1)e^{2x} - 4(x-1)e^x + \frac{1}{2}e^{2x} - 2$$

$$= e^{2x}\left(x - 1 + \frac{1}{2}\right) - 4(x-1)e^x - 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)e^{2x} - 4(x-1)e^x - 2 = f(x)$$

**حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-1)e^x(e^x-4) + \frac{1}{2}(e^{2x}-4) = \boxed{+\infty}$$

**2. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$f'(x) = e^{2x} + 2e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) - 4e^x - 4(x-1)e^x = 2xe^{2x} - 4xe^x$$

$$\boxed{f'(x) = 2xe^x(e^x-2)}$$

$e^x - 2 = 0 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $ln2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $e^x-2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

$x \in ]-\infty; 0[ \cup ]\ln 2 ; +\infty[ : f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x \in [0; \ln 2] : f'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

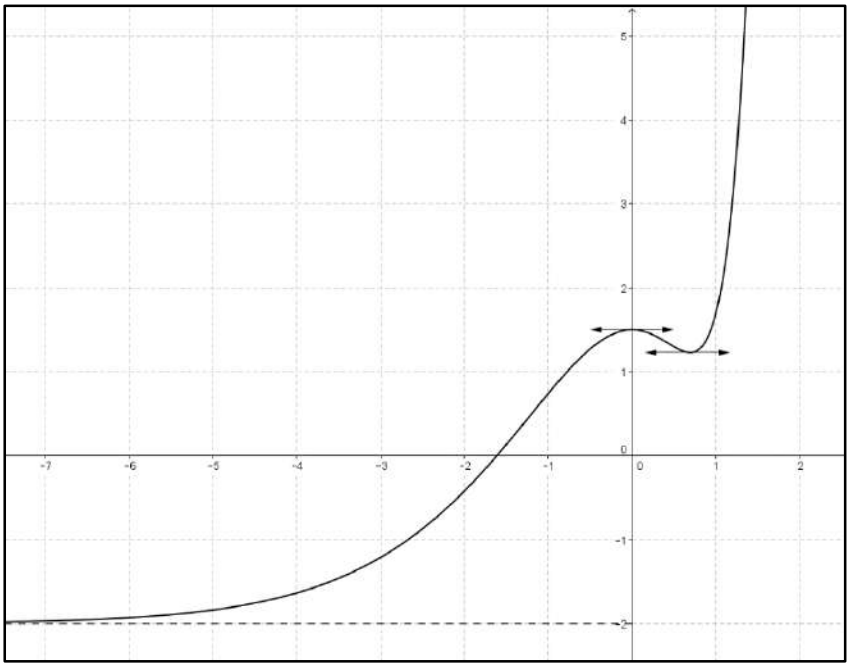
**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $ln2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-2$ | ↗ | $f(0)$ | ↘ | $f(ln2)$ | ↗ | $+\infty$ |

$f(0) = \frac{3}{2}$ ; $f(\ln 2) = -4\ln 2 + 4 \approx 1{,}23$

3. بيان أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها $\alpha$ حيث : $-2 < \alpha < -1$
الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على المجال $]-2;-1[$ و $\underbrace{f(-2)}_{\approx -0,42} \times \underbrace{f(-1)}_{\approx 0,74} < 0$ ، منه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]-2;-1[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، منه يقطع ($\mathscr{C}_f$) محور الفواصل في نقطة فاصلتها $\alpha$ حيث : $-2 < \alpha < -1$

**رسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$)**



II- لتكن $g$ الدالة المعرّفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = (x^2 - 4x)\ln x - \dfrac{1}{2}x^2 + 4x - 2 \; ; x > 0 \\ g(0) = -2 \end{cases}$$

**1. بيان أنّه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ فإنّ : $g(x) = f(\ln x)$**

$$\begin{aligned} f(\ln x) &= \left(\ln x - \tfrac{1}{2}\right)e^{2\ln x} - 4(\ln x - 1)e^{\ln x} - 2 \\ &= \left(\ln x - \frac{1}{2}\right)x^2 - 4(\ln x - 1)x - 2 \\ &= (x^2 - 4x)\ln x - \frac{1}{2}x^2 + 4x - 2 = g(x) \end{aligned}$$

**2. دراسة استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة $g$ عند 0 بقيم كبرى**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \left(x^2-4x\right)\ln x - \frac{1}{2}x^2 + 4x - 2$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \underbrace{x^2\ln x}_{\to 0} - 4\underbrace{x\ln x}_{\to 0} - \frac{1}{2}x^2 + 4x - 2 = \boxed{-2}$$

بما أنّ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = g(0)$، فإنّ الدالة $g$ مستمرة على يمين 0

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\left(x^2-4x\right)\ln x - \frac{1}{2}x^2 + 4x}{x}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} (x-4)\ln x - \frac{1}{2}x + 4 = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x - 4\ln x - \frac{1}{2}x + 4 = \boxed{+\infty}$$

منه، الدالة $g$ غير قابلة للاشتقاق عند 0 بقيم كبرى

تفسير النتيجة هندسيا

المنحنى ($\mathscr{C}_g$) يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة ذات الفاصلة 0

**3. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(\ln x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = \boxed{+\infty}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x}f'(\ln x) = \boxed{\frac{f'(\ln x)}{x}}$$

من اتجاه تغير الدالة $f$ نستنتج أنّ :

$f'(\ln x) > 0$ لمّا $\ln x \in ]-\infty; 0[ \cup ]\ln 2; +\infty[$ ، منه الدالة $g$ متزايدة على المجال $]0; 1[ \cup ]2; +\infty[$.

$f'(\ln x) \leq 0$ لمّا $\ln x \in [0; \ln 2]$ ، منه الدالة $g$ متناقصة على المجال $[1; 2]$.

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-2$ | ↗ | $g(1)$ | ↘ | $g(2)$ | ↗ | $+\infty$ |

$$g(1) = f(0) = \frac{3}{2} \; ; g(2) = f(\ln 2) = -4\ln 2 + 4 \approx 1{,}23$$

**4. بيان أنّ ($\mathscr{C}_g$) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها β يُطلب تعيينها بدلالة $\alpha$**

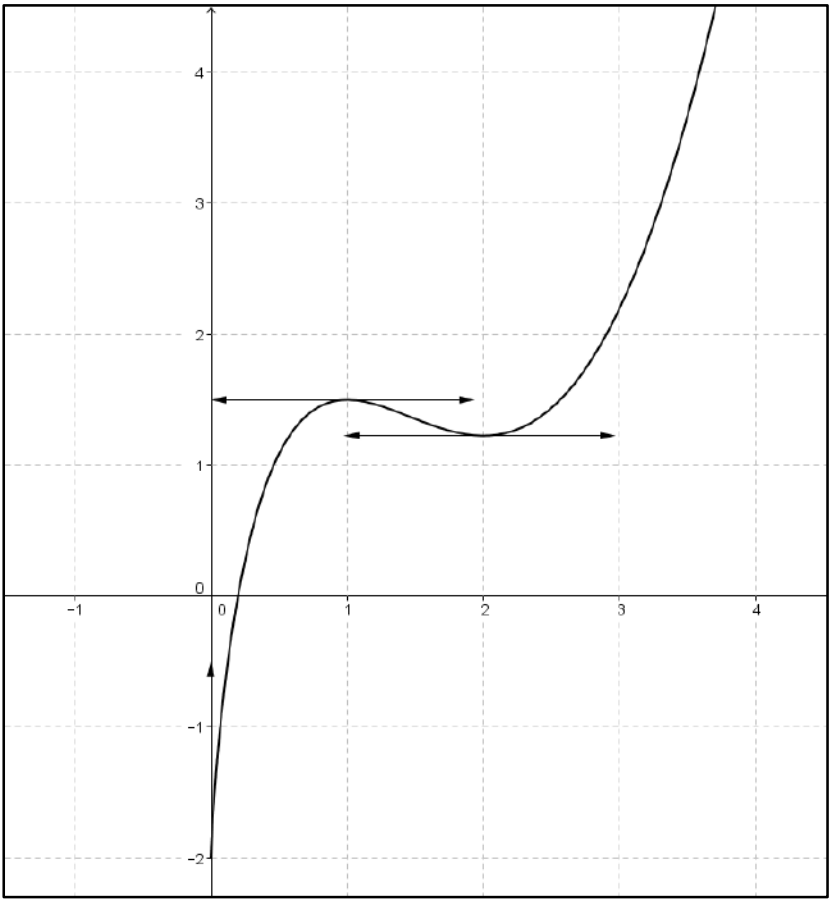
الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]0;1[$ و $\underbrace{g(0)}_{=-2} \times \underbrace{g(1)}_{=1,5} < 0$ ، منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\beta$ على المجال $]0;1[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، منه يقطع ($\mathscr{C}_g$) محور الفواصل في نقطة فاصلتها $\beta$ حيث:

$$g(\beta) = 0 \Rightarrow f(\ln\beta) = 0 \Rightarrow \ln\beta = \alpha \ (\text{لأنّ } f(\alpha) = 0) \Rightarrow \boxed{\beta = e^{\alpha}}$$

**5. استنتاج حصر للعدد β**

$$-2 < \alpha < -1 \Rightarrow e^{-2} < e^{\alpha} < e^{-1} \Rightarrow \boxed{e^{-2} < \beta < e^{-1}}$$

**رسم المنحنى ($\mathscr{C}_g$)**



**حل التمرين 31 :**

**I- $Df = \mathbb{R}$ ، $f(x) = 1 + xe^{-x}$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 1 + xe^{-x} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} 1 - (-xe^{-x}) = \lim_{X\to-\infty} 1 - (Xe^{X})$$

$$= \boxed{1} ; (X = -x)$$

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = \boxed{(1-x)e^{-x}}$$

$x \in ]-\infty; 1[ : 1 - x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x \in [1; +\infty[ : 1 - x \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1+e^{-1}$ | ↘ | $0$ |

**2. بيان أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\beta$ حيث $-0,6 < \beta < -0,5$**

الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على المجال $]-0,6; -0,5[$

و $\underbrace{f(-0,6)}_{\approx -0,1} \times \underbrace{f(-0,5)}_{\approx 0,17} < 0$ ، منه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\beta$

حيث : $-0,6 < \beta < -0,5$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**استنتاج إشارة $f(x)$**

$x \in ]-\infty; \beta[ : f(x) < 0$ ; $x \in ]\beta; +\infty[ : f(x) > 0$ ; $f(\beta) = 0$

**II- $g(x) = \ln(e^x + x)$**

**1. إثبات أنّ $g(x)$ تكتب على الشكل : $g(x) = \ln(1 + xe^{-x}) + x$**

$$g(x) = \ln(e^x + x) = \ln[e^x(1 + xe^{-x})] = \ln e^x + \ln(1 + xe^{-x})$$

$$g(x) = \ln(1 + xe^{-x}) + x$$

**2. بيان أنّ مجموعة تعريف الدالة $g$ هي : $Dg = ]\beta; +\infty[$**

$Dg = \{x \in \mathbb{R} ; 1 + xe^{-x} > 0\}$

$1 + xe^{-x} > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow x \in ]\beta; +\infty[ \Rightarrow \boxed{Dg = ]\beta; +\infty[}$

**3. حساب النهايات حول أطراف مجموعة التعريف**

$g(x) = \ln[f(x)] + x$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to \beta \\ > }} f(x) = 0^+ \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ > }} \ln x = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{\substack{x \to \beta \\ > }} \underbrace{\ln[f(x)]}_{\to -\infty} + x = -\infty \Rightarrow \lim_{\substack{x \to \beta \\ > }} g(x) = \boxed{-\infty}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1} \ln x = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\ln[f(x)]}_{\to 0} + x = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} g(x) = \boxed{+\infty}$$

ملاحظة : يمكننا حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ مباشرة باستعمال عبارة $g(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(e^x + x) = \boxed{+\infty}$$

**4. حساب $g'(x)$**

$$g(x) = \ln(e^x + x) \Rightarrow \boxed{g'(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + x}}$$

بما أنّ $e^x + x > 0$ ، فإنّ $g'(x) > 0$ ، منه الدالة $g$ متزايدة تماما على المجال $]\beta; +\infty[$

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $\beta$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

**5. بيان أنّ المستقيم $(\Delta): y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى ($\mathscr{C}_g$) عند $+\infty$**

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\ln[f(x)]}_{\to 0} = \boxed{0}$$

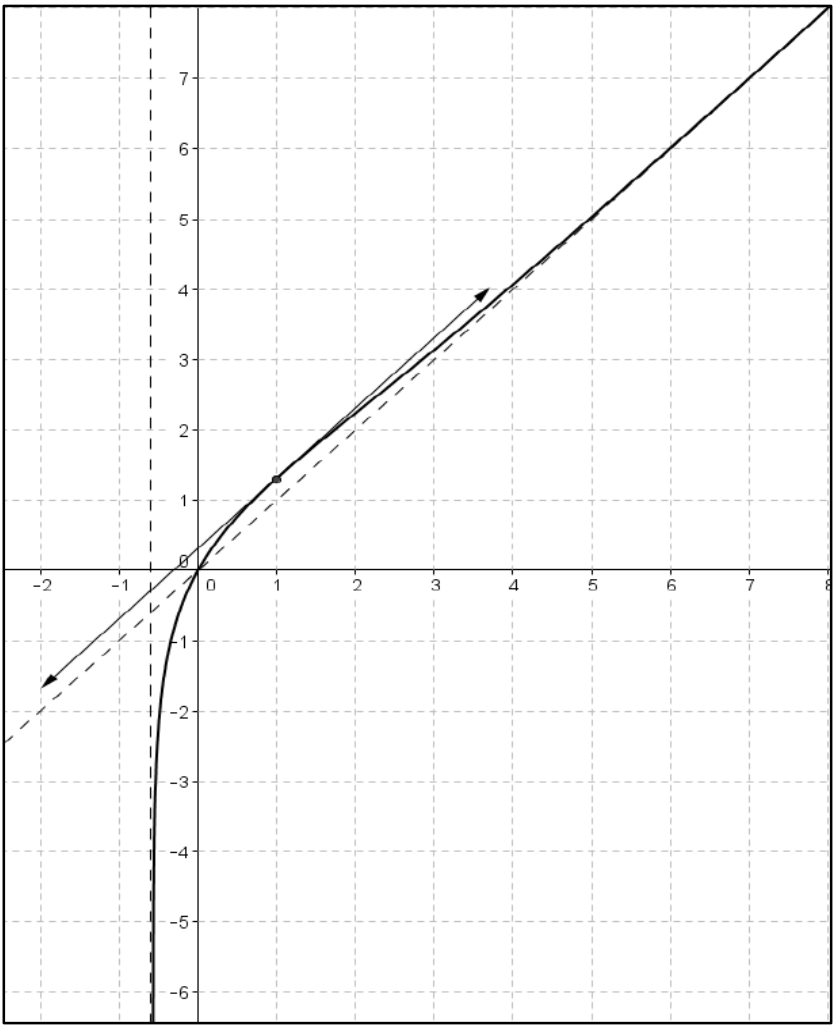
منه، المستقيم $(\Delta): y = x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى ($\mathscr{C}_g$) عند $+\infty$

**6. بيان أنّه يوجد مماس (T) للمنحنى ($\mathscr{C}_g$) يوازي $(\Delta)$ يطلب تعيين عبارته**

$$(T) \parallel (\Delta) \Rightarrow g'(x) = 1 \Rightarrow \frac{e^x + 1}{e^x + x} = 1 \Rightarrow e^x + 1 = e^x + x \Rightarrow x = 1$$

$$y = g'(1)(x - 1) + g(1) \Rightarrow \boxed{(T): y = x - 1 + \ln(e + 1)}$$

**7. انشاء المماس (T) و المنحنى ($\mathscr{C}_g$)**




**8. مناقشة حسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_g$) مع المستقيم $y = x + m$**

- $m \leq 0$ : يقطع المنحنى ($\mathscr{C}_g$) المستقيم $y = x + m$ في نقطة وحيدة
- $0 < m \leq -1 + \ln(e+1)$ : يقطع المنحنى ($\mathscr{C}_g$) المستقيم $y = x + m$ في نقطتين
- $m = -1 + \ln(e+1)$ : يمسّ المنحنى ($\mathscr{C}_g$) المستقيم $y = x + m$ في النقطة $(1; \ln(e+1))$
- $m > -1 + \ln(e+1)$ : المنحنى ($\mathscr{C}_g$) لا يقطع المستقيم $y = x + m$

**حل التمرين 32 :**

**I- لتكن الدالة العددية $g$ المعرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$**

**1. حساب نهايات الدالة $g$ عند $+\infty$ و $0$**

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} x-\frac{1}{x}-2\ln x=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{x^2}-2\frac{\ln x}{x}\right)=\boxed{+\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x-\frac{1}{x}-2\ln x=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1}{x}\left(x^2-1-2\underbrace{x\ln x}_{\to 0}\right)=\boxed{-\infty}$$

**2. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0,+\infty[$ : $g'(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$**

$$g'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{x^2-2x+1}{x^2}=\boxed{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2}$$

بما أنّ $g'(x)>0$ ، فإنّ الدالة $g$ متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

**جدول تغيّرات الدالة $g$**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**3. حساب $g(1)$ واستنتاج حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$**

$g(1)=0\ ;\ x\in]0;1[\ :\ g(x)<0; x\in]1;+\infty[\ :\ g(x)>0$

**II- $Df=]0,+\infty[$ ، $f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$**

**1. بيان أنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ ، منه $x=t^2$ نضع $\sqrt{x}=t$**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{(\ln t^2)^2}{t^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{(2\ln t)^2}{t^2}=\lim_{t\to+\infty}\left(2\frac{\ln t}{t}\right)^2=\boxed{0}$$

**حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\underbrace{\frac{1}{x^2}-\frac{(\ln x)^2}{x}}_{\to 0}-\frac{2}{x}\right)=\boxed{+\infty}$$

**2. التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0,+\infty[$ : $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$**

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+x-\left(\ln\frac{1}{x}\right)^2-2=\frac{1}{x}+x-(-\ln x)^2-2$$
$$=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2=f(x)$$

**3. حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$. نضع : $\frac{1}{x}=t$**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to+\infty} f(t)=\boxed{+\infty}$$

**4. بيان أنّ : $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$**

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}-\frac{2\ln x}{x}=\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}-2\ln x\right)=\boxed{\frac{g(x)}{x}}$$

$x\in\,]0;1[\,:g(x)<0\Rightarrow f'(x)<0$ ⇒ الدالة $f$ متناقصة

$x\in\,]1;+\infty[\,:g(x)>0\Rightarrow f'(x)>0$ ⇒ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيّرات الدالة $f$**

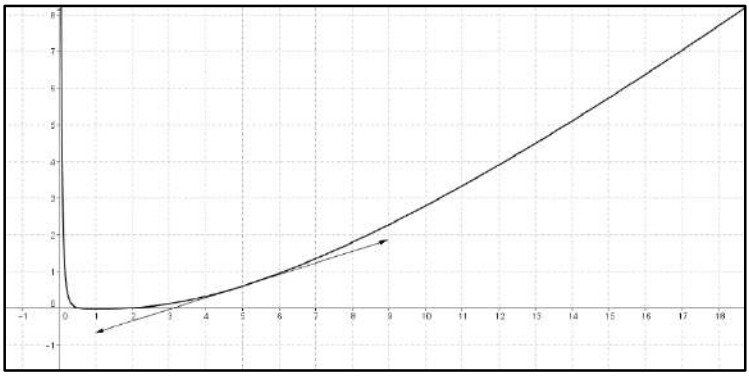
| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**5. كتابة معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 5**

$$y=f'(5)(x-5)+f(5)=\left(\frac{24-10\ln 5}{25}\right)(x-5)+\frac{16-5(\ln 5)^2}{5}$$

$$\boxed{y=\left(\frac{24-10\ln 5}{25}\right)x-\frac{8+5(\ln 5)^2-10\ln 5}{5}}$$

**6. انشاء المماس و المنحنى $(\mathscr{C}_f)$**



7. $\boldsymbol{Dh = \mathbb{R}^*}$ ، $\boldsymbol{h(x) = f(|x|)}$

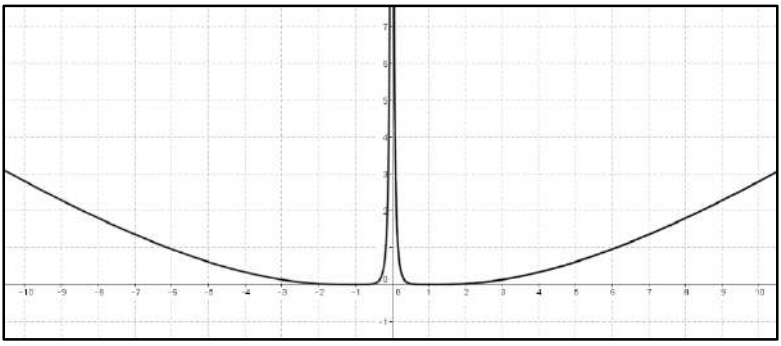
**بيان كيف يمكن إنشاء ($\mathscr{C}_h$) انطلاقا من ($\mathscr{C}_f$)**

$Dh$ متناظر بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل $x \in Dh$ لدينا :

الدالة $h$ زوجية $\Rightarrow h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$

على المجال $]0;+\infty[$ لدينا $h(x) = f(x)$ ، منه ($\mathscr{C}_h$) متطابق مع ($\mathscr{C}_f$) ، ونكمل رسم ($\mathscr{C}_h$) على المجال $]-\infty;0[$ بالتناظر المحوري لأنّ الدالة $h$ زوجية

**انشاء ($\mathscr{C}_h$)**



**حل التمرين 33 :**

I- لتكن المعادلة التفاضلية من الشكل : $y' - 3y + 3 = 0$ ... (I)

**1. تعيين الحل العام للمعادلة التفاضلية (I)**

$y' - 3y + 3 = 0 \Rightarrow y' = 3y - 3 \Rightarrow \boxed{y = ce^{3x} + 1}$

**2. تعيين الحل الخاص للمعادلة التفاضلية (I) بحيث : $\boldsymbol{y'(0) = 3}$**

$y'(0) = 3 \Rightarrow 3y(0) - 3 = 3 \Rightarrow y(0) = 2 \Rightarrow c + 1 = 2 \Rightarrow c = 1$

$\Rightarrow \boxed{y = e^{3x} + 1}$

**طريقة ثانية:**

$y' = 3ce^{3x}; y'(0) = 3 \Rightarrow 3c = 3 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \boxed{y = e^{3x} + 1}$

**II- $Df = \mathbb{R}$ ، $f(x) = x - 4 + ln(1 + e^{3x})$**

**1. حساب نهايات الدالة $f$ عند $-\infty$ و $+\infty$**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x - 4 + \ln(1 + e^{3x}) = \boxed{-\infty}$ ; $\begin{cases} e^{3x} \to 0 \\ \ln(1 + e^{3x}) \to 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x - 4 + \ln(1 + e^{3x}) = \boxed{+\infty}$ ; $\begin{cases} e^{3x} \to +\infty \\ \ln(1 + e^{3x}) \to +\infty \end{cases}$

**2. حساب نهاية الفرق $f(x) - (x - 4)$ لمّا $x$ يؤول إلى $-\infty$**

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x - 4) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1 + e^{3x}) = \boxed{0}$

نستنتج أنّ $(\Delta): y = x - 4$ مستقيم مقارب مائل لـ $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $-\infty$

**3. بيان أنّه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل: $f(x) = 4x - 4 + \ln(1 + e^{-3x})$**

$f(x) = x - 4 + \ln(1 + e^{3x}) = x - 4 + \ln[e^{3x}(e^{-3x} + 1)]$

$= x - 4 + \ln e^{3x} + \ln(1 + e^{-3x}) = x - 4 + 3x + \ln(1 + e^{-3x})$

$= 4x - 4 + \ln(1 + e^{-3x})$

**استنتاج معادلة المستقيم المقارب المائل بجوار $+\infty$**

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (4x - 4) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1 + e^{-3x}) = \boxed{0}$

نستنتج أنّ $(\Delta): y = 4x - 4$ مستقيم مقارب مائل لـ $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$

**4. حساب $f'(x)$**

$f'(x) = 1 + \dfrac{3e^{3x}}{1 + e^{3x}} = \boxed{\dfrac{1 + 4e^{3x}}{1 + e^{3x}}}$ ; $f'(x) > 0 \Rightarrow \mathbb{R}$ على $f$ متزايدة تماما

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**5. كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0**

$y = f'(0)x + f(0)\ ;\ f'(0) = \frac{5}{2}; f(0) = -4 + \ln 2$

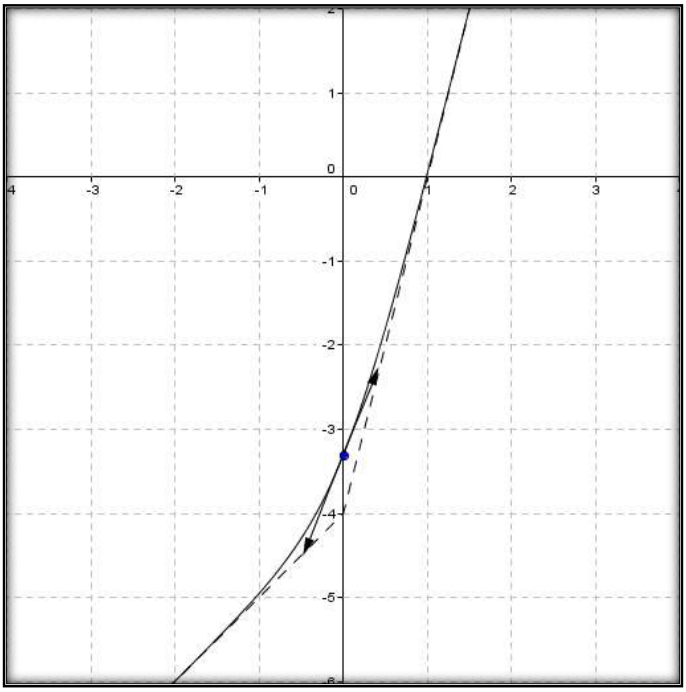
$$\boxed{(T): y = \frac{5}{2}x - 4 + \ln 2}$$

**6. بيان أنّ المعادلة : $\ln(1 + e^{-3x}) = 4 - 4x$ تقبل حلا وحيدا $0,9 < \alpha < 1$**

الدالة $f$ مستمرة و رتيبة على المجال $]1\ ;\ 0,9[$ و $\underbrace{f(0,9)}_{\approx -0,34} \times \underbrace{f(1)}_{\approx 0,05} < 0$ ، منه المعادلة

$f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]1\ ;\ 0,9[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**7. انشاء المنحنى ($\mathscr{C}_f$) و المماس ($T$)**




**حل التمرين 34:**

**I- $D = ]0\ ;\ +\infty[$ ، $g(x) = x^2 - 1 + 2\ln x$**

**1. حساب نهايتي الدالة $g$ عند طرفي مجموعة تعريفها**

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^2 - 1 + 2\ln x = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 - 1 + 2\ln x = \boxed{+\infty}$$

**2. دراسة اتجاه تغير الدالة $g$**

$g'(x) = 2x + \frac{2}{x} = \boxed{\frac{2x^2+2}{x}}$ ; $g'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

**3. إثبات أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل العدد 1 كحل وحيد لها في المجال $D$**

الدالة $g$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $D$ و$g(1) = 0$ ، منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل العدد 1 كحل وحيد لها في المجال $D$

**استنتاج إشارة $g(x)$**

$g(1) = 0 \; ; x \in ]0;1[ \Rightarrow g(x) < 0 \; ; \; x \in ]1;+\infty[ \Rightarrow g(x) > 0$

**II- $D = ]0 \; ; \; +\infty[$ ، $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x^2}$**

**1. حساب نهايتي الدالة $f$ عند طرفي مجموعة تعريفها**

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \ln x - \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \underbrace{\ln x}_{\to -\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}_{\to -\infty} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \ln x - \underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_{\to 0} = \boxed{+\infty}$$

**2. بيان أنّه من أجل كل $x$ من المجال $D$ فإنّ : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$**

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{\frac{1}{x}(x^2) - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1}{x} - \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = \frac{x^2 - 1 + 2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

**3. استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$**

$x \in ]0;1[ \; : g(x) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x \in ]1;+\infty[ \; : g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيّرات الدالة $f$**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

.4

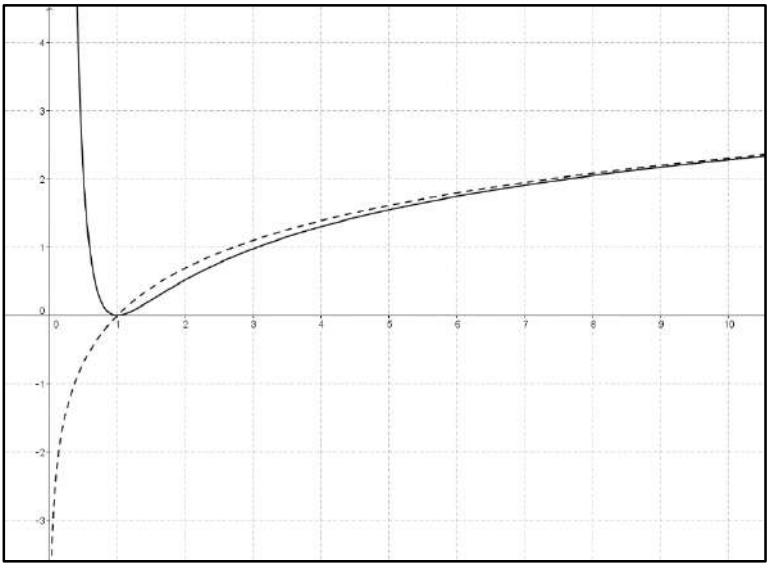
**أ. دراسة الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathscr{P})$ و $(\mathscr{C})$**

$f(x) - \ln x = -\dfrac{\ln x}{x^2}$

$x \in ]0;1[ : \ln x < 0 \Rightarrow f(x) - \ln x > 0 \Rightarrow (P)$ فوق $(C)$

$x \in ]1;+\infty[ : \ln x > 0 \Rightarrow f(x) - \ln x < 0 \Rightarrow (P)$ تحت $(C)$

**ب. انشاء في نفس المعلم $(\mathscr{P})$ و $(\mathscr{C})$**



**حل التمرين 35:**

**I- $g(x) = x\ln x - x + 1$ ، $Dg = ]0;+\infty[$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} \underbrace{x\ln x}_{\to 0} - x + 1 = \boxed{1}$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x\ln x - x + 1 = \lim_{x\to+\infty} x\left(\ln x - 1 + \frac{1}{x}\right) = \boxed{+\infty}$$

$g'(x) = \ln x + 1 - 1 = \boxed{\ln x}$

$x \in ]0;1[ : g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

$x \in [1;+\infty[ : g'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $1$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**2. استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم $x$**

من جدول تغيرات الدالة $g$ نستنتج أنّه من أجل كل $x \in Dg : g(x) \geq 0$

II- نعتبر الدالة $f$ المعرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln x}{x-1} ; x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$

**1. بيان أنّ الدالة $f$ مستمرة عند 1**

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = ln'(1) = 1 = f(1)$$

منه الدالة $f$ مستمرة عند 1

**2. التفسير البياني للنتيجة : $\lim\limits_{x\to1} \frac{f(x)-1}{x-1} = -\frac{1}{2}$**

$$\lim_{x\to1} \frac{f(x)-1}{x-1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{2}$$

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق عند 1 ويقبل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا ميله $-\frac{1}{2}$

**3. بيان أنّه من أجل كل $]0;1[ \cup ]1;+\infty[$ : $f'(x) = \frac{-g(x)}{x(x-1)^2}$**

$$f'(x) = \frac{\frac{x-1}{x} - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x\ln x}{x(x-1)^2} = \frac{-(x\ln x - x + 1)}{x(x-1)^2}$$

$$= \boxed{\frac{-g(x)}{x(x-1)^2}}$$

**4. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{\ln x}{x-1} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \boxed{0}$$

بما أنّ $g(x) \geq 0$ ، فإنّ $f'(x) \leq 0$ ، منه الدالة $f$ متناقصة تماما على $]0;+\infty[$

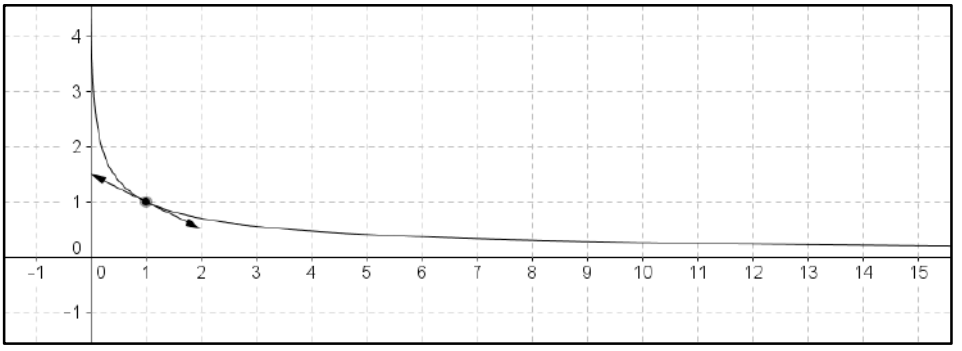
**جدول تغيرات الدالة $f$ :**

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $0$ |

**5. كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) عند النقطة ذات الفاصلة 1**

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1) = -\frac{1}{2}(x-1) + 1 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}$$

**رسم (T) و($\mathscr{C}_f$)**




**III- $Dh = \mathbb{R}^*$ ، $h(x) = f(|x|)$**

**1. بيان أنّ الدالة $h$ زوجية**

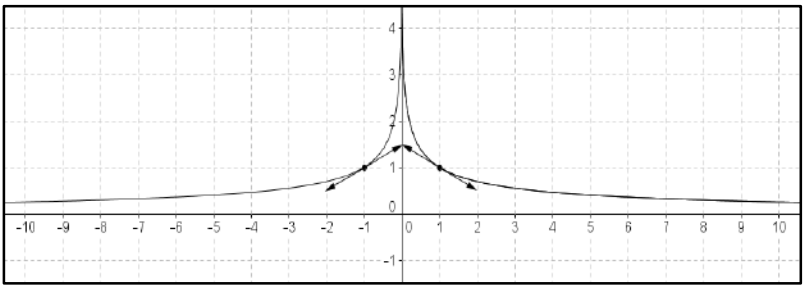
$Dh$ متناظر بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل $x \in Dh$ لدينا :

$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x) \Rightarrow$ الدالة $h$ زوجية

**2. شرح كيف يمكن رسم ($\mathscr{C}_h$) التمثيل البياني للدالة $h$ اعتمادا على ($\mathscr{C}_f$)**

على المجال $]0;+\infty[$ لدينا $h(x)=f(x)$ ، منه $(\mathscr{C}_h)$ متطابق مع $(\mathscr{C}_f)$ ، ونكمل رسم $(\mathscr{C}_h)$ على المجال $]-\infty;0[$ بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب لأنّ الدالة $h$ زوجية

**رسم $(\mathscr{C}_h)$ :**




**3. بيان أنّ المعادلة : $h(x)=3x^2$ تقبل حلين متناظرين في $\mathbb{R}^*$**

لتكن الدالة $k(x)=h(x)-3x^2$ والمعرّفة على $\mathbb{R}^*$. من أجل $x>0$ لدينا :

$$k(x)=f(x)-3x^2 \Rightarrow k'(x)=f'(x)-6x=-\frac{g(x)}{x(x-1)^2}-6x$$

بما أنّ $g(x)\geq 0$ ، فإنّ $k'(x)\leq 0$ ، منه الدالة $k$ متناقصة تماما على $]0;+\infty[$

الدالة $k$ مستمرة ورتيبة على المجال $]0;1]$، و $k(1)=-2$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} k(x)=+\infty$، منه

المعادلة $k(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $\alpha\in]0;1[$ ، و بما أن الدالة $k$ زوجية فللمعادلة $k(x)=0$ حل آخر $\beta$ حيث $\beta=-\alpha$ ، منه نستنتج أنّ المعادلة : $h(x)=3x^2$ تقبل حلين متناظرين في $\mathbb{R}^*$.

**حل التمرين 36:**

$$\boldsymbol{D=]0\,;+\infty[\;;\; h(x)=\frac{1}{x}\;;\; f(x)=\frac{1+2\,ln\,x}{x^2}}$$

**1. تعيين نهايات الدالة $f$ عندما يؤول $x$ إلى $0$ ثمّ إلى $+\infty$**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1+2\,ln\,x\to -\infty}{x^2\to 0^+}=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2\,ln\,x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+2\underbrace{\frac{ln\,x}{x^2}}_{\to 0}=\boxed{0}$$

**استنتاج أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيمين مقاربين**

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=-\infty \Rightarrow$ مستقيم مقارب عمودي $(\Delta): x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \Rightarrow$ مستقيم مقارب أفقي $(\Delta'): y=0$

**2. دراسة اتجاه تغير الدالة $f$**

$$f'(x)=\frac{x^2\left(\frac{2}{x}\right)-2x(1+2\ ln\ x)}{x^4}=\frac{2x-2x-4\ln x}{x^3}=\boxed{\frac{-4\ln x}{x^3}}$$

$x\in\ ]0;1[\ :\ln x<0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x\in[1;+\infty[\ :\ln x\geq 0\Rightarrow f'(x)\leq 0\Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

**3. تعيين إحداثيي A نقطة تقاطع ($\mathscr{C}_f$) مع محور الفواصل**

$$f(x)=0\Rightarrow\frac{1+2\ ln\ x}{x^2}=0\Rightarrow 1+2\ ln\ x=0\Rightarrow\ln x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}$$

منه يقطع ($\mathscr{C}_f$) محور الفواصل في النقطة $\boxed{A(e^{-\frac{1}{2}};0)}$

**4. $Dg=\ ]0\ ;\ +\infty[$ ، $g(x)=1-x+2\ln x$**

**أ. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} 1-x+2\ln x=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} 1-x+2\ln x=\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x}-1+2\frac{\ln x}{x}\right)=\boxed{-\infty}$$

$$g'(x)=-1+\frac{2}{x}=\boxed{\frac{-x+2}{x}}$$

$x\in\ ]0;2[\ :g'(x)>0\Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

$x\in[2;+\infty[\ :g'(x)\leq 0\Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $g(2)$ | ↘ | $-\infty$ |

**ب. حساب $g(1) = 0$ : $g(1)$**

برهان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]2;4[$

الدالة $g$ مستمرة و رتيبة على المجال $]4 ; 3[$ و $\underbrace{g(3)}_{\approx 0,2} \times \underbrace{g(4)}_{\approx -0,2} < 0$ ، منه المعادلة

$g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]4 ; 3[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**حصر العدد $\alpha$ بتقريب $10^{-2}$**

باستعمال الحاسبة نجد $\boxed{3,51 < \alpha < 3,52}$

**5. أ. برهان أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]0 ; +\infty[$ : $f(x) - \frac{1}{x} = \frac{g(x)}{x^2}$**

$$f(x) - \frac{1}{x} = \frac{1 + 2\ ln\ x}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1 - x + 2\ ln\ x}{x^2} = \boxed{\frac{g(x)}{x^2}}$$

**ب. استنتاج أنّ ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_h$) يتقاطعان في نقطتين يطلب تحديدهما**

المعادلة $f(x) - \frac{1}{x} = 0$ تكافئ المعادلة $g(x) = 0$ ، منه نستنتج أنّ ($\mathscr{C}_f$)

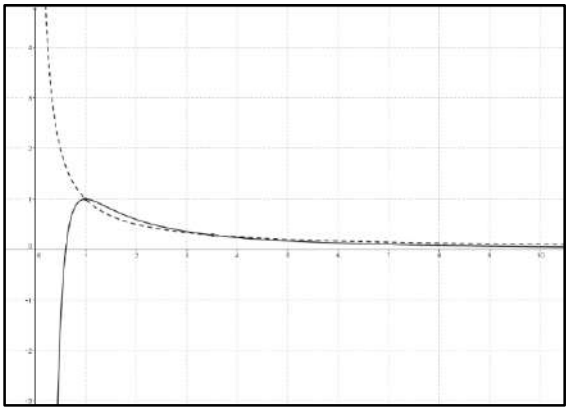
و($\mathscr{C}_h$) يتقاطعان في نقطتين هما $(1;1)$ و$\left(\alpha;\frac{1}{\alpha}\right)$ لأنّ $h(1) = 1$ و $h(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$

**ج. برهان أنّه من أجل كل $x$ حيث $x \geq 4$ فإنّ : $0 < f(x) < \frac{1}{x}$**

حسب جدولي تغيرات الدالتين $f$ و $g$ ، فإنّه من أجل كل $x \geq 4$ لدينا :

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) - \frac{1}{x} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \boxed{0 < f(x) < \frac{1}{x}}$$

**6. انشاء ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_h$)**



**حل التمرين 37:**

**I- $Df = ]0\ ;\ +\infty[$ ، $f(x) = x^2 + 3 - 2\ln x$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 + 3 - 2\ln x = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 + 3 - 2\ln x = \lim_{x\to+\infty} x\left(x + \frac{3}{x} - 2\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\right) = \boxed{+\infty}$$

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \boxed{\frac{2(x^2-1)}{x}}$$

$x \in ]0;1[ : f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x \in [1;+\infty[ : f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $4$ | ↗ | $+\infty$ |

**2. استنتاج إشارة $f(x)$**

من جدول تغيرات الدالة $f$ ، نستنتج أنّه من أجل كل $x \in ]0\ ;+\infty[$ فإنّ $f(x) \geq 4$

**II- $Dg = ]0\ ;\ +\infty[$ ، $g(x) = \frac{x^2-1+2\ln x}{2x}$**

**1. بيان أنّ : $g'(x) = \frac{f(x)}{2x^2}$**

$$g'(x) = \frac{2x\left(2x + \frac{2}{x}\right) - 2(x^2 - 1 + 2\ln x)}{4x^2} = \frac{2x^2 + 6 - 4\ln x}{4x^2}$$

$$= \frac{2(x^2 + 6 - 4\ln x)}{4x^2} = \boxed{\frac{f(x)}{2x^2}}$$

**2. التحقّق أنّ : $g(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$ وحساب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$**

$$g(x) = \frac{x^2 - 1 + 2\ln x}{2x} = \frac{x^2}{2x} - \frac{1}{2x} + \frac{2\ln x}{2x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x} = \boxed{+\infty}$$

**استنتاج أنّ المنحنى ($\mathscr{C}$) يقبل مستقيما مقاربا مائلا ($\Delta$) معادلته : $y = \frac{1}{2}x$**

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) - \frac{1}{2}x = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x} = \boxed{0}$$

منه، يقبل المنحنى ($\mathscr{C}$) مستقيما مقاربا مائلا ($\Delta$) معادلته : $y = \frac{1}{2}x$

**3. دراسة وضعية المنحنى ($\mathscr{C}$) بالنسبة إلى المستقيم ($\Delta$)**

$$g(x) - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x} = \frac{2\ln x - 1}{x}$$

$$2\ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}}$$

$x \in \left]0; e^{\frac{1}{2}}\right[ : g(x) - \frac{1}{2}x < 0 \Rightarrow (\Delta)$ تحت $(C)$

$x \in \left]e^{\frac{1}{2}}; +\infty\right[ : g(x) - \frac{1}{2}x > 0 \Rightarrow (\Delta)$ فوق $(C)$

يقطع المنحنى ($\mathscr{C}$) المستقيم ($\Delta$) في النقطة $\left(e^{\frac{1}{2}}; \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}\right)$

**4. دراسة تغيرات $g$**

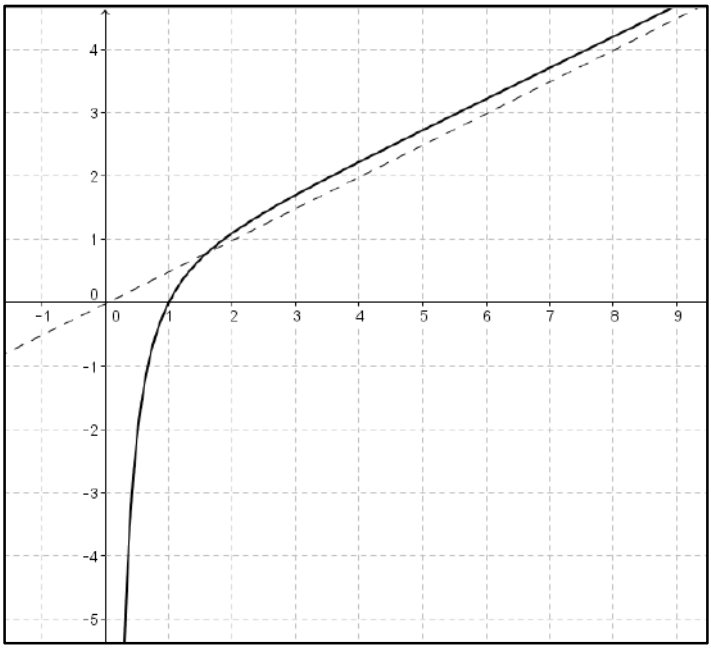
$$\lim_{x\to0} g(x) = \lim_{x\to0} \frac{x^2 - 1 + 2\ln x}{2x} \begin{matrix} \to -\infty \\ \to 0^+ \end{matrix} = \boxed{-\infty}$$

لدينا $g'(x) = \frac{f(x)}{2x^2}$ ، وبما أنّ $f(x) \geq 4$ فإنّ $g'(x) > 0$ منه الدالة $g$ متزايدة تماما

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $\|$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $\|$ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**رسم ($\Delta$) و($\mathscr{C}$)**



**5. مناقشة عدد و إشارة حلول المعادلة : $x^2 - 2mx - 1 + 2\ln x = 0$**

$x^2 - 2mx - 1 + 2\ln x = 0 \Rightarrow 2mx = x^2 - 1 + 2\ln x$

$\Rightarrow m = \dfrac{x^2 - 1 + 2\ln x}{2x} \Rightarrow \boxed{m = g(x)}$

ندرس تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}$) والمستقيم ذي المعادلة $(D_m): y = m$ ، وبما أنّه من أجل كل قيم الوسيط الحقيقي $m$ ، ($\mathscr{C}$) و$(D_m)$ يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها موجبة ، فإنّ المعادلة $x^2 - 2mx - 1 + 2\ln x = 0$ تقبل حلا وحيدا موجبا مهما تكن قيمة $m$.

**حل التمرين 38:**

**I- $D_g = [0\,;+\infty[$ ، $g(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$**

**1. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$**

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x}{x+1}}_{\to 1} - \underbrace{\ln(x+1)}_{\to+\infty} = \boxed{-\infty}$$

**دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \boxed{\frac{-x}{(x+1)^2}}$$

من أجل $x \geq 0$ ، $g'(x) \leq 0$ ، منه الدالة $g$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ ↘ | $-\infty$ |

**استنتاج إشارة $g(x)$**

من جدول تغيرات الدالة $g$ ، نستنتج أنّه من أجل كل $x \in [0;+\infty[$ فإنّ $g(x) \leq 0$

II- نعتبر الدالة $f$ المعرفة على المجال $[0\ ;\ +\infty[$ كما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x+1) - x}{x}; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. **حساب $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$**

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1) - x}{x} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x}}_{\to 1} - 1 = \boxed{0}$$

بما أنّ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$، نستنتج أنّ الدالة $f$ مستمرة على يمين 0

2. **حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1) - x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x}}_{\to 0} - 1 = \boxed{-1}$$

3. **بيان أنّ من أجل كل $x$ من المجال $]0\ ;\ +\infty[$ : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$**

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

4. $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

أ. **تعيين حصر لـ $\frac{f(x)-f(0)}{x}$**

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(x+1) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \Rightarrow 1 - \frac{x}{2} \leq \frac{\ln(x+1)}{x} \leq 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{x}{2} \leq \frac{\ln(x+1)}{x} - 1 \leq -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{\frac{\ln(x+1)}{x} - 1}{x} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{1}{2} \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}}$$

**استنتاج أنّ $f$ قابلة للاشتقاق عند 0 على اليمين وأنّ $f'(0) = -\frac{1}{2}$**

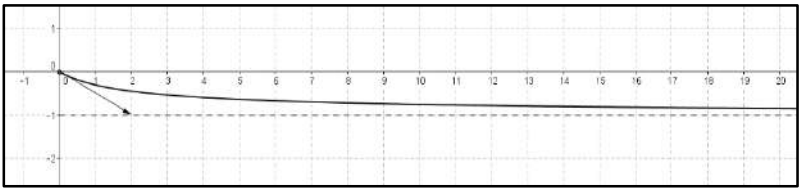
$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{2}}$$

منه نستنتج أنّ $f$ قابلة للاشتقاق عند 0 على اليمين وأنّ $f'(0) = -\frac{1}{2}$

**ب. كتابة معادلة نصف المماس لـ ($\mathcal{C}_f$) عند النقطة التي فاصلتها 0**

$$y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2}x}$$

**انشاء المنحنى ($\mathcal{C}_f$)**



**الدوال اللوغاريتمية في البكالوريا :**

**حل التمرين 39 : بكالوريا 2009 ت ر**

**I- $g$ دالة معرّفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x) = 2x + \ln x$**

**1. حساب نهاية الدالة $g$ عندما يؤول $x$ إلى $+\infty$**

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x + \ln x = \boxed{+\infty}$$

**2. دراسة اتجاه تغير الدالة $g$**

$g'(x) = 2 + \frac{1}{x}$; $g'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $2$ | $+\infty$ |

**3. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $[1;+\infty[$ فإنّ $g(x) \neq 0$**

من جدول تغيرات الدالة $g$ نلاحظ أنّه من أجل كل $x \in [1;+\infty[$ فإنّ $g(x) > 2$

**II- $Df = [1;+\infty[$ ، $f(x) = \frac{6\ln x}{2x+\ln x}$**

**1. بيان أنّه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x) = \frac{6\frac{\ln x}{x}}{2+\frac{\ln x}{x}}$ من أجل $x \in [1;+\infty[$**

$$f(x) = \frac{6\ln x}{2x+\ln x} = \frac{x\left(\frac{6\ln x}{x}\right)}{x\left(2+\frac{\ln x}{x}\right)} = \frac{6\frac{\ln x}{x}}{2+\frac{\ln x}{x}}$$

**2. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{6\frac{\ln x}{x}}{2+\frac{\ln x}{x}} = \boxed{0}$$

نستنتج أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y = 0$ بجوار $+\infty$

**3. دراسة اتجاه تغير الدالة $f$**

$$f'(x) = \frac{\frac{6}{x}(2x+\ln x) - 6\ln x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{(2x+\ln x)^2} = \boxed{\frac{12(1-\ln x)}{(2x+\ln x)^2}}$$

$1-\ln x \geq 0 \Rightarrow \ln x \leq 1 \Rightarrow x \leq e$

$x \in [1;e] : f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x \in ]e;+\infty[ : f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**4. جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $1$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $f(e)$ | ↘ | $0$ |

$$f(e) = \frac{6}{2e+1}$$

تعيين قيم العدد الحقيقي $k$ بحيث تقبل المعادلة $f(x)=k$ حلين متمايزين
من جدول تغيرات الدالة $f$ ، نلاحظ أنّ المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلين متمايزين لمّا
$0<k<\frac{6}{2e+1}$

**5. ايجاد معادلة للمماس $(\Delta_1)$ للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة التي فاصلتها 1**

$y=f'(1)(x-1)+f(1)=3(x-1)\Rightarrow \boxed{(\Delta_1): y=3x-3}$

**III- $Dh=[1;+\infty[$ ، $h(x)=f(e^x)$**

**1. جدول تغيرات الدالة $h$**

$h'(x)=e^x f'(e^x)$

$x\in[1;+\infty[\Rightarrow e^x\in[e;+\infty[\Rightarrow f'(e^x)\leq 0\Rightarrow h'(x)\leq 0$

منه، الدالة $h$ متناقصة على المجال $]1;+\infty[$

$h(1)=f(e)=\frac{6}{2e+1}$

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(e^x)=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\boxed{0}$

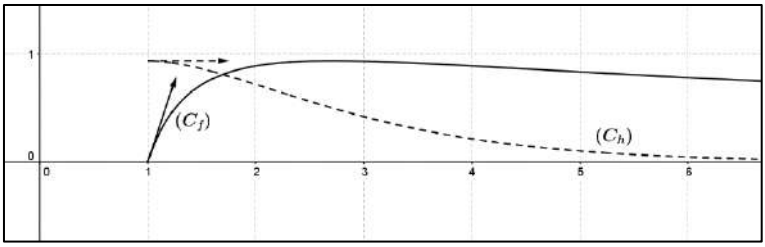
| $x$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $h'(x)$ | $-$ | |
| $h(x)$ | $h(1)$ ↘ | $0$ |

**2. ايجاد معادلة للمماس $(\Delta_2)$ للمنحنى $(\mathcal{C}_h)$ عند النقطة التي فاصلتها 1**

$(\Delta_2): y=h'(1)(x-1)+h(1); h'(1)=e\underbrace{f'(e)}_{0}=0$

$\boxed{(\Delta_2): y=\frac{6}{2e+1}}$

**3. رسم كلا من $(\Delta_1)$ ، $(\Delta_2)$ ، $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_h)$**



**حل التمرين 40 : بكالوريا 2009 ع ت**

**I- $Dh = ]-1; +\infty[$ ، $h(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$**

**1. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ و $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to-1}} h(x)$**

$$\lim_{\substack{>\\ x\to-1}} h(x) = \lim_{\substack{>\\ x\to-1}} x^2 + 2x + \ln(x+1) = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 + 2x + \ln(x+1) = \boxed{+\infty}$$

2. بيان أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-1\ ;\ +\infty[$ : $h'(x) = \frac{1+2(x+1)^2}{x+1}$

$$h'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+1} = \boxed{\frac{1+2(x+1)^2}{x+1}}$$

**استنتاج اتجاه تغير الدالة $h$**

بما أنّ $h'(x) > 0$ ، فإنّ الدالة $h$ متزايدة تماما على $]-1; +\infty[$

**جدول تغيرات الدالة $h$**

| $x$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $h'(x)$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

**3. حساب $h(0)$ واستنتاج إشارة $h(x)$ حسب قيم $x$**

$h(0) = 0\ ;\ x \in ]-\infty; 0[ : h(x) < 0\ ; x \in ]0; +\infty[ : h(x) > 0$

**II- $Df = ]-1; +\infty[$ ، $f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$**

**1. أ. حساب $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to-1}} f(x)$**

$$\lim_{\substack{>\\ x\to-1}} f(x) = \lim_{\substack{>\\ x\to-1}} x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \begin{matrix} \to -\infty \\ \to 0^+ \end{matrix} = \boxed{+\infty}$$

**تفسير النتيجة بيانيا**

يقبل المنحنى $(\mathscr{C}f)$ مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x = -1$

**ب. برهان أنّ $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{\ln u}{u} = 0$ . نضع : $\ln u = t \Rightarrow u = e^t$**

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{\ln u}{u} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^t}{t}} = 0$$

**ج. استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ . نضع : $X = x + 1 \Rightarrow x = X - 1$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - 1 - \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{X\to+\infty} X - 2 - \frac{\ln X}{X} = \boxed{+\infty}$$

**د. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) - (x-1)]$**

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (x-1)] = \lim_{x\to+\infty} -\frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$$

نستنتج أنّ $(\Delta): y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) بجوار $+\infty$

**ه. دراسة وضعية المنحنى ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة إلى $(\Delta)$**

$$f(x) - (x-1) = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

$x \in ]-1;0[ : \ln(x+1) < 0 \Rightarrow f(x) - (x-1) > 0 \Rightarrow (\Delta)$ فوق $(Cf)$

$x \in ]0;+\infty[ : \ln(x+1) > 0 \Rightarrow f(x) - (x-1) < 0 \Rightarrow (\Delta)$ تحت $(Cf)$

يتقاطع ($\mathscr{C}_f$) و$(\Delta)$ عند النقطة $(0;-1)$

**2. بيان أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]-1\ ;\ +\infty[$ : $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+1)^2}$**

$$f'(x) = 1 - \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \boxed{\frac{h(x)}{(x+1)^2}}$$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

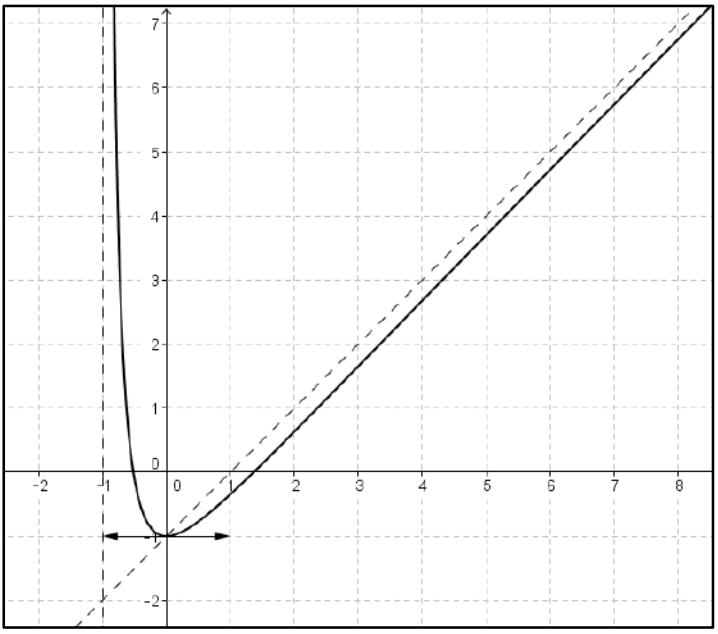
| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

**3. بيان أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقطع $(d): y = 2$ عند نقطة فاصلتها محصورة بين 3,3 و 3,4**

الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على المجال $]3,4\ ;\ 3,3[$ و$\underbrace{f(3,3)}_{\approx 1,96} < 2 < \underbrace{f(3,4)}_{\approx 2,06}$، منه

المعادلة $f(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]3,4\ ;3,3[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**4. رسم ($\mathscr{C}_f$)**



**5. حساب المساحة**

$$\mathcal{A} = \int_0^1 [(x-1) - f(x)]\,dx = \int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x+1}\ln(x+1)\,dx = \frac{1}{2}[\ln^2(x+1)]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}\ln^2 2 \ ua}$$

**حل التمرين 41 : بكالوريا 2010 ر**

$\boldsymbol{Dg = ]0;+\infty[}$ ، $\boldsymbol{g(x) = x - 1 - 2\ln x}$

**1. حساب** $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}} g(x)$

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 0}} g(x) = \lim_{\substack{>\\ x\to 0}} x - 1 - 2\ln x = \boxed{+\infty}$$

**تفسير النتيجة هندسيا**

يقبل المنحنى ($\mathscr{C}_g$) مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x = 0$

**2. أ. بيان أنّ** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x - 1 - 2\ln x = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{1}{x} - \underbrace{\frac{2\ln x}{x}}_{\to 0}\right) = \boxed{+\infty}$$

**ب. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \boxed{\frac{x-2}{x}}$$

$x \in ]0;2[ : g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

$x \in [2;+\infty[ : g'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $g(2)$ | ↗ | $+\infty$ |

$g(2) = 1 - 2\ln 2 \approx -0{,}4$

**ج. حساب $g(1)$**

$g(1) = 0$

**د. برهن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين أحدهما $3{,}5 < \alpha < 3{,}6$**

الدالة $g$ مستمرة و رتيبة على المجال $]3{,}6 ; 3{,}5[$ و $\underbrace{g(3{,}5)}_{\approx -0{,}006} \times \underbrace{g(3{,}6)}_{\approx 0{,}038} < 0$ ،

منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا $\alpha$ في المجال $]3{,}6 ; 3{,}5[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، بالإضافة إلى الحل الثاني الذي هو 1.

**ه. استنتاج إشارة $g(x)$**

$x \in ]0;1[ \cup ]\alpha;+\infty[ \Rightarrow g(x) > 0 \; ; \; x \in [1;\alpha] \Rightarrow g(x) \leq 0$

**استنتاج إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$**

تكون $g\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ لمّا $\frac{1}{x} \in ]0;1[ \cup ]\alpha;+\infty[$ و $g\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$ لمّا $\frac{1}{x} \in [1;\alpha]$

$$\frac{1}{x} \in ]0;1[ \Rightarrow 0 < \frac{1}{x} < 1 \Rightarrow 1 < x < +\infty \Rightarrow x \in ]1;+\infty[$$

$$\frac{1}{x} \in ]\alpha;+\infty[ \Rightarrow \frac{1}{x} > \alpha \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{\alpha} \Rightarrow x \in \left]0;\frac{1}{\alpha}\right[$$

$\frac{1}{x} \in [1;\alpha] \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{x} \leq \alpha \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \leq x \leq 1 \Rightarrow x \in \left[\frac{1}{\alpha};1\right]$

منه نستنتج أنّ $g\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ لمّا $x \in \left]0;\frac{1}{\alpha}\right[ \cup ]1;+\infty[$ و $g\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$ لمّا $x \in \left[\frac{1}{\alpha};1\right]$

3. $Df = [0;+\infty[$ ، $\begin{cases} f(x) = -x^2 + x + x^2 \ln x \ ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

**أ. حساب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)}{x}$**

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{-x^2 + x + x^2 \ln x}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} -x + 1 + \underbrace{x \ln x}_{\to 0} = 1$$

**تفسير النتيجة هندسيا**

الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على يمين 0 ويقبل $(\mathscr{C}_f)$ عند المبدأ نصف مماس ميله 1

**ب. حساب نهاية الدالة $f$ عند $+\infty$**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -x^2 + x + x^2 \ln x = \lim_{x \to +\infty} x^2 \left(-1 + \frac{1}{x} + \ln x\right) = \boxed{+\infty}$$

**ج. بيان أنّ من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ فإنّ: $f'(x) = x\, g\left(\frac{1}{x}\right)$**

$$f'(x) = -2x + 1 + 2x \ln x + x = -x + 1 + 2x \ln x$$

$$= x\left(-1 + \frac{1}{x} + 2\ln x\right) = x\left(\frac{1}{x} - 1 - 2\ln\frac{1}{x}\right) = \boxed{x\, g\left(\frac{1}{x}\right)}$$

**استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$**

$x \in \left]0;\frac{1}{\alpha}\right[ \cup ]1;+\infty[ : g\left(\frac{1}{x}\right) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x \in \left[\frac{1}{\alpha};1\right] : g\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**د. جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{\alpha}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ | ↘ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

**بيان أنّ : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{\alpha - 1}{2\alpha^2}$ واستنتاج حصر للعدد $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$**

$$g(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha-1-2\ln\alpha=0 \Rightarrow -\ln\alpha=\frac{1-\alpha}{2} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{1-\alpha}{2}$$

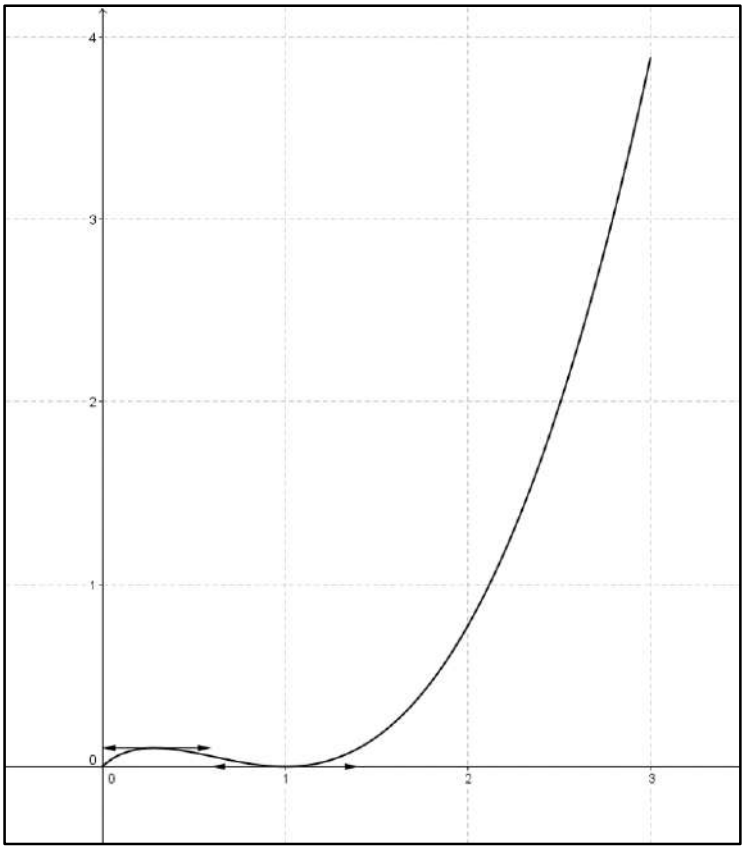
$$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)=-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$$

$$=\frac{-2+2\alpha+1-\alpha}{2\alpha^2}=\boxed{\frac{\alpha-1}{2\alpha^2}}$$

$$3{,}5<\alpha<3{,}6 \Rightarrow \begin{cases}2{,}5<\alpha-1<2{,}6\\24{,}5<2\alpha^2<25{,}9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2{,}5<\alpha-1<2{,}6\\0{,}039<\dfrac{1}{2\alpha^2}<0{,}04\end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{0{,}0975<f\left(\frac{1}{\alpha}\right)<0{,}104}$$

**4. رسم المنحنى ($\mathscr{C}_f$) على المجال $[0;3]$**



**حل التمرين 42 : بكالوريا 2010 ع ت**

**I- $I = \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ ، $f(x) = 1 + \ln(2x-1)$**

**1. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to\frac{1}{2}}} f(x)$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \ln(2x-1) = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{\substack{>\\ x\to\frac{1}{2}}} f(x) = \lim_{\substack{>\\ x\to\frac{1}{2}}} 1 + \ln \underbrace{(2x-1)}_{\to 0^+} = \boxed{-\infty}$$

**2. بيان أنّ الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال I**

$f'(x) = \frac{2}{2x-1}$ ; $x > \frac{1}{2} \Rightarrow 2x-1 > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

**3. تعيين فاصلة النقطة من ($\mathscr{C}_f$) التي يكون فيها المماس موازيا لـ $(d): y = x$**

$$f'(x) = 1 \Rightarrow \frac{2}{2x-1} = 1 \Rightarrow 2x-1 = 2 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

**4. أ. إثبات أنّه من أجل كل $x$ من I يمكن كتابة : $f(x) = \ln(x+a) + b$**

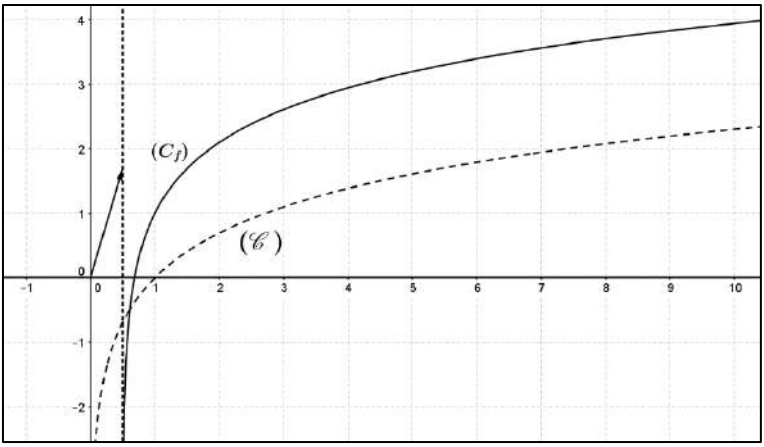
$$f(x) = 1 + \ln(2x-1) = 1 + \ln\left[2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] = 1 + \ln 2 + \ln\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}\ ; b = 1 + \ln 2}$$

**ب. استنتاج أنّه يمكن رسم ($\mathscr{C}_f$) انطلاقا من ($\mathscr{C}$) منحنى الدالة ln**

بما أنّ $f(x) = \ln(x+a) + b$ ، فإنّ ($\mathscr{C}_f$) هو صورة ($\mathscr{C}$) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1+\ln 2\end{pmatrix}$ ، أي $\vec{u}\begin{pmatrix}-a\\ b\end{pmatrix}$

**رسم ($\mathscr{C}$) و ($\mathscr{C}_f$)**




**II- $g(x) = f(x) - x$**

**1. حساب $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^{>}} g(x)$**

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^{>}} g(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^{>}} \underbrace{f(x)}_{\to -\infty} - x = \boxed{-\infty}$$

بيان أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} [1 - x + \ln(2x-1)]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{(2x-1)}_{\to +\infty} \left[ \underbrace{\frac{1-x}{2x-1}}_{\to -\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{\ln(2x-1)}{2x-1}}_{\to 0} \right] = \boxed{-\infty}$$

**2. دراسة اتجاه تغير الدالة $g$**

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2}{2x-1} - 1 \Rightarrow \boxed{g'(x) = \frac{-2x+3}{2x-1}}$$

بما أنّ $2x - 1 > 0$ ، فإنّ إشارة $g'(x)$ من إشارة $-2x + 3$

$$-2x + 3 \geq 0 \Rightarrow 2x \leq 3 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

$x \in \left]\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right] : g'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

$x \in \left]\frac{3}{2}; +\infty\right[ : g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $g$ :**

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $\|$ $-\infty$ | ↗ | $g\left(\frac{3}{2}\right)$ | ↘ | $-\infty$ |

**3. أ. حساب $g(1)$**

$g(1) = f(1) - 1 = 1 - 1 = 0$

بيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$ حلا وحيدا $\alpha$

$g\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0{,}19$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$ ، $g\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0{,}19$

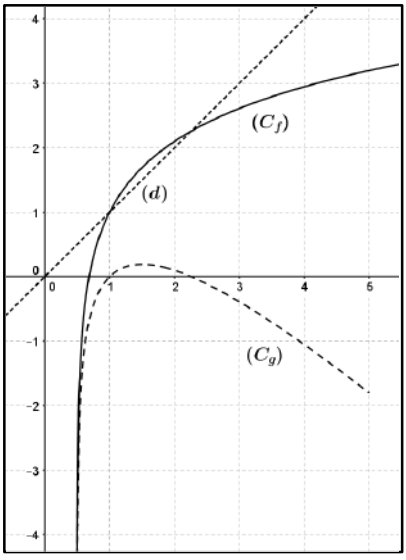
و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ ، منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $\left]\frac{3}{2}; +\infty\right[$

حلا وحيدا $\alpha$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

**التحقق أنّ $2 < \alpha < 3$**

$g(2) \approx 0{,}1$ ; $g(3) \approx -0{,}39 \Rightarrow 2 < \alpha < 3$

**ب. رسم ($\mathscr{C}_g$) على المجال $\left]\frac{1}{2}; 5\right[$**




**4. استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال I وتحديد وضعية ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة إلى $(d)$**

$x \in \left]\frac{1}{2}; 1\right[ \cup\, ]\alpha; +\infty[ : g(x) < 0$

$\Rightarrow f(x) - x < 0 \Rightarrow (d)$ تحت $(Cf)$

$x \in ]1; \alpha[ : g(x) > 0 \Rightarrow f(x) - x > 0$

$\Rightarrow (d)$ فوق $(Cf)$

يتقاطع ($\mathscr{C}_f$) و $(d)$ عند النقطتين $(1\,;1)$ و $(\alpha; \alpha)$

5. برهان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]1; \alpha[$ فإنّ : $f(x)$ تنتمي إلى $]1; \alpha[$

الدالة $f$ مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1; \alpha[$ ، منه : $x \in ]1; \alpha[ \Rightarrow f(x) \in ]f(1); f(\alpha)[$

$g(1) = 0 \Rightarrow f(1) - 1 = 0 \Rightarrow f(1) = 1$

$g(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\alpha) - \alpha = 0 \Rightarrow f(\alpha) = \alpha$

نستنتج أنّه من أجل $x \in ]1;\alpha[$ ، فإنّ $f(x) \in ]1;\alpha[$.

**III) $u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$**

**1. تعيين قيمة العدد الطبيعي $n$ التي من أجلها يكون : $u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2$**

$$u_n = f\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1 + \ln\left[2\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - 1\right] = 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$
$$= 1 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$u_n = 1 + 2\ln 3 - 3\ln 2 \Rightarrow 1 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 1 + \underbrace{2\ln 3 - 3\ln 2}_{\ln 9 - \ln 8}$$
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(\frac{9}{8}\right) \Rightarrow \frac{n+1}{n} = \frac{9}{8} \Rightarrow \boxed{n = 8}$$

**2. حساب المجموع $S_n$ بدلالة $n$**

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1 + \ln\left(\frac{2}{1}\right) + 1 + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \cdots + 1 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
$$= \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{\text{حد } n} + \underbrace{\ln 2 + \ln 3 - \ln 2 + \cdots + \ln(n+1) - \ln n}_{\ln 2 - \ln 2 + \ln 3 - \ln 3 + \cdots + \ln n - \ln n + \ln(n+1)}$$
$$= \boxed{n + \ln(n+1)}$$

**حل التمرين 43 : بكالوريا 2011 ر**

**I- $g(x) = x^2 + \ln x^2 - 1$ ، $Dg = ]0;+\infty[$**

**1. دراسة اتجاه تغير الدالة $g$**

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x^2 + \ln x^2 - 1 = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 + \ln x^2 - 1 = \boxed{+\infty}$$

$$g'(x) = 2x + \frac{2x}{x^2} = 2x + \frac{2}{x} = \boxed{\frac{2x^2 + 2}{x}}$$

بما أنّ $g'(x) > 0$ ، فإنّ الدالة $g$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

**2. حساب $g(1)$ واستنتاج إشارة $g(x)$ في المجال $]0;+\infty[$**

$g(1)=0\ ; x\in\ ]0;1[\ \Rightarrow g(x)<0\ ;\ x\in\ ]1;+\infty[\ \Rightarrow g(x)>0$

**II- $Df=\ ]0;+\infty[$ ، $f(x)=\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\ln x$**

**1. أ. بيان أنّ $f$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ وأنّ : $f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$**

الدالة $f$ هي جداء دالتين معرّفتين وقابلتين للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ،

منه الدالة $f$ قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{\frac{1}{x}(x^2)-2x\ln x}{x^4}=\frac{1}{x}-\frac{1-2\ln x}{x^3}=\frac{x^2-1+2\ln x}{x^3}$$

$$=\boxed{\frac{g(x)}{x^3}}$$

**ب. استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$**

$x\in\ ]0;1[\ :\ g(x)<0\Rightarrow f'(x)<0\Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x\in\ ]1;+\infty[\ :\ g(x)>0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيّرات الدالة $f$**

| $x$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $0$ | ↗ $+\infty$ |

2. $(\delta)$ المنحنى الممثل للدالة $x\to\ln x$ على المجال $]0;+\infty[$

**أ. دراسة وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى $(\delta)$**

$$f(x)-\ln x=-\frac{\ln x}{x^2}$$

$x\in\ ]0;1[\ :\ \ln x<0\Rightarrow f(x)-\ln x>0\Rightarrow (\delta)$ فوق $(Cf)$

$x \in ]1;+\infty[ : \ln x > 0 \Rightarrow f(x) - \ln x < 0 \Rightarrow (\delta)$ تحت $(Cf)$

يتقاطع المنحنيان $(\mathscr{C}_f)$ و $(\delta)$ عند النقطة $(1;0)$

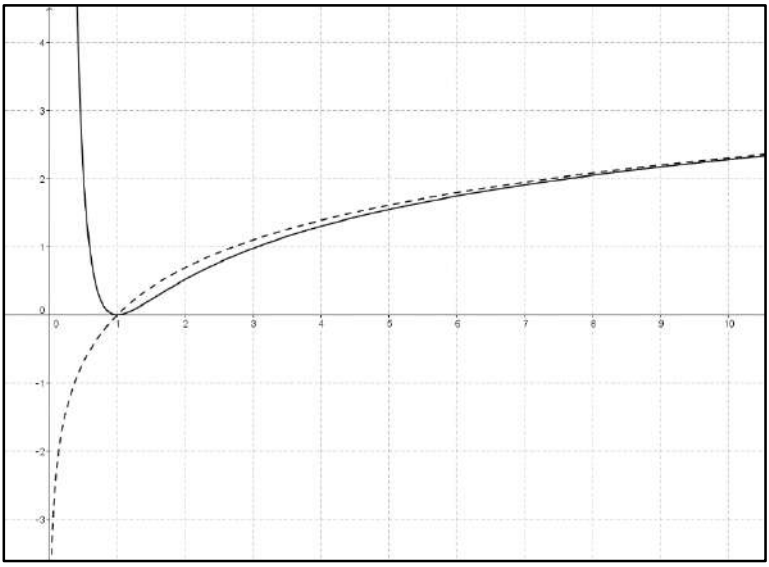
**حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\ln x$**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\ln x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \times \frac{\ln x}{x} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\ln x = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} [f(x) - \ln x] = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln x$$

نستنتج أنّ المنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\delta)$ متقاربان في جوار $+\infty$

**ب. رسم $(\delta)$ و $(\mathscr{C}_f)$**



**3. أ. حساب $\int_1^x \frac{1}{t^2}\ln t\, dt$**

$$u(t) = \ln t \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t} \ ; v'(t) = \frac{1}{t^2} \Rightarrow v(t) = -\frac{1}{t}$$

$$\int_1^x \frac{1}{t^2}\ln t\, dt = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x - \int_1^x -\frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$$

**- التحقق أنّ : $x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $\ln x$ على المجال $]1;+\infty[$**

$$(x\ln x - x)' = \ln x + x\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = \ln x \Rightarrow \int \ln x\, dx = x\ln x - x$$

**- استنتاج دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]1;+\infty[$**

$$f(x)=\ln x-\frac{1}{x^2}\ln x \Rightarrow \boxed{F(x)=x\ln x-x+\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}-1}$$

**ب. حساب المساحة $A(\alpha)$ بدلالة $\alpha$**

$$A(\alpha)=\int_1^{\alpha}\left[\ln x-\left(\ln x-\frac{1}{x^2}\ln x\right)\right]dx=\int_1^{\alpha}\frac{1}{x^2}\ln x\,dx$$

$$=\left[-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+1\right]_1^{\alpha}=\boxed{\left(-\frac{\ln\alpha}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}+1\right)ua}$$

**حساب $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$**

$$\lim_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)=\lim_{\alpha\to+\infty}\left(\underbrace{-\frac{\ln\alpha}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}}_{\to 0}+1\right)=\boxed{1}$$

**حل التمرين 44 : بكالوريا 2011 ت ر**

$$Df=]0;+\infty[\ ،\ f(x)=\frac{a+b\ln 2x}{4x^2}$$

**1. تعيين العددين $a$ و $b$ :**

$$f'(x)=\frac{4x^2\left(\frac{b}{x}\right)-8x(a+b\ln 2x)}{16x^4}=\frac{b-2a-2b\ln 2x}{4x^3}$$

$$\begin{cases}f\left(\frac{1}{2}\right)=1\\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b-2a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}\Rightarrow\boxed{f(x)=\frac{1+2\ln 2x}{4x^2}}$$

**2. $Dg=]0;+\infty[\ ،\ g(x)=\frac{1+2\ln 2x}{4x^2}$**

**أ. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)$**

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+2\ln 2x}{4x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{x}\underbrace{\left(\frac{\ln 2x}{2x}\right)}_{\to 0}\right]=\boxed{0}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}g(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\frac{1+2\ln 2x\to-\infty}{4x^2\to 0^+}=\boxed{-\infty}$$

تفسير النتيجتين هندسيا

يقبل المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ مستقيمين مقاربين ، الأول عمودي معادلته $x=0$ والثاني أفقي معادلته $y=0$

ب. دراسة اتجاه تغير الدالة $g$

$$g'(x) = \frac{-4\ln 2x}{4x^3} = \boxed{-\frac{\ln 2x}{x^3}}$$

$x \in \left]0;\frac{1}{2}\right[ : g'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

$x \in \left[\frac{1}{2};+\infty\right[ : g'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

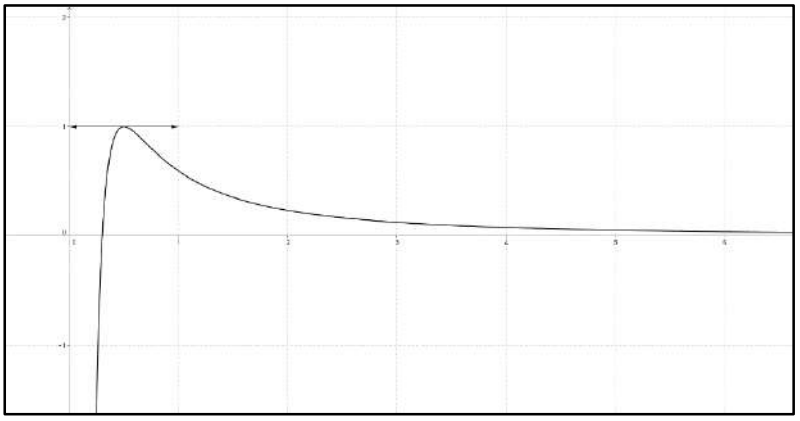
**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

**ج. حل في $]0;+\infty[$ المعادلة $g(x) = 0$**

$$g(x) = 0 \Rightarrow 1 + 2\ln 2x = 0 \Rightarrow \ln 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{x = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}}$$

**د. انشاء $(\mathscr{C}_g)$**



**حل التمرين 45 : بكالوريا 2011 ع ت**

**I- $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ، $Dg = \mathbb{R} - \{-1\}$**

**أ. جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | ‖ | $+$ | |
| $g(x)$ | $1$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $1$ |

**ب. حل بيانيا المعادلة $g(x) > 0$**

$g(x) > 0 \Rightarrow x \in ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$

**ج. تعيين بيانيا قيم $x$ التي يكون من أجلها $0 < g(x) < 1$**

$0 < g(x) < 1 \Rightarrow x \in ]1; +\infty[$

**II- $Df = ]1; +\infty[$ ، $f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$**

**1. حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to 1^{>}} f(x)$**

$$\lim_{x \to 1^{>}} f(x) = \lim_{x \to 1^{>}} \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{x-1}{x+1}}_{\to 1} + \ln\underbrace{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}_{\to 1} = \boxed{1}$$

**تفسير النتيجتين هندسيا**

يقبل ($\mathscr{C}_f$) مستقيمين مقاربين ، الأول عمودي معادلته $x = 1$ والثاني أفقي معادلته $y = 1$

**2. أ. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1; +\infty[$ : $g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$**

$$g'(x) = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \boxed{\frac{2}{(x+1)^2}}$$

**ب. حساب $f'(x)$ ودراسة إشارتها**

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{2}{(x+1)^2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$= \frac{2}{(x+1)^2}\left(1 + \frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{2}{(x+1)^2}\left(\frac{2x}{x-1}\right) = \boxed{\frac{4x}{(x-1)(x+1)^2}}$$

من أجل $x \in ]1; +\infty[$ ، $f'(x) > 0$ ، منه الدالة $f$ متزايدة على المجال $]1; +\infty[$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $1$ |

**3. أ. تعيين إشارة العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ على المجال $]1;+\infty[$**

لدينا : $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln g(x)$ ومن أجل $x > 1$ تكون $0 < g(x) < 1$

منه نستنتج أنّ العبارة $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ سالبة على المجال $]1;+\infty[$

**ب. بيان أنّ الدالة : $x \to (x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \to \ln(x-\alpha)$ على المجال $]\alpha;+\infty[$**

$$[(x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x]' = \ln(x-\alpha) + (x-\alpha)\left(\frac{1}{x-\alpha}\right) - 1 = \ln(x-\alpha)$$

$$\Rightarrow \int \ln(x-\alpha)\,dx = (x-\alpha)\ln(x-\alpha) - x$$

**جـ. التحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]1;+\infty[$ ،**

$$g(x) = 1 - \frac{2}{x+1}$$

$$g(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1-2}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1} = \boxed{1 - \frac{2}{x+1}}$$

**تعيين دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]1;+\infty[$**

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1 - \frac{2}{x+1} + \ln(x-1) - \ln(x+1)$$

$$F(x) = x - 2\ln(x+1) + (x-1)\ln(x-1) - x - (x+1)\ln(x+1) + x$$

$$\boxed{F(x) = x + (x-1)\ln(x-1) - (x+3)\ln(x+1)}$$

**حل التمرين 46 : بكالوريا 2012 ر**

**I- $g(x) = 2\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ ، $Dg = ]-1;3]$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$g'(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \boxed{\frac{2x+1}{(x+1)^2}}$$

$x \in \left]-1;-\frac{1}{2}\right[ : g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

$x \in \left[-\frac{1}{2};3\right] : g'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

$$\lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} 2\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} = \lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} \frac{2(x+1)\ln(x+1) - x}{x+1}$$

$$= \lim_{\substack{X\to 0 \\ >}} \frac{2X\ln X - X + 1}{X} \underset{\to 0^+}{\to 1} = \boxed{+\infty} ; (X = x+1)$$

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-1$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ ‖ | ↘ | $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ | ↗ | $g(3)$ |

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \ln 4 \ ; g(3) = \ln 16 - \frac{3}{4}$$

**2. بيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر $-0,8 < \alpha < -0,7$**

$g(0) = 0$ ، منه 0 حل للمعادلة $g(x) = 0$. الدالة $g$ مستمرة و رتيبة على المجال $]-0,7 ; -0,8[$ و $\underbrace{g(-0,8)}_{\approx 0,78} \times \underbrace{g(-0,7)}_{\approx -0,07} < 0$ ، منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا ثانيا $\alpha$ في المجال $]-0,7 ; -0,8[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة.

**3. تعيين حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$**

$x \in ]-1;\alpha[ \cup ]0;3[ : g(x) > 0 \ ; x \in [\alpha;0] : g(x) \leq 0$

**3. $h$ هي الدالة المعرّفة على المجال $]-1;3]$ بـ : $h(x) = [g(x)]^2$**

**أ. حساب $h'(x)$ بدلالة $g(x)$ و $g'(x)$**

$h'(x) = 2g(x).g'(x)$

**ب. تعيين إشارة $h'(x)$**

| $x$ | $-1$ | | $\alpha$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**جدول تغيرات الدالة $h$**

| $x$ | $-1$ | | $\alpha$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $h\left(-\frac{1}{2}\right)$ | ↘ | $0$ | ↗ | $h(3)$ |

$$h\left(-\frac{1}{2}\right) = \left[g\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2 = (1-\ln 4)^2 = \ln^2 4 - 2\ln 4 + 1 \approx 0{,}15$$

$$h(3) = [g(3)]^2 = \left(\ln 16 - \frac{3}{4}\right)^2 = \ln^2 16 - \frac{3}{2}\ln 16 + \frac{9}{16} \approx 4{,}1$$

**II-** $\boldsymbol{Df = ]-1;3]}$ ، $\begin{cases} \boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{\ln(x+1)}} \; ; \boldsymbol{x \neq 0} \\ \boldsymbol{f(0) = 0} \end{cases}$

**1. بيان أنّ الدالة $f$ تقبل الاشتقاق عند الصفر**

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x}}_{\to 1}} = \boxed{1}$$

منه تقبل الدالة $f$ الاشتقاق عند الصفر ولدينا : $f'(0) = 1$

كتابة معادلة لـ (T) مماس ($\mathscr{C}_f$) في النقطة ذات الفاصلة 0

$$y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow \boxed{(T): y = x}$$

**2. أ. بيان أنّه من أجل كل $\boldsymbol{x \in ]-1;0[ \cup ]0;3]}$ : $\boldsymbol{f'(x) = \frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}}$**

$$f'(x) = \frac{2x\ln(x+1) - x^2\left(\frac{1}{x+1}\right)}{[\ln(x+1)]^2} = \frac{x\left[2\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}\right]}{[\ln(x+1)]^2} = \boxed{\frac{xg(x)}{[\ln(x+1)]^2}}$$

**استنتاج اتجاه تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-1$ | | $\alpha$ | | $0$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $g(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $1$ | $+$ | | |

$x \in ]-1;\alpha[ : f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x \in [\alpha;3] : f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**ب. بيان أنّ : $f(\alpha) = 2\alpha(\alpha+1)$ وتعيين حصر لـ $f(\alpha)$**

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow 2\ln(\alpha+1) - \frac{\alpha}{\alpha+1} = 0 \Rightarrow \ln(\alpha+1) = \frac{\alpha}{2(\alpha+1)}$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\ln(\alpha+1)} = \frac{\alpha^2}{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}} = \alpha^2\left[\frac{2(\alpha+1)}{\alpha}\right] = \boxed{2\alpha(\alpha+1)}$$

$$-0{,}8 < \alpha < -0{,}7 \Rightarrow \begin{cases} -1{,}6 < 2\alpha < -1{,}4 \\ 0{,}2 < \alpha+1 < 0{,}3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1{,}4 < -2\alpha < 1{,}6 \\ 0{,}2 < \alpha+1 < 0{,}3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0{,}28 < -2\alpha(\alpha+1) < 0{,}48 \Rightarrow \boxed{-0{,}48 < f(\alpha) < -0{,}28}$$

**ج. حساب $f(3)$ و $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to -1}} f(x)$**

$$f(3) = \frac{9}{\ln 4} \; ; \; \lim_{\substack{>\\ x\to -1}} f(x) = \lim_{\substack{>\\ x\to -1}} \frac{x^2}{\ln(x+1)} \begin{matrix} \to 1 \\ \to -\infty \end{matrix} = \boxed{0}$$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-1$ | | $\alpha$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $f(3)$ |

**3. أ. بيان أنّه من أجل كل $x \in ]-1;3]$ فإنّ : $x - \ln(x+1) \geq 0$**

نعتبر الدالة $k$ المعرّفة على المجال $]-1;3]$ بـ : $k(x) = x - \ln(x+1)$

$$\lim_{\substack{>\\ x\to -1}} k(x) = \lim_{\substack{>\\ x\to -1}} x - \ln(x+1) = +\infty \; ; k(3) = 3 - \ln 4 \approx 1{,}6$$

$$k'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$$

**جدول تغيرات الدالة $k$**

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $k'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $k(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $0$ | ↗ | $k(3)$ |

من جدول تغيرات الدالة $k$ نستنتج أنّه من أجل كل $x \in ]-1;3[$ فإنّ : $k(x) \geq 0$ ،
منه : $x - \ln(x+1) \geq 0$

**ب. دراسة وضعية ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة إلى المماس (T)**

$$f(x) - x = \frac{x^2}{\ln(x+1)} - x = \frac{x[x - \ln(x+1)]}{\ln(x+1)}$$

بما أنّ $x - \ln(x+1) \geq 0$ ، $x$ و $\ln(x+1)$ من نفس الإشارة ،
فإنّ $f(x) - x \geq 0$، منه المنحنى ($\mathscr{C}_f$) فوق المماس (T)

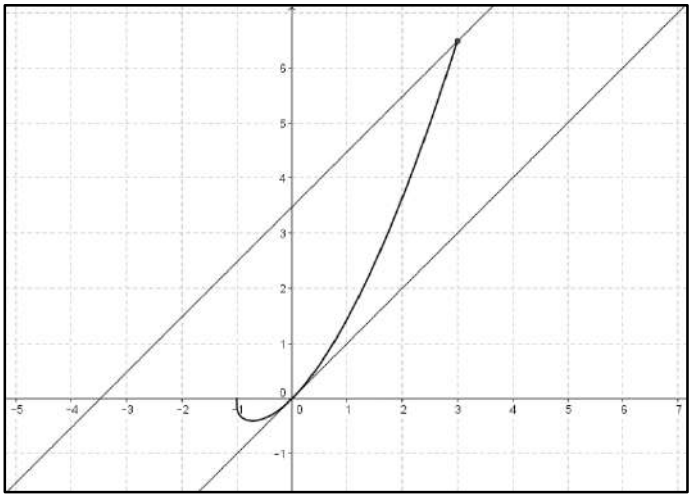
**4. تعيين معادلة للمستقيم (T')**

بما أنّ $(T')$ يوازي $(T)$ ، فإنّ ميله يساوي 1 ، منه : $(T'): y = x + b$ حيث $b \in \mathbb{R}$
وبما أنّ $(T')$ يقطع ($\mathscr{C}_f$) في النقطة ذات الفاصلة 3 ، فإنّ النقطة $\left(3; \frac{9}{\ln 4}\right)$ تنتمي إلى $(T')$

$$\left(3; \frac{9}{\ln 4}\right) \in (T') \Rightarrow \frac{9}{\ln 4} = 3 + b \Rightarrow b = \frac{9}{\ln 4} - 3$$

$$\Rightarrow \boxed{(T'): y = x + \frac{9}{\ln 4} - 3}$$

**5. رسم (T) ، (T') و ($\mathscr{C}_f$)**



**6. المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة: $f(x) = x + m$**

ندرس تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيم $(d): x + m$ الموازي لـ (T) و (T')

- $m < 0$ : المعادلة لا تقبل حلا
- $m = 0$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا
- $0 < m \leq 1$ : المعادلة تقبل حلين متمايزين
- $1 < m \leq \frac{9}{\ln 4} - 3$ : المعادلة تقبل حلا وحيدا
- $m > \frac{9}{\ln 4} - 3$ : المعادلة لا تقبل حلا

**حل التمرين 47 : بكالوريا 2012 ت ر**

**I- $g(x) = x^2 + a + b\ln x$ ، $Dg = ]0;+\infty[$**

**1. تعيين العددين $a$ و $b$ : $g'(x) = 2x + \frac{b}{x}$**

$$\begin{cases} g(1) = -1 \\ g'(1) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + a = -1 \\ 2 + b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{g(x) = x^2 - 2 + 2\ln x}$$

2. نضع $a = -2$ و $b = 2$

**أ. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} x^2 - 2 + 2\ln x = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 - 2 + 2\ln x = \boxed{+\infty}$$

$$g'(x) = 2x + \frac{2}{x}$$

بما أنّ $g'(x) > 0$ ، فإنّ الدالة $g$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

**ب. بيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على $]0;+\infty[$**

الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]0;+\infty[$ ، $\lim_{x \to 0} g(x) = -\infty$

و $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ ، منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$

في المجال $]0;+\infty[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$**

$x \in ]0;\alpha[ \Rightarrow g(x) < 0 \; ; \; x \in ]\alpha;+\infty[ \Rightarrow g(x) > 0 \; ; g(\alpha) = 0$

**II- $Df = ]0;+\infty[$ ، $f(x) = x - 2 - \frac{2\ln x}{x}$**

**1. أ. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}} f(x)$**

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 0}} f(x) = \lim_{\substack{>\\ x\to 0}} x - 2 - \frac{2\ln x}{x} \begin{matrix} \to -\infty \\ \to 0^+ \end{matrix} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - 2 - \underbrace{\frac{2\ln x}{x}}_{\to 0} = \boxed{+\infty}$$

**ب. حساب $f'(x)$ والتحقق أنّ : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$**

$$f'(x) = 1 - \frac{2 - 2\ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 2 + 2\ln x}{x^2} = \boxed{\frac{g(x)}{x^2}}$$

**ج. استنتاج إشارة $f'(x)$**

$x \in ]0;\alpha[ : f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x \in [\alpha;+\infty[ : f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

**2. أ. بيان أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $y = x - 2$ مقارب لـ $(\mathcal{C}_f)$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (x-2) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2\ln x}{x} = \boxed{0}$$

**دراسة وضعية $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$**

$$f(x) - (x-2) = -\frac{2\ln x}{x}$$

$x \in ]0;1[ : \ln x < 0 \Rightarrow f(x) - (x-2) > 0 \Rightarrow (\Delta)$ فوق $(Cf)$

$x \in [1;+\infty[ : \ln x < 0 \Rightarrow f(x) - (x-2) < 0 \Rightarrow (\Delta)$ تحت $(Cf)$

يتقاطع ($\mathscr{C}_f$) و($\Delta$) عند النقطة $(1;-1)$

**ب. بيان أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقبل مماسا (T) يوازي ($\Delta$)**

بما أنّ المماس (T) يوازي ($\Delta$) ، فإنّ ميله يساوي 1 ، منه :

$$f'(x)=1 \Rightarrow \frac{x^2-2+2\ln x}{x^2}=1 \Rightarrow -2+2\ln x=0 \Rightarrow \ln x=1 \Rightarrow x=e$$

$$(T): y=f'(e)(x-e)+f(e) \Rightarrow \boxed{(T): y=x-2-\frac{2}{e}}$$

**ج. بيان أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $x_1$ و $x_2$**

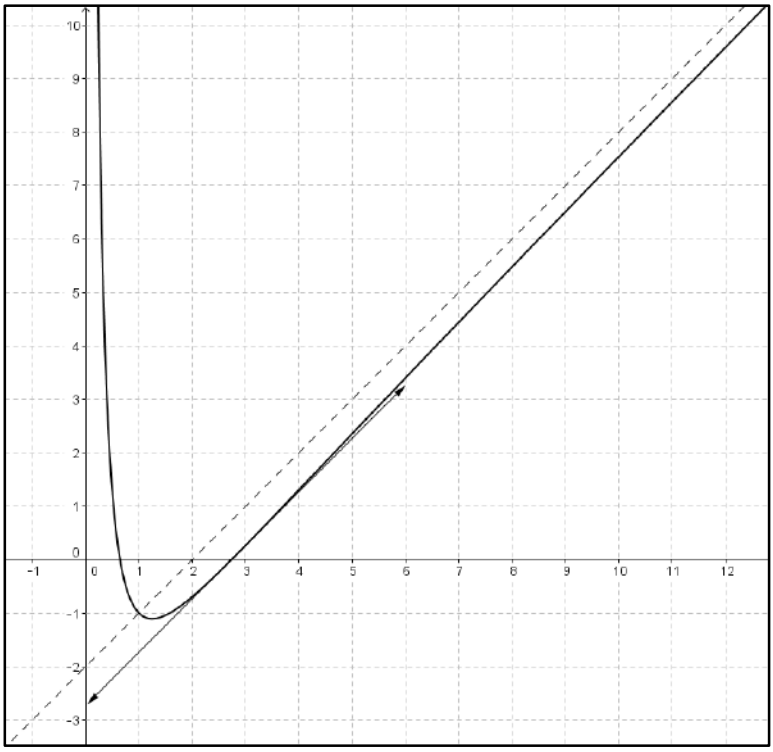
الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على كل من المجالين $]0,6;0,7[$ و $]2,7;2,8[$ ،

$f(2,7) \times f(2,8) < 0$ و $f(0,6) \times f(0,7) < 0$، منه المعادلة

$f(x)=0$ تقبل حلين : $0,6 < x_1 < 0,7$ و $2,7 < x_2 < 2,8$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**رسم كلا ($\Delta$) ، (T) و($\mathscr{C}_f$)**



**3. المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة: $(m+2)x+2\ln x=0$**

$$(m+2)x+2\ln x=0 \Rightarrow mx=-2x-2\ln x \Rightarrow m=-2-\frac{2\ln x}{x}$$

$$\Rightarrow x+m=x-2-\frac{2\ln x}{x} \Rightarrow x+m=f(x)$$

ندرس تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيم $(d): x+m$ الموازي لـ $(\Delta)$ و $(T)$

- $m<-2-\frac{2}{e}$ : المعادلة لا تقبل حلا
- $m=-2-\frac{2}{e}$ : المعادلة تقبل حلا مضاعفا
- $-2-\frac{2}{e}<m<-2$ : المعادلة تقبل حلين متمايزين
- $m\geq -2$ : المعادلة تقبل حلا وحيدا

**حل التمرين 48 : بكالوريا 2012 ع ت**

$$\boldsymbol{Df=]-\infty;0[\ ،\ f(x)=x+5+6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)}$$

**1. أ. حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)$**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ <}} x+5+6\ln\underbrace{\left(\frac{x}{x-1}\right)}_{\to 0^+}=\boxed{-\infty}$$

**تفسير النتيجة هندسيا**

المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مستقيم مقارب عمودي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

**ب. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+5+6\ln\underbrace{\left(\frac{x}{x-1}\right)}_{\to 1}=\boxed{-\infty}$$

**2. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-\infty;0[$ فإنّ : $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}$**

$$f'(x)=1+6\frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}=1-\frac{6}{x(x-1)} \Rightarrow \boxed{f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x(x-1)}}$$

**استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$ :**

بما أنّ $x(x-1)>0$ ، فإنّ إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $x^2-x-6$

$x^2-x-6=0 \Rightarrow (x-3)(x+2)=0 \Rightarrow x=-2$ أو $x=3$ (مرفوض)

$x\in ]-\infty;-2]: f'(x)\geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x\in ]-2;0[: f'(x)<0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(-2)$ | ↘ | $-\infty$ |

**3. أ. بيان أنّ $(\Delta): y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل لـ $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $-\infty$**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+5)=\lim_{x\to-\infty} 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)=0$$

منه، المستقيم $(\Delta): y=x+5$ هو مستقيم مقارب مائل لـ $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $-\infty$

**ب. دراسة وضع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$**

$$f(x)-(x+5)=6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$x<0 \Rightarrow 0<\frac{x}{x-1}<1 \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)<0 \Rightarrow f(x)-(x+5)<0$$

منه المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يكون تحت المستقيم $(\Delta)$

**4. بيان أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$**

$f(-3{,}5)\approx -0{,}01; f(-3{,}4)\approx 0{,}05; f(-1{,}1)\approx 0{,}02; f(-1)\approx -0{,}16$

الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على كل من المجالين $]-3{,}4;-3{,}5[$ و $]-1;-1{,}1[$ ، ولدينا :

$f(-3{,}5)\times f(-3{,}4)<0$ ، كذلك $f(-1{,}1)\times f(-1)<0$ ، منه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين $\alpha$ و $\beta$ حيث $-3{,}4<\alpha<-3{,}5$ و $-1<\beta<-1{,}1$ ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**5. انشاء المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيم $(\Delta)$ :** (انظر نهاية التمرين)

**6. أ. $A\left(-1;3+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ و $B\left(-2;\frac{5}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$**

**بيان أنّ : معادلة ديكارتية للمستقيم $(AB)$ $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}+6\ln\left(\frac{3}{4}\right)$**

$\overrightarrow{AM}\left(x+1;y-3-6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)$ ، $\overrightarrow{AB}\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$

$$M(x;y) \in (AB) \Rightarrow \overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{AB} \Rightarrow -\frac{1}{2}(x+1) + y - 3 - 6\ln\left(\frac{3}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2} + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right)}$$

**ب. بيان أنّ المستقيم $(AB)$ يمسّ $(\mathcal{C}_f)$ في نقطة $M_0$ يُطلب تعيين إحداثييها**

المستقيم $(AB)$ يمسّ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في نقطة $M_0(x_0, y_0)$ يعني $f'(x_0) = \frac{1}{2}$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{{x_0}^2 - x_0 - 6}{x_0(x_0-1)} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2{x_0}^2 - 2x_0 - 12 = {x_0}^2 - x_0$$

$$\Rightarrow {x_0}^2 - x_0 - 12 = 0 \Rightarrow (x_0-4)(x_0+3) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x_0 = -3}\ ; (x_0 = 4 \text{ مرفوض})$$

$$f(-3) = 2 + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right) \Rightarrow \boxed{M_0\left(-3; 2 + 6\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right)}$$

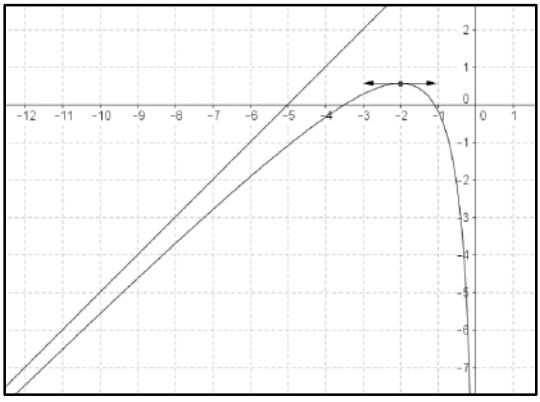
**7. $D_g = ]-\infty; 0[$ ، $g(x) = \frac{x^2}{2} + 5x + 6x\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6\ln(1-x)$**

**بيان أنّ $g$ دالة أصلية للدالة $f$ على المجال $]-\infty; 0[$**

$$g'(x) = x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + 6x\left(\frac{-\frac{1}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}}\right) + 6\left(-\frac{1}{1-x}\right)$$

$$= x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - 6\left(\frac{1}{x-1}\right) + 6\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

$$= x + 5 + 6\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \Rightarrow \boxed{g'(x) = f(x)}$$



**حل التمرين 49 : بكالوريا 2013 ر**

**I- 1. $u(x) = e^x - 3x + 4 - e$ ، $Du = ]0; +\infty[$**

**أ. دراسة اتجاه تغير الدالة $u$**

$\boxed{u'(x) = e^x - 3}$ ; $e^x - 3 = 0 \Rightarrow e^x = 3 \Rightarrow x = \ln 3$

$x \in ]0; \ln 3[ : u'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $u$ متناقصة

$x \in [\ln 3 ; +\infty[ : u'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $u$ متزايدة

**ب. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0; +\infty[$ : $e^x - e > 3x - 4$**

$$\lim_{x \to 0} u(x) = \lim_{x \to 0} e^x - 3x + 4 - e = 5 - e \approx 2{,}28$$

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x - 3x + 4 - e = \lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 3 + \frac{4}{x} - \frac{e}{x}\right) = +\infty$$

$u(\ln 3) = 7 - e - 3\ln 3 \approx 1$

الدالة $u$ تقبل قيمة حدّية صغرى $(u(\ln 3) \approx 1)$ ، منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x \in ]0; +\infty[$ : $u(x) > 0$ أي $e^x - 3x + 4 - e > 0$ ، منه $e^x - e > 3x - 4$

**2. $v(x) = -3x^3 + 4x^2 - 1 + \ln x$ ، $Dv = ]0; +\infty[$**

**أ. بيان أنّ $v'(1) = 0$**

$$v'(x) = -9x^2 + 8x + \frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{v'(1) = 0}$$

**ب. إثبات أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0; +\infty[$ : $v(x) \leq 0$**

$$v'(x) = -9x^2 + 8x + \frac{1}{x} = \frac{-9x^3 + 8x^2 + 1}{x} = \frac{-(x-1)(9x^2 + x + 1)}{x}$$

بما أنّ $\frac{9x^2+x+1}{x} > 0$ ، فإنّ إشارة $v'(x)$ من إشارة $-(x-1)$

$x \in ]0; 1[ : v'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $v$ متزايدة

$x \in [1; +\infty[ : v'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $v$ متناقصة

$$\lim_{x \to 0} v(x) = \lim_{x \to 0} -3x^3 + 4x^2 - 1 + \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} v(x) = \lim_{x \to +\infty} -3x^3 + 4x^2 - 1 + \ln x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^3\left(-3 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{\ln x}{x^3}\right) = -\infty$$

$v(1) = 0$

الدالة $v$ تقبل قيمة حدّية كبرى $(0)$ ، منه نستنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x \in ]0; +\infty[$ : $v(x) \leq 0$

**ج. استنتاج أنّه من أجل كل عدد حقيقي $\frac{-1+\ln x}{x^2} \leq 3x-4 : x \in ]0;+\infty[$**

$$v(x) \leq 0 \Rightarrow -3x^3+4x^2-1+\ln x \leq 0 \Rightarrow -1+\ln x \leq 3x^3+4x^2$$

$$\Rightarrow -1+\ln x \leq x^2(3x+4) \Rightarrow \boxed{\frac{-1+\ln x}{x^2} \leq 3x-4} ; (x^2>0)$$

**3. إثبات أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $e^x-e+\frac{1-\ln x}{x^2}>0 : ]0;+\infty[$**

$$\begin{cases} e^x-e>3x-4 \\ \frac{-1+\ln x}{x^2} \leq 3x-4 \end{cases} \Rightarrow e^x-e>\frac{-1+\ln x}{x^2} \Rightarrow e^x-e+\frac{1-\ln x}{x^2}>0$$

**II- $Df=]0;+\infty[$ ، $f(x)=e^x-ex+\frac{\ln x}{x}$**

**1. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{>\\ x\to 0}} f(x)$**

$$\lim_{\substack{>\\ x\to 0}} f(x)=\lim_{\substack{>\\ x\to 0}} e^x-ex+\frac{\ln x}{x}=\boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x-ex+\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{e^x}{x}-e\right)+\frac{\ln x}{x}\right]=\boxed{+\infty}$$

**2. بيان أنّ الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$**

$$f'(x)=e^x-e+\frac{1-\ln x}{x^2}$$

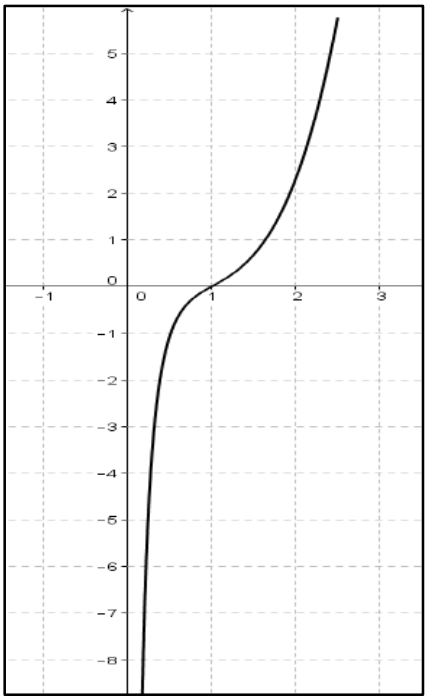
حسب الإجابة السابقة (I.3) فإنّ : $f'(x)>0$ ، منه الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $+\infty$ |

**3. حساب $f(1)$ ورسم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ على المجال $\left]0;\frac{5}{2}\right[$ :**

$$f(1)=0$$



**4. حساب المساحة**

$$f(x) = e^x - ex + \frac{\ln x}{x} \Rightarrow F(x) = e^x - \frac{e}{2}x^2 + \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} -f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx = -[F(x)]_{\frac{1}{2}}^{1} + [F(x)]_{1}^{2}$$

$$= F\left(\frac{1}{2}\right) - F(1) + F(2) - F(1) = F\left(\frac{1}{2}\right) + F(2) - 2F(1)$$

$$= \left(e^{\frac{1}{2}} - \frac{e}{8} + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}\right)^2\right) + \left(e^2 - 2e + \frac{1}{2}(\ln 2)^2\right) - 2\left(e - \frac{e}{2}\right)$$

$$= \boxed{\left(e^2 + e^{\frac{1}{2}} - \frac{25}{8}e + (\ln 2)^2\right)ua} \; ; \left(\left(\ln\frac{1}{2}\right)^2 = (-\ln 2)^2 = (\ln 2)^2\right)$$

**حل التمرين 50 : بكالوريا 2013 ت ر**

**I- $g(x) = (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)$ ، $Dg = ]-1; +\infty[$**

**1. دراسة اتجاه تغير الدالة $g$ على المجال $]-1;+\infty[$**

$$g'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x+1} = \boxed{\frac{2(x+1)^2+1}{x+1}}$$

من أجل $x \in ]-1;+\infty[$ ، لدينا $g'(x) > 0$ ، منه الدالة $g$ متزايدة تماما

**2. بيان أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $0,31 < \alpha < 0,32$**
**وأنّ : $\ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$**

الدالة $g$ مستمرة و رتيبة على المجال $]0,31\ ;\ 0,32[$ و $\underbrace{g(0,31)}_{\approx -0,01} \times \underbrace{g(0,32)}_{\approx 0,02} < 0$

منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $0,31 < \alpha < 0,32$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow (\alpha+1)^2 - 2 + \ln(\alpha+1) = 0 \Rightarrow \ln(\alpha+1) = 2 - (\alpha+1)^2$$

**3. استنتاج حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$**

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (x+1)^2 - 2 + \ln(x+1) = +\infty$$

$$x \in ]-1;\alpha[ \Rightarrow g(x) < 0\ ;\ x \in ]\alpha;+\infty[ \Rightarrow g(x) > 0\ ;\ g(\alpha) = 0$$

**II- $Df = ]-1;+\infty[$ ، $f(x) = (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2$**

**1. حساب $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$**

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2 = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x+1)^2 + (2 - \ln(x+1))^2 = \boxed{+\infty}$$

**2. إثبات أنّه من أجل كل $x$ من $]-1;+\infty[$ : $f'(x) = \frac{2g(x)}{x+1}$**

$$f'(x) = 2(x+1) + 2(2 - \ln(x+1))\left(-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$= 2\frac{(x+1)^2 - 2 + \ln(x+1)}{x+1} = \boxed{\frac{2g(x)}{x+1}}$$

**3. دراسة اتجاه تغيرات الدالة $f$**

بما أنّ $x + 1 > 0$ ، فإنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، منه :

الدالة $f$ متناقصة $\Rightarrow x \in ]-1;\alpha[ : f'(x) < 0$

الدالة $f$ متزايدة $\Rightarrow x \in [\alpha;+\infty[ : f'(x) \geq 0$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

**4. بيان أنّ: $f(\alpha)=(\alpha+1)^2(1+(\alpha+1)^2)$**

$$f(\alpha)=(\alpha+1)^2+(2-\ln(\alpha+1))^2$$
$$=(\alpha+1)^2+(2-[2-(\alpha+1)^2])^2=(\alpha+1)^2+(\alpha+1)^4$$
$$=(\alpha+1)^2(1+(\alpha+1)^2)$$

**استنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$**

$$0{,}31<\alpha<0{,}32\Rightarrow 1{,}31<\alpha+1<1{,}32$$
$$\Rightarrow\begin{cases}1{,}72<(\alpha+1)^2<1{,}74\\2{,}72<1+(\alpha+1)^2<2{,}74\end{cases}\Rightarrow\boxed{4{,}68<f(\alpha)<4{,}77}$$

**5. تمثيل المنحنى ($\mathcal{C}_f$) على المجال $]-1;2[$ :** (انظر نهاية التمرين)

**III- $M\in(\Gamma)$ ، $A(-1;2)$ ، $Dh=]-1;+\infty[$ ، $h(x)=\ln(x+1)$**

**1. إثبات أنّ المسافة $AM$ تُعطى بالعبارة $AM=\sqrt{f(x)}$**

$$M\in(\Gamma)\Rightarrow M\big(x;h(x)\big)\Rightarrow AM=\sqrt{(x+1)^2+[\ln(x+1)-2]^2}$$
$$\Rightarrow AM=\sqrt{(x+1)^2+[2-\ln(x+1)]^2}=\boxed{\sqrt{f(x)}}$$

**2. $Dk=]-1;+\infty[$ ، $k(x)=\sqrt{f(x)}$**

**أ. بيان أنّ للدالتين $f$ و $k$ نفس اتجاه التغيّر على المجال $]-1;+\infty[$**

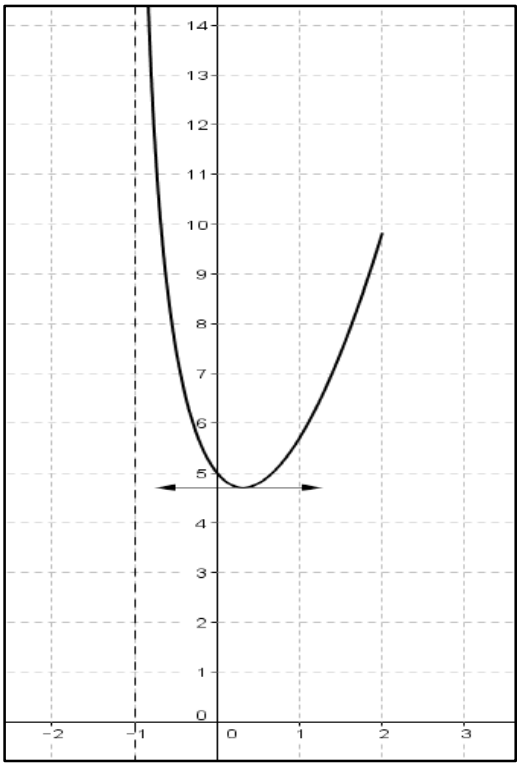
لدينا : $k'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$. وبما أنّ $\sqrt{f(x)}>0$ ، فإنّ المشتقتين $k'$ و $f'$ لهما نفس الإشارة منه نستنتج أنّ للدالتين $f$ و $k$ نفس اتجاه التغيّر على المجال $]-1;+\infty[$

**ب. تعيين إحداثيتي النقطة B من $(\Gamma)$ بحيث تكون المسافة $AM$ أصغر ما يمكن**

بما أنّ $AM=k(x)$ ، فإنّ المسافة $AM$ تكون أصغر ما يمكن لمّا تبلغ الدالة $k$ قيمتها الحدّية الصغرى وهي $k(\alpha)$ ، أي من أجل $x=\alpha$ ، منه نستنتج أنّ إحداثيتي النقطة B هي : $\big(\alpha;h(\alpha)\big)$ ، أي $B(\alpha;\ln(\alpha+1))$

**ج. بيان أنّ : $AB=(\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}$**

$$AB=k(\alpha)\Rightarrow AB=\sqrt{f(\alpha)}=\sqrt{(\alpha+1)^2(1+(\alpha+1)^2)}$$
$$\Rightarrow\boxed{AB=(\alpha+1)\sqrt{(\alpha+1)^2+1}}$$




**حل التمرين 51 : بكالوريا 2013 ع ت**

**I- $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$ ، $Dg = ]-1;+\infty[$**

**1. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$$\lim_{x \xrightarrow{>} -1} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} -1} x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1) = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (x+1)\left[\underbrace{\frac{x^2+2x+4}{x+1}}_{\to +\infty} - 2\underbrace{\frac{\ln(x+1)}{x+1}}_{\to 0}\right] = \boxed{+\infty}$$

**2. استنتاج أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]-1;+\infty[$ : $g(x) > 0$**

$$g'(x) = 2x + 2 - \frac{2}{x+1} = \frac{2[(x+1)^2 - 1]}{x+1} = \frac{2x^2+4x}{x+1} = \boxed{\frac{2x(x+2)}{x+1}}$$

من أجل $x \in ]-1;+\infty[$ ، العبارتان $x+1$ و $x+2$ موجبتان ، منه إشارة $g'(x)$ من إشارة $x$.

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $4$ | ↗ | $+\infty$ |

من جدول تغيرات الدالة $g$ نستنتج أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]-1;+\infty[$ :
$g(x) \geq 4$ ، منه $g(x) > 0$

**II- $Df = ]-1;+\infty[$ ، $f(x) = x - \frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$**

**1. أ. حساب $\lim\limits_{\substack{x\to -1 \\ >}} f(x)$**

$$\lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} x - \frac{1-2\ln(x+1)}{x+1} \to +\infty \\ \to 0^+ = \boxed{-\infty}$$

تفسير النتيجة بيانيا

يقبل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x = -1$

**ب. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x - \frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x - \frac{1}{x+1} + 2\frac{\ln(x+1)}{x+1} = \boxed{+\infty}$$

**2. أ. بيان أنّه من أجل كل $x$ من $]-1;+\infty[$ : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$**

$$f'(x) = 1 - \frac{-\frac{2}{x+1}(x+1) - 1 + 2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(x+1)^2 + 3 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+4-2\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

**ب. دراسة اتجاه تغيرات الدالة $f$ على المجال $]-1;+\infty[$**

بما أنّ $g(x) > 0$ ، فإنّ $f'(x) > 0$ ، منه الدالة $f$ متزايدة تماما

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)$ | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

**ج. بيان أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]-1;+\infty[$**

الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على المجال $]-1;+\infty[$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=-\infty$

و $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ ، منه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$

في المجال $]-1;+\infty[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**التحقق أنّ : $0<\alpha<0,5$**

$$\underbrace{f(0)}_{=-1}\times\underbrace{f(0,5)}_{\approx 0,37}<0 \Rightarrow \boxed{0<\alpha<0,5}$$

**3. أ. بيان أنّ $(\Delta): y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty} -\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x+1}+2\frac{\ln(x+1)}{x+1}=\boxed{0}$$

منه ، المستقيم $(\Delta): y=x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند $+\infty$

**ب. دراسة وضعية المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$**

$$f(x)-x=-\frac{1-2\ln(x+1)}{x+1}=\frac{2\ln(x+1)-1}{x+1}$$

$$2\ln(x+1)-1=0\Rightarrow \ln(x+1)=\frac{1}{2}\Rightarrow x+1=e^{\frac{1}{2}}\Rightarrow \boxed{x=\sqrt{e}-1}$$

$x\in\left]-1;\sqrt{e}-1\right[: f(x)-x<0 \Rightarrow (\Delta)$ تحت $(Cf)$

$x\in\left[\sqrt{e}-1;+\infty\right[: f(x)-x>0 \Rightarrow (\Delta)$ فوق $(Cf)$

يتقاطع $(\mathcal{C}_f)$ و$(\Delta)$ عند النقطة $(\sqrt{e}-1;\sqrt{e}-1)$

**4. $(T): y=x+\frac{2}{\sqrt{e^3}}$ مماس للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في نقطة فاصلتها $x_0$**

**أ. حساب $x_0$**

$$f'(x_0)=1\Rightarrow \frac{{x_0}^2+2x_0+4-2\ln(x_0+1)}{(x_0+1)^2}=1$$

$\Rightarrow {x_0}^2 + 2x_0 + 4 - 2\ln(x_0 + 1) = (x_0 + 1)^2 \Rightarrow 2\ln(x_0 + 1) = 3$

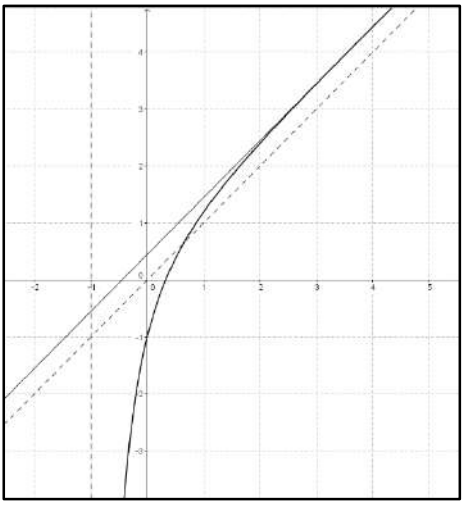
$\Rightarrow \ln(x_0 + 1) = \frac{3}{2} \Rightarrow x_0 + 1 = e^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \boxed{x_0 = e^{\frac{3}{2}} - 1}$

**ب. رسم المستقيمين المقاربين ، المماس (T) والمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**

(انظر الشكل في نهاية التمرين)

**ج. تعيين بيانيا قيم $m$ بحيث تقبل المعادلة: $f(x) = x + m$ حلين متمايزين**

يقطع المستقيم $(D_m): y = x + m$ المنحنى ($\mathscr{C}_f$) في نقطتين لمّا يكون $(D_m)$ بين $(\Delta)$ و$(T)$، منه تقبل المعادلة $f(x) = x + m$ حلين متمايزين من أجل $m \in \left]0; \frac{2}{\sqrt{e^3}}\right[$



**حل التمرين 52 : بكالوريا 2014 ر**

**1. $Df = ]0; +\infty[$ ، $f(x) = (1 + 2\ln x)(-1 + \ln x)$**

**أ. دراسة تغيرات الدالة $f$**

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{(1 + 2\ln x)}_{\to -\infty} \underbrace{(-1 + \ln x)}_{\to -\infty} = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{(1 + 2\ln x)}_{\to +\infty} \underbrace{(-1 + \ln x)}_{\to +\infty} = \boxed{+\infty}$

$f'(x) = \frac{2}{x}(-1 + \ln x) + \frac{1}{x}(1 + 2\ln x) = \frac{1}{x}(4\ln x - 1)$

$4\ln x - 1 = 0 \Rightarrow 4\ln x = 1 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{4}}$

$x \in \left]0; e^{\frac{1}{4}}\right[ : f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

$x \in \left[e^{\frac{1}{4}}; +\infty\right[ : f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $0$ | | $e^{\frac{1}{4}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $-\frac{9}{8}$ | ↗ | $+\infty$ |

**ب. كتابة معادلة المماس $(\Delta)$ للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة $e$**

$$(\Delta): y = f'(e)(x-e) + f(e) = \frac{3}{e}(x-e) \Rightarrow \boxed{(\Delta): y = \frac{3}{e}x - 3}$$

**ج. تعيين فواصل تقاطع $(\mathcal{C}_f)$ مع حامل محور الفواصل**

$f(x) = 0 \Rightarrow (1 + 2\ln x)(-1 + \ln x) = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2}$ أو $\ln x = 1$

$\Rightarrow \boxed{x = e^{-\frac{1}{2}}}$ أو $\boxed{x = e}$

**رسم $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $]0; e^2]$ :** (انظر نهاية التمرين)

**2. $D_g = ]0; +\infty[$ ، $g(x) = 1 - \ln x$**

**أ. دراسة تغيرات الدالة $g$**

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 1 - \ln x = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \ln x = \boxed{-\infty}$

$g'(x) = -\frac{1}{x}$ ; $g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

**ب. تعيين الوضع النسبي للمنحنيين ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_g$)**

$$f(x)-g(x)=(1+2\ln x)(-1+\ln x)-(1-\ln x)$$
$$=(1+2\ln x)(-1+\ln x)+(-1+\ln x)$$
$$=(-1+\ln x)(2+2\ln x)=\boxed{2(\ln x-1)(\ln x+1)}$$

$\ln x-1=0\Rightarrow \ln x=1\Rightarrow x=e;\ln x+1=0\Rightarrow \ln x=-1\Rightarrow x=e^{-1}$

$x\in ]0;e^{-1}[\cup ]e;+\infty[: f(x)-g(x)>0\Rightarrow (Cg)$ فوق $(Cf)$

$x\in ]e^{-1};e[: \ln x<0\Rightarrow f(x)-g(x)<0\Rightarrow (Cg)$ تحت $(Cf)$

يتقاطع المنحنيان ($\mathscr{C}_f$) و ($\mathscr{C}_g$) عند النقطتين : $A(e^{-1};2);B(e;0)$

**3. $D_h=]0;+\infty[$ ، $h(x)=x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$**

**أ. حساب $h'(x)$**

$$h'(x)=(\ln x)^2+x\left(\frac{2\ln x}{x}\right)-2\ln x-2x\left(\frac{1}{x}\right)+2=(\ln x)^2$$

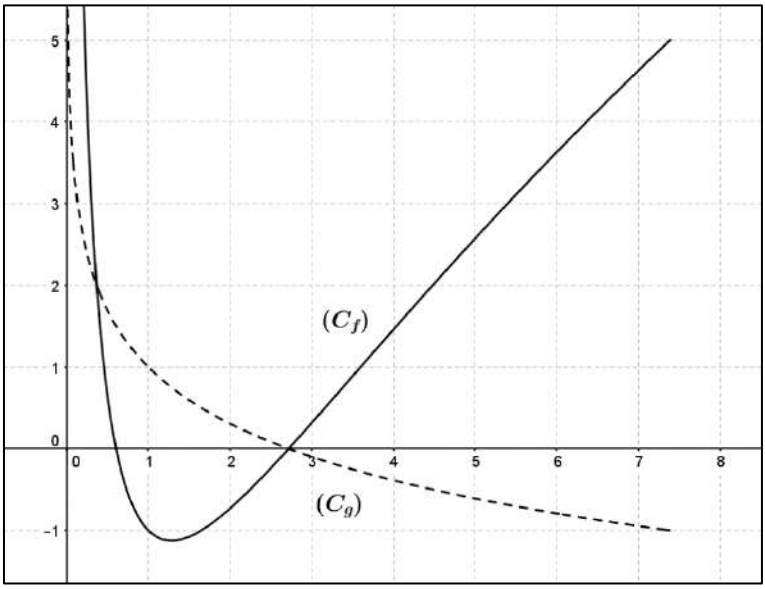
**استنتاج دالة أصلية للدالة $x\to(\ln x)^2$ على المجال $]0;+\infty[$**

$$h'(x)=(\ln x)^2\Rightarrow \boxed{\int(\ln x)^2\,dx=h(x)}$$

**ب. حساب العدد : $\int_{\frac{1}{e}}^{e}[f(x)-g(x)]\,dx$**

$$\int_{\frac{1}{e}}^{e}[f(x)-g(x)]\,dx=\int_{\frac{1}{e}}^{e}[(1+2\ln x)(-1+\ln x)-(1-\ln x)]\,dx$$
$$=2\int_{\frac{1}{e}}^{e}(\ln x)^2-1\,dx=2[h(x)-x]_{\frac{1}{e}}^{e}=2\left[h(e)-e-h\left(\frac{1}{e}\right)+\frac{1}{e}\right]$$
$$=2\left[e(\ln e)^2-2e\ln e+2e-e-\frac{1}{e}\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2+\frac{2}{e}\ln\frac{1}{e}-\frac{2}{e}+\frac{1}{e}\right]$$
$$=2\left[e-2e+2e-e-\frac{1}{e}-\frac{2}{e}-\frac{2}{e}+\frac{1}{e}\right]=\boxed{-\frac{8}{e}}$$

رسم ($\mathscr{C}_g$) على المجال $]0; e^2[$




**حل التمرين 53 : بكالوريا 2014 ت ر**

**I) $g(x) = x\ln x + x$ ، $D_g = ]0; 3]$**

**1. دراسة تغيّرات الدالة $g$**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x\ln x + x = \boxed{0}$$

$$g'(x) = \ln x + x\left(\frac{1}{x}\right) + 1 = \boxed{\ln x + 2}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \ln x + 2 = 0 \Rightarrow \ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2}$$

- $x \in ]0; e^{-2}[ : g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة
- $x \in [e^{-2}; 3] : g'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

$$g(e^{-2}) = e^{-2}\ln e^{-2} + e^{-2} = -e^{-2}\ ; g(3) = 3 + 3\ln 3$$

**جدول تغيّرات الدالة $g$**

| $x$ | $0$ | | $e^{-2}$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $0$ | ↘ | $-e^{-2}$ | ↗ | $3+3\ln 3$ |

**2. أ. بيان أنّ المعادلة $g(x)=2$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في $]0;3]$**

الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]e^{-2};3]$ و $g(e^{-2})<2<g(3)$ ،

وبما أنّ $2 \notin ]0;-e^{-2}]$ ، نستنتج أنّ المعادلة $g(x)=2$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]e^{-2};3]$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**التحقق أنّ : $1,45<\alpha<1,46$**

$g(1,45)\approx 1,99\ ; g(1,46)\approx 2,01 \Rightarrow \boxed{1,45<\alpha<1,46}$

**ب. استنتاج إشارة $g(x)-2$**

- $x\in ]0;\alpha[ : g(x)<2 \Rightarrow g(x)-2<0$
- $x\in [\alpha;3] : g(x)\geq 2 \Rightarrow g(x)-2\geq 0$

**II) $D_f=]0;3]$ ، $f(x)=|x-2|\ln x$**

**1. التخمين حول قابلية اشتقاق الدالة $f$ عند 2**

بما أنّ المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 2 نصفي مماس ، يمكننا التخمين أنّ الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق عند 2

**2. اثبات صحة التخمين**

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ <}} \frac{-(x-2)\ln x}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ <}} -\ln x=\boxed{-\ln 2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} \frac{(x-2)\ln x}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ >}} \ln x=\boxed{\ln 2}$$

بما أنّ النهايتين مختلفتين ، نستنتج أنّ الدالة $f$ غير قابلة للاشتقاق عند 2

**3. دراسة تغيّرات الدالة $f$**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} |x-2|\ln x=\boxed{-\infty}$$

$x\in ]0;2[ : f(x)=(2-x)\ln x$

$$f'(x)=-\ln x+\frac{2-x}{x}=-\frac{x\ln x+x-2}{x}=\boxed{-\frac{g(x)-2}{x}}$$

$x\in [2;3] : f(x)=(x-2)\ln x$

$$f'(x)=\ln x+\frac{x-2}{x}=\frac{x\ln x+x-2}{x}=\boxed{\frac{g(x)-2}{x}}$$

- $x\in ]0;\alpha[ : g(x)-2<0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة
- $x\in ]\alpha;2[ : g(x)-2>0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة
- $x\in ]2;3] : g(x)-2>0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

**جدول تغيّرات الدالة $f$**

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)-2$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | ‖ |
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | ‖ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $0$ | ↗ | $\ln 3$ |

$$f(\alpha) = (2-\alpha)\ln\alpha$$

**III** $\boldsymbol{D_h = \left[0;\frac{\pi}{2}\right[}$ ، $\boldsymbol{h(x) = (2-\cos x)\ln(\cos x)}$

**1. بيان أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $\boldsymbol{x = \frac{\pi}{2}}$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_h)$**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{<}} h(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^{<}} \underbrace{(2-\cos x)}_{\to 2}\ln\underbrace{(\cos x)}_{\to 0^+} = -\infty$$

منه نستنتج أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى $(\mathscr{C}_h)$

**2. دراسة اتجاه تغيّر الدالة $h$**

$h(x) = f(\cos x) \Rightarrow h'(x) = -\sin x \,.\, f'(\cos x)$

$x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[ \Rightarrow \sin x \geq 0 \Rightarrow f'(\cos x)$ عكس إشارة $h'(x)$

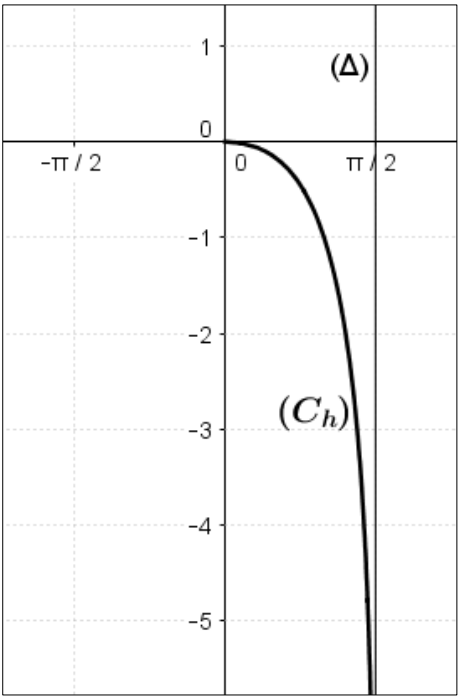
$x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[ \Rightarrow 0 < \cos x \leq 1 \Rightarrow f'(\cos x) > 0 \Rightarrow h'(x) < 0 \Rightarrow h$ متناقصة

$h(0) = f(1) = 0$

**جدول تغيّرات الدالة $h$**

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | ‖ | $-$ | ‖ |
| $h(x)$ | $0$ | ↘ | $-\infty$ |

**رسم $(\Delta)$ و $(\mathscr{C}_h)$**




**حل التمرين 54 : بكالوريا 2014 ع ت**

$$Df = ]0;+\infty[\ ،\ f(x) = 1 + \frac{2\ln x}{x}$$

**1. أ. حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **و** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 1 + \frac{2\ln x}{x} \begin{matrix} \to -\infty \\ \to 0^+ \end{matrix} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \underbrace{\frac{2\ln x}{x}}_{\to 0} = \boxed{1}$$

**تفسير النتيجتين هندسيا**

يقبل $(\mathscr{C}_f)$ مستقيمين مقاربين ، الأول عمودي معادلته $x = 0$ والثاني أفقي معادلته $y = 1$

**ب. دراسة اتجاه تغيرات الدالة $f$ على المجال** $]0;+\infty[$

$$f'(x) = \frac{2 - 2\ln x}{x} = \boxed{\frac{2(1-\ln x)}{x}}$$

$$1 - \ln x \geq 0 \Rightarrow \ln x \leq 1 \Rightarrow x \leq e$$

$x \in ]0;e]: f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة

$x \in ]e;+\infty[: f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | ‖ $-\infty$ | ↗ | $1+\frac{2}{e}$ | ↘ | $1$ |

**2. أ. دراسة وضعية المنحنى ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta): y = 1$**

$$f(x) - 1 = \frac{2\ln x}{x}$$

$x \in ]0;1[: \ln x < 0 \Rightarrow f(x) - 1 < 0 \Rightarrow (Cf)$ تحت $(\Delta)$

$x \in ]1;+\infty[: \ln x > 0 \Rightarrow f(x) - 1 > 0 \Rightarrow (Cf)$ فوق $(\Delta)$

يتقاطع ($\mathscr{C}_f$) و$(\Delta)$ عند النقطة $(1;1)$

**ب. كتابة معادلة المماس $(T)$ للمنحنى ($\mathscr{C}_f$) في النقطة ذات الفاصلة 1**

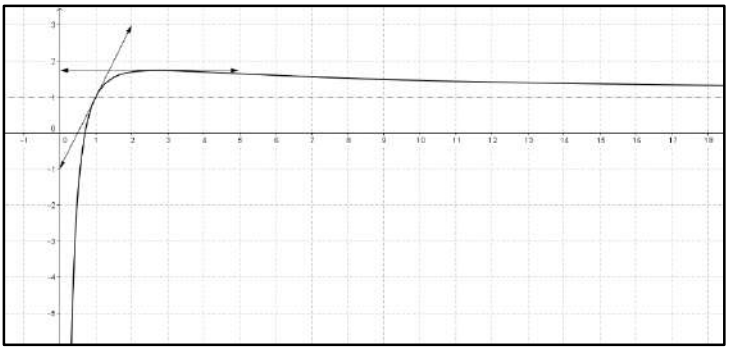
$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2(x-1) + 1 \Rightarrow \boxed{(T): y = 2x - 1}$$

**ج. بيان أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0;1[$ حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $e^{-0,4} < \alpha < e^{-0,3}$**

الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على المجال $]e^{-0,4};e^{-0,3}[$ و $\underbrace{f(e^{-0,4})}_{\approx -0,19} \times \underbrace{f(e^{-0,3})}_{\approx 0,19} < 0$

منه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]e^{-0,4};e^{-0,3}[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**3. انشاء $(T)$ و ($\mathscr{C}_f$)**



**4.** $\boldsymbol{Dh = \mathbb{R} - \{0\}}$ ، $\boldsymbol{h(x) = 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|}}$

**أ. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ غير معدوم ، $h(x) - h(-x) = 0$**

$$h(x) = 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|} - 1 - \frac{2\ln|-x|}{|-x|} = \frac{2\ln|x|}{|x|} - \frac{2\ln|x|}{|x|} = \boxed{0}$$

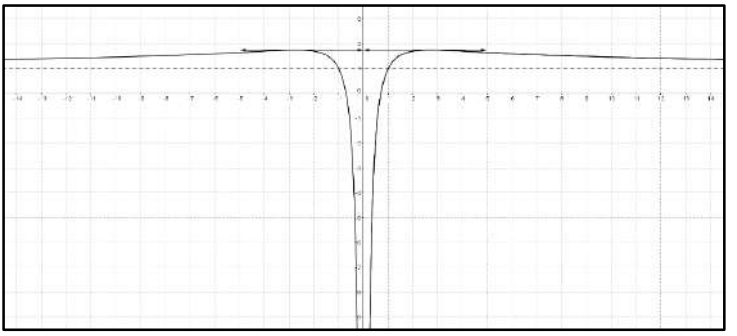
$$h(x) - h(-x) = 0 \Rightarrow h(-x) = h(x)$$

بما أنّ $Dh$ متناظر بالنسبة إلى 0 و $h(-x) = h(x)$ ، نستنتج أنّ الدالة $h$ زوجية

**ب. انشاء المنحنى ($\mathscr{C}_h$) اعتمادا على المنحنى ($\mathscr{C}_f$)**

على المجال $]0;+\infty[$ لدينا $h(x) = f(x)$ ، منه ($\mathscr{C}_h$) متطابق مع ($\mathscr{C}_f$) ،

ونكمل رسم ($\mathscr{C}_h$) على المجال $]-\infty;0[$ بالتناظر المحوري لأنّ الدالة $h$ زوجية



**ج. المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة : $\ln x^2 = (m-1)|x|$**

$$\ln x^2 = (m-1)|x| \Rightarrow m - 1 = \frac{\ln x^2}{|x|} \Rightarrow m = 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|} \Rightarrow m = h(x)$$

ندرس تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_h$) مع المستقيم $y = m$

- $m \leq 1$ : المعادلة تقبل حلين متمايزين
- $1 < m < 1 + \frac{2}{e}$ : المعادلة تقبل أربعة حلول متمايزة
- $m = 1 + \frac{2}{e}$ : المعادلة تقبل حلين مضاعفين
- $m > 1 + \frac{2}{e}$ : المعادلة لا تقبل حلا

**تمرين 55 : بكالوريا 2015 ر**

**$f(0) = 1$ ، ومن أجل $f(x) = 1 - x^2\ln x : x \in ]0;+\infty[$**

**1. أ. دراسة استمرارية الدالة $f$ عند 0 من اليمين**

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 1 - \underbrace{x^2}_{\to 0}\ln x = \boxed{1}$$

بما أنّ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = f(0)$ ، نستنتج أنّ الدالة $f$ مستمرّة عند $0$

**ب. حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-1}{x}$**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{-x^2\ln x}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} -x\ln x = \boxed{0}$$

**تفسير النتيجة هندسيا**

يقبل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مماسا أفقيا عند النقطة ذات الفاصلة $0$

**2. أ. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 - x^2\ln x = \boxed{-\infty}$$

**ب. دراسة اتجاه تغير الدالة $f$**

$$f'(x) = -2x\ln x - x^2\left(\frac{1}{x}\right) = \boxed{x(-2\ln x - 1)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2\ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$$

- $x \in \left]0; e^{-\frac{1}{2}}\right] : f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة
- $x \in \left]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty\right[ : f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $0$ | | $e^{-\frac{1}{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ |
| $f(x)$ | $1$ | ↗ | $1+\frac{1}{2e}$ | ↘ | $-\infty$ |

**3. أ. بيان أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]0; +\infty[$**

الدالة $f$ لا تنعدم على المجال $\left]0; e^{-\frac{1}{2}}\right[$ ، وهي مستمرة ورتيبة على المجال $]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$ ، $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) \approx 1{,}18$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ، منه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0; +\infty[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**ب. التحقق أنّ $1{,}531 < \alpha < 1{,}532$**

$$f(1{,}531) \approx 1{,}7 \times 10^{-3}; f(1{,}532) \approx -1{,}2 \times 10^{-3} \Rightarrow 1{,}531 < \alpha < 1{,}532$$

**4.** $\boldsymbol{D_g = \mathbb{R}}$ ، $\boldsymbol{g(x) = f(|x|)}$

**أ. دراسة شفعية الدالة $g$**

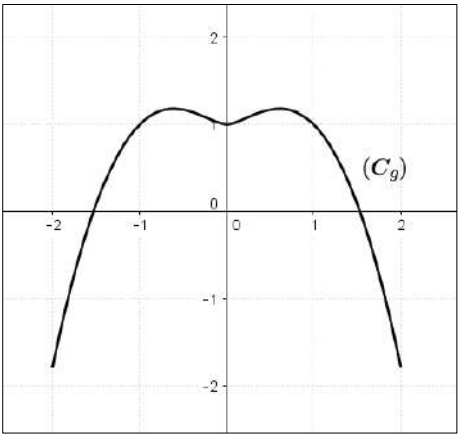
لدينا $D_g$ متناظر بالنسبة إلى 0 ومن أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ :

$g(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = g(x) \Rightarrow$ الدالة $g$ زوجية

**ب. إنشاء المنحنى ($\mathscr{C}_g$) على المجال $[-2;2]$**

من أجل $x \in [0;2]$ ، $g(x) = f(x)$ ، ومنه ($\mathscr{C}_g$) و ($\mathscr{C}_f$) منطبقان ،

ومن أجل $x \in [-2;0]$ ، نرسم ($\mathscr{C}_g$) بالتناظر المحوري




**5. تعيين الدالة الأصلية للدالة $\boldsymbol{x \to x^2 \ln x}$ التي تنعدم من أجل القيمة 1**

$$u(x) = \ln x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x} \; ; v'(x) = x^2 \Rightarrow v(x) = \frac{1}{3}x^3$$

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + c = H(x)$$

$$H(1) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{9} + c = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{9} \Rightarrow \boxed{H(x) = \frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{9}}$$

**6.** $\boldsymbol{t \in ]0;\alpha]}$ ، $\boldsymbol{F(t) = \int_t^{\alpha} f(x)\,dx}$

**ج. كتابة العبارة $\boldsymbol{F(t)}$ بدلالة $\boldsymbol{t}$ و $\boldsymbol{\alpha}$**

$$F(t) = \int_t^{\alpha} f(x)\,dx = \int_t^{\alpha} (1 - x^2 \ln x)\,dx = [x - H(x)]_t^{\alpha}$$
$$= \alpha - H(\alpha) - t + H(t)$$
$$= \frac{1}{3}t^3 \ln t - \frac{1}{9}t^3 + \frac{1}{9} - \frac{1}{3}\alpha^3 \ln \alpha + \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{1}{9} + \alpha - t$$

$$= \boxed{\frac{3t^3 \ln t - t^3 - 9t - 3\alpha^3 \ln \alpha + \alpha^3 + 9\alpha}{9}}$$

**د. بيان أنّ :** $F(t) = \frac{-3tf(t) - t^3 - 6t + \alpha^3 + 6\alpha}{9}$

$$F(t) = \frac{-3t + 3t^3 \ln t - t^3 - 6t + 3\alpha - 3\alpha^3 \ln \alpha + \alpha^3 + 6\alpha}{9}$$

$$= \frac{-3t(1 - t^2 \ln t) - t^3 - 6t + 3\alpha(1 - \alpha^2 \ln \alpha) + \alpha^3 + 6\alpha}{9}$$

$$= \frac{-3t.f(t) - t^3 - 6t + 3\alpha.f(\alpha) + \alpha^3 + 6\alpha}{9}$$

$$= \boxed{\frac{-3t.f(t) - t^3 - 6t + \alpha^3 + 6\alpha}{9}} \; ; (f(\alpha) = 0 \text{ لأنّ})$$

**ه. حساب** $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ >}} F(t)$

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} F(t) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{-3t.f(t) - t^3 - 6t + \alpha^3 + 6\alpha}{9} = \boxed{\frac{\alpha^3 + 6\alpha}{9}}$$

**7. $m$ عدد حقيقي ينتمي إلى المجال $]0; \alpha[$ ، $ua$ و $\mathcal{A} = \frac{2}{9}(\alpha^3 + 6\alpha)$**

**أ. تعيين القيمة المضبوطة للعدد $m$ حتى يكون :** $\mathbb{S}(m) = 2\mathcal{A}$

$$\mathbb{S}(m) = 2\mathcal{A} \Rightarrow \pi m^2 = \frac{4}{9}(\alpha^3 + 6\alpha) \Rightarrow m^2 = \frac{4}{9\pi}(\alpha^3 + 6\alpha)$$

$$\Rightarrow \boxed{m = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\alpha^3 + 6\alpha}{\pi}}}$$

**ب. حصر العدد $m$**

$$\begin{cases} 1{,}531 < \alpha < 1{,}532 \\ 3{,}140 < \pi < 3{,}142 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12{,}775 < \alpha^3 + 6\alpha < 12{,}788 \\ \frac{1}{3{,}142} < \frac{1}{\pi} < \frac{1}{3{,}140} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4{,}066 < \frac{\alpha^3 + 6\alpha}{\pi} < 4{,}073 \Rightarrow 2{,}016 < \sqrt{\frac{\alpha^3 + 6\alpha}{\pi}} < 2{,}018$$

$$\Rightarrow \frac{4{,}032}{3} < \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\alpha^3 + 6\alpha}{\pi}} < \frac{4{,}036}{3} \Rightarrow \boxed{1{,}344 < m < 1{,}345}$$

**تمرين 56 : بكالوريا 2015 ت ر**

**I)** $\boldsymbol{D_h = ]-2;+\infty[}$ ، $\boldsymbol{h(x) = (x+2)^2 + 2 - 2\ln(x+2)}$

**1. حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ **و** $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ >}} h(x)$

$$\lim_{\substack{x\to-2\\ >}} h(x) = \lim_{\substack{x\to-2\\ >}} (x+2)^2 + 2 - 2\underbrace{\ln(x+2)}_{\to-\infty} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+2)^2 + 2 - 2\ln(x+2)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (x+2)\left[(x+2) + 2 - 2\frac{\ln(x+2)}{\underbrace{(x+2)}_{\to0}}\right] = \boxed{+\infty}$$

**2. دراسة اتجاه تغير الدالة** $\boldsymbol{h}$

$$h'(x) = 2(x+2) - \frac{2}{x+2} = \frac{2(x+2)^2 - 2}{x+2} = \boxed{\frac{2x^2+8x+6}{x+2}}$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + 8x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \ (-3 \notin D)$$

- $x \in ]-2;-1[ : h'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $h$ متناقصة
- $x \in [-1;+\infty[ : h'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $h$ متزايدة

**جدول تغيرات الدالة** $\boldsymbol{h}$

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ |
| $h(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $3$ | ↗ | $+\infty$ |

**3. استنتاج أنّه من أجل كل** $\boldsymbol{x}$ **من** $\boldsymbol{]-2;+\infty[ : h(x) > 0}$

من جدول تغيرات الدالة $h$ ، نستنتج أنّه من أجل كل $x$ من $D$ : $h(x) \geq 3 > 0$

**II)** $\boldsymbol{D_f = ]-2;+\infty[}$ ، $\boldsymbol{f(x) = x + 1 + \frac{2}{x+2}\ln(x+2)}$

**1. حساب** $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ >}} f(x)$ **وتفسير النتيجة هندسيا**

$$\lim_{\substack{x\to-2\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-2\\ >}} x + 1 + \frac{2}{\underbrace{x+2}_{\to+\infty}}\underbrace{\ln(x+2)}_{\to-\infty} = \boxed{-\infty}$$

يقبل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مستقيما مقاربا عموديا معادلته : $x = -2$

**حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + 1 + 2\underbrace{\frac{\ln(x+2)}{x+2}}_{\to 0} = \boxed{+\infty}$$

**2. أ. بيان أنّه من أجل كل $x$ من المجال $]-2;+\infty[$ : $f'(x) = \frac{h(x)}{(x+2)^2}$**

$$f'(x) = 1 + 2\frac{(x+2)\left(\frac{1}{x+2}\right) - \ln(x+2)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{(x+2)^2 + 2 - 2\ln(x+2)}{(x+2)^2} = \boxed{\frac{h(x)}{(x+2)^2}}$$

**ب. دراسة اتجاه تغير الدالة $f$ على المجال $]-2;+\infty[$**

$h(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]-2;+\infty[$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**3. أ. بيان أنّ $(\Delta)$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$**

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x\to+\infty} 2\frac{\ln(x+2)}{x+2} = \boxed{0}$$

منه، نستنتج أنّ $(\Delta)$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بجوار $+\infty$

**ب. دراسة وضعية المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$**

$$f(x) - (x+1) = \frac{2\ln(x+2)}{x+2}$$

$$f(x) - (x+1) = 0 \Rightarrow \ln(x+2) = 0 \Rightarrow x + 2 = 1 \Rightarrow x = -1$$

- $x \in ]-2;-1[ : f(x) - (x+1) < 0 \Rightarrow (C_f)$ تحت $(\Delta)$
- $x \in ]-1;+\infty[ : f(x) - (x+1) > 0 \Rightarrow (C_f)$ فوق $(\Delta)$
- $(C_f) \cap (\Delta) = \{(-1;0)\}$

**4. أ. اثبات أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف $A$ يُطلب تعيين إحداثييها**

$$f''(x)=\frac{(x+2)^2h'(x)-2(x+2)h(x)}{(x+2)^4}=\frac{(x+2)h'(x)-2h(x)}{(x+2)^3}$$

$$=\frac{(x+2)\left(\frac{2x^2+8x+6}{x+2}\right)-2(x+2)^2-4+4\ln(x+2)}{(x+2)^3}$$

$$=\boxed{\frac{-6+4\ln(x+2)}{(x+2)^3}}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow -6+4\ln(x+2)=0\Rightarrow \ln(x+2)=\frac{3}{2}\Rightarrow x=e^{\frac{3}{2}}-2$$

$$f\left(e^{\frac{3}{2}}-2\right)=e^{\frac{3}{2}}-1+\frac{2}{e^{\frac{3}{2}}}\ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=e^{\frac{3}{2}}+3e^{-\frac{3}{2}}-1$$

منه، نستنتج أنّ المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ يقبل نقطة انعطاف $A\left(e^{\frac{3}{2}}-2;e^{\frac{3}{2}}+3e^{-\frac{3}{2}}-1\right)$

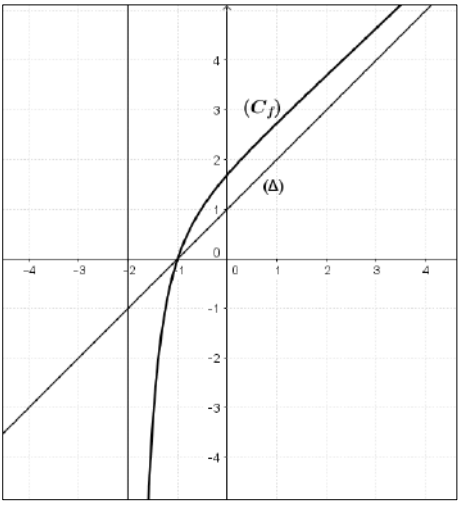
**ب. رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$**

(انظر نهاية الجزء II)

**جـ. حساب المساحة**

$$\mathcal{A}=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}\left[x+1+2\frac{\ln(x+2)}{x+2}\right]dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2+x+\ln^2(x+2)\right]_{-1}^{1}=\frac{3}{2}+\ln^2 3+\frac{1}{2}=\boxed{(2+\ln^2 3)\ cm^2}$$



**III)** $D_g = ]-2;+\infty[$ ، $g(x) = |x+1| + \frac{2}{x+2}|\ln(x+2)|$

**1. حساب** $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$ **و** $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ <}} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1} = \lim_{\substack{x\to -1\\ <}} -\frac{x+1}{x+1} - \underbrace{\frac{2}{x+2}}_{\to 2}\underbrace{\frac{\ln(x+2)}{x+1}}_{\to 1} = \boxed{-3}$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1} = \lim_{\substack{x\to -1\\ >}} \frac{x+1}{x+1} + \underbrace{\frac{2}{x+2}}_{\to 2}\underbrace{\frac{\ln(x+2)}{x+1}}_{\to 1} = \boxed{3}$$

نستنتج أنّ الدالة $g$ غير قابلة للاشتقاق عند $-1$

**2. تفسير النتيجة هندسيا**

يقبل المنحنى $(\mathscr{C}_g)$ نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة $-1$

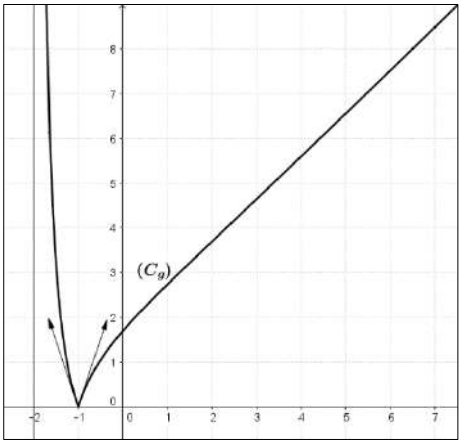
**3. رسم المنحنى $(\mathscr{C}_g)$**

$$x \in ]-2;-1[ : \begin{cases} x+1<0 \\ x+2<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underbrace{x+1<0}_{|x+1|=-(x+1)} \\ \underbrace{\ln(x+2)<0}_{|\ln(x+2)|=-\ln(x+2)} \end{cases} \Rightarrow g(x) = -f(x)$$

$$x \in [-1;+\infty[ : \begin{cases} x+1\geq 0 \\ x+2\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underbrace{x+1\geq 0}_{|x+1|=x+1} \\ \underbrace{\ln(x+2)\geq 0}_{|\ln(x+2)|=\ln(x+2)} \end{cases} \Rightarrow g(x) = f(x)$$

منه، نستنتج أنّ المنحنيين $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_g)$ منطبقان على المجال $[-1;+\infty[$

ومتناظران بالنسبة إلى محور الفواصل على المجال $]-2;-1[$



**تمرين 57 : بكالوريا 2015 ع ت**

**(I**

**1. تحديد وضعية $(\gamma)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$ على $]0;+\infty[$**

- $x \in ]0;\alpha[ : (\Delta)$ تحت $(C_f)$
- $x \in ]\alpha;+\infty[ : (\Delta)$ فوق $(C_f)$
- $(C_f) \cap (\Delta) = \{(\alpha; -\alpha+3)\}$

**2. $D_g = ]0;+\infty[$ ، $g(x) = x - 3 + \ln x$**

**استنتاج حسب قيم $x$ إشارة $g(x)$**

- $x \in ]0;\alpha[ : \ln x < -x+3 \Rightarrow \ln x + x - 3 < 0 \Rightarrow g(x) < 0$
- $x \in ]\alpha;+\infty[ : \ln x > -x+3 \Rightarrow \ln x + x - 3 > 0 \Rightarrow g(x) > 0$
- $x = \alpha : \ln x = -x+3 \Rightarrow \ln x + x - 3 = 0 \Rightarrow g(x) = 0$

**3. التحقق أنّ : $2,2 < \alpha < 2,3$**

الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]2,2;2,3[$ و $\underbrace{g(2,2)}_{\approx -0,01} \times \underbrace{g(2,3)}_{\approx 0,13} < 0$

منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]2,2;2,3[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**(II $D_f = ]0;+\infty[$ ، $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$**

**1. حساب $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$**

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{x}\right)}_{\to -\infty} \underbrace{(\ln x - 2)}_{\to -\infty} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{x}\right)}_{\to 1} \underbrace{(\ln x - 2)}_{\to +\infty} = \boxed{+\infty}$$

**2. اثبات أنّه من أجل كل $x$ من $]0;+\infty[$ : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$**

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}(\ln x - 2) + \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln x + x - 3}{x^2} = \boxed{\frac{g(x)}{x^2}}$$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

بما أنّ $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ، فإنّ إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

**3. بيان أنّ :** $f(\alpha) = \frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}$

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \ln\alpha + \alpha - 3 = 0 \Rightarrow \ln\alpha = -\alpha + 3$$

$$f(\alpha) = \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)(\ln\alpha - 2) = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)(-\alpha + 1) = \boxed{\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}}$$

**استنتاج حصر للعدد** $f(\alpha)$

$$2{,}2 < \alpha < 2{,}3 \Rightarrow \begin{cases} 1{,}2 < \alpha - 1 < 1{,}3 \\ \frac{1}{2{,}3} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2{,}2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1{,}2^2 < (\alpha-1)^2 < 1{,}3^2 \\ \frac{1}{2{,}3} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{2{,}2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1{,}2^2}{2{,}3}}_{0{,}63} < \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} < \underbrace{\frac{1{,}3^2}{2{,}2}}_{0{,}77} \Rightarrow \boxed{-0{,}77 < f(\alpha) < -0{,}63}$$

**4. دراسة وضعية ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة إلى حامل محور الفواصل**

$$f(x) = 0 \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2) = 0 \Rightarrow \left(\frac{x-1}{x}\right)(\ln x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x - 1 = 0 \text{ أو } \ln x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1\,; x_2 = e^2$$

- $x \in ]0;1[ \cup ]e^2;+\infty[ : f(x) > 0 \Rightarrow$ فوق حامل محور الفواصل $(C_f)$
- $x \in ]1;e^2[ : f(x) < 0 \Rightarrow$ تحت حامل محور الفواصل $(C_f)$
- حامل محور الفواصل $\cap\ (C_f) = \{(1;0);(e^2;0)\}$

**إنشاء ($\mathscr{C}_f$) على المجال** $]0;e^2]$ (انظر نهاية التمرين)

**III) $F$ الدالة الأصلية للدالة $f$ على المجال $]0;+\infty[$ والتي تحقق : $F(1) = -3$**

**1. بيان أنّ منحنى الدالة $F$ يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في نقطتين**

$$F'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 1\,; x_2 = e^2$$

منه نستنتج أنّ منحنى الدالة $F$ يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين 1 و $e^2$

**2. بيان أنّ $x \to x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \to \ln x$ على $]0;+\infty[$**

$$(x\ln x - x)' = \ln x + x\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = \ln x \Rightarrow \boxed{\int \ln x\, dx = x\ln x - x}$$

**استنتاج عبارة الدالة $F$**

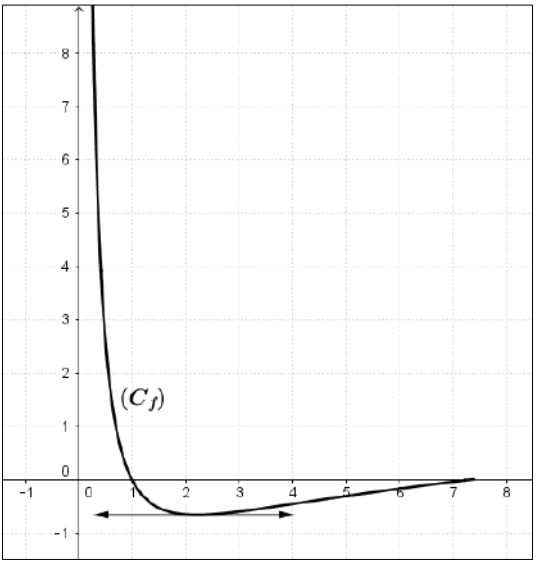
$$F(x) = \int f(x)dx = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)dx = \int \left[\ln x - \frac{\ln x}{x} - 2 + \frac{2}{x}\right] dx$$

$$= x\ln x - x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 - 2x + 2\ln x + c$$

$$= (x+2)\ln x - 3x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$$

$$F(1) = -3 \Rightarrow -3 + c = -3 \Rightarrow c = 0$$

$$\boxed{F(x) = (x+2)\ln x - 3x - \frac{1}{2}(\ln x)^2}$$




**تمرين 58 : بكالوريا 2016 ر**

**I) $D_g = ]0;+\infty[$ ، $g(x) = 1 + x^2 + 2\ln x$**

**1. دراسة اتجاه تغير الدالة $g$**

$$g'(x) = 2x + \frac{2}{x}\ ; g'(x) > 0 \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } g \text{ متزايدة تماما على المجال } ]0;+\infty[}$$

**2. بيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $]0,52\ ;\ 0,53[$ حلا وحيدا $\alpha$**

الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]0,52;0,53[$ و $\underbrace{g(0,52)}_{\approx -0,04} \times \underbrace{g(0,53)}_{\approx 0,01} < 0$

منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]0,52;0,53[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**3. استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$**

$x \in ]0;\alpha[ : g(x) < 0 \; ; \; x \in ]\alpha;+\infty[ : g(x) > 0 \; ; g(\alpha) = 0$

**II) $D_f = ]0;+\infty[$ ، $f(x) = -x + \frac{3+2\ln x}{x}$**

**1. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x)$**

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} -x + \frac{3+2\ln x}{x} \begin{matrix} \to -\infty \\ \to 0^+ \end{matrix} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x + \frac{3+2\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} -x + \underbrace{\frac{3}{x}}_{\to 0} + \frac{2\ln x}{x} = \boxed{-\infty}$$

**2. أ. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$**

$$f'(x) = -1 + \frac{2-(3+2\ln x)}{x^2} = -\frac{1+x^2+2\ln x}{x^2} = \boxed{-\frac{g(x)}{x^2}}$$

**ب. جدول تغيرات الدالة $f$**

إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $-\infty$ |

**جـ. التحقق أنّ : $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)$**

$g(\alpha) = 0 \Rightarrow 1 + \alpha^2 + 2\ln\alpha = 0 \Rightarrow 2\ln\alpha = -1 - \alpha^2$

$$f(\alpha) = -\alpha + \frac{3+2\ln\alpha}{\alpha} = \frac{-\alpha^2+3-1-\alpha^2}{\alpha} = \frac{2(1-\alpha^2)}{\alpha} = \boxed{2\left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right)}$$

**تعيين حصر لـ $f(\alpha)$**

$$0,52 < \alpha < 0,53 \Rightarrow \begin{cases} -0,53 < -\alpha < -0,52 \\ \frac{1}{0,53} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0,52} \end{cases} \Rightarrow 1,36 < \frac{1}{\alpha} - \alpha < 1,40$$

$$\Rightarrow \boxed{2{,}72 < f(\alpha) < 2{,}80}$$

**3. أ. حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]$ وتفسير النتيجة هندسيا**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)+x = \lim_{x\to+\infty}\frac{3+2\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}+\frac{2\ln x}{x} = \boxed{0}$$

يقبل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ بجوار $+\infty$ معادلته : $y=-x$

**ب. دراسة وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى مستقيمه المقارب المائل $(\Delta)$**

$$f(x)-y=f(x)+x=\frac{3+2\ln x}{x}\ ;\ 3+2\ln x=0\Rightarrow x=e^{-\frac{3}{2}}$$

- $x\in\left]0;e^{-\frac{3}{2}}\right[ : f(x)+x<0\Rightarrow (\Delta)$ تحت $(C_f)$
- $x\in\left]e^{-\frac{3}{2}};+\infty\right[ : f(x)+x>0\Rightarrow (\Delta)$ فوق $(C_f)$
- $(C_f)\cap(\Delta)=\left\{\left(e^{-\frac{3}{2}};-e^{-\frac{3}{2}}\right)\right\}$

**جـ. بيان أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مماسا $(T)$ يوازي $(\Delta)$ يُطلب كتابة معادلة ديكارتية له**

$$(T): y=ax+b\ ;\ (T)\parallel(\Delta)\Rightarrow a=-1\Rightarrow f'(x)=-1$$

$$f'(x)=-1\Rightarrow -1-\frac{1+2\ln x}{x^2}=-1\Rightarrow 1+2\ln x=0\Rightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}$$

$$(T): y=f'\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x-e^{-\frac{1}{2}}\right)+f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=-\left(x-e^{-\frac{1}{2}}\right)+\left(-e^{-\frac{1}{2}}+2e^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\boxed{(T): y=-x+2e^{\frac{1}{2}}}$$

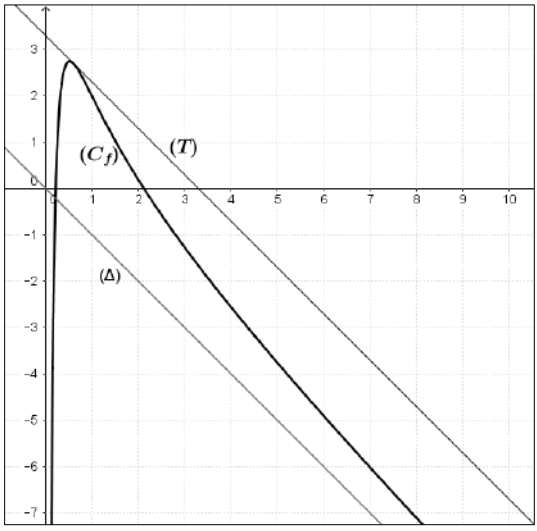
**4. إنشاء $(T)$ ، $(\Delta)$ و $(\mathscr{C}_f)$ :** (انظر نهاية الجزء II)

**5. المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة : $3+2\ln x-mx=0$**

$$3+2\ln x-mx=0\Rightarrow m=\frac{3+2\ln x}{x}\Rightarrow \boxed{-x+m=f(x)}$$

ندرس تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيم $(\Delta_m)$ الموازي لـ $(\Delta)$

- من أجل $m\in]-\infty;0[$ : تقبل المعادلة حلا وحيدا
- من أجل $m\in\left]0;2e^{\frac{1}{2}}\right[$ : تقبل المعادلة حلين متمايزين
- من أجل $m=2e^{\frac{1}{2}}$ : تقبل المعادلة حلا مضاعفا
- من أجل $m\in\left]2e^{\frac{1}{2}};+\infty\right[$ : لا تقبل المعادلة حلا




**III) $u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} [f(x) + x]\, dx$**

**1. بيان أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $u_n > 0$**

من أجل كل عدد طبيعي $n$ : $e^n \geq 1$ ، وبما أنّ $f(x) + x > 0$ على المجال $[1; +\infty[$ (حسب II.3.ب) ، فإنّ $f(x) + x > 0$ على المجال $[e^n; e^{n+1}]$ ، أي $\int_{e^n}^{e^{n+1}} [f(x) + x]dx > 0$ ، ومنه $\boxed{u_n > 0}$

**2. اعطاء تفسير هندسي للعدد $u_0$**

$$u_0 = \int_1^e [f(x) + x]dx$$

$u_0$ هي مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى $(C_f)$ والمستقيمات $(\Delta)$ ، $x = 1$ و $x = e$

**3. حساب $u_n$ بدلالة $n$**

$$u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} [f(x) + x]dx = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left[\frac{3}{x} + \frac{2\ln x}{x}\right] dx = [3\ln x + \ln^2 x]_{e^n}^{e^{n+1}}$$

$$= 3(n+1) + (n+1)^2 - 3n - n^2 = \boxed{2n+4}$$

**4. حساب $S_n$ بدلالة $n$**

$$S_n = u_0 + \cdots + u_n = \frac{n+1}{2}(4 + 2n + 4) = (n+1)(n+4)$$

$$\boxed{S_n = n^2 + 5n + 4}$$

**تمرين 59 : بكالوريا 2016 ت ر**

**I)** $D_g = ]-1;+\infty[$ ، $g(x) = \frac{x-1}{x+1} + \ln(x+1)$

**1. أ. حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ **و** $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} g(x)$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\ >}} \underbrace{\frac{x-1}{x+1}}_{\to-\infty} + \underbrace{\ln(x+1)}_{\to-\infty} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x-1}{x+1}}_{\to1} + \underbrace{\ln(x+1)}_{\to+\infty} = \boxed{+\infty}$$

**ب. دراسة اتجاه تغير الدالة** $g$ **على المجال** $]-1;+\infty[$

$$g'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} \; ; x > -1 \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } g \text{ متزايدة}}$$

**جدول تغيرات الدالة** $g$

| $x$ | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**2. أ. بيان أن المعادلة** $g(x) = 0$ **تقبل حلا وحيدا** $\alpha$ **حيث :** $0,4 < \alpha < 0,5$

الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]0,4;0,5[$ و $\underbrace{g(0,4)}_{\approx-0,09} \times \underbrace{g(0,5)}_{\approx0,07} < 0$ منه

المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]0,4;0,5[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**ب. استنتاج إشارة** $g(x)$ **على المجال** $]-1;+\infty[$

$x \in ]-1;\alpha[ : g(x) < 0 \; ; \; x \in ]\alpha;+\infty[ : g(x) > 0 \; ; g(\alpha) = 0$

**II)** $D_f = ]-1;+\infty[$ ، $f(x) = 1 + (x-1)\ln(x+1)$

**1. حساب** $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x)$ **وتفسير النتيجة هندسيا**

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\ >}} 1 + (x-1)\ln(x+1) = \boxed{+\infty}$$

يقبل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x = -1$

**حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + (x-1)\ln(x+1) = \boxed{+\infty}$$

**2. أ. دراسة اتجاه تغير الدالة $f$ على المجال $]-1;+\infty[$**

$$f'(x)=\ln(x+1)+\frac{x-1}{x+1}\Rightarrow \boxed{f'(x)=g(x)}$$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $f(\alpha)$ | ↗ | $+\infty$ |

**ب. بيان أنّ $f(\alpha)=-\alpha+4-\frac{4}{\alpha+1}$**

$$g(\alpha)=0\Rightarrow\frac{\alpha-1}{\alpha+1}+\ln(\alpha+1)=0\Rightarrow\ln(\alpha+1)=-\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$$

$$f(\alpha)=1+(\alpha-1)\ln(\alpha+1)=1-(\alpha-1)\left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\right)=1-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha+1}$$

$$=\frac{\alpha+1-(\alpha-1)^2}{\alpha+1}=\frac{-\alpha^2+3\alpha}{\alpha+1}=\frac{(\alpha+1)(-\alpha+4)-4}{\alpha+1}$$

$$=\boxed{-\alpha+4-\frac{4}{\alpha+1}}$$

**حصر العدد $f(\alpha)$**

$$0{,}4<\alpha<0{,}5\Rightarrow\begin{cases}-0{,}5<-\alpha<-0{,}4\\ \frac{1}{1{,}5}<\frac{1}{\alpha+1}<\frac{1}{1{,}4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3{,}5<-\alpha+4<3{,}6\\ \frac{-4}{1{,}4}<\frac{-4}{\alpha+1}<\frac{-4}{1{,}5}\end{cases}$$

$$\Rightarrow 3{,}5-\frac{4}{1{,}4}<f(\alpha)<3{,}6-\frac{4}{1{,}5}\Rightarrow\boxed{0{,}64<f(\alpha)<0{,}93}$$

**3. $D_h=]-1;+\infty[$ ، $h(x)=f(x)-[f'(a)(x-a)+f(a)]$**

**أ. تحقق أنّه من أجل كل $x$ من $]-1;+\infty[$ : $h'(x)=f'(x)-f'(a)$**

$$h'(x)=f'(x)-f'(a)-(x-a)\underbrace{[f'(a)]'}_{0}-\underbrace{[f(a)]'}_{0}=\boxed{f'(x)-f'(a)}$$

**ب. تعيين إشارة $h'(x)$ حسب قيم $x$ واستنتاج اتجاه تغيّر $h$ على $]-1;+\infty[$**

$$f'(x)=g(x)\Rightarrow h'(x)=g(x)-g(a)\Rightarrow h'(a)=0$$

$x<a\xrightarrow[g\text{ متزايدة}]{}g(x)<g(a)\Rightarrow h'(x)<0\Rightarrow$ $h$ متناقصة على المجال $]-1;a[$

$x>a\xrightarrow[g\text{ متزايدة}]{}g(x)>g(a)\Rightarrow h'(x)>0\Rightarrow$ $h$ متزايدة على المجال $]a;+\infty[$

**ج. تحديد الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ والمستقيم $(T_a)$**

$(T_a): y = f'(a)(x-a) + f(a) \Rightarrow h(x) = f(x) - y$

$h(a) = f(a) - [f'(a)(a-a) + f(a)] = f(a) - f(a) = 0$

بما أنّ الدالة $h$ متناقصة على المجال $]-1; a]$ و متزايدة على المجال $[a; +\infty[$ ،

فإنّ $h(a)$ قيمة حدّية صغرى للدالة $h$، ومنه $h(x) \geq 0$ على المجال $]-1; +\infty[$

$x = a : h(x) = 0 \Rightarrow f(x) - y = 0 \Rightarrow f(x) = y \Rightarrow (T_a)$ و $(C_f)$ متماسان

$x \neq a : h(x) > 0 \Rightarrow f(x) - y > 0 \Rightarrow f(x) > y \Rightarrow (T_a)$ فوق $(C_f)$

**4. أ. بيان أنّه يوجد مماسان $(T_a)$ يشملان النقطة $A(1;0)$ يُطلب تعيين معادلتيهما**

$A(1;0) \in (T_a) \Rightarrow f'(a)(1-a) + f(a) = 0 \Rightarrow g(a)(1-a) + f(a) = 0$

$$\Rightarrow \left[\frac{a-1}{a+1} + \ln(a+1)\right](1-a) + 1 + (a-1)\ln(a+1) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{(a-1)^2}{a+1} - (a-1)\ln(a+1) + (a-1)\ln(a+1) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{-a^2+3a}{a+1} = 0 \Rightarrow a(3-a) = 0 \Rightarrow \boxed{a = 0 \text{ أو } a = 3}$$

منه نستنتج أنّ المماسين اللذين يشملان النقطة $A(1;0)$ هما $(T_0)$ و $(T_3)$

$(T_0): y = f'(0)(x) + f(0) \Rightarrow \boxed{(T_0): y = -x + 1}$

$$(T_3): y = f'(3)(x-3) + f(3) = \left(\frac{1}{2} + \ln 4\right)(x-3) + 1 + 2\ln 4$$

$$\Rightarrow \boxed{(T_3): y = \left(\frac{1}{2} + \ln 4\right)x - \frac{1}{2} - \ln 4}$$

**ب. رسم المماسين والمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ :** (انظر نهاية التمرين)

**5.** $\boldsymbol{D_H = ]-1; +\infty[}$ ، $\boldsymbol{H(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 3)\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x}$

**أ. بيان أنّ $H$ دالة أصلية للدالة $(x-1)\ln(x+1)$ على $]-1; +\infty[$**

$$H'(x) = \frac{1}{2}(2x-2)\ln(x+1) + \frac{1}{2}\frac{(x+1)(x-3)}{x+1} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

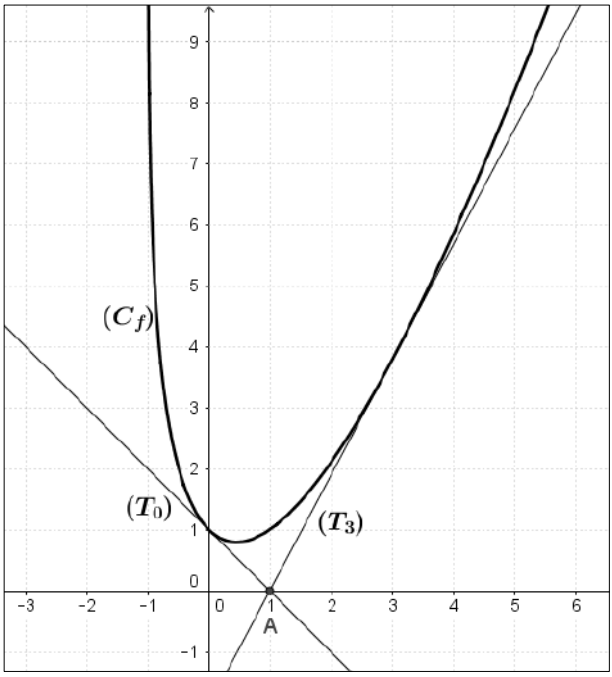
$$= (x-1)\ln(x+1) + \frac{1}{2}(x-3) - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = \boxed{(x-1)\ln(x+1)}$$

**ب. حساب المساحة**

$$\mathcal{A} = \int_1^2 f(x)dx = [x + H(x)]_1^2 = 2 + H(2) - 1 - H(1)$$

$$= H(2) - H(1) + 1 = \left[-\frac{3}{2}\ln 3 + 2\right] - \left[-2\ln 2 + \frac{5}{4}\right] + 1$$

$$= \boxed{\left(2\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3 + \frac{7}{4}\right) ua}$$




**تمرين 60 : بكالوريا 2016 ت ر**

**I) $g(x) = x - x\ln x$ ، $D_g = ]0;+\infty[$**

**1. أ. حساب $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$**

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} x - \underbrace{x\ln x}_{\to 0} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x - x\ln x = \lim_{x\to+\infty} x(1-\ln x) = \boxed{-\infty}$$

**ب. دراسة اتجاه تغير الدالة $g$ على المجال $]0;+\infty[$**

$$g'(x) = 1 - \ln x - x\left(\frac{1}{x}\right) = \boxed{-\ln x}$$

- $x \in ]0;1] : g'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة على المجال $]0;1]$
- $x \in ]1;+\infty[ : g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة على المجال $]1;+\infty[$

**جدول تغيرات الدالة $g$**

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-\infty$ |

**2. بيان أن المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $3,5 < \alpha < 3,6$**

الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]3,5\,;3,6[$ و $\underbrace{g(3,6)}_{\approx -1,01} < -1 < \underbrace{g(3,5)}_{\approx -0,88}$

منه المعادلة $g(x) = -1$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ في المجال $]3,5\,;3,6[$ حسب م ق م

**3. استنتاج إشارة العبارة $g(x) + 1$ على المجال $]0;+\infty[$**

- $x \in ]0;\alpha[ : g(x) > -1 \Rightarrow g(x) + 1 > 0$
- $x \in [\alpha;+\infty[ : g(x) \leq -1 \Rightarrow g(x) + 1 \leq 0$

**II) $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$ ، $D_f = ]0;+\infty[$ و $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $\|\vec{j}\| = 4cm$**

**1. بيان أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $x = 0$ و $y = 0$**

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x+1} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{x}{x+1}}_{\to 1} \underbrace{\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{\to 0} = \boxed{0}$$

منه، نستنتج أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقبل مستقيمين مقاربين معادلتيهما $x = 0$ و $y = 0$

**2. أ. برهان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ : $f'(x) = \frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}$**

$$f'(x) = \frac{\frac{x+1}{x} - \ln x}{(x+1)^2} = \frac{x - x\ln x + 1}{x(x+1)^2} = \boxed{\frac{g(x)+1}{x(x+1)^2}}$$

**ب. بيان أنّ $f$ متزايدة تماما على $]0;\alpha]$ ومتناقصة تماما على $[\alpha;+\infty[$**

- $x \in ]0;\alpha] : g(x) + 1 \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة
- $x \in [\alpha;+\infty[ : g(x) + 1 \leq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ‖ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $0$ |

**جـ. كتابة معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1**

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow \boxed{(T): y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}$$

**د. حساب $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$**

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = f'(\alpha) = \frac{g(\alpha)+1}{\alpha(\alpha+1)^2} = 0 \; ; (\text{لأنّ } g(\alpha) = -1)$$

**تفسير النتيجة هندسيا**

يقبل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $\alpha$ مماسا أفقيا معادلته : $y = f(\alpha)$

**3. أ. بيان أنّ $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$**

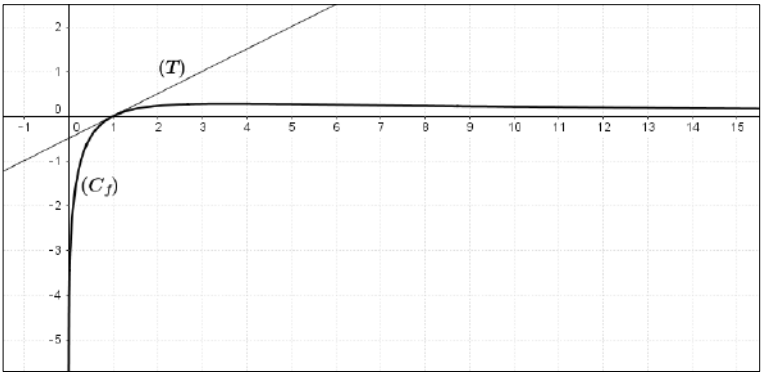
$$g(\alpha) = -1 \Rightarrow \alpha - \alpha\ln\alpha = -1 \Rightarrow \ln\alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha}$$

$$f(\alpha) = \frac{\ln\alpha}{\alpha+1} = \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)\frac{1}{\alpha+1} = \boxed{\frac{1}{\alpha}}$$

**ب. استنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$**

$$3{,}5 < \alpha < 3{,}6 \Rightarrow \frac{1}{3{,}6} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{3{,}5} \Rightarrow \boxed{0{,}28 < f(\alpha) < 0{,}29}$$

**جـ. رسم $(\mathscr{C}_f)$**



**4.** $x^2 + x - 2m(x+1) = \ln(x^2) \dots (E)$

**أ. التحقق أنّ المعادلة $(E)$ يؤول حلّها إلى حل المعادلة : $f(x) = \frac{1}{2}x - m$**

$$x^2 + x - 2m(x+1) = \ln(x^2) \Rightarrow -m = \frac{\ln(x^2) - x^2 - x}{2(x+1)}$$

$$\Rightarrow -m = \frac{2\ln x}{2(x+1)} - \frac{x(x+1)}{2(x+1)} = \frac{\ln x}{x+1} - \frac{1}{2}x \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}x - m = f(x)}$$

**ب. تعيين بيانيا قيم $m$ التي من أجلها تقبل المعادلة $(E)$ حلين متمايزين**

المستقيم $(\Delta_m)$ ذو المعادلة : $y = \frac{1}{2}x - m$ يوازي المماس $(T)$ ، وتقبل المعادلة $(E)$ حلين متمايزين عندما يكون $(\Delta_m)$ تحت $(T)$ ، أي من أجل

$-m < -\frac{1}{2}$ ومنه $\boxed{m > \frac{1}{2}}$

**5.** $D_h = \mathbb{R}^*$ ، $h(x) = \frac{\ln|x|}{-|x|-1}$

**أ. بيان أنّ الدالة $h$ زوجية**

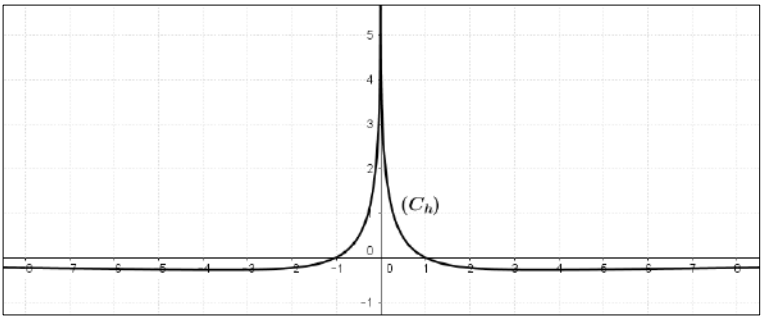
لدينا $D_h$ متناظر بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل $x \in D_h$ :

$$h(-x) = \frac{\ln|-x|}{-|-x|-1} = \frac{\ln|x|}{-|x|-1} = h(x) \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } h \text{ زوجية}}$$

**ب. رسم المنحنى $(\mathscr{C}_h)$**

$$x > 0 \Rightarrow |x| = x \Rightarrow h(x) = -\frac{\ln x}{x+1} = -f(x)$$

المنحنيان $(\mathscr{C}_f)$ و $(\mathscr{C}_h)$ متناظران بالنسبة لمحور الفواصل على المجال $]0;+\infty[$ ويكون $(\mathscr{C}_h)$ متناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لأنّ $h$ دالة زوجية




**تمرين 61 : بكالوريا 2016 ع ت**

**I) $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$ ، $D_g = ]0;+\infty[$**

**1. دراسة اتجاه تغير الدالة $g$**

$$g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \boxed{\frac{2x^2 - 1}{x}}$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- $x \in \left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[ : g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة
- $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[ : g'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متزايدة

**2. حساب $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ وبيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]0; +\infty[$ : $g(x) > 0$**

$$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2} - \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 = \boxed{\frac{3 + \ln 2}{2} \approx 1{,}8}$$

بما أنّ الدالة $g$ متناقصة على المجال $\left]0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ و متزايدة على المجال $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right[$ ،

فإنّ العدد $\frac{3+\ln 2}{2}$ قيمة حدّيّة صغرى للدالة $g$ ، ومنه نستنتج أنّ $g(x) > 0$

**II) $D_f = ]0; +\infty[$ ، $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x - 1$**

**1. حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$**

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{\ln x}{\underbrace{x}_{\to -\infty}} + x - 1 = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\underbrace{x}_{\to 0}} + x - 1 = \boxed{+\infty}$$

**2. أ. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0; +\infty[$ : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$**

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} + 1 = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \boxed{\frac{g(x)}{x^2}}$$

**ب. جدول تغيرات الدالة $f$**

$g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**3. كتابة معادلة المماس $(T)$ للمنحنى $(\mathscr{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة 1**

$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2(x-1) \Rightarrow \boxed{y = 2x - 2}$

**4. أ. بيان أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ حيث : $y = x - 1$ معادلة له**

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (x-1)] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \boxed{0}$$

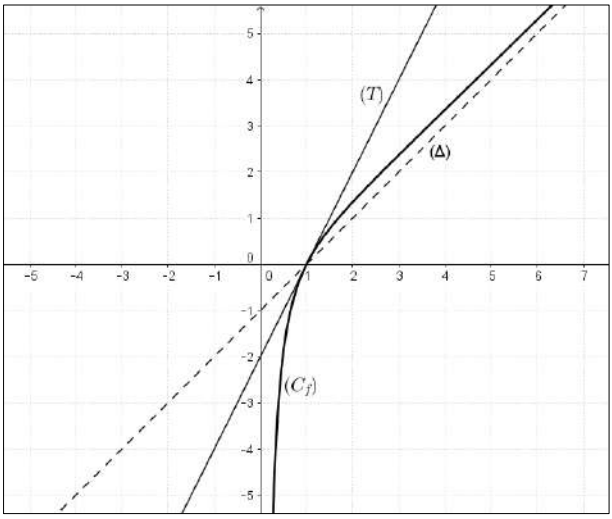
منه نستنتج أنّ $(\mathscr{C}_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta): y = x - 1$ بجوار $+\infty$

**ب. دراسة الوضع النسبي لـ $(\mathscr{C}_f)$ و $(\Delta)$**

$f(x) - (x-1) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$

- $x \in ]0;1[ : f(x) - (x-1) < 0 \Rightarrow (\Delta)$ تحت $(C_f)$
- $x \in ]1;+\infty[ : f(x) - (x-1) > 0 \Rightarrow (\Delta)$ فوق $(C_f)$
- $(C_f) \cap (\Delta) = \{(1;0)\}$

**5. رسم $(T)$ ، $(\Delta)$ و $(\mathscr{C}_f)$**



**6.** $(\Delta_m): y = mx - m$

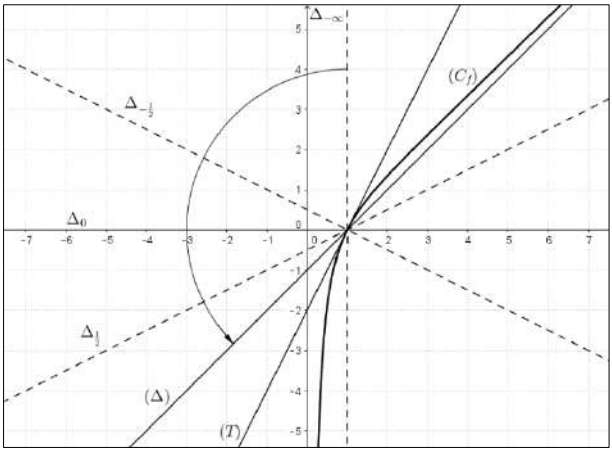
**أ. التحقق أنّه من أجل كل عدد حقيقي $m$ ، النقطة $A(1;0)$ تنتمي إلى $(\Delta_m)$**

$m(1) - m = 0 \Rightarrow A \in (\Delta_m)$

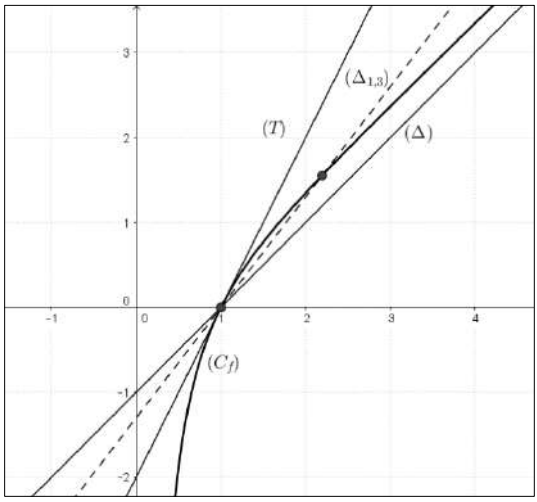
**ب. المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة : $f(x) = mx - m$**

ندرس تقاطع المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مع المستقيم $(\Delta_m)$ الذي يدور حول النقطة $A$

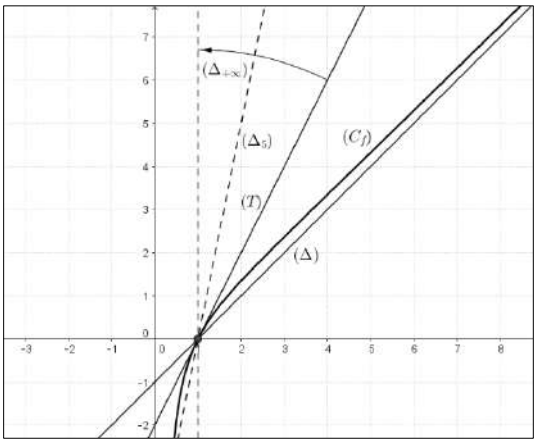
- من أجل $m \in ]-\infty; 1[$ : تقبل المعادلة حلا وحيدا $(x_A = 1)$




- من أجل $m \in ]1; 2[$ : تقبل المعادلة حلين متمايزين



- من أجل $m = 2$ : تقبل المعادلة حلا مضاعفا $(\Delta_2) = (T)$
- من أجل $m \in ]2;+\infty[$ : تقبل المعادلة حلا وحيدا $(x_A = 1)$




**7. أ. تعيين دالة أصلية للدالة $x \to \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$**

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \frac{1}{x} \ln x \, dx = \boxed{\frac{1}{2}\ln^2 x}$$

**ب. حساب $I_n$**

$$I_n = \int_1^n [f(x) - (x-1)]dx = \int_1^n \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2}\ln^2 x\right]_1^n = \boxed{\left(\frac{1}{2}\ln^2 n\right) ua}$$

**جـ. تعيين أصغر عدد طبيعي $n_0$ بحيث إذا كان $n > n_0$ فإنّ $I_n > 2$**

$$I_n > 2 \Rightarrow \frac{1}{2}\ln^2 n > 2 \Rightarrow \ln^2 n > 4 \Rightarrow \ln n > 2 \Rightarrow n > e^2 \Rightarrow \boxed{n = 8}$$

**تمرين 62 : بكالوريا 2016 ع ت**

**I) $g(x) = -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1)$ ، $D_g = ]-1;+\infty[$**

**1. دراسة اتجاه تغير الدالة $g$**

$$g'(x) = e + \frac{2}{x+1} \; ; g'(x) > 0 \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } g \text{ متزايدة على المجال } ]-1;+\infty[}$$

**جدول تغيرات الدالة $g$**

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} g(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1) = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} -1 + (x+1)e + 2\ln(x+1) = \boxed{+\infty}$$

| $x$ | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

**2. بيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$: $-0,34 < \alpha < -0,33$**

الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]-0,34;-0,33[$ و $\underbrace{g(-0,34)}_{\approx -0,04} \times \underbrace{g(-0,33)}_{\approx 0,02} < 0$

منه المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-0,34;-0,33[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**3. استنتاج إشارة $g(x)$**

$x \in ]-1;\alpha[ : g(x) < 0 \; ; \; x \in ]\alpha;+\infty[ : g(x) > 0 \; ; g(\alpha) = 0$

**II) $D_f = ]-1;+\infty[$ ، $f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$**

**1. أ. بيان أنّ $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x) = -\infty$**

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\ >}} \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{\substack{x\to-1\\ >}} \frac{1}{\underbrace{x+1}_{\to+\infty}} \left( e + \frac{\ln(x+1)}{\underbrace{x+1}_{\to-\infty}} \right)$$

$$= \boxed{-\infty}$$

**حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} = 0$$

**تفسير النتيجتين هندسيا**

يقبل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x=-1$ وآخر أفقيا بجوار $+\infty$ معادلته $y=0$

**ب. بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $]-1;+\infty[$ : $f'(x) = \frac{-g(x)}{(x+1)^3}$**

$$f'(x) = \frac{-e}{(x+1)^2} + \frac{(x+1) - 2(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{-e(x+1) + 1 - 2\ln(x+1)}{(x+1)^3} = \boxed{\frac{-g(x)}{(x+1)^3}}$$

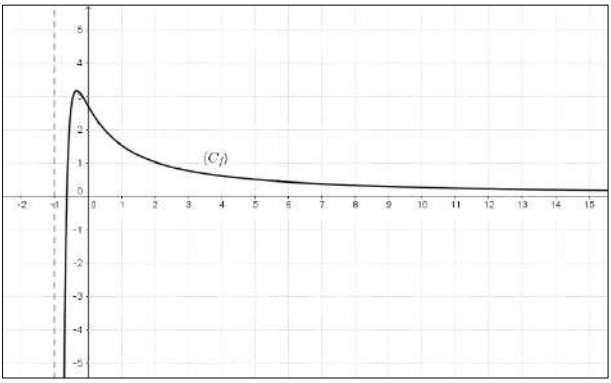
**جـ. دراسة اتجاه تغير الدالة $f$ على المجال $]-1;+\infty[$**

- $x \in ]-1;\alpha] : g(x) \leq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة
- $x \in ]\alpha;+\infty[ : g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-1$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ‖ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $0$ |

**د. رسم المنحنى $(\mathscr{C}_f)$**




**2. أ. بيان أنّ الدالة $x \to -\frac{1}{x+1}[1+\ln(x+1)]$ هي دالة أصلية للدالة $x \to \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}$ على المجال $]-1;+\infty[$**

$$h(x) = \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \; ; H(x) = -\frac{1}{x+1}[1+\ln(x+1)]$$

$$H'(x) = \frac{1+\ln(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1}\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} = h(x)$$

منه نستنتج أنّ الدالة $H$ هي دالة أصلية للدالة $h$

**ب. حساب المساحة**

$$f(x) = \frac{e}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \Rightarrow F(x) = e\ln(x+1) - \frac{1}{x+1}[1+\ln(x+1)]$$

$$\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = \boxed{\left(e\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\right)ua}$$

**3.** $\boldsymbol{D_k = ]-1;1[}$ ، $\boldsymbol{k(x) = f(-|x|)}$

**أ. بيان أنّ الدالة $k$ زوجية**

لدينا $D_k$ متناظر بالنسبة إلى 0 ، ومن أجل كل $x \in D_k$ :

$k(-x) = f(-|-x|) = f(-|x|) = k(x) \Rightarrow$ الدالة $k$ زوجية

**ب. بيان كيف يمكن استنتاج المنحنى ($\mathscr{C}_k$) انطلاقا من المنحنى ($\mathscr{C}_f$)**

$x \in ]-1;0]$ : $|x| = -x \Rightarrow k(x) = f(x) \Rightarrow$ $(C_k)$ و $(C_f)$ متطابقان

أمّا على المجال $]0;1[$ نرسم ($\mathscr{C}_k$) باستعمال التناظر بالنسبة لمحور التراتيب

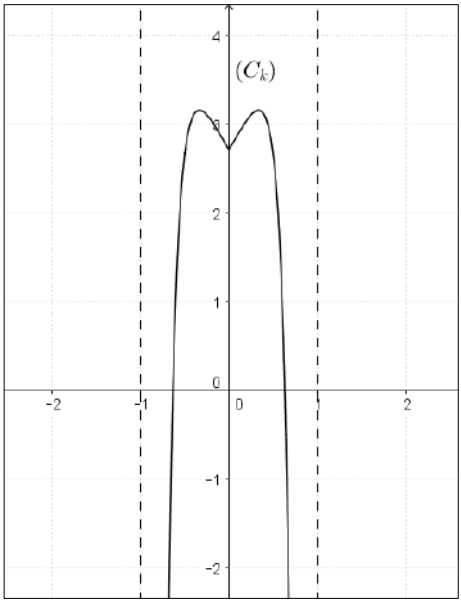
**رسم المنحنى ($\mathscr{C}_k$) :** (انظر نهاية التمرين)

**ج. المناقشة البيانية لعدد وإشارة حلول المعادلة : $\boldsymbol{k(x) = m}$**

ندرس تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_k$) مع المستقيم الأفقي ذي المعادلة $y = m$

$$k(0) = f(0) = e$$

- من أجل $m < e$ : تقبل المعادلة حلّين متعاكسين
- من أجل $m = e$ : تقبل المعادلة حلّين متعاكسين وحلا معدوما
- من أجل $e < m < f(\alpha)$ : تقبل المعادلة حلّين موجبين وحلّين سالبين
- من أجل $m = f(\alpha)$ : تقبل المعادلة حلّين مضاعفين متعاكسين
- من أجل $m > f(\alpha)$ : لا تقبل المعادلة حلا



**تمرين 63 : بكالوريا 2017 ر**

**I) $D_g = ]0;+\infty[$ ، $g(x) = \frac{1}{x} - \ln x$**

**1. دراسة اتجاه تغير الدالة $g$**

$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$ ; $g'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $g$ متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$

**2. بيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ من المجال $]1,76;1,77[$ ،**

الدالة $g$ مستمرة ورتيبة على المجال $]1,76;1,77[$ و $\underbrace{g(1,76)}_{\approx 0,003} \times \underbrace{g(1,77)}_{\approx -0,006} < 0$

منه المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]1,76;1,77[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**استنتاج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$**

$x \in ]0;\alpha[ : g(x) > 0$ ; $x \in ]\alpha;+\infty[ : g(x) < 0$ ; $g(\alpha) = 0$

**II) $D_f = [0;+\infty[$ ، $\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{x-\ln x} ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$**

**1. اثبات أنّ الدالة $f$ مستمرة عند العدد 0 على اليمين**

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x+1}{x - \ln x} \underset{\to +\infty}{\overset{\to 1}{}} = 0 = f(0)$$

منه نستنتج أنّ الدالة $f$ مستمرة عند العدد 0 على اليمين

**حساب $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x}$**

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x+1}{x-\ln x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x+1}{x^2 - \underbrace{x \ln x}_{\to 0^-}} \underset{\to 0^+}{\overset{\to 1}{}} = \boxed{+\infty}$$

**تفسير النتيجة بيانيا**

يقبل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ في المبدأ نصف مماس موازي لمحور التراتيب

**2. بيان أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x$ من المجال $]0;+\infty[$ : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-\ln x)^2}$**

$$f'(x) = \frac{x - \ln x - (x+1)\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{(x - \ln x)^2} = \boxed{\frac{g(x)}{(x - \ln x)^2}}$$

**3. حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ وتفسير ذلك بيانيا**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-\ln x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{\ln x}{x}} = \boxed{1}$$

يقبل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مستقيما مقاربا أفقيا بجوار $(+\infty)$ معادلته : $y = 1$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

- $x \in ]0;\alpha[ : f'(x) > 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة
- $x \in [\alpha;+\infty[ : h'(x) \leq 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة

| $x$ | $0$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $f(\alpha)$ | ↘ | $1$ |

**4. $D_h = ]0;+\infty[$ ، $h(x) = x - \ln x$**

**أ. بيان أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x$ موجب تماما : $h(x) > 0$**

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \; ; h'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

الدالة $h$ متناقصة على المجال $]0;1]$ ومتزايدة على المجال $[1;+\infty[$

وتقبل قيمة حدّية صغرى تساوي $h(1) = 1$ ، منه نستنتج أنّ $h(x) > 0$

**استنتاج وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ ذي المعادلة $y = 1$**

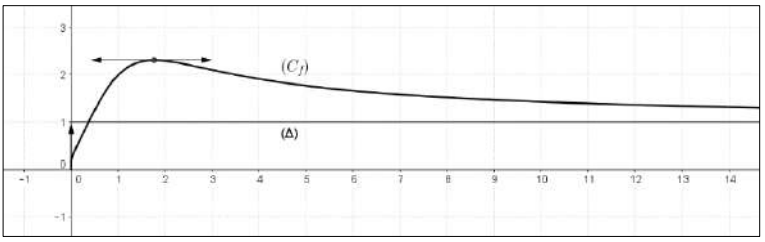
$$f(x) - 1 = \frac{x+1}{x-\ln x} - 1 = \frac{1+\ln x}{x-\ln x} = \frac{1+\ln x}{h(x)}$$

بما أنّ $h(x) > 0$ ، فإنّ إشارة الفرق من إشارة $1 + \ln x$

$$1 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$$

- $x \in ]0;e^{-1}[ : f(x) - 1 < 0 \Rightarrow (\Delta)$ تحت $(C_f)$
- $x \in ]e^{-1};+\infty[ : f(x) - 1 > 0 \Rightarrow (\Delta)$ فوق $(C_f)$
- $(C_f) \cap (\Delta) = \{(e^{-1};1)\}$

**ب. رسم $(\mathscr{C}_f)$**



**5.** $D_F = ]0;+\infty[$ ، $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

**أ. بيان أنّ من أجل كل عدد حقيقي $x$ حيث $x \geq 1$ : $\frac{1}{x} + 1 \leq f(x) \leq f(\alpha)$**

بما أنّ $f(\alpha)$ قيمة حدّية كبرى للدالة $f$ نستنتج أنّ $f(x) \leq f(\alpha)$...①

$$x \geq 1 \Rightarrow \ln x \geq 0 \Rightarrow -\ln x \leq 0 \Rightarrow x - \ln x \leq x \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x - \ln x}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{x} \leq \frac{x+1}{x - \ln x} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x} \leq f(x) \ldots ②$$

من ① و ② نستنتج أنّه من أجل كل $x \geq 1$ : $\frac{1}{x} + 1 \leq f(x) \leq f(\alpha)$

**ب. التفسير الهندسي للعدد $F(e)$**

$F(e) = \int_1^e f(t)\,dt$ وهي مساحة الحيّز المستوي المحدد بالمنحنى $(\mathscr{C}_f)$

والمستقيمات التي معادلاتها : $y = 0$ ، $x = 1$ و $x = e$

**استنتاج حصر لـ $F(e)$**

$$\frac{1}{t} + 1 \leq f(t) \leq f(\alpha) \Rightarrow \int_1^e \left(\frac{1}{t} + 1\right) dt \leq \int_1^e f(t)dt \leq f(\alpha) \int_1^e dt$$

$$\Rightarrow [\ln t + t]_1^e \leq F(e) \leq f(\alpha)[t]_1^e \Rightarrow \boxed{e \leq F(e) \leq (e-1)f(\alpha)}$$

**تمرين 64 : بكالوريا 2017 ت ر**

$D_f = ]-\infty; 1[ \cup ]2; +\infty[$ ، $f(x) = -2x + 3 + 2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$

**1. أ. حساب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x)$**

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} -2x + 3 + 2\ln\underbrace{\left(\frac{x-1}{x-2}\right)}_{\to 0^+} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} -2x + 3 + 2\ln\underbrace{\left(\frac{x-1}{x-2}\right)}_{\to +\infty} = \boxed{+\infty}$$

**تفسير النتيجتين بيانيا**

يقبل المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ مستقيمين مقاربين عموديين معادلتيهما : $x = 1$ و $x = 2$

**2. بيان أنّ من أجل كل $x$ من $D_f$ : $f'(x) = -2 - \frac{2}{(x-1)(x-2)}$**

$$f'(x) = -2 + 2\frac{-\frac{1}{(x-2)^2}}{\frac{x-1}{x-2}} = \boxed{-2 - \frac{2}{(x-1)(x-2)}}$$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

$(x-1)(x-2) > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متناقصة تماما على $D_f$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -2x + 3 + 2\ln\underbrace{\left(\frac{x-1}{x-2}\right)}_{\to 1} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -2x + 3 + 2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = \boxed{-\infty}$$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | ‖ | | ‖ | | $-$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | ‖ | | ‖ | ↘ | $-\infty$ |

**3. أ. التحقق أنّ من أجل كل $x$ من $D_f$ : $(3-x) \in D_f$ و $f(3-x) + f(x) = 0$**

$$x \in D_f \Rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ \text{أو} \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x > -1 \\ \text{أو} \\ -x < -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3-x > 2 \\ \text{أو} \\ 3-x < 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(3-x) \in D_f}$$

$$f(3-x) = -2(3-x) + 3 + 2\ln\left(\frac{2-x}{1-x}\right) = -2x - 3 + 2\ln\left(\frac{x-2}{x-1}\right)$$

$$= -2x - 3 - 2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right) = -f(x) \Rightarrow \boxed{f(3-x) + f(x) = 0}$$

**ب. استنتاج أنّ ($\mathscr{C}_f$) يقبل مركز تناظر يُطلب تعيين إحداثييه**

من المساواة السابقة نستنتج أنّ $\omega\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ مركز تناظر للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)

**4. اثبات أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ على المجال $]0,45; 0,46[$**

الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على المجال $]0,45; 0,46[$ و $\underbrace{f(0,45)}_{\approx 0,03} \times \underbrace{f(0,46)}_{\approx -0,02} < 0$

منه المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0,45; 0,46[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**استنتاج أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا آخر $\beta$ يُطلب تعيين حصر له**

بما أنّ $\omega\left(\frac{3}{2};0\right)$ مركز تناظر لـ $(\mathscr{C}_f)$ ، نستنتج أنّ $\beta$ نظير $\alpha$ بالنسبة للفاصلة $\frac{3}{2}$

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow\beta=3-\alpha$$

$$0{,}45<\alpha<0{,}46\Rightarrow-0{,}46<-\alpha<-0{,}45\Rightarrow\boxed{2{,}54<\beta<2{,}55}$$

**5. بيان أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة : $y=-2x+3$ مقارب مائل لـ $(\mathscr{C}_f)$**

$$\lim_{|x|\to+\infty}[f(x)-(-2x+3)]=\lim_{|x|\to+\infty}2\ln\underbrace{\left(\frac{x-1}{x-2}\right)}_{\to 1}=\boxed{0}$$

منه نستنتج أنّ المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة : $y=-2x+3$ مقارب مائل لـ $(\mathscr{C}_f)$

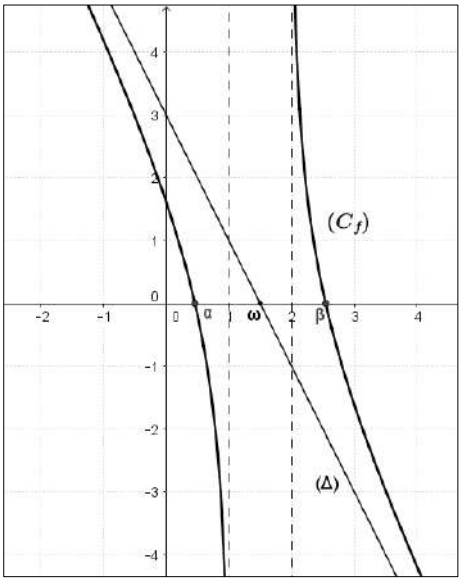
**دراسة وضعية $(\mathscr{C}_f)$ بالنسبة إلى $(\Delta)$**

$$f(x)-(-2x+3)=2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$

$$\frac{x-1}{x-2}>1\Rightarrow\frac{x-1}{x-2}-1>0\Rightarrow\frac{1}{x-2}>0\Rightarrow x>2$$

- $x\in]-\infty;1[:f(x)-(-2x+3)<0\Rightarrow(\Delta)$ تحت $(C_f)$
- $x\in]2;+\infty[:f(x)-(-2x+3)>0\Rightarrow(\Delta)$ فوق $(C_f)$

**6. رسم $(\Delta)$ و $(\mathscr{C}_f)$**



**7. بيان أنّ الدالة $h$ أصلية للدالة $x \to \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ على $]2;+\infty[$**

$$h'(x) = \ln(x-1) + \frac{x-1}{x-1} - \ln(x-2) - \frac{x-2}{x-2}$$

$$= \ln(x-1) - \ln(x-2) = \boxed{\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)}$$

منه نستنتج أنّ $h$ دالة أصلية للدالة $x \to \ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ على $]2;+\infty[$

**حساب المساحة بدلالة $\beta$**

$$\mathcal{A} = \int_{\beta}^{3} [f(x) - (-2x+3)]dx = \int_{\beta}^{3} 2\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)dx = 2[h(x)]_{\beta}^{3}$$

$$= 2[h(3) - h(\beta)]$$

$$= 2[2\ln 2 - (\beta-1)\ln(\beta-1) + (\beta-2)\ln(\beta-2)]$$

$$= 2[2\ln 2 - (\beta-1)\ln(\beta-1) + (\beta-1)\ln(\beta-2) - \ln(\beta-2)]$$

$$= 2\left[2\ln 2 - (\beta-1)\ln\left(\frac{\beta-1}{\beta-2}\right) - \ln(\beta-2)\right]$$

$$f(\beta) = 0 \Rightarrow -2\beta + 3 + 2\ln\left(\frac{\beta-1}{\beta-2}\right) = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{\beta-1}{\beta-2}\right) = \beta - \frac{3}{2}$$

$$\mathcal{A} = 2\left[2\ln 2 - (\beta-1)\ln\left(\frac{\beta-1}{\beta-2}\right) - \ln(\beta-2)\right]$$

$$= 4\ln 2 - (\beta-1)(2\beta-3) - 2\ln(\beta-2)$$

$$= \boxed{[4\ln 2 - 2\ln(\beta-2) - 2\beta^2 + 5\beta + 3]ua}$$

**تمرين 65 : بكالوريا 2017 ع ت**

$$\boldsymbol{D = ]-\infty;-1[ \cup ]1;+\infty[ \text{ ، } f(x) = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$$

**1. بيان أنّ الدالة $f$ فردية**

لدينا $D$ متناظر بالنسبة إلى 0 ومن أجل كل $x \in D$ :

$$f(-x) = -\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) = -\frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\frac{2}{3}x - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$= -f(x) \Rightarrow \boxed{\text{الدالة } f \text{ فردية}}$$

**التفسير البياني**

المنحنى $(\mathscr{C}_f)$ متناظر بالنسبة إلى $O$

**2. حساب النهايات التالية :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to1\\ >}} f(x)$

$$\lim_{\substack{x\to1\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to1\\ >}} \frac{2}{3}x + \ln\underbrace{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}_{\to0^+} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-1\\ <}} \frac{2}{3}x + \ln\underbrace{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}_{\to+\infty} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3}x + \ln\underbrace{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}_{\to1} = \boxed{+\infty}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{3}x + \ln\underbrace{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}_{\to1} = \boxed{-\infty}$$

**3. أ. بيان أنّه من أجل كل $x$ من $D$ :** $f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$

$$f'(x) = \frac{2}{3} + \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{2}{3} + \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{3} + \frac{2}{x^2-1} = \frac{2x^2+4}{3(x^2-1)}$$

$$= \boxed{\frac{2}{3}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)}$$

**ب. استنتاج اتجاه تغير الدالة $f$**

$x \in D \Rightarrow x^2-1>0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow$ الدالة $f$ متزايدة تماما على $D$

**جدول تغيرات الدالة $f$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | ‖ | | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | ‖ | | ‖ | ↗ | $+\infty$ |

**4. بيان أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $1,8<\alpha<1,9$**

الدالة $f$ مستمرة ورتيبة على المجال $]1,8;1,9[$ و $\underbrace{f(1,8)}_{\approx-0,05} \times \underbrace{f(1,9)}_{\approx0,1} < 0$

منه المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]1,8;1,9[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة

**5. بيان أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = \frac{2}{3}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) - \frac{2}{3}x = \lim_{|x|\to+\infty} \underbrace{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}_{\to 1} = \boxed{0}$$

منه نستنتج أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $y = \frac{2}{3}x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى ($\mathscr{C}_f$)

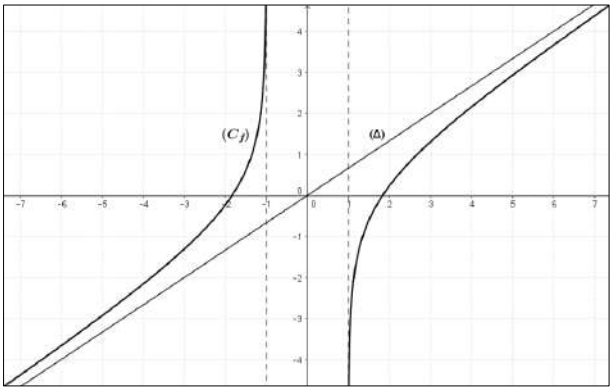
**دراسة وضعية المنحنى ($\mathscr{C}_f$) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)**

$$f(x) - \frac{2}{3}x = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$\frac{x-1}{x+1} > 1 \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{-2}{x+1} > 0 \Rightarrow x+1 < 0 \Rightarrow x < -1$$

- $x \in ]-\infty;-1[ : f(x) - \frac{2}{3}x > 0 \Rightarrow$ (Δ) فوق $(C_f)$
- $x \in ]1;+\infty[ : f(x) - \frac{2}{3}x < 0 \Rightarrow$ (Δ) تحت $(C_f)$

**6. إنشاء المستقيم (Δ) والمنحنى ($\mathscr{C}_f$)**




**7. المناقشة البيانية لعدد حلول المعادلة : $(2-3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$**

$$(2-3|m|)x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0 \Rightarrow 3|m|x = 2x + 3\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$\Rightarrow |m|x = \frac{2}{3}x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \Rightarrow \boxed{|m|x = f(x)}$$

ندرس تقاطع المنحنى ($\mathscr{C}_f$) والمستقيم ($\Delta_m$) ذي المعادلة : $y = |m|x$ الذي يدور حول $O$

- من أجل $|m| \in \left[0;\frac{2}{3}\right[$ أي $m \in \left]-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right[$ : تقبل المعادلة حلين متمايزين
- من أجل $|m| \in \left[\frac{2}{3};+\infty\right[$ أي $m \in \left]-\infty;-\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3};+\infty\right[$ : لا تقبل المعادلة حلا

# كيفية استعمال الآلة الحاسبة
# FX-991 ES PLUS

**1. حل معادلة من الدرجة الثانية**

أ. $x^2 + 3x - 4 = 0$

MODE 5 (EQN) 3 $(ax^2 + bx + c = 0)$ 1 = $(a)$ 3 = $(b)$
− 4 = $(c)$ = $(1)$ = $(-4)$

ب. $x^2 + 2x + 17 = 0$

AC 1 = $(a)$ 2 = $(b)$ 1 7 = $(c)$ = $(-1 + 4i)$ = $(-1 - 4i)$

**2. حل معادلة من الدرجة الثالثة $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$**

MODE 5 (EQN) 4 $(ax^3 + bx^2 + cx + d = 0)$ 1 = $(a)$ 1 = $(b)$
1 = $(c)$ 1 = $(d)$ = $(-1)$ = $(i)$ = $(-i)$

**3. حل جملة معادلتين** $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 7x - 4y = -1 \end{cases}$

MODE 5 (EQN) 1 $(a_n x + b_n y = c_n)$
2 = 3 = 8 = 7 = − 4 = − 1 = = $(1)$ = $(2)$

**4. حل جملة 3 معادلات (تقاطع 3 مستويات في الفضاء)** $\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ -2x + y + z = 0 \\ x + y + z - 6 = 0 \end{cases}$

MODE 5 (EQN) 2 $(a_n x + b_n y + c_n z = d_n)$
1 = − 2 = 1 = 3 = − 2 =
1 = 1 = 0 = 1 = 1 = 1 = 6 = = $(2)$ = $(1)$ = $(3)$

$(P) \cap (Q) \cap (ABC) = I(2; 1; 3)$ (لاحظ أنّ قيم $d$ تنقل إلى الطرف الثاني)

**5. تعيين نقاط مساعدة لرسم منحنى بياني $f(x) = x - 4 + \ln(1 + e^{3x})$ على المجال $[-5; 5]$**

MODE 7 (TABLE) ALPHA ) (X) − 4 + ln 1 + SHIFT ln $(e^x)$ 3
ALPHA ) ▶ ) = − 5 = ( Start ؟ (بداية المجال 5 = ( End ؟ نهاية
( Step ؟ (الخطوة 1 = (المجال

**6. حصر العدد α الذي يعدم الدالة $g(x) = 1 + x - xlnx$**

MODE 7 1 + ALPHA ) − ALPHA ) ln ALPHA ) = 1 = 5 = 1 =

نلاحظ أنّ $3 < \alpha < 4$. لإيجاد حصر للعدد α سعته $10^{-1}$ نقوم بالعملية التالية :

AC = 3 = (Start ؟) 4 = (End ؟) 0 • 1 = (Step ؟)

نستنتج أنّ $3,5 < \alpha < 3,6$. بنفس الطريقة يمكننا إيجاد حصر للعدد α سعته $10^{-2}$
حيث نحدّد بداية المجال عند 3,5 ونهايته عند 3,6 والخطوة 0,01

**7. كتابة عدد مركب على شكله الجبري**

1) $z_1 = (1+2i)^2$ :

MODE 2 (CMPLX) ( 1 + 2 ENG $(i)$ ) $x^2$ = $(-3+4i)$

2) $z_2 = \frac{5+11\sqrt{3}i}{7-4\sqrt{3}i}$ :

AC 5 + 1 1 $\sqrt{\blacksquare}$ 3 ▶ ENG ▼ 7 − 4 $\sqrt{\blacksquare}$ 3 ▶ ENG =

**8. تعيين طويلة وعمدة عدد مركب**

1) $z_1 = 1+i$ : 1 + ENG SHIFT 2 (CMPLX) 3 $(r\angle\theta)$ = $(\sqrt{2}\angle 45)$

لإيجاد قيمة θ بالراديان نقوم بالعملية التالية : SHIFT MODE 4 (Rad)

2) $z_2 = (3+\sqrt{3}) + (-3+\sqrt{3})i$ :

3 + $\sqrt{\blacksquare}$ 3 ▶ + ( − 3 + $\sqrt{\blacksquare}$ 3 ▶ ) ENG SHIFT 2 3 =

$(2\sqrt{6}\angle -\frac{1}{12}\pi)$

3) $z_3 = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ :

1 + ENG ▼ $\sqrt{\blacksquare}$ 3 ▶ + ENG ▶ SHIFT 2 3 = $(\frac{\sqrt{2}}{2}\angle\frac{1}{12}\pi)$

**9. للانتقال من الشكل المثلثي أو الأسّي إلى الشكل الجبري**

1) $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$ :

4 SHIFT (−) $(\angle)$ SHIFT $\times 10^x$ $(\pi)$ ▼ 4 ▶ SHIFT 2 (CMPLX) 4

$(a+bi)$ = $(2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i)$

2) $z_2 = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{5}e^{i\frac{\pi}{6}}$ :

$\sqrt{\blacksquare}$ 5 ▶ SHIFT (−) SHIFT $\times 10^x$ ▼ 6 ▶ SHIFT 2 4 = $\left(\frac{\sqrt{15}}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}i\right)$

**10. حساب العدد المشتق**

$f(x) = x^2 - 1 + 2\ln x \ ; \ x_0 = 2$ :

SHIFT $\left(\frac{d}{dx}\right)$ ALPHA ) $x^2$ − 1 + 2 ln ALPHA ) ) ▶ 2 $(x_0)$ =

(5)

**11. حساب التكامل**

$I = \int_1^2 (x+2-3e^{2x})\,dx$ :

$\int$ ▲ 2 ▼ 1 ◀ ◀ ( ALPHA ) + 2 − 3 SHIFT ln 2 ALPHA )

▶ ) =

# فهرس


الجزء الأول : الدوال العددية---------- 09
(كثيرات الحدود ، الناطقة ، الصمّاء ، المثلثية ، القيمة المطلقة)
قواعد أساسية لدراسة الدوال العددية ---------- 11
تمارين الدوال العددية ---------- 27
مواضيع الدوال العددية في البكالوريا ---------- 53
الجزء الثاني : الدوال الأسّية ---------- 59
قواعد أساسية لدراسة الدوال الأسّية ---------- 61
تمارين الدوال الأسّية ---------- 63
مواضيع الدوال الأسّية في البكالوريا ---------- 87
الجزء الثالث : الدوال اللوغاريتمية---------- 107
قواعد أساسية لدراسة الدوال اللوغاريتمية ---------- 109
تمارين الدوال اللوغاريتمية ---------- 112
مواضيع الدوال اللوغاريتمية في البكالوريا ---------- 129
قواعد أساسية في الدوال الأصلية ، الحساب التكاملي وحساب المساحات --- 151
الجزء الرابع : حلول تمارين الدوال العددية---------- 165
الجزء الخامس : حلول تمارين الدوال الأسّية ---------- 283
الجزء السادس : حلول تمارين الدوال اللوغاريتمية ---------- 449
كيفية استعمال الآلات الحاسبة $fx\ 991\,ES\ (Vertex - Kajib - Casio)$ 613

# صدر للمؤلف

مفاتيح الرياضيات
الجزء الأول
القسمة و الموافقات في Z
من 2008 إلى 2012

مفاتيح الرياضيات
الجزء الثاني
الدوال العددية الأسية، اللوغارتمية
من 2008 إلى 2013

مفاتيح الرياضيات
الجزء الثامن
المتتاليات العددية
من 2008 إلى 2012

مفاتيح الرياضيات
الجزء الرابع
الأعداد المركبة
التحويلات النقطية
من 2008 إلى 2012

مفاتيح الرياضيات
الجزء الثالث
الهندسة في الفضاء
من 2008 إلى 2013