

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقاط)

نعلم أن فصائل الدم للإنسان أربعة وهي : O, A, B و AB

تتوزع مجموعة من عشرة أشخاص حسب فصيلتهم الدموية كما يلي : ثلاثة أشخاص من فصيلة O ، أربعة من فصيلة A وشخصان من فصيلة B وشخص واحد من فصيلة AB ، نختار عشوائيا شخصين من هذه المجموعة.

(1) أحسب احتمال كل من الأحداث التالية : E " الشخصان المختاران لهما نفس الفصيلة الدموية "

" F " الشخصان المختاران من فصيلتين دمويتين مختلفتين " ، G " فصيلة أحد الشخصين على الأقل هي A "

(2) نرفق الفصيلة O بالعدد 4 الذي يمثل عدد الفصائل التي يمكن أن تتلقى من الفصيلة O ، وهكذا نرفق الفصيلة A

بالعدد 2 والفصيلة B بالعدد 2 والفصيلة AB بالعدد 1

نعرف المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل اختيار لشخصين مجموع الرقمين المرفقين بفصيلتهما .

(أ) برر أن مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $X \in \{3;4;5;6;8\}$

(ب) بين أن $P(X=4)=\frac{1}{3}$ و $P(X=6)=\frac{2}{5}$ ثم عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

(ج) عين الأمل الرياضي للمتغير X

(د) أحسب احتمال الحدث $X=4$ إذا علمت أن فصيلة أحد الشخصين على الأقل هي A

التمرين الثاني: (5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = \frac{1}{5}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$

(1) (أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$

(ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$

(2) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة و برر تقاربها .

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية كما يلي $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

(أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 6 يطلب تحديد حددها الأول .

(ب) أكتب v_n بدلالة n واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3}$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(ج) تحقق أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $\frac{1}{u_n} = 2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم أكتب بدلالة n المجموع : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$

التمرين الثالث: (4 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة ، عينه مع التعليل .

(1) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ ب : $f(x) = e^{ax} + \frac{b}{x+1}$ ، قيمتا العددين a و b بحيث يكون

المماس لمنحنائها في النقطة $A(0;2)$ موازيا لحامل محور الفواصل هما :

أ $a=1$ و $b=2$ ب $a=2$ و $b=1$ ج $a=1$ و $b=1$

(2) ليكن $I = \int_1^2 \frac{6x^2 + 4x}{x^3 + x^2 - 1} dx$ ، قيمة I هي أ $I = 2\ln 11$ ب $I = \frac{-1}{11}$ ج $I = \frac{1}{2} \ln 11$

(3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي ، $u_n = \int_1^2 x^n e^{-x} dx$

المتتالية (u_n) : أ) متزايدة ب) متناقصة ج) غير رتيبة

(4) (u_n) متتالية حسابية معرفة بحددها الأول $u_0 = 3$ وأساسها $r = 2$ ، المجموع $S_n = u_0 + u_3 + u_6 + \dots + u_{3n}$

يساوي : أ) $S_n = \frac{n+1}{3}(6+6n)$ ب) $S_n = \frac{3n+1}{2}(6+6n)$ ج) $S_n = (n+1)(3+3n)$

التمرين الرابع: (7 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^2 - 2\ln x$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g

(2) أحسب $g(1)$ ، و أستنتج أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $g(x) > 0$.

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$: $f(x) = 1 - x - \frac{2}{x}(1 + \ln x)$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$

ب) أستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

(3) أ) بين أن المستقيم (Δ) المعرف بالمعادلة $y = 1 - x$ مقارب مائلا للمنحنى (C_f) .

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(4) بين أن المستقيم (T) ذو المعادلة $y = -x - 1$ مماس للمنحنى (C_f) عند نقطة يطلب تعيينها .

(5) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,41 < \alpha < 0,42$

(6) أ) أنشئ (Δ) ، (T) و (C_f) .

ب) ناقش بيانها وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = -x + m$

(7) أحسب التكامل $S = -\int_{\alpha}^1 f(x) dx$ وفسر بيانها النتيجة

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقط)

أجب بصرح أو خطأ على كل اقتراح من الاقتراحات التالية مع التعليل .

(1) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^2 + \ln x$

المعادلة $g(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + e^{1+2\ln x}}{x} = e \quad (2)$$

(3) القيمة المتوسطة m للدالة f على المجال $[1; 4]$ حيث $f(x) = x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ هي : $m = 2\sqrt{5} + 3$

(4) (u_n) متتالية عددية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية كما يلي $u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{2}{x} \ln x dx$

(u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$

التمرين الثاني: (4 نقاط)

يحتوي كيس على 9 كرات (لا نفرق بينها باللمس) ، ثلاثة بيضاء مرقمة 1، 1، 2 ، وأربعة كرات حمراء مرقمة 1، 1، 2 ، 3 .

(1) نسحب من الكيس عشوائيا ثلاث كرات في أن واحد .

لتكن الحوادث التالية: A "الكرات الثلاثة المسحوبة من نفس اللون "

B "الكرات الثلاثة المسحوبة مختلفة اللون مثنى مثنى" ، C "الكرات الثلاثة المسحوبة تحمل نفس الرقم "

(أ) احسب احتمال الحادثة A واحتمال الحادثة B

(ب) بين أن $P(B \cap C) = \frac{1}{84}$

(ج) أستنتج احتمال الحادثة "الكرات الثلاثة المسحوبة مختلفة اللون مثنى مثنى أو تحمل نفس الرقم "

(2) نسحب من نفس الكيس كرتين على التوالي وبدون إرجاع . نفرض أنه عند سحب كرة تحمل رقما زوجيا نخسر

(10) نقاط وعند سحب كرة تحمل رقما فرديا نربح (5) نقاط .

نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع النقاط المحصل عليها.

(أ) برر أن مجموعة قيم المتغير العشوائي X هي $\{-20; +10; -5\}$

(ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

(ج) عين الأمل الرياضي للمتغير X . ماذا تستنتج ؟

التمرين الثالث: (5 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$

(1) (أ) أرسم في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

والمستقيم (d) الممثل للدالة f المعرفة على IR كما يلي : $f(x) = \frac{3}{4}x + 2$ ،

(ب) باستعمال (d) و (Δ) مثل دون حساب على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3

ثم ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

(2) أ) برهن بالتراجع أن: من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < 8$

ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً ثم استنتج أنها متقاربة .

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية كما يلي $v_n = \ln(8 - u_n)$

أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية أساسها $\ln \frac{3}{4}$ يطلب تحديد حدها الأول .

ب) أكتب v_n بدلالة n واستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 8 - 7\left(\frac{3}{4}\right)^n$

ج) أكتب بدلالة n الجداء : $P_n = \frac{1}{8 - u_0} \times \frac{1}{8 - u_1} \times \dots \times \frac{1}{8 - u_n}$

التمرين الرابع: (7 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة : $2cm$)

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي ، $f(x) + f(-x) = 0$ ، فسر بياناً النتيجة

(2) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(3) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ثم استنتج أن المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى كل من المستقيمين (Δ) و (Δ') .

(4) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(1 + e^x)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

ج) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف هي مبدأ المعلم

(5) أنشئ كلا من (Δ) ، (Δ') والمنحنى (C_f) .

(6) أ) بين أن الدالة $H : x \mapsto x - \ln(e^x + 1)$ هي دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \frac{1}{e^x + 1}$ على $\mathbb{R}$

ب) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين ذو المعادلتين

$$x = \ln 2 \text{ و } x = 0$$

(7) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = -x + \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$

أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $g(x) = f(-x)$

ب) استنتج طريقة لرسم (C_g) اعتماداً على (C_f) دون رسمه .

انتهى الموضوع الثاني



على المترشح ان يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأولالتمرين الأول: (4 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

$$(1) \text{ لتكن } (u_n) \text{ متتالية هندسية حيث } u_1 = 2 \text{ وأساسها } \frac{1}{2} - \text{ نعتبر الجداء: } P_n = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_{n+1}$$

$$(أ) \quad P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2-1} \quad (ب) \quad P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(n+1)(n-2)}{2}} \quad (ج) \quad P_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n^2+1}{2}}$$

(2) حلول المعادلة ذات المجهول x التالية $-2 \times e^{2x} + 2 \times e^x + 4 = 0$ هي:

$$(أ) \quad S = \emptyset \quad (ب) \quad S = \{-1; 2\} \quad (ج) \quad S = \{\ln 2\}$$

$$(3) \quad (أ) \quad \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln(x) dx = 1 \quad (ب) \quad \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln(x) dx = \frac{e}{2} \quad (ج) \quad \int_1^e \frac{1}{x} \times \ln(x) dx = \frac{1}{2}$$

$$(4) \quad (أ) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 0 \quad (ب) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 2 \quad (ج) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = -\infty$$

التمرين الثاني: (4.5 نقاط)نعتبر الدالة العددية f المعرفة والمتزايدة تماما على $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{6x-1}{4x+2}$ (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

$$(1) \text{ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n: \frac{1}{2} < u_n \leq 2$$

(2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم برر تقاربها .

$$(3) \text{ لتكن المتتالية } (v_n) \text{ المعرفة على } N \text{ كما يلي: } v_n = \frac{6}{2u_n - 1}$$

أ. اثبت أن (v_n) متتالية حسابية أساسها 3.ب. أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{3}{3n+2} + \frac{1}{2}$.

$$ج. احسب \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$(4) \text{ احسب بدلالة } n \text{ المجموع } S_n \text{ حيث، } S_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

التمرين الثالث: (4 نقاط)

يحتوي صندوق على ثلاث كريات بيضاء مرقمة من 1 إلى 3 ، و خمس كريات سوداء مرقمة من 1 إلى 5 لانفرق بينها عند اللمس. نسحب كريتين على التوالي و بدون إعادة الكرة المسحوبة إلى الصندوق.

(1) نعتبر الحوادث التالية: A " سحب كريتين من نفس اللون "

B " سحب كريتين تحملان نفس الرقم " ، C " سحب كريتين مجموع رقميهما يساوي 7 "

أ - بين أن $p(A) = \frac{13}{28}$ ثم احسب: $p(B)$ و $p(C)$.

ب - ما احتمال سحب كريتين تحملان نفس الرقم علما أنهما من نفس اللون؟

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الأرقام الزوجية المسحوبة.

أ - عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

ب - احسب $E(X)$ ثم $v(X)$.

التمرين الرابع: (7.5 نقاط)

(I) g دالة معرفة على R بـ: $g(x) = 4xe^{2x} + 1$

(1) احسب نهايات الدالة g .

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g على المجال R ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) استنتج أنه من أجل كل X من R : $g(x) > 0$

(II) لتكن الدالة f المعرفة على R بـ: $f(x) = x + 1 + (2x - 1)e^{2x}$

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) أ - بين أن المستقيم (Δ) ذو معادلة $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب - ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(3) بين أنه من أجل كل X من R : $f'(x) = g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات f .

(4) أ - بين أن المنحنى (C_f) يشمل النقطة $\omega\left(\frac{-1}{2}; \frac{e-4}{2e}\right)$.

ب - تحقق أن النقطة ω هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) .

(5) احسب $f(0)$ ثم انشئ (Δ) و المنحنى (C_f) .

(6) أ - باستعمال المكاملة بالتجزئة احسب العدد: $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (2x - 1)e^{2x} dx$

ب - احسب التكامل $J = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$. ماذا تمثل النتيجة المحصل عليها بالنسبة للدالة f .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط) اقترح تمرين حول السحب من صندوقين

التمرين الثاني: (4 نقاط)

اختر الإجابة الصحيحة الوحيدة من بين الإجابات المقترحة في كل حالة:

(1

التمرين الثالث: (4 نقاط)

(1) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x} \right)$

- ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

(2) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 2$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$

أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n \geq 1$

ب - بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج تقاربها.

(3) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ - بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_{n+1} = (v_n)^2$

ب - اثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 \leq v_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

التمرين الرابع: (8 نقاط)



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول

التمرين الأول : 05 نقاط

- (u_n) المتتالية العددية المعرفة بجدها الأول $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2u_n+5}{14-4u_n}$
- (1) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{12}{14-4u_n}$
ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{5}{2}$
ج - بين أن (u_n) متتالية متناقصة تماما واستنتج أنها متقاربة.
- (2) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كيلي : $v_n = \frac{au_{n-1}}{2u_n-5}$
- عين قيمة العدد الطبيعي a حتى تكون (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$
- (3) نضع في كل مايلي $a = 2$

- أ - عبر بدلالة n عن v_n و u_n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- ب - أحسب المجموع S حيث : $S = v_0 + v_1 + \dots + v_{2021}$
- ج - أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{u_0-2,5} + \frac{1}{u_1-2,5} + \dots + \frac{1}{u_n-2,5}$

التمرين الثاني : 04 نقاط

- يحتوي صندوق 09 كريات متماثلة لانفرق بينها باللمس ، منها 04 كريات بيضاء مرقمة بـ 0 ; 1 ; 2 ; 3 و 04 كريات حمراء مرقمة بـ : 0 ; 1 ; 2 ; 3 و كرية سوداء تحمل الرقم : -1
- (1) نسحب على التوالي ودون إرجاع كرتين من الصندوق ونعتبر الحدثين :
- A : " الكريات المسحوبة مختلفة اللون " ، B : " الكريات المسحوبة مجموع أرقامها يساوي 2 "
- أ - بين أن $P(A) = \frac{2}{3}$ ثم أحسب $P(B)$ احتمال الحدثين A و B على الترتيب .
- ب- أحسب احتمال سحب كرتين مختلفتين في اللون ومجموع أرقامها يساوي 2 .
- (2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل أرقام فردية المتبقية في الكيس .
- عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$.
- (3) نضيف n كرية سوداء تحمل الرقم -1 ونسحب عشوائيا على التوالي و دون إرجاع كرتين من هذا الصندوق.
- نعتبر الحدث C : " الكرتين المسحوبتين سوداوين "
- بين أن $P(C) = \frac{n^2+n}{n^2+17n+72}$ ثم عين عدد الكرات السوداء المضافة إلى الصندوق بحيث يكون $P(C) = \frac{15}{91}$

التمرين الثالث : 4 نقاط

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - 3 + (x + 1)^2 e^{-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) تحقق أن الدالة $G: x \rightarrow (-x - 1)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $g: x \rightarrow xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$

(2) نضع $I = \int_0^1 xe^{-x} dx$ و $J = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$

أ - باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $J = 2I - e^{-1}$
 ب - أحسب قيمة I ثم استنتج قيمة J .

(3) أ - بالإستعانة بنتائج السؤال (2 - ب) أحسب العدد الحقيقي A حيث : $A = \int_0^1 (x + 1)^2 e^{-x} dx$
 ب - فسر النتيجة المحصل عليها هندسياً.

التمرين الرابع : 7 نقاط

I / الدالة العددية المعرفة على $]1; +\infty[$ كمايلي : $g(x) = \frac{1}{x-1} - \ln(x-1)$

(C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ - أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ وفسر النتيجة هندسياً.

ب - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(2) أ - بين أنه من أجل كل حقيقي x من $]1; +\infty[$ فإن : $g'(x) = \frac{-x}{(x-1)^2}$

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) أ - بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]1; +\infty[$ ثم تحقق أن : $2.7 < \alpha < 2.8$
 ب - استنتج إشارة $g(x)$ على $]1; +\infty[$

II / نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $]1; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = 4e^{-x} \ln(x-1)$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ - بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، فسر النتيجة هندسياً.

ب - أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ، فسر النتيجة المحصل عليها.

(2) أ - برر قابلية اشتقاق الدالة f على $]1; +\infty[$ ثم بين أنه من أجل كل x من $]1; +\infty[$: $f'(x) = 4e^{-x} g(x)$
 ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(3) أنشئ المنحنيين (C_g) و (C_f) (الوحدة $2cm$) (نضع $\alpha = 2,75$ و $f(\alpha) = 0,14$)

(4) تحقق أن : $\ln(\alpha - 1) = \frac{1}{\alpha - 1}$

(5) - نضع : $U = \int_2^\alpha \frac{1}{x-1} dx$ و $V = \int_2^\alpha \ln(x-1) dx$

أ - أحسب العدد الحقيقي U و باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $V = 3 - \alpha$

ب - لتكن A مساحة الحيز بـ cm^2 المحدد بالمنحنى (C_g) ومحور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين $x = \alpha$ و $x = 2$

ج - بين أن $U - V = \frac{(\alpha - 2)^2}{\alpha - 1}$ واستنتج المساحة A .

انتهى الموضوع الأول

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بجدها الأول $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{2\sqrt{2}-u_n}$ (1) أحسب u_1 ، u_2 .

(2) أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < \sqrt{2}$

ب - أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) وبين أنها متقاربة .

(3) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كيلي : $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{2}-u_n}$

أ - بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب - أكتب عبارة v_n بدلالة n .

ج - استنتج أن $u_n = \frac{\sqrt{2}n}{n+1}$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

د - نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = \ln(u_1) + \ln(u_2) + \dots + \ln(u_n)$

- بين أن : $S_n = \frac{1}{2} n \ln 2 - \ln(n+1)$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$

التمرين الثاني : 5 نقاط

يحتوي صندوق U_1 على 9 كريات متماثلة لانفرق بينها باللمس منها كرتين بيضاويتين مرققة: 2 ، 3 و ثلاث كريات حمراء مرققة : 1 ، 3 ، 3 و أربع كريات سوداء مرققة 2 ، 2 ، 3 ، 3 . نسحب عشوائيا وفي أن واحد كرتين من الصندوق U_1 نعتبر الحدثين A : " الكرتين المسحوبتين من نفس الرقم " و B : " الكرتين المسحوبتين من نفس اللون "

(1) أ - أحسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحدثين A و B على الترتيب .

ب - بين أن : $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة جداء رقي الكرتين المسحوبتين .

- عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$

(3) نعتبر الصندوق الأول U_1 وصندوق آخر U_2 يحتوي على 6 كريات متماثلة لانفرق بينها باللمس منها كرتين بيضاويتين

مرققة ب: 1 ، 1 و كرتين حمراوين مرققة ب: 1 ، 3 و كرتين سوداوين مرققة ب: 2 ، 2

نرمي حجر نرد متوازنة مرققة من 1 إلى 6 مرة واحدة فعند ظهور رقم فردي نسحب كرة من الصندوق الأول U_1 وعند

ظهور رقم زوجي نسحب كرة من الصندوق U_2 .

(أ) شكل شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية .

ب) بين أن احتمال ظهور كرية بيضاء هو $P(B') = \frac{5}{18}$.

ج) علما أن الكرة المسحوبة بيضاء ، ما احتمال أن تكون من الصندوق الثاني U_2 ؟

- (1) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$
- (2) λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1 ، أحسب العدد الحقيقي A حيث : $A = \int_1^\lambda \frac{1}{x(x+1)^2} dx$
- (3) نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ : $F(\lambda) = \int_1^\lambda \frac{\ln x}{(x+1)^3} dx$
- أ - باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب بدلالة λ العدد الحقيقي $F(\lambda)$.
- ب - بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{(x+1)^2} = 0$ ، ثم استنتج $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda)$

التمرين الرابع : 7 نقاط

I / g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + (1-x)e^{-x+2}$

- (1) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .
- (2) استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g(x) \geq 0$
- II / نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كيلي : $f(x) = x - 1 + xe^{-x+2}$
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- (1) أ - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ب - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$
- ج - أدرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها .
- (2) أ - أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .
- ب - أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$.
- ج - بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يطلب كتابة معادلة ديكارتية له .
- (3) أ - بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها a حيث $0,1 < a < 0,2$.
- ب - أحسب $f(1)$ ، ثم أنشئ كلا من (T) ، (Δ) والمنحنى (C_f) .
- (4) ناقش بياننا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $xe^{-x+2} - 1 - m = 0$
- (5) أ - بين أن الدالة $K: x \rightarrow (-x-1)e^{-x+2}$ هي دالة أصلية للدالة $k: x \rightarrow xe^{-x+2}$ على $\mathbb{R}$.
- ب - أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما : $x = 2$ و $x = 3$

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

أجب بصحيح أو خاطئ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

$$(01) \quad \text{لتكن في }]0; +\infty[\text{ المعادلة } \log(x^2 + 11x - 2) = 1 + \log x \text{، المعادلة تقبل حل وحيد هو } x = 1$$

$$(02) \quad \text{لتكن في المتراجحة } e^{-x} - 2e^x < 1 \text{، حلول هذه المتراجحة هو } x = 1$$

$$(03) \quad \text{لتكن الدالة } f \text{ المعرفة على المجال }]-1; +\infty[\text{ بالشكل } f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x+1} \text{، القيمة المتوسطة } m \text{ للدالة } f$$

$$\text{على المجال } [0; 2] \text{ هي: } m = 4 - \ln \sqrt{3}$$

$$(04) \quad (V_n) \text{ متتالية هندسية متقاربة حيث } V_0 = 8 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} (V_0 + V_1 + \dots + V_n) = 12 \text{ أساس المتتالية } (V_n) \text{ هو } q = \frac{1}{3}$$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كريات بيضاء تحمل الأرقام 1 ; 1 ; 2 و 3 و ثلاث كريات سوداء تحمل الأرقام 1 ; 2 و 3 و كرتين

حمرأوين تحملان الرقمين 2 و 3 (الكريات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس)، نسحب عشوائيا من الكيس كرتين على

التوالي دون إرجاع، نرمز بـ α لرقم الكرة المسحوبة أولا و β لرقم الكرة المسحوبة ثانيا. نعتبر الحادثتين A و B حيث:

A : الحصول على كرتين من نفس اللون . B : الحصول على كرتين تحملان رقما فرديا

$$1. \quad \text{أثبت أن: } P(A) = \frac{5}{18} \text{ ثم أحسب } P(B)$$

ب- أحسب $P(A \cap B)$ ، ثم استنتج احتمال الحادثة:

"الحصول على كرتين من نفس اللون أو تحملان رقمين فرديين".

$$2. \quad \text{ليكن } X \text{ المتغير العشوائي الذي يرفق النتيجة بالعدد } \alpha - \beta$$

أ- عين قيم المتغير العشوائي X ثم عين قانون احتماله، أحسب أمله الرياضي.

التمرين الثالث: (05 نقاط):

$$\text{المتتالية العددية } (U_n) \text{ معرفة بـ: } U_1 = 5 \text{ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n: U_{n+1} = \frac{5U_n - 4}{1 + U_n}$$

$$1. \quad \text{أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n: U_{n+1} = 5 - \frac{9}{U_n + 1}$$

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n: U_n > 2$

2. حدد اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج أنها متقاربة.

3. المتتالية (V_n) معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $V_n = \frac{3}{2 - U_n}$

أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n: V_{n+1} = \frac{U_n + 1}{2 - U_n}$ ثم بين أن المتتالية (V_n) حسابية أساسها -1

ب- أكتب V_n بدلالة n ثم استنتج U_n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

4. نضع: $S = (V_1 - V_2) + (V_3 - V_4) + \dots + (V_{4043} - V_{4044})$ أحسب S

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2 + (x - 2)e^{-x+2}$

1- أدرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها.

2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.14 < \alpha < 1.15$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = 2x - 1 - (x - 1)e^{-x+2}$

(C_f) هو المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (حيث

$$\|\vec{i}\| = 2\text{cm} \text{ و } \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$$

1- أ- أحسب كلا من: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $f'(x) = g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج- بين أن $f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2}{\alpha - 2}$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

2- أ- أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقاربا (Δ) معادلته $y = 2x - 1$ بجوار $+\infty$

ب- أدرس الوضع النسبية للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

ج- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تحديد معادلة له.

د- أحسب كلا من: $f(0)$ و $f(2)$ ، ثم أنشئ (Δ) ، (T) و المنحنى (C_f) .

3- عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $0 = 2m - 1 - (x - 1)e^{-x+2}$ حلين متمايزين.

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = (x - 1)e^{-x+2}$

1- استعمال التكامل بالتجزئة عين الدالة الأصلية H للدالة h على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم عند 0.

2- ليكن λ عددا حقيقيا حيث: $\lambda > 1$ ، $A(\lambda)$ هي مساحة الحيز من المستوى المحددة بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)

و المستقيمين اللذين معادلتهما $x = 1$ و $x = \lambda$

- أحسب المساحة $A(\lambda)$ بدلالة λ ، ثم أحسب: $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط):

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير:

(01) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y' - (\ln 2)y - \ln 8 = 0$ الذي يحقق $y(0) = 1$ هو:

(أ) $y = 2^{x-1} + 3$ (ب) $y = 2^{x+2} - 3$ (ج) $y = 4e^x + 1$

(02) f دالة عددية معرفة على $f(x) = 3^{x-1}$ ب: تقبل الاشتقاق على و دالتها المشتقة f' هي:

(أ) $f'(x) = 3^{x-1} \ln 3$ (ب) $f'(x) = 3 \times \ln(x-1)$ (ج) $f'(x) = 3^{x-2} \times 3$

(03) التكامل $\int_0^{\ln 2} \frac{e^{x+e^x}}{e^{e^x} - 1} dx$ يساوي: (أ) $\ln 2$ (ب) $\ln(e-1)$ (ج) $\ln(e+1)$

(04) لتكن الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ ب: $f(x) = \ln(e^{-x} + e^{20})^{101} + \frac{2e^x}{e^x - 1}$ (C_f) يقبل

مستقيم مقارب أفقي ذو المعادلة :

(أ) $y = 1443$ (ب) $y = 1962$ (ج) $y = 2022$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس U_1 على كرتين تحملان الرقم 1 و أربع كريات تحمل الرقم 2، و كيس U_2 يحتوي على 7 كريات منها 3 حمراء و الباقي صفراء (الكريات لا نفرق بينها عند اللمس)، نسحب عشوائيا كرية من الكيس U_1 و نسجل رقمها، إذا كان الرقم 1 نقوم بسحب كرية واحدة من U_2 و إذا كان الرقم 2 نقوم بسحب كرتين في آن واحد من الكيس U_2 .

1. مثل الوضعية بشجرة احتمالات مناسبة.

2. لتكن الحوادث التالية: A : الكرية المسحوبة تحمل الرقم 1. B : الكرية المسحوبة تحمل الرقم 2.

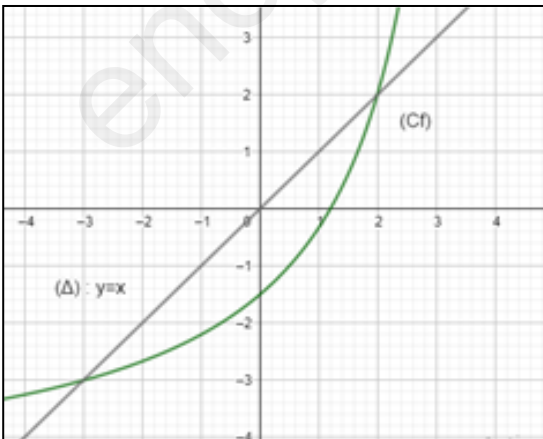
C : الحصول بالضبط على كرية حمراء، D : الحصول على كرتين حمراوين.

3. أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ و بين أن: $P(C) = \frac{11}{21}$ ، $P(D) = \frac{2}{21}$ ثم أحسب $P_C(A)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، f دالة معرفة على المجال $[-3; 2]$ ب:

$f(x) = \frac{5x-6}{4-x}$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني كما هو موضح في الشكل المقابل



1. أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2. أثبت أنه من أجل كل $x \in [-3; 2]$ فإن: $f(x) \in [-3; 2]$

(II) α عدد حقيقي، (U_n) متتالية عددية معرفة بحددها الأول $U_0 = \alpha$

و من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = f(U_n)$

- عين قيم العدد α حتى تكون (U_n) ثابتة. نضع $U_0 = 0$

1. انقل الشكل المقابل على ورقتك ثم مثل على محور الفواصل كل من الحدود $U_0 ; U_1 ; U_2 ; U_3$ مبرزاً خطوط الرسم (لا يطلب حساب الحدود).
 2. ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها.
 3. برهن بالتراجع من أجل كل $n \in \mathbb{N} : -3 < U_n < 2$.
 4. ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج أنها متقاربة.
- (III) (V_n) متتالية عددية معرفة بـ: $V_n - 1 = \frac{5}{U_n - 2}$
1. أثبت أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
 2. اكتب عبارة V_n بدلالة n ثم استنتج عبارة U_n بدلالة n ، أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.
 3. أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{5}{U_0 - 2} + \frac{5}{U_1 - 2} + \frac{5}{U_2 - 2} + \dots + \frac{5}{U_{n-1} - 2}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- (I) الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$
- 1- ادرس تغيرات الدالة g و شكل جدول تغيراتها.
 - 2- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $1.31 < \alpha < 1.32$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.
- (II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - e + \frac{1 - \ln x}{x}$
- (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 2cm)
- 1- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و فسر النتيجة هندسياً.
 - 2- برهن أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) يطلب تعيين معادلته.
 - 3- أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) و المستقيم (D) .
 - 4- بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
 - 5- أثبت أن $f(\alpha) = 2\alpha - e - \frac{1}{\alpha}$ ثم استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$.
 - 6- أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماساً (T) يوازي المستقيم (D) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.
ب- اكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) .
 - 7- أنشئ (T) و المنحنى (C_f) .
- نسمي $A(\alpha)$ مساحة الحيز من المستوي المحددة بالمنحنى (C_f) و المستقيم (D) و المستقيمين $x = e$ و

$$A(\alpha) = 2(\alpha^2 - 1)^2 \text{ cm}^2 \quad \text{بين أن:} \quad x = \alpha$$

انتهى الموضوع الثاني

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول:

التمرين الأول: (04 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

(1) النهاية التالية $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - e^{\frac{1}{x}})$ تساوي:

(أ) $+\infty$ (ب) 0 (ج) -1

(2) (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 1 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)^n$ هي:

(أ) متتالية حساية متناقصة (ب) متتالية هندسية متزايدة (ج) متتالية حساية متزايدة.

x_i	-2	-1	α	3
P_i	0,12	0,5	β	0,3

(3) الجدول التالي يعرف قانون احتمال تجربة عشوائية:

الأمل الرياضي لقانون الاحتمال هو $\mu = 0,32$ من أجل:

(أ) $\alpha = 1$ و $\beta = 0,08$ (ب) $\alpha = 2$ و $\beta = 0,08$ (ج) $\alpha = 2$ و $\beta = 0,03$

(4) إذا كان z عددا مركبا حيث $z = \frac{\sqrt{2}+2i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-i\sqrt{2}}$ فإن:

(أ) $z^{2022} = 1$ (ب) $z^{2022} = -1$ (ج) $z^{2022} = i$

التمرين الثاني: (4,5 نقاط)

صندوق يحوي 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها كرتان تحملان الرقم 1 وثلاث كريات تحمل الرقم 0، وخمسة تحمل الرقم 2.

(1) نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الصندوق ونعتبر الحدثين A و B حيث:

A "الكريات المسحوبة تحمل أرقاما مختلفة"، B "الكريات المسحوبة تحمل أرقاما جذاؤها معدوم".
(أ) احسب: $P(A)$ و $P(B)$ احتمال الحدثين A و B على الترتيب.

(ب) بين أن: $P(A \cap B) = \frac{7}{10}$ ، هل الحدثان A و B مستقلان؟ علل.

(ج) علما أن جداء أرقام الكرات معدوم ما هو احتمال ان تكون مختلفة.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الأرقام المتساوية المحصل عليها.

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

(ب) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب تباينه $V(X)$.

التمرين الثالث: (4,5 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $3u_{n+1} = 2u_n - 4$.
 (v_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

(1) اوجد قيمة α التي من أجلها تكون المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 5 \left(\frac{2}{3}\right)^n - 4$

(3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$ ، و احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

(5) لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $w_n = \frac{5}{v_n + 5} - 5$

(أ) بين أن المتتالية (w_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

(ب) بين أن المتتاليتين (u_n) و (w_n) متجاورتان.

(ج) احسب بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n = \frac{1}{w_0 + 5} + \frac{1}{w_1 + 5} + \dots + \frac{1}{w_n + 5}$

التمرين الرابع: (7 نقاط)

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 1 - x^2 e^x$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ؛ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ماذا تستنتج؟

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(ج) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$.

(2) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثيهما.

(3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1

(4) نعرف على $\mathbb{R}$ الدالة h كما يلي: $h(x) = e^{-1} + x e^x$

(أ) ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج انها موجبة على $\mathbb{R}$.

(ب) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ؛ $f(x) - (1 + e^{-1}x) = -xh(x)$

(ج) استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمماس (T) .

(5) أنشئ المماس (T) و المنحنى (C_f) .

(6) أنشئ في نفس المعلم السابق المنحنى (C_g) الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - x^2 e^{-x}$

(7) الدالة K معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $K(x) = (ax^2 + bx + c) e^x$ حيث: a ، b و c أعداد حقيقية.

(أ) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c حتى تكون الدالة K أصلية للدالة: $x \mapsto x^2 e^x$ على $\mathbb{R}$.

(ب) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلتها:

$$x = -2 \text{ ؛ } y = 1 \text{ ؛ } x = 0$$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

فيما يلي أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل:

- (1) المعادلة $\log^3(x) - 2\log^2(x) - 3\log(x) = 0$ تقبل ثلاث حلول في $\mathbb{R}$.
- (2) f دالة فردية مستمرة على المجال $[-a; a]$: التكامل $\int_{-a}^a f(x)dx$ يساوي 0.
- (3) A و B حدثان مستقلان معرفان على نفس المجموعة Ω حيث: $P(A) = 0,2$ و $P(A \cup B) = 0,7$ ، احتمال الحدث B يساوي: 0,5
- (4) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{u}, \vec{v}; o)$ ، مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $|1 - i\sqrt{3}z| = 4$ هي الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $r = 1$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على أربع قريصات بيضاء تحمل كل واحدة الرقم 3 و أربع قريصات سوداء تحمل كل واحدة الرقم 2. القريصات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس.

- (1) ن سحب عشوائيا من الكيس ثلاثة قريصات على التوالي دون إرجاع القريصة المسحوبة.
 - أ) احسب احتمال الأحداث التالية:
 - A : "القريصات المسحوبة بيضاء" ؛ B : "القريصات المسحوبة تحمل نفس الرقم".
 - C : "ضمن القريصات المسحوبة واحدة على الأكثر سوداء".
 - ب) هل الحدثان B و C مستقلان؟ علل
- (2) نعتبر في هذا الجزء أن عدد القريصات السوداء هو n (حيث: $n \geq 2$) ؛ و ن سحب من الكيس عشوائيا وفي آن واحد قريصتين.
 - و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب مجموع الرقمين الظاهرين على القريصتين.
 - أ) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ؛ ثم احسب بدلالة n الأمل الرياضي له.
 - ب) استنتج عدد القريصات السوداء التي يجب وضعها في الصندوق حتى يكون $E(X) = 5$.

التمرين الثالث (05 نقاط):

$$I \ (U_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كما يلي: } \begin{cases} U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 1 \\ U_0 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

- (1) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: U_n \leq -\frac{3}{2}$
- ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.
- ج) احسب نهاية المتتالية (U_n) .

$$(2) \text{ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي } n: U_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}$$

$$\text{II } (V_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة بـ } V_0 = 0 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n: V_{n+1} = V_n + U_n + \frac{3}{2}$$

(1) بين أن المتتالية (V_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

$$(2) \text{ (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم } n: V_n = -\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$$

(ب) استنتج عبارة V_n بدلالة n .

(ج) احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ ، ثم استنتج أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان.

(3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\ln\left(\frac{2}{3}V_0 + 1\right) + \ln\left(\frac{2}{3}V_1 + 1\right) + \dots + \ln\left(\frac{2}{3}V_n + 1\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

التمرين الرابع (07 نقاط)

I نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\begin{cases} f(x) = (x-1)^2 \ln|x-1| - 2 & ; \quad x \neq 1 \\ f(1) = -2 \end{cases}$
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(2) (أ) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند $x_0 = 1$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

(ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي يختلف عن 1: $f'(x) = (x-1)(1 + 2\ln|x-1|)$.

(ج) ادرس إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) (أ) بين أن المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ محور تناظر للمنحنى (C_f) .

(ب) بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β حيث: $2,82 < \alpha < 2,83$ ،
 يطلب تعيين حصرا للعدد β .

(4) اكتب معادلة للمستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1.

(5) أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-2; 4]$.

II (1) باستعمال التكامل بالتجزئة، أوجد الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto (x-1)^2 \ln(x-1)$ على المجال $]1; +\infty[$ والتي تنعدم عند 2.

(2) $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلتها:

$$x = \alpha \text{ و } x = 2, y = -2$$

$$- \text{ بين أن: } A(\alpha) = \frac{1}{9}(-\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha - 4) \text{ u.a}$$

مدیرية التربية لولاية غرداية		تصحیح نموذجي لاختبار البكالوريا التجريبي		دورة: ماي 2022																					
الشعبة: علوم تجريبية		مادة الرياضيات		المدة: 3 ساعات ونصف																					
العلامة		الموضوع الأول																							
04		التمرين الأول :																							
0,25		(1) الاقتراح الصحيح هو: ج																							
0,75		لأن: بوضع $X = \frac{1}{x}$ نجد: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - e^{\frac{1}{x}}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{X}(1 - e^X) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^X}{X} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{e^X - 1}{X} = -1$																							
0,25		(2) الاقتراح الصحيح هو: أ																							
0,75		لأن: $u_{n+1} - u_n = \ln\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - \ln\left(\frac{2}{3}\right)^n = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ فإنها متناقصة تماما.																							
0,25		(3) الاقتراح الصحيح هو: ب																							
0,75		لأن: $\alpha = 2$ منه: $0,08\alpha = 0,32 - (-0,24 - 0,5 + 0,9) = 0,16$ ؛ $\beta = 1 - (0,12 + 0,5 + 0,3) = 0,08$																							
0,25		(4) الاقتراح الصحيح هو: ب																							
0,75		لأن: $z = \frac{\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}}{2\sqrt{2} - i\sqrt{2}} = \frac{1 + 2i}{2 - i} = \frac{(1 + 2i)(2 + i)}{5} = \frac{5i}{5} = i$ منه: $z^{2022} = (i)^{2022} = (i^2)^{1011} = (-1)^{1011} = -1$																							
4,25		التمرين الثاني :																							
		(1) أ) حساب احتمال الحادثتين A و B :																							
2 * 0,5		الحادثة $\bar{A}$ "الكريات تحمل نفس الرقم" ؛ الحادثة $\bar{B}$ "لا توجد كرية تحمل الرقم 0". $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_7^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{35}{120} = \frac{85}{120} = \frac{17}{24}$ ؛ $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{C_3^3 + C_5^3}{C_{10}^3} = 1 - \frac{1 + 10}{120} = \frac{109}{120}$																							
0,5		ب) تبين أن $P(A \cap B) = \frac{7}{10}$: $P(A \cap B) = \frac{C_3^1 \times C_7^2 + C_3^2 \times C_7^1}{C_{10}^3} = \frac{63 + 21}{120} = \frac{84}{120} = \frac{7}{10}$																							
0,5		بما أن: $P(A) \times P(B) = \frac{1853}{2880}$ و $P(A \cap B) = \frac{2016}{2880}$ منه: $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$ فإن الحادثتين A و B غير مستقلتين.																							
0,5		ج) حساب احتمال أن تكون أرقام الكريات مختلفة علما أن جداءها معدوم: $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{7}{10} \times \frac{24}{17} = \frac{84}{85}$																							
0,25		(2) أ) تعيين القيم الممكنة لـ X : لكريات إما تحمل نفس الرقم فإن $X = 3$ و تحمل أرقاما مختلفة مثنى مثنى فإن $X = 0$. أو كرتان تحملان نفس الرقم و الأخرى تحمل رقما مختلفا فإن $X = 2$ ، إذن: مجموعة القيم الممكنة لـ X هي $\{0; 2; 3\}$.																							
0,75		ب) تعريف قانون الاحتمال:																							
0,75		<table><tr><td>$x_i =$</td><td>0</td><td>2</td><td>3</td><td>Σ</td></tr><tr><td>$P(X = x_i) =$</td><td>$\frac{30}{120}$</td><td>$\frac{79}{120}$</td><td>$\frac{11}{120}$</td><td>1</td></tr><tr><td>$x_i \cdot P_i =$</td><td>0</td><td>$\frac{158}{120}$</td><td>$\frac{33}{120}$</td><td>$\frac{191}{120}$</td></tr><tr><td>$x_i^2 \cdot P_i =$</td><td>0</td><td>$\frac{316}{120}$</td><td>$\frac{99}{120}$</td><td>$\frac{415}{120}$</td></tr></table> $P(X = 3) = P(\bar{A}) = \frac{11}{120}$ $P(X = 2) = \frac{C_3^2 \times C_7^1 + C_3^1 \times C_7^2 + C_5^2 \times C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{79}{120}$ $P(X = 0) = \frac{C_3^1 \times C_2^1 \times C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{30}{120}$				$x_i =$	0	2	3	Σ	$P(X = x_i) =$	$\frac{30}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{11}{120}$	1	$x_i \cdot P_i =$	0	$\frac{158}{120}$	$\frac{33}{120}$	$\frac{191}{120}$	$x_i^2 \cdot P_i =$	0	$\frac{316}{120}$	$\frac{99}{120}$	$\frac{415}{120}$
$x_i =$	0	2	3	Σ																					
$P(X = x_i) =$	$\frac{30}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{11}{120}$	1																					
$x_i \cdot P_i =$	0	$\frac{158}{120}$	$\frac{33}{120}$	$\frac{191}{120}$																					
$x_i^2 \cdot P_i =$	0	$\frac{316}{120}$	$\frac{99}{120}$	$\frac{415}{120}$																					
0,75		ج) حساب التباين $Var(X)$: $E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot P_i = \frac{191}{120} \approx 1,59$ منه: $Var(X) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 \cdot P_i - [E(X)]^2 = \frac{415}{120} - \left(\frac{191}{120}\right)^2 \approx 0,925$																							
04,5		التمرين الثالث :																							
0,5		(1) حساب قيمة α :																							
0,25		تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ إذا و فقط إذا كان: $\frac{\alpha - 4}{3} = 0$ أي: $\alpha = 4$. حدها الأول $v_0 = u_0 + \alpha = 1 + 4 = 5$																							

	(2) تبين عبارة الحد العام لـ (u_n) :
0,5	(v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ حدها الأول 5 إذن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $v_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ومنه: $u_n = v_n - 4 = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4$.
0,5	(3) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) : $u_{n+1} - u_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 5\left(\frac{2}{3}\right)^n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n \left(-\frac{1}{3}\right) < 0$ إذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.
0,25	حساب نهاية المتتالية (u_n) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(5\left(\frac{2}{3}\right)^n - 4\right) = -4$ (لأن $-1 < \frac{2}{3} < 1$ منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$)
	(4) حساب المجموع S_n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n - (4 + 4 + \dots + 4)$
0,5	$S_n = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} - 4(n+1) = 15 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] - 4(n+1) = 11 - 4n - 15\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$
0,75	(5) لنبين أن (w_n) متزايدة تماما: $w_{n+1} - w_n = \frac{5}{v_{n+1} + 5} - \frac{5}{v_n + 5} = \frac{5v_n + 25 - 5v_{n+1} - 25}{(v_{n+1} + 5)(v_n + 5)} = \frac{5\left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3}\right)}{(v_{n+1} + 5)(v_n + 5)}$ بما أن: $v_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$ و $5\left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{1}{3}\right) > 0$ فإن: $w_{n+1} - w_n > 0$ ومنه المتتالية (w_n) متزايدة تماما.
0,5	(ب) لنبين أن (u_n) و (w_n) متجاورتان: لدينا: المتتالية (u_n) متناقصة تماما والمتتالية (w_n) متزايدة تماما كما أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n - u_n) = (-4 + 4) = 0$ منه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{v_n + 5} - 5\right) = 1 - 5 = -4$ (لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$) و بالتالي فإن المتتاليتين (u_n) و (w_n) متجاورتان.
0,75	(ج) حساب المجموع T_n : $T_n = \frac{1}{w_0 + 5} + \frac{1}{w_1 + 5} + \dots + \frac{1}{w_n + 5} = \frac{v_0 + 5}{5} + \frac{v_1 + 5}{5} + \dots + \frac{v_n + 5}{5}$ $T_n = \frac{1}{5}(v_0 + v_1 + \dots + v_n) + 1 + 1 + \dots + 1 = 3 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] + (n+1) = 4 + n - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$
07,25	التمرين الرابع:
3*0,25	(1) حساب النهايتين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ (لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ (لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$) مستقيم مقارب معادلته $y=1$ عند $-\infty$.
4*0,25	(ب) دراسة اتجاه تغير البالة f وإنشاء جدول التغيرات: $f'(x) = -2xe^x - x^2e^x$ حيث: $f'(x) = e^x(-x^2 - 2x)$ إشارة $f'(x)$ مثل إشارة $(-x^2 - 2x)$ لأن $e^x > 0$. منه: البالة f متناقصة تماما على $]-\infty; -2]$ و متزايدة تماما على $[0; +\infty[$. (ج) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$: (*) من أجل $x \in]-\infty; 0]$ فإن: $f(x) \geq 1 - 4e^{-2} > 0$ إذن المعادلة $f(x) = 0$ لا تقبل حلا على $]-\infty; 0]$. (*) f مستمرة و متناقصة تماما على $[0; +\infty[$ وبما أن: $f(0,7) \approx 0,01 > 0$ و $f(0,8) \approx -0,42 < 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على $[0; +\infty[$ حلا وحيدا α حيث $0,7 < \alpha < 0,8$.

(2) تبين أن المنحني (C_f) يقبل تقطبي انعطاف :

0,25

$$f''(x) = e^x(-x^2 - 2x) + (-2x - 2)e^x = e^x(-x^2 - 4x - 2) \quad \text{حيث: } f' \text{ تقبل الاشتقاق على } \mathbb{R}$$

0,25

x	$-\infty$	$-2 - \sqrt{2}$	$-2 + \sqrt{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$\bigcirc$	$+$	$-$

إشارة $f''(x)$ مثل إشارة $(-x^2 - 4x - 2)$ لأن $e^x > 0$

0,25

$f''(x)$ انعدمت مرتين مغيرة إشارتها إذن لـ (C_f) نقطتا انعطاف، إحداثيها: $(-0,6; 0,8)$ و $(-3,4; 0,6)$ (النتائج مدورة)

(3) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 :

0,5

$$(T): y = e^{-1}(x+1) + 1 - e^{-1} \quad \text{أي: } (T): y = f'(-1)(x+1) + f(-1) \quad \text{منه: } (T): y = e^{-1}x + 1$$

(4) ادرس اتجاه تغير الدالة h :

3*0,25

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$\bigcirc$	$+$

$$h'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x) \quad \text{حيث: } h \text{ تقبل الاشتقاق على } \mathbb{R}$$

إشارة $h'(x)$ مثل إشارة $(1+x)$ لأن $e^x > 0$.

و بالتالي h متناقصة تماما على $]-\infty; -1]$ و متزايدة تماما على $]-1; +\infty[$.

0,25

(*) و منه الدالة h تقبل قيمة حدية صغرى $h(-1) = e^{-1} - e^{-1} = 0$ ؛ وبالتالى $h(x) \geq 0$ على $\mathbb{R}$.

0,25

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$-x$	$+$	$\bigcirc$	$+$	$-$
$h(x)$	$+$	$\bigcirc$	$+$	$+$
$xh(x)$	$+$	$\bigcirc$	$+$	$-$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (T)	تماس (C_f) و (T)	تقاطع (C_f) و (T)	(C_f) أسفل (T)

ب) التحقق من المساواة: من أجل كل عدد حقيقي x ,

$$f(x) - (1 + e^{-1}x) = 1 - x^2e^x - 1 - e^{-1}x$$

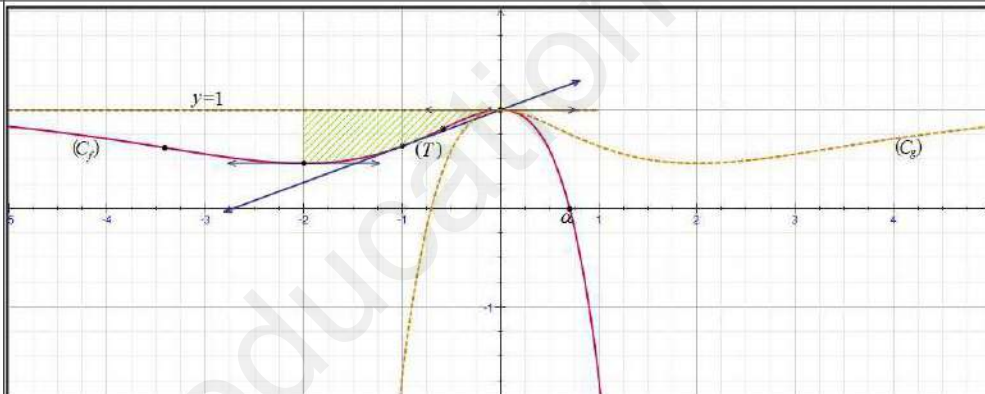
$$= -x(xe^x + e^{-1}) = -xh(x)$$

ج) استنتاج وضعية (C_f) بالنسبة لـ (T) :

الوضع النسبي من إشارة $f(x) - (1 + e^{-1}x) = -xh(x)$.

0,75

0,25



(5) إنشاء (C_f) و المماس (T) :

(6) إنشاء المنحني (C_g) :

لدينا: $g(x) = 1 - x^2e^{-x}$

يعني: $g(x) = 1 - (-x)^2e^{-x}$

أي: $g(x) = f(-x)$

منه (C_g) نظير (C_f)

بالنسبة لمحور الترتيب.

(7) تعيين الأعداد الحقيقية a , b و c :

0,5

$$K'(x) = (2ax + b)e^x + e^x(ax^2 + bx + c) = e^x(ax^2 + (2a + b)x + b + c) \quad \text{حيث: } K \text{ تقبل الاشتقاق على } \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases} \quad \text{يعني:} \quad \begin{cases} a=1 \\ 2a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \quad \text{بالمطابقة نجد: } K'(x) = x^2e^x \quad \text{يعني: } x \mapsto x^2e^x \text{ الدالة } K \text{ أصلية للدالة}$$

إذن الدالة K حيث $K(x) = e^x(x^2 - 2x + 2)$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto x^2e^x$ على $\mathbb{R}$.

2*0,25

$$S = \int_{-2}^0 |f(x) - 1| dx = \int_{-2}^0 x^2e^x dx = [e^x(x^2 - 2x + 2)]_{-2}^0 = 2 - 10e^{-2} \text{ (u.a.)} \quad \text{ب) حساب المساحة:}$$

انتهى حل الموضوع الأول

مديرية التربية لولاية غرداية		تصحيح نموذجي لاختبار البكالوريا التجريبي		دورة: ماي 2022											
الشعبة: علوم تجريبية		مادة الرياضيات		المدة: 3 ساعات ونصف											
العلامة		الموضوع الثاني													
التمرين الأول:		04													
0,25		(1) المعادلة: $\log^3(x) - 2\log^2(x) - 3\log(x) = 0$ تقبل ثلاثة حلول: <----- صحيح													
0,75		التبرير: $\log^3(x) - 2\log^2(x) - 3\log(x) = 0$ تكافئ: $\log^3(x) - 2\log^2(x) - 3\log(x) = 0$ تكافئ: $\log(x) = 3$ أو $\log(x) = -1$ أو $\log(x) = 0$ تكافئ: $x = 10^3$ أو $x = 10^{-1}$ أو $x = 1$ تكافئ: $\log(x) = 3$ أو $\log(x) = -1$ أو $\log(x) = 0$ تكافئ: $x = 10^3$ أو $x = 10^{-1}$ أو $x = 1$													
0,25		(2) التكامل: إذا كانت الدالة f مستمرة و فردية على $[-a; a]$ فإن: $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ <----- صحيح													
0,75		التبرير: f مستمرة على $[-a; a]$ إذن تقبل عليه دالة أصلية F وكذلك: $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \dots (1)$ و بما أن f فردية فإن: $f(x) = -f(-x)$ بالتعويض في (1) نجد: $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 -f(-x)dx + \int_0^a f(x)dx$ إذن: $\int_{-a}^a f(x)dx = [F(-x)]_{-a}^0 + [F(x)]_0^a = F(0) - F(a) + F(a) - F(0) = 0$													
0,25		(3) احتمال الحادثة B يساوي 0,5 <----- خطأ													
0,75		التبرير: نعلم أن $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ وبما أن A و B مستقلتان فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$ أي أن: $P(B) = \frac{0,5}{0,8} = 0,625$ منه: $0,7 = 0,2 + P(B)(1 - 0,2)$													
0,25		(4) مجموعة النقط $M(z)$ حيث $ 1 - i\sqrt{3} z = 4$ هي الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $r = 1$ <----- خطأ													
0,75		التبرير: $ 1 - i\sqrt{3} z = 4$ تكافئ: $ z = \frac{4}{ 1 - i\sqrt{3} } = \frac{4}{2} = 2$ تكافئ: $ z = 2$ تكافئ: $OM = 2$ وبالتالي: مجموعة النقط $M(z)$ هي الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها $r = 2$													
التمرين الثاني:		04													
3 * 0,5		(1) حساب احتمال الحوادث A ، B و C : أ) $P(A) = \frac{A_4^3}{A_8^3} = \frac{24}{336} = \frac{1}{14}$ ؛ $P(B) = \frac{A_4^3 + A_4^3}{A_8^3} = \frac{2 \times 24}{336} = \frac{1}{7}$ ؛ $P(C) = \frac{A_4^3 + 6 \times C_4^1 \times C_4^2}{A_8^3} = \frac{24 + 144}{336} = \frac{1}{2}$													
0,75		ب) $P(B \cap C) = \frac{A_4^3}{A_8^3} = \frac{24}{336} = \frac{1}{14}$ بما أن $P(B) \times P(C) = \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{14} = P(B \cap C)$ فإن الحادثتين B و C مستقلتان.													
0,25		(2) تعريف قانون الاحتمال: مجموعة القيم الممكنة لـ X هي: $\{4; 5; 6\}$. $P(X=5) = \frac{C_n^1 \times C_4^1}{C_{4+n}^2} = \frac{8n}{n^2 + 7n + 12}$ ؛ $P(X=4) = \frac{C_n^2}{C_{4+n}^2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} \times \frac{2!(n+2)!}{(n+4)!} = \frac{n \times (n-1)}{(n+3)(n+4)} = \frac{n^2 - n}{n^2 + 7n + 12}$ $P(X=6) = \frac{C_4^2}{C_{4+n}^2} = \frac{12}{n^2 + 7n + 12}$													
0,75		(* حساب الأمل الرياضي: <table><tr><td>$x_i =$</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>Σ</td></tr><tr><td>$P_i =$</td><td>$\frac{n^2 - n}{n^2 + 7n + 12}$</td><td>$\frac{8n}{n^2 + 7n + 12}$</td><td>$\frac{12}{n^2 + 7n + 12}$</td><td>1</td></tr></table>				$x_i =$	4	5	6	Σ	$P_i =$	$\frac{n^2 - n}{n^2 + 7n + 12}$	$\frac{8n}{n^2 + 7n + 12}$	$\frac{12}{n^2 + 7n + 12}$	1
$x_i =$	4	5	6	Σ											
$P_i =$	$\frac{n^2 - n}{n^2 + 7n + 12}$	$\frac{8n}{n^2 + 7n + 12}$	$\frac{12}{n^2 + 7n + 12}$	1											
0,25		$E(X) = \frac{4(n^2 - n) + 5 \times 8n + 6 \times 12}{n^2 + 7n + 12} = \frac{4n^2 + 36n + 72}{n^2 + 7n + 12}$													
0,5		ب) استنتاج عدد القرصات السوداء حيث $E(X) = 5$ تكافئ: $\frac{4n^2 + 36n + 72}{n^2 + 7n + 12} = 5$ تكافئ: $4n^2 + 36n + 72 = 5n^2 + 35n + 60$ تكافئ: $n^2 - n - 12 = 0$ تكافئ: $n = -3$ أو $n = 4$ (مرفوض).													

05	التمرين الثالث :
0,5	1. البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n \leq -\frac{3}{2}$ (*) لدينا: $u_0 = -\frac{5}{2}$ و $-\frac{5}{2} \leq -\frac{3}{2}$ إذن الخاصية محققة من أجل $n=0$. (*) نرض أنه من أجل عدد طبيعي كفي $n: u_n \leq -\frac{3}{2}$ و لنثبت أن: $u_{n+1} \leq -\frac{3}{2}$ لدينا من الفرضية $u_n \leq -\frac{3}{2}$ ومنه: $u_n - 1 \leq \frac{1}{3}(-\frac{3}{2}) - 1$ أي: $u_{n+1} \leq -\frac{3}{2}$ إذن الخاصية محققة من أجل $n+1$. (*) الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n \leq -\frac{3}{2}$.
0,5	ب) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n): $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n - 1 - u_n = \frac{-2u_n - 3}{3}$ و بما أن: $u_n \leq -\frac{3}{2}$ فإن: $\frac{-2u_n - 3}{3} \geq 0$ إذن: المتتالية (u_n) متزايدة.
0,25	(*) استنتاج التقارب: (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بـ $-\frac{3}{2}$ (لأن: $u_n \leq -\frac{3}{2}$) إذن هي متقاربة نحو $l \leq -\frac{3}{2}$.
0,25	ج) حساب النهاية: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ (لأن (u_n) متقاربة) و لدينا: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 1$ منه: $l = \frac{1}{3}l - 1$ أي: $l = -1$ و بالتالي: $l = -\frac{3}{2}$.
0,75	2 البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}$ (*) لدينا: $u_0 = -\frac{5}{2}$ و $-\left(\frac{1}{3}\right)^0 - \frac{3}{2} = -1 - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$ إذن الخاصية محققة من أجل $n=0$. (*) نرض أنه من أجل عدد طبيعي كفي $n: u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}$ و لنثبت أن: $u_{n+1} = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \frac{3}{2}$ لدينا من الفرضية: $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}$ منه: $\frac{1}{3}u_n - 1 = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{2} - 1$ أي: $u_{n+1} = -\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \frac{3}{2}$. (*) الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}$.
0,5	II. 1) إثبات أن المتتالية (v_n) متناقصة تماما: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $v_{n+1} = v_n + u_n + \frac{3}{2}$ يعني: $v_{n+1} - v_n = u_n + \frac{3}{2} = -\left(\frac{1}{3}\right)^n < 0$ منه (v_n) متناقصة تماما.
0,75	2) الإثبات بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = -\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$ (*) من الخاصية نجد: $v_1 = -1$ و نعلم أن: $v_1 = v_0 + u_0 + \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = -1$ إذن الخاصية محققة من أجل $n=1$. (*) نرض من أجل $n \in \mathbb{N}^*$ كفي: $v_n = -\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$ لنثبت أن: $v_{n+1} = -\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ لدينا من الفرضية $v_n = -\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$ و نعلم أن: $v_{n+1} - v_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ (من الجواب السابق) منه: $v_{n+1} = -\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^n = -\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ (*) الخلاصة: من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = -\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$.

	ب) استنتاج عبارة v_n بدلالة n: $v_n = -\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) = -\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) : n \in \mathbb{N}^*$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ (مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$) و بما أن: $v_0 = -\frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^0\right) = 0 = v_0$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي n: $v_n = -\frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$ ج) حساب النهاية: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\frac{3}{2}$ (لأن $-1 < \frac{1}{3} < 1$ منه $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$) (*) استنتاج أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان: المتتالية (u_n) متزايدة و المتتالية (v_n) متناقصة وبما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$ فإن (u_n) و (v_n) متجاورتان.	0,5																														
0,25	3) تبين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $\ln\left(\frac{2}{3}v_0 + 1\right) + \ln\left(\frac{2}{3}v_1 + 1\right) + \dots + \ln\left(\frac{2}{3}v_n + 1\right) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\ln(3)$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $\frac{2}{3}v_n + 1 = -\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ ومنه: $\ln\left(\frac{2}{3}v_n + 1\right) = \ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = n \ln\left(\frac{1}{3}\right)$ إذن: $\ln\left(\frac{2}{3}v_0 + 1\right) + \ln\left(\frac{2}{3}v_1 + 1\right) + \dots + \ln\left(\frac{2}{3}v_n + 1\right) = 0 \times \ln\left(\frac{1}{3}\right) + 1 \times \ln\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + n \times \ln\left(\frac{1}{3}\right)$ $= (0 + 1 + \dots + n) \times \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\ln(3)$	0,25																														
07	التمرين الرابع:																															
3*0,25	1. حساب النهايتين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ؛ $\left(\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty\right)$ و لأن $x-1 = X$ (بوضع $x-1 = X$) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} (X^2 \ln(X) - 2) = +\infty$																															
0,5	2) دراسة قابلية اشتقاق الدالة f عند 1: الدالة f معرفة عند 1 و بجواره: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{X \rightarrow 0^+} -X \ln X = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^2 \ln x-1 }{x-1} = \lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln X = 0$ إذن: الدالة f تقبل الاشتقاق عند 1 حيث: $f'(1) = 0$.	0,25																														
0,25	بيانياً: نستنتج أن المنحني (C_f) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماساً معامل توجيهه 0 (أي مماساً أفقياً). ب) تبين عبارة المشتقة من أجل كل $x \neq 1$:																															
0,75	f' تقبل الاشتقاق على $]-\infty; 1[$ و: $f'(x) = 2(x-1)\ln(-(x-1)) + \frac{-1}{-(x-1)}(x-1)^2 = (x-1)(1 + 2\ln(-(x-1)))$ f' تقبل الاشتقاق على $]1; +\infty[$ و: $f'(x) = 2(x-1)\ln(x-1) + \frac{1}{(x-1)}(x-1)^2 = (x-1)(1 + 2\ln(x-1))$ ومنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن: $f'(x) = (x-1)(1 + 2\ln x-1)$																															
0,5	ج) دراسة اتجاه تغير الدالة f و تشكيل جدول تغيراتها: <table border="1"> <tr> <th>x</th> <th>$-\infty$</th> <th>$1 - e^{-\frac{1}{2}}$</th> <th>1</th> <th>$1 + e^{-\frac{1}{2}}$</th> <th>$+\infty$</th> </tr> <tr> <td>$x-1$</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$1 + 2\ln x-1$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> <td>-</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>$+\infty$</td> <td>$-2 = -0,5e^{-1}$</td> <td>-2</td> <td>$-2 = -0,5e^{-1}$</td> <td>$+\infty$</td> </tr> </table> تكايف: $1 + 2\ln x-1 > 0$ $1 + 2\ln x-1 = 0$ $1 + 2\ln x-1 < 0$ $x-1 > e^{-\frac{1}{2}}$ $x-1 = e^{-\frac{1}{2}}$ $x-1 < e^{-\frac{1}{2}}$ يعني: $x < 1 - e^{-\frac{1}{2}}$ أو $x > 1 + e^{-\frac{1}{2}}$ $x = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$ أو $x = 1 + e^{-\frac{1}{2}}$	x	$-\infty$	$1 - e^{-\frac{1}{2}}$	1	$1 + e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$	$x-1$	-	-	0	+	+	$1 + 2\ln x-1 $	+	0	-	-	0	$f'(x)$	-	0	+	0	+	$f(x)$	$+\infty$	$-2 = -0,5e^{-1}$	-2	$-2 = -0,5e^{-1}$	$+\infty$	
x	$-\infty$	$1 - e^{-\frac{1}{2}}$	1	$1 + e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$																											
$x-1$	-	-	0	+	+																											
$1 + 2\ln x-1 $	+	0	-	-	0																											
$f'(x)$	-	0	+	0	+																											
$f(x)$	$+\infty$	$-2 = -0,5e^{-1}$	-2	$-2 = -0,5e^{-1}$	$+\infty$																											
0,25																																

0,25	الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty; 1 - e^{-\frac{1}{2}}]$ و $[1; 1 + e^{-\frac{1}{2}}]$ ؛ متزايدة تماما على $[1 - e^{-\frac{1}{2}}; 1]$ و $[1 + e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$.
0,5	(3) تبين أن المستقيم ذا المعادلة $x=1$ محور تناظر لـ (C_f) : (*) $D_f = \mathbb{R}$ فهي متناظرة بالنسبة للنسبة لـ 1 ؛ و من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن : (*) $f(1-x) - f(1+x) = (1-x-1)^2 \ln 1-x-1 - (1+x-1)^2 \ln 1+x-1 = x^2 \ln x - x^2 \ln x = 0$. إذن: المنحني (C_f) متناظر بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $x=1$. (ب) تبين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين أي أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين :
0,25	(*) الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على $[1 + e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$ وبما أن: $f(2,82) \approx -0,02 < 0$ و $f(2,83) \approx 0,02 > 0$ فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على $[1 + e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$ حلا وحيدا α حيث: $2,82 < \alpha < 2,83$.
0,25	(*) الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على $]-\infty; 1 - e^{-\frac{1}{2}}]$ وبما أن: $f(1 - e^{-\frac{1}{2}}) < 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) > 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على $]-\infty; 1 - e^{-\frac{1}{2}}]$ حلا وحيدا β.
0,25	(*) من التناظر نستنتج أن $\beta = 2(1) - \alpha$ أي: $2 - 2,83 < \beta < 2 - 2,82$ إذن: $-0,83 < \beta < -0,82$.
0,5	(4) كتابة معادلة لـ (T) المماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة -1 $(T): y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ أي: $(T): y = -(2 + 4\ln(2))(x+1) + 4\ln(2) - 2$ منه: $(T): y = -(2 + 4\ln(2))x - 4$
0,75	(5) إنشاء المنحني (C_f) و المماس (T) على المجال $[-2; 4]$:
0,25	1. حساب الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto (x-1)^2 \ln(x-1)$ على $]1; +\infty[$ و التي تنعدم عند 2 و لتكن H :
0,25	الدالة H معرفة على $]1; +\infty[$ بـ: $H(x) = \int_2^x (t-1)^2 \ln(t-1) dt$
0,25	نضع: $\begin{cases} u(t) = \ln(t-1) \\ v'(t) = (t-1)^2 \end{cases}$ حيث: $\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t-1} \\ v(t) = \frac{1}{3}(t-1)^3 \end{cases}$
0,25	نجد: $H(x) = \left[\frac{1}{3}(t-1)^3 \ln(t-1) \right]_2^x - \int_2^x \frac{1}{3}(t-1)^2 dt$
0,25	أي: $H(x) = \frac{1}{3}(x-1)^3 \ln(x-1) - \frac{1}{9}[(t-1)^3]_2^x = \frac{1}{3}(x-1)^3 \ln(x-1) - \frac{1}{9}(x-1)^3 + \frac{1}{9}$
0,25	(2) حساب المساحة $A(\alpha)$: $A(\alpha) = \int_2^\alpha f(x) - (-2) dx = [H(x)]_2^\alpha = \frac{1}{3}(\alpha-1)^3 \ln(\alpha-1) - \frac{1}{9}(\alpha-1)^3 + \frac{1}{9} \dots (1)$
0,25	نعلم أن: $f(\alpha) = (\alpha-1)^2 \ln(\alpha-1) - 2 = 0$ يعني: $\ln(\alpha-1) = \frac{2}{(\alpha-1)^2}$
0,25	بالتعويض في (1) نجد: $A(\alpha) = \frac{1}{3}(\alpha-1)^3 \times \frac{2}{(\alpha-1)^2} - \frac{1}{9}(\alpha-1)^3 + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}(\alpha-1) - \frac{1}{9}(\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1) + \frac{1}{9}$
0,25	إذن: $A(\alpha) = \frac{1}{9}(6\alpha - 6 - \alpha^3 + 3\alpha^2 - 3\alpha + 1 + 1) = \frac{1}{9}(-\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha - 4)$ u.a

انتهى حل الموضوع الثاني



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط) (خاص بشعبة علوم تجريبية)

لدينا 3 صناديق U_1, U_2, U_3 يحتوي الصندوق U_1 على لثوة حمراء واحدة و 9 كرات سوداء، الصندوق U_2 يحتوي على

كرتين حمراوين و 8 كرات سوداء، أما الصندوق U_3 يحتوي على ثلاث كرات حمراء و 7 كرات سوداء .

نختار عشوائيا صندوقا من الصناديق الثلاثة و نسحب في آن واحد كرتين من الصندوق المختار

لتكن الأحداث : RR " الحصول على كرتين حمراوين " و NN " الحصول على كرتين سوداوين " ,

و NR " الحصول على كرتين مختلفتين في اللون "

(1) انقل ثم اتمم شجرة الاحتمالات

(2) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

(أ) حدد قيم المتغير العشوائي X , ثم بين أن $p(X=2) = \frac{4}{135}$

(ب) عين قانون احتمال المتغير العشوائي X , ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$

(3) علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين، ما احتمال أن يكون السحب من الصندوق U_3

التمرين الأول : (04 نقاط) (خاص بشعبة تقني رياضي)

(1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث : $11x - 5y = 2$

(أ) اثبت انه إذا كانت الثنائية (x, y) من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن : $y \equiv 4[11]$

(ب) استنتج حلول المعادلة (E)

(2) ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم، نضع $a = 5n + 2$ و $b = 11n + 4$

(أ) عين القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

(ب) عين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون : $PGCD(a; b) = 2$

(ج) استنتج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددين a و b أوليان فيما بينهما

(3) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $A = 5n^2 + 7n + 2$ و $B = 11n^2 + 15n + 4$

(أ) بين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B

(ب) استنتج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B

التمرين الثاني: (05 نقاط)

لتكن المعادلة التفاضلية (1) $y' - 3y = 0$

(1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة التفاضلية (1) ثم عين الحل الخاص f الذي يأخذ القيمة 1 من أجل $x = \frac{-2}{3}$

(2) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحددها العام : $u_n = e^{3n+2}$

(أ) بين أن (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول، هل هي متقاربة ؟

(ب) ادرس اتجاه تغير (u_n)

(3) نعرف المتتالية (v_n) بما يلي : $v_n = \ln(u_n)$

(أ) بين أن (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n

(ب) اثبت أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

(ج) احسب المجموع : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ ثم الجداء $T_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

من بين الاقتراحات التالية لكل سؤال جواب واحد صحيح حدده مع التعليل

(1) منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $f(x) = 3x + \frac{e^{-x} - 2}{e^{-x} - 1}$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته :

(ج) $y = 3x + 2$

(ب) $y = 3x + 1$

(أ) $y = 3x$

(2) نعتبر العدد الحقيقي $A(\lambda) = \int_1^\lambda x \ln x dx$ حيث $\lambda > 1$: علما أن الدالة $x \mapsto \frac{x^2}{2} \left[\ln x - \frac{1}{2} \right]$ دالة أصلية للدالة

$x \mapsto x \ln x$, قيمة λ التي من أجلها $A(\lambda) = \frac{1}{4}$ هي :

(ج) $\lambda = 2e$

(ب) $\lambda = \sqrt{e}$

(أ) $\lambda = e^{-1}$

(3) المعادلة $\log(11x^2 - 6x + 5) = \log(x^2) + 1$ تقبل حلان في $\mathbb{R}$ هما :

(ج) $S = \{-1; -5\}$

(ب) $S = \{1; 5\}$

(أ) $S = \{1; -5\}$

(4) المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $U_n = 2 - 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ هي متتالية

(ج) ليست رتيبة

(ب) متناقصة تماما

(أ) متزايدة تماما

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x - (x^2 + 1)e^{-x+1}$

نسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$

ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

(2) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث، $1,8 < \alpha < 1,9$

(4) اكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

(5) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيينهما.

(6) احسب: $f(0)$, $f(3)$ ثم ارسم (T) , (Δ) و (C_f)

(7) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية: $f(x) = x + m$

(II) نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx$

(1) أ) بين أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $G(x) = -(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x+1}$

ب) احسب I_1

(2) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن: $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$ لكل عدد طبيعي غير معدوم n

ب) احسب I_2 .

(3) احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) و المستقيمين الذين معادلتيهما:

$x=0$ و $x=1$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

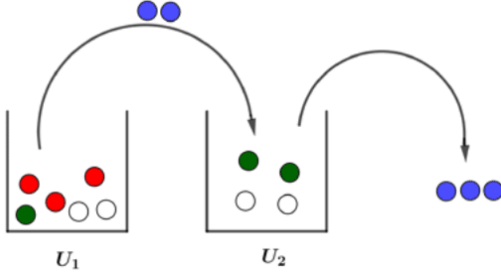
التمرين الأول: (04 نقاط) (خاص بشعبة علوم تجريبية)

يحتوي صندوق U_1 على ست كرات منها ثلاثة كرات حمراء وكرتين لونهما أبيض وكرة لونها أخضر، ويحتوي صندوق U_2 على أربع كرات منها كرتين خضراوين وكرتين لونهما أبيض. الكرات في صندوقين كلها متماثلة لا نفرق بينها باللمس. نقوم بإجراء عملية السحب العشوائي الآتية: نسحب عشوائيا وفي ان واحد كرتين من الصندوق U_1 ونضعها في الصندوق U_2 ثم نسحب عشوائيا وفي ان واحد ثلاث كرات من الصندوق U_2

نعتبر الحدثين التاليين :

A: " سحب ثلاث كرات من نفس اللون "

B: " سحب ثلاث كرات مختلفة الألوان مثنى مثنى "



(1) أ) بين أن : $P(A) = \frac{17}{300}$

ب) أحسب: $P(B)$

(2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الألوان التي تظهر بعد نهاية عملية السحب العشوائي

أ) أوجد القيم الممكنة للمتغير العشوائي X

ب) أوجد قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب امله الرياضي

(3) أحسب احتمال سحب ثلاث كرات من نفس اللون من U_2 علما أن الكرتين المسحوبتين من U_1 من نفس اللون

التمرين الأول : (04 نقاط) (خاص بالتقني رياضي)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(E): 5x - 6y = 3$

(1) أ) أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E) فإن x مضاعفا للعدد 3

ب) استنتج حلا خاصا للمعادلة (E) ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E)

ج) استنتج حلول للجملة $(S): \begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$

(2) a و b عدنان طبيعيين حيث:

$a = \overline{1\alpha 0\alpha 00}$ في النظام ذو الأساس 3 و $b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}$ في النظام ذو الأساس 5

عين α و β حتى تكون الثنائية $(a; b)$ حلا للمعادلة (E)

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$

(1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 ثم ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n \leq n + 3$

ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

ج) استنتج أن (u_n) محدودة من الأسفل. هل يمكن القول أن (u_n) متقاربة؟

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $v_n = u_n - n$

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها

ب) عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n ثم احسب نهاية (u_n) عند $+\infty$

ج) أحسب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

(4) لتكن المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $t_n = \ln(v_n)$

أ) برهن أن المتتالية (t_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب) أحسب بدلالة n المجموع: $A_n = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n$

ج) استنتج بدلالة n الجداء: $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(1) حل المعادلة التفاضلية $y'' = -e^x + 2$ والذي يحقق الشرطان $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$ هو :

أ) $y = x^2 - e^x + 2x + 2$ ب) $y = 2e^x - x$ ج) $y = -2x + e^x$

(2) يراد عشوائياً تشكيل لجنة تضم رئيساً ونائباً له من بين ثلاث رجال $H_1; H_2; H_3$ وأربع نساء $F_1; F_2; F_3; F_4$

احتمال أن هو H_1 الرئيس

أ) $\frac{6}{7}$ ب) $\frac{1}{7}$ ج) $\frac{4}{42}$

(3) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x+1}$:

القيمة المتوسطة m للدالة f على المجال $[0; 2]$ هي

أ) $m = 4 - \ln \sqrt{3}$ ب) $m = 4 + \ln \sqrt{3}$ ج) $m = 2 - \ln \sqrt{3}$

(4) (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n = \int_0^1 (1+x^n) dx$:

أ) (u_n) متتالية متناقصة ب) (u_n) متتالية متزايدة ج) (u_n) متتالية غير رتيبة

التمرين الرابع: (07 نقاط)

المستوى المنسوب إلى معلم متعاقد ومجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln(x)$

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ، $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g

(2) أدرس إشارة $g(x)$ (لاحظ أن $g(1) = 0$)

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$ وليكن (C) منحنىها البياني في

المستوي السابق

(1) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ ، $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا

(3) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

(4) انشئ المنحنى (C)

(5) بين أن الدالة $h: x \rightarrow x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \rightarrow \ln x$ على $]0; +\infty[$ ثم باستعمال التكامل بالتجزئة بين

$$\text{أن: } \int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$$

(6) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) ومحور الفواصل والمستقيمين الذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = e$

انتهى الموضوع الثاني



التصحيح المفصل لامتحان البكالوريا التجريبي في مادة: الرياضيات

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(2.25)

$P(U_1) = P(U_2) = P(U_3) = \frac{1}{3}$ (1)
 $P_{U_1}(NN) = \frac{C_9^2}{C_{10}^2}$, $P_{U_1}(RN) = \frac{C_1^1 \times C_9^1}{C_{10}^2}$
 $P_{U_2}(RN) = \frac{C_1^1 \times C_8^1}{C_{10}^2}$, $P_{U_2}(RR) = \frac{C_2^2}{C_{10}^2}$
 $P_{U_2}(NN) = \frac{C_8^2}{C_{10}^2}$
 $P_{U_3}(NN) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2}$, $P_{U_3}(RR) = \frac{C_3^2}{C_{10}^2}$
 $P_{U_3}(NN) = \frac{C_7^2}{C_{10}^2}$
 $P(X=2) = \frac{4}{135}$, $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$ (2)
 $E(X) = \frac{2}{5}$ (ب)
 $P_{RR}(U_3) = \frac{3}{4}$ (3)

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{17}{27}$	$\frac{46}{135}$	$\frac{4}{135}$

استعمل شجرة الاحتمالات

التمرين الثاني: (04 نقاط) (خاص بالتقني رياضي)

(0.5) **ج/ *** استنتاج قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون العددين a و b أوليان فيما بينهما: من السؤال السابق من أجل $n = 2\alpha$ / $\alpha \in \mathbb{N}^*$: $PGCD(a; b) = 2$ ومنه: قيم n حيث $PGCD(a; b) = 1$ هي: $n = 2\alpha + 1$ / $\alpha \in \mathbb{N}$ (3) **أ/ *** نبين أن العدد $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B $n \in \mathbb{N}$ ، $B = 11n^2 + 15n + 4$ و $A = 5n^2 + 7n + 2$ $B = (n+1)(11n+4) = b(n+1)$ ، $A = (n+1)(5n+2) = a(n+1)$ ومنه: $(n+1)$ يقسم كل من العددين A و B **ب/ *** استنتاج حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين A و B : $PGCD(A; B) = PGCD(a(n+1); b(n+1)) = (n+1)PGCD(a; b)$ ومنه نميز حالتين : **الحالة 1:** إذا كان $PGCD(a; b) = 2$ معناه $n = 2\alpha$ / $\alpha \in \mathbb{N}^*$ نجد : $PGCD(A; B) = (2\alpha+1)2 = 4\alpha+2$ **الحالة 2:** إذا كان $PGCD(a; b) = 1$ معناه $n = 2\alpha+1$ / $\alpha \in \mathbb{N}$ نجد : $PGCD(A; B) = (2\alpha+1+1)1 = 2\alpha+2$

(0.5) **1/ *** أثبت أن : $y \equiv 4[11]$ ، $11x - 5y = 2$ (E) $11x - 5y = 2$ يكافئ $5y = 11x + 2$ ومنه $5y \equiv -2[11]$ أي $5y \equiv 20[11]$ ومنه : $y \equiv 4[11]$ **ب/ *** استنتاج حلول المعادلة (E) : $y = 11k + 4$ معناه $y = 11k + 4$ نعوض قيمة y في المعادلة (E) نجد : $x = 5k + 2$ ومنه : $S = \{(11k + 4; 5k + 2) / k \in \mathbb{N}\}$ **2/ *** تعيين القيم الممكنة لـ $d = PGCD(a; b)$: $n \in \mathbb{N}^*$ ، $b = 11n + 4$ و $a = 5n + 2$ $11a - 5b = 11(5n+2) - 5(11n+4) = 55n + 22 - 55n - 20 = 2$ ومنه : $d \in D_2 = \{1; 2\}$ إذن : $d = 2$ **ب/ *** تعيين قيم العدد الطبيعي غير المعدوم n بحيث يكون : $PGCD(a; b) = 2$ لدينا : $PGCD(a; b) = 2$ معناه 2 يقسم a و 2 يقسم b معناه 2 يقسم $b - 2a$ أي 2 يقسم $11n + 4 - 2(5n + 2)$ وبالتالي 2 يقسم n ومنه $n = 2\alpha$ / $\alpha \in \mathbb{N}^*$: n عدد زوجي يكتب من الشكل :

التمرين الثاني: (05 نقاط)

	لدينا : $y' - 3y = 0$: (1)
0.5	(1) حل المعادلة التفاضلية : (1) - لدينا : $y' - 3y = 0$ يكافئ $y' = 3y$ حلول المعادلة هي الدوال $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = ce^{3x}$ حيث $c \in \mathbb{R}$
0.25	- تعيين الحل الخاص f الذي يحقق $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 1$ $f\left(-\frac{2}{3}\right) = 1$ يعني $ce^{\left(-\frac{2}{3}\right)} = 1$ ومنه $ce^{-2} = 1$ $\Leftrightarrow c = e^2$ ومنه $f(x) = e^2 \times e^{3x} = e^{3x+2}$
	(2) لدينا : $u_n = e^{3n+2}$
0.5 + 0.25 + 0.25	() تبين أن المتتالية (u_n) هندسية : - لدينا : $u_{n+1} = e^{3(n+1)+2} = e^{3n+3+2} = e^3 \times e^{3n+2} = e^3 \times u_n$ ومن المتتالية (u_n) هندسية أساسها $q = e^3$ وحدها الأول $u_0 = e^2$
0.25	- تقارب المتتالية (u_n) : (u_n) هندسية أساسها $q = e^3$ $\Leftrightarrow q > 1$ ومنه (u_n) متناعدة
	لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{3n+2} = +\infty$
0.5	() دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) : - لدينا : $u_{n+1} - u_n = e^{3n+5} - e^{3n+2} = (e^3 - 1)e^{3n+2}$ $\Leftrightarrow e^3 - 1 > 0 \gg u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما .
	(3) لدينا : $v_n = \ln(u_n)$
0.5	() تبين أن المتتالية (v_n) : $\mathbb{N}$ من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n > 0$ ومنه المتتالية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n. ولدينا : $v_n = \ln e^{3n+2} = 3n + 2$
0.25+0.5 0.25+	() تبين أن المتتالية (v_n) حسابية : - لدينا : $v_{n+1} - v_n = 3(n+1) + 2 - (3n + 2) = 3$ ومنه (v_n) حسابية أساسها $r = 3$ وحدها الأول $v_0 = 2$
0.5	() S_n : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = \frac{n}{2}(v_0 + v_{n-1}) = \frac{n}{2}(2 + 3(n-1) + 2)$ $\Leftrightarrow S_n = \frac{n}{2}(3n + 1)$
0.5	- $T_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$: $T_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1} = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_{n-1}} = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}}$ $T_n = e^{\frac{n}{2}(3n+1)}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

الاقتراح	الجواب	التبرير	التنقيط
1	الإجابة (ج) $y = 3x + 2$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} - 2}{e^{-x} - 1} = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (3x + 2)] = 0$	2×0.5
2	الإجابة (ب) $\lambda = \sqrt{e}$	$A(\lambda) = \int_1^\lambda x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) \right]_1^\lambda = \frac{\lambda^2}{2} \left(\ln \lambda - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4}$ $A(\lambda) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\lambda^2}{2} \left(\ln \lambda - \frac{1}{2} \right) = 0$ ومنه $\lambda = \sqrt{e}$ أو $\lambda = 0$ مرفوض لأن : $(\lambda > 1)$	2×0.5
3	الإجابة (ب) $S = \{1, 5\}$	$\log(11x^2 - 6x + 5) = \log x^2 + 1$ $\frac{\ln(11x^2 - 6x + 5)}{\ln 10} = \frac{\ln x^2}{\ln 10} + 1$ $x^2 - 6x + 5 = 0$ $x = 1, x = 5$	2×0.5
4	الإجابة (أ) متزايدة تماماً	$u_{n+1} - u_n = \left(2 - 3 \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right) - \left(2 - 3 \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) = -3 \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} + 3 \left(\frac{1}{4} \right)^n = \frac{9}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^n > 0$	2×0.5

التمرين الرابع: (07 نقاط)

$$f(x) = x - (x^2 + 1)e^{-x+1} \quad \text{لدينا : I.}$$

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{أ) حساب}$$

0.25

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -(x^2 + 1)e^{-x+1} = -\infty \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x - (x^2 + 1)e^{-x+1}] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{cases}$$

0.25

$$\bullet \quad \text{تبين أن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x - (x^2 + 1)e^{-x+1}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x^2 + 1}{e \times e^x} \right)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x^2}{e^x} \times \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \times \frac{1}{e^x} \right) = +\infty$$

0.5

$$\text{ب) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي } x : f'(x) = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$$

$$\bullet \quad \text{لدينا : } f'(x) = 1 - [2xe^{-x+1} + (x^2 + 1)(-e^{-x+1})] = 1 - (2x - x^2 - 1)e^{-x+1}$$

$$\text{وبالتالي : } f'(x) = 1 + (x^2 - 2x + 1)e^{-x+1} = 1 + (x-1)^2 e^{-x+1}$$

$$\text{ج) استنتاج اتجاه تغير الدالة } f :$$

0.25

x	$-\infty$	$+\infty$
$(x-1)^2 e^{-x+1}$		+
$f'(x)$		+

• جدول التغيرات :

0.5

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(2) تبيان أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$:

0.25

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - (x^2 + 1)e^{-x+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{-x+1} + e^{-x+1}) = 0$$

ولدينا :
ومن (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$

0.5

• دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) :

$$f(x) - x = x - (x^2 + 1)e^{-x+1} - x = -(x^2 + 1)e^{-x+1}$$

لدينا :
إذن $f(x) - x < 0$ ومنه (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) من أجل كل عدد حقيقي x

0.5

(3) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$:

• لدينا f مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[1.8; 1.9]$
ولدينا $f(1.8) = 1.8 - ((1.8)^2 + 1)e^{-1.8+1} = -0.11$
 $f(1.9) = 1.9 - ((1.9)^2 + 1)e^{-1.9+1} = 0.03$
وبالتالي $f(1.8) \times f(1.9) < 0$
حسب مبرهنة ال قيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.8 < \alpha < 1.9$.

0.5

(4) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$(T): y = x - 2 \quad \text{أي} \quad y = 1 \times (x-1) - 1 = x - 2$$

01

(5) تبيان أن $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$:

• لدينا : $f''(x) = 2(x-1)e^{-x+1} + (x-1)^2 \times (-e^{-x+1}) = (x-1)e^{-x+1}(2-x+1)$
أي $f''(x) = -(x-1)(x-3)e^{-x+1}$.

• استنتاج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف :

- جدول إشارة $f''(x)$:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
$f''(x)$		-	0	+	0	-

• المشتقة الثانية $f''(x)$ تنعدم من أجل القيمتين $x=1$ و $x=3$ مغيرة إشارتها إذن
النقطتين $A(1; f(1))$ و $B(3; f(3))$ نقطتي انعطاف للمنحني (C_f)

0.75	(6) حساب $f(3), f(0)$: $f(3) = 3 - 9e^{-2} = 1.65, f(0) = -e = -2.71$ الرسم :
0.5	(7) المناقشة البيانية لحلول المعادلة : $f(x) = x + m$ • هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذي المعادلة $y = x + m$ الموازي لكل من (T) و (Δ). • إذا كان $m \in]-\infty; -e[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا . • إذا كان $m = -e$ المعادلة تقبل حلا وحيدا معدوما . • إذا كان $m \in]-e; 0[$ المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا . • إذا كان $m \in [0; +\infty[$ المعادلة ليس لها حلا .
0.25	II. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx$ 1- أ) تبين أن الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x) = -(x+1)e^{-x+1}$ هي دالة أصلية للدالة g حيث $g(x) = xe^{-x+1}$ على المجموعة $\mathbb{R}$: • لدينا : $G'(x) = -[e^{-x+1} - (x+1)e^{-x+1}] = -(e^{-x+1} - xe^{-x+1} - e^{-x+1}) = xe^{-x+1} = g(x)$ ومنه G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.
0.25	ب) حساب I_1 : • لدينا : $I_1 = \int_0^1 xe^{-x+1} dx = [-(x+1)e^{-x+1}]_0^1 = -2e^0 + e = e - 2$
0.25	2- أ) تبين أن $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$ • لدينا : $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x+1} dx$ نضع : $u(x) = x^{n+1}$ ومنه $u'(x) = (n+1)x^n$ ونضع : $v'(x) = e^{-x+1}$ ومنه $v(x) = -e^{-x+1}$ وبالتالي : $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x+1} dx = [-x^{n+1} e^{-x+1}]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n (-e^{-x+1}) dx$ ومنه : $I_{n+1} = -1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x+1} dx = -1 + (n+1)I_n$
0.25	ب) حساب I_2 : $I_2 = -1 + (1+1)I_1 = -1 + 2(e-2) = 2e-5$
0.25	3- حساب المساحة للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادليهما $x=1, x=0$: $S = \int_0^1 [y - f(x)] dx = \int_0^1 x - x + (x^2 + 1)e^{-x+1} dx = \int_0^1 (x^2 + 1)e^{-x+1} dx$ أي $S = \int_0^1 x^2 e^{-x+1} dx + \int_0^1 e^{-x+1} dx = I_2 + [-e^{-x+1}]_0^1$ $S = (2e-5-1+e)us = (3e-6)cm^2 = 2.15cm^2$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

(1) أ) تبين أن : $p(A) = \frac{17}{300}$

(0.5).....
$$p(A) = \left(\frac{C_2^2}{C_6^2} \times \frac{C_4^3}{C_6^3} \right) + \left(\frac{C_1^1 C_2^1}{C_6^2} \times \frac{C_3^3 + C_3^3}{C_6^3} \right) + \left(\frac{C_3^1 C_1^1}{C_6^2} \times \frac{C_3^3}{C_6^3} \right) + \left(\frac{C_3^1 C_2^1}{C_6^2} \times \frac{C_3^3}{C_6^3} \right) = \frac{17}{300}$$

ب) حساب $p(B)$:

(0.5).....
$$p(B) = \left(\frac{C_3^2}{C_6^2} \times \frac{C_2^1 C_2^1 C_1^1}{C_6^3} \right) + \left(\frac{C_3^1 C_1^1}{C_6^2} \times \frac{C_3^1 C_2^1 C_1^1}{C_6^3} \right) + \left(\frac{C_3^1 C_2^1}{C_6^2} \times \frac{C_3^1 C_2^1 C_1^1}{C_6^3} \right) = \frac{13}{50}$$

(0.25)..... (2) أ) تحديد القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي : $\{1; 2; 3\}$

$P(X=2) = 1 - (P(X=1) + P(X=3))$; $P(X=3) = P(B)$; $P(X=1) = P(A)$

(1.5).....

X	1	2	3
$P(X)$	$\frac{17}{300}$	$\frac{205}{300}$	$\frac{78}{300}$

(0.5)..... ب) الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X هو : $E(X) = \frac{661}{300}$

(1) حساب احتمال سحب ثلاث كرات من نفس اللون من U_2 علما أن الكرتين المسحوبتين من U_1 من نفس اللون نسبي C : "سحب كرتين من U_1 من نفس اللون " ، D : "سحب ثلاث كرات من نفس اللون من U_2 "

(0.75).....
$$P_c(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{\frac{C_2^2}{C_6^2} \times \frac{C_4^3}{C_6^3}}{\frac{C_3^2 + C_2^2}{C_6^2}} = \frac{1}{20}$$

التمرين الثاني : (04 نقاط) (خاص بالتقني رياضي)

(0.5)	13 : 1 $(E): 5x - 6y = 3$ 50 : 1 (أ) اثبات أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E) فإن x مضاعف للعدد 3 • لدينا : $5x - 6y = 3$ تكافئ $5x = 3 + 6y$ - أي $5x = 3(1 + 2y)$ • لدينا : $5x : 3$ و $3 \wedge 5 = 1$ فإن $3 / x$ حسب مبرهنة غوص أي x مضاعف للعدد 3
0.5	ب) تعيين حل خاص للمعادلة (E) : • نفرض $x = 3$ وبالتالي : $y = \frac{5 \times 3 - 3}{6} = \frac{12}{6} = 2$ أي الثنائية $(3; 2)$ حل للمعادلة (E)

(0.75)	• حل المعادلة (E): لدينا : $5x - 5 \times 3 = 6y - 6 \times 2$ يكافئ $5x - 6y = 5 \times 3 - 6 \times 2$ أي $5(x - 3) = 6(y - 2)$ (*) • لدينا : $6 / 5(x - 3) = 1$ و $6 / (x - 3) = 6$ حسب مبرهنة غوص . • أي $x - 3 = 6k (k \in \mathbb{Z})$ وبالتالي $x = 6k + 3 (k \in \mathbb{Z})$ • من أجل $x = 6k + 3$ نعوض في المعادلة (*) نجد : $5(6k + 3 - 3) = 6(y - 2)$ ومنه $y - 2 = 5k (k \in \mathbb{Z})$ أي $y = 5k + 2 (k \in \mathbb{Z})$ - مجموعة حلول المعادلة : $S = \{(6k + 3; 5k + 2), k \in \mathbb{Z}\}$
0.75	ج استنتاج حلول الجملة : $(S): \begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$ • $\begin{cases} x \equiv -1[6] \\ x \equiv -4[5] \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x = 6m - 1 \\ x = 5n - 4 \end{cases}$ أي $6m - 1 = 5n - 4$ ومنه $5n - 6m = 3$ ومنه : $n = 6k + 3$ وبالتالي $x = 5(6k + 3) - 4 = 30k + 11 (k \in \mathbb{Z})$
0.75	2- لدينا : $a = \overline{1\alpha 0\alpha 00}^3$ و $b = \overline{\alpha\beta 0\alpha}^5$ • تعيين $(\alpha; \beta)$ بحيث تكون $(a; b)$ حل للمعادلة (E): لدينا : $a = 1 \times 3^5 + \alpha \times 3^4 + \alpha \times 3^2 = 243 + 81\alpha + 9\alpha = 243 + 90\alpha$ ولدينا : $b = \alpha \times 5^3 + \beta \times 5^2 + \alpha \times 5^0 = 125\alpha + 25\beta + \alpha = 126\alpha + 25\beta$ مع $\alpha \leq 2$ و $\beta \leq 4$ • الثانية $(a; b)$ حل للمعادلة (E) معناه $5a - 6b = 3$ ومنه $5(243 + 90\alpha) - 6(126\alpha + 25\beta) = 3$ أي $-306\alpha - 150\beta = -1212$ ومنه $1215 + 450\alpha - 756\alpha - 150\beta = 3$ بعد تقسيم الطرفين على العدد 3- نجد : $102\alpha + 50\beta = 404$ وبالتالي $(\alpha; \beta) = (2; 4)$ حل للمعادلة

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(0.75).....	نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$ و $u_0 = 2$ 1- حساب الحدود u_1, u_2, u_3 : $u_1 = \frac{7}{3}, u_2 = \frac{26}{9}, u_3 = \frac{97}{27}$
(0.25).....	• تخمين حول اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) : متتالية متزايدة 2- أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n \leq n + 3$ لتكن فرضية التراجع $P(n): u_n \leq n + 3$ * المرحلة 1: الخاصية $P(0): u_0 \leq 3$ أي $u_0 = 2$ لأن $n = 0$ صحيحة من أجل $n = 0$ * المرحلة 2: نفرض صحة الخاصية $P(n)$ من أجل عدد طبيعي n حيث $n \geq 0$ أي $u_n \leq n + 3$ و نبرهن صحتها من أجل $n + 1$ أي $u_{n+1} \leq n + 1 + 3$ أي $u_{n+1} \leq n + 4$ لدينا $u_n \leq n + 3$ ومنه $\frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq \frac{2}{3}(n + 3) + \frac{1}{3}n + 1 = \frac{2}{3}n + 2 + \frac{1}{3}n + 1 = n + 3$ وبالتالي $u_{n+1} \leq n + 3$ ولدينا $n + 3 \leq n + 4$ ومنه $u_{n+1} \leq n + 4$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$. * الخلاصة: نستنتج، حسب مبدأ البرهان بالتراجع، أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n. إذن $u_n \leq n + 3$
(0.5).....	

ب- دراسة اتجاه تغيرات المتتالية (u_n) :

$$(0.5) \dots \dots \dots u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$$

$$-\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \geq 0 \text{ و بالتالي } u_{n+1} - u_n \geq 0 \text{ و منه متزايدة}$$

ج- استنتاج أن (u_n) محدودة من الأسفل. هل يمكن القول أن (u_n) متقاربة:

$$(0.25) \dots \dots \dots \text{لدينا } (u_n) \text{ متزايدة معناه } u_n \geq u_0 \text{ أي } u_n \geq 2 \text{ نستنتج أن } (u_n) \text{ محدودة من الأسفل بالعدد } 2.$$

لا يمكن القول أن (u_n) متقاربة: لأنها متزايدة و ليست محدودة من الأعلى

3- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $v_n = u_n - n$.

أ- برهن أن المتتالية (v_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها:

$$(0.5) \dots \dots \dots (v_n) \text{ هي متتالية هندسية معناه } v_{n+1} = v_n \times q$$

$$\text{لدينا } v_n = u_n - n \text{ و منه } v_{n+1} = u_{n+1} - n - 1 \text{ و بالتالي } v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1$$

$$\text{أي } v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n = \frac{2}{3}(u_n - n) \text{ و منه } v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n \text{ و بالتالي:}$$

$$(v_n) \text{ هي متتالية هندسية أساسها } q = \frac{2}{3} \text{ و حدها الأول } v_0 = u_0 - 0 = 2$$

ب- التعبير عن v_n ثم u_n بدلالة n ثم حساب نهاية (u_n) عند $+\infty$

$$(0.5) \dots \dots \dots \lim u_n = +\infty : u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n \text{ و منه } u_n = v_n + n, v_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ أي } v_n = v_0 \times q^n$$

ج- حساب بدلالة n المجموع $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$S_n = (v_0 + 1) + (v_1 + 1) + \dots + (v_n + n) = v_0 + v_1 + \dots + v_n + 1 + 2 + \dots + n$$

$$(0.5) \dots \dots \dots = 2 \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} + n(n+1) = 6\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + n(n+1)$$

4- لتكن المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة $t_n = \ln(v_n)$

أ- البرهان أن المتتالية (t_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول: (t_n) حسابية معناه $t_{n+1} = t_n + r$

$$\text{لدينا } t_n = \ln(v_n) \text{ و منه } t_{n+1} = \ln(v_{n+1}) \text{ أي } t_{n+1} = \ln\left(\frac{2}{3}v_n\right) = \ln(v_n) + \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$(0.5) \dots \dots \dots \text{لأن } v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n \text{ و منه } t_{n+1} = t_n + \ln\left(\frac{2}{3}\right) \text{ و منه } (t_n) \text{ حسابية أساسها } r = \ln\left(\frac{2}{3}\right) \text{ و وحدها}$$

$$\text{الأول } t_0 = \ln(v_0) = \ln(2)$$

ب- حساب بدلالة n المجموع $A_n = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n$

$$(0.5) \dots \dots \dots A_n = \frac{n+1}{2}(\ln(2) + \ln(2) + n \ln\left(\frac{2}{3}\right)) = \frac{n+1}{2}(2\ln(2) + n \ln\left(\frac{2}{3}\right))$$

• استنتاج بدلالة n الجداء $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

$$(0.25) \dots \dots \dots P_n = e^{S_n} \text{ و منه } v_n = e^{t_n} : \text{ لأن } P_n = e^{t_0} \times e^{t_1} \times e^{t_2} \times \dots \times e^{t_n} = e^{t_0 + t_1 + \dots + t_n}$$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

التنقيط	التبرير	الجواب	الاقتراح
2×0.5	$y' = -e^{-x} + 2x + c_1 \Rightarrow y'(0) = -1 + c_1 = 1; c_1 = 2$ $y = -e^{-x} + 2x + c_2 \Rightarrow y(0) = -1 + c_2 = 1; c_2 = 2$ $y = -e^{-x} + x^2 + 2x + 2$	الإجابة (أ) $y = -e^{-x} + x^2 + 2x + 2$	1
2×0.5	$\frac{A_1^1 \cdot A_6^1}{A_7^2} = \frac{6}{42} = \frac{1}{7}$	الإجابة (ب) $\frac{1}{7}$	2
2×0.5	$m = \frac{1}{2} \int_0^2 3x^2 - \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{2} [x^3 - \ln(x+1)]_0^2$ $m = \frac{8}{2} - \frac{\ln(3)}{2} = 4 - \ln \sqrt{3}$	الإجابة (أ) $m = 4 - \ln \sqrt{3}$	3
2×0.5	$u_n = \left[x + \frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = 1 + \frac{1}{n+1}$ $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{n+2} - 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$	الإجابة (أ) متناقصة تماما	4

التمرين الرابع : (07 نقاط)

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$

1- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$

(0.5)..... $g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ و $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln(x)$

(0.5)..... استنتاج اتجاه تغير الدالة g مما سبق نجد أن $g'(x) \geq 0$ و منه الدالة g متزايدة على $]0, +\infty[$.

2- دراسة إشارة $g(x)$ بما أن $g(1) = 0$ و الدالة g متزايدة على $]0, +\infty[$ نتلخص الإشارة في الجدول الموالي

(0.5).....

x	0	1	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	—	0	+

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$. وليكن (C) منحناها البياني في المستوي السابق .

1- اثبات أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ نضع $t = \sqrt{x}$ و منه $\lim_{t \rightarrow +\infty} t = +\infty$ و منه

(0.5)..... $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(t)}{t} \right] = 0$ (التزايد المقارن) . $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(x)]^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(t^2)]^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{2\ln(t)}{t} \right]^2 = 0$

(0.5)..... حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 + \frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x} \right] = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 + \frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x} \right] = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x} \right] = 0$$

التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ ؛ لدينا

(0.5).....
$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + x - \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 - 2 = x + \frac{1}{x} - (-\ln x)^2 - 2 = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2 = f(x)$$

حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ؛ ومنه المنحني (C_f) يقبل مستقيماً مقارب عمودياً معادلته $x = 0$.

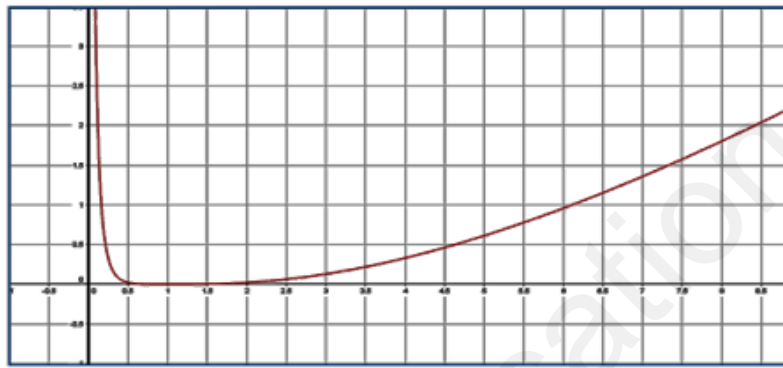
(0.75).....

2- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ؛ بالحساب $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$ ومنه

(0.5).....
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x}(\ln x) = \frac{x^2 - 1 - 2x \ln x}{x^2} = \frac{x - \frac{1}{x} - 2 \ln x}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$



3- رسم المنحني (C) : (0.5).....

4- بين أن الدالة $h : x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x)$ على $]0, +\infty[$

(0.5).....
$$h'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$$

باستعمال التكامل بالتجزئة

(0.75)..... تبين أن $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$ بوضع $u'(x) = 1$ و $v(x) = (\ln x)^2$ ومنه $u(x) = x$ و $v'(x) = \frac{2}{x}(\ln x)$

و منه $u'(x) = 1$ و $\int_1^e u'(x)v(x)dx = \left[x (\ln(x))^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln(x) dx = e - 2 \left[x \ln x - x \right]_1^e = e - 2$

5- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = e$

$$\int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left[x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2 \right] dx$$
 ومنه
$$\int_1^e f(x) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 + \ln(x) - 2x \right]_1^e - e + 2$$

(0.5).....
$$\int_1^e f(x) dx = \frac{e^2}{2} + 1 - 2e + \frac{3}{2} - e + 2 = \left(\frac{e^2}{2} - 3e + \frac{9}{2} \right) u.a$$

انتهى الموضوع الثاني

امتحان البكالوريا التجريبي في مادة الرياضيات
على الطالب أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول:

التمرين الأول:

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بـ : $U_0 = \frac{1}{4}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{3U_n+2}{U_n+4}$

(1) عين العددين الحقيقيين a و b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = a + \frac{b}{U_n+4}$

(2) أ) باستعمال البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < U_n < 1$

ب) برهن أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ج) هل المتتالية (U_n) متقاربة ؟

(3) لتكن المتتالية (V_n) المعرفة كما يلي : $V_n = \frac{U_n+2}{1-U_n}$ من أجل كل عدد طبيعي n .

أ) بين أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) اكتب V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n .

ج) احسب المجموع : $S_n = \frac{1}{V_0} + \frac{5}{V_1} + \frac{5^2}{V_2} + \dots + \frac{5^n}{V_n}$

التمرين الثاني:

يحتوي وعاء على n كرة بيضاء، 5 كرات حمراء و 3 خضراء، نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد.

(1) ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين ؟

(2) نرمز بـ $P(n)$ إلى احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون .

أ) أثبت أن : $P(n) = \frac{n^2 - n + 26}{(n+7)(n+8)}$

ب) أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n)$ ثم فسّر النتيجة .

(3) نضع $n = 4$ يقوم لاعب بسحب كرتين من الوعاء في آن واحد ثم يرجعهما و يسحب كرتين أخريين. لإجراء هذين السحبين يدفع اللاعب مبلغا قدره 30 ديناراً و بعد كل سحب يتحصل على 40 دينار إذا كانت الكرتان من نفس اللون، وإلا يتحصل على 5 دنانير فقط.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبين ربح هذا اللاعب .

أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

ج) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

التمرين الثالث:

بين صحة أو خطأ كل من الجمل التالية مع التعليل:

1. الدالة $x \mapsto e^{-2x}$ هي حل المعادلة التفاضلية $y' = 2y$.

2. $\ln(3e^\pi) = \pi + \ln 3$.

3. المتراجحة $e^{1-2x} > e^{x+1}$ لا تقبل حلول في $\mathbb{R}$.

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(e^x + 4) = 2 \ln 2$.

التمرين الرابع:

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1, +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) أحسب $g(0)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1, +\infty[$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]-1, +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$, (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب النهايات عند حدود مجال التعريف.

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-1, +\infty[$ يكون: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

ج) استنتج أنه إذا كان $x \in [0, 4]$ فإن $f(x) \in [0, 4]$.

د) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) ثم أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

(3) أرسم كلا من المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) .

(4) أحسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = 1$.

(III) (U_n) متتالية معرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بما يلي: $U_0 = 4$ و $U_{n+1} = f(U_n)$ من أجل كل عدد طبيعي n .

(1) باستعمال المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) مثل على حامل محور الفواصل كل من U_0, U_1, U_2, U_3 .

(2) استنتج اتجاه تغير المتتالية (U_n) ثم استنتج أنها متقاربة

الصفحة 2 من 4

الموضوع الثاني:

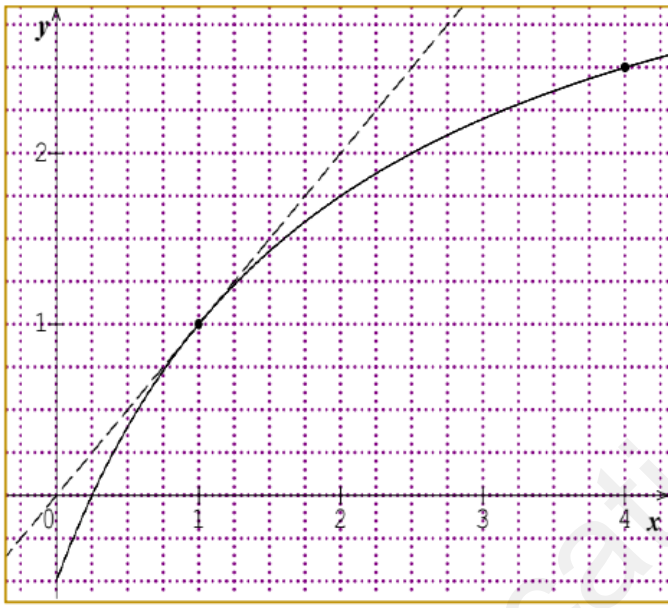
التمرين الأول:

يحتوي كيس على 12 كرة منها 3 بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 3 و أربعة حمراء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 2 ، 2 و خمس خضراء تحمل الأرقام: 1 ، 2 ، 2 ، 2 ، 3 .
نسحب في آن واحد كرتين من هذا الكيس .

(1) نعتبر الحادثتين : A : " سحب كرتين من نفس اللون " و B : " سحب كرة خضراء على الأقل " .
(أ) أحسب احتمال الحوادث التالية : A ، B و $A \cap B$.
(ب) هل الحادثتين A و B مستقلتان ؟ .

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما .
عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

التمرين الثاني:



f معرفة على $[0; 4]$ كما يلي: $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$ و (C)

تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس، أنظر الشكل.

1. أستنتج اتجاه تغير f ، وتحقق أن المنصف الأول يمس المنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

2. نعرف المتتالية (u_n) بـ :
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(n), n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ- أنقر الشكل ومثل على محور الفواصل الحدود: u_0, u_1, u_2 و u_3 للمتتالية (u_n) (دون حسابها موضحا خطوط الانشاء .)

ب- أعط تخميناً فيما يخص اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، وتخيّن حول تقاربها .

3. أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 1 < u_n \leq 4$

ب- أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة ، واستنتج أنها متقاربة .

4. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

أ- أثبت أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها ، وأحسب حدها الأول .

ب- أكتب بدلالة n عبارة v_n ، واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

ت- أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

ث- أثبت أن من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \frac{n+1}{6}(8+n)$

الصفحة 3 من 4

التمرين الثالث:

اختر الإجابة الصحيحة مع التبرير في كل مما يلي:

الجواب - أ -	الجواب - ب -	الجواب - ج -
حلل المعادلة التفاضلية $2y' + y - 3 = 0$ هي	$y = ce^{\frac{-x}{2}} + 2$	$y = ce^{\frac{-x}{2}} + 3$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+e) - 1}{x}$	e^{-1}	$2e$
حلل المتراجحة $\ln(-2x+1) < 3$ هي	$S =]-\infty; \frac{1}{2}[$	$S =]-\infty; \frac{1-e^3}{2}[$
إذا كان $f(x) = \ln(e^{2x} + 1)$ فإن (C_f) يقبل	مقارب عمودي معادلته $x = -1$	مقارب أفقي معادلته $y = -1$ عند $-\infty$
مقارب مائل معادلته $y = 2x$ عند $+\infty$		

التمرين الرابع:

(I) دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = e^{x-2} + 1 - x$

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

(2) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = x - 1 + \frac{x}{e^{x-2}}$

(C_f) المنحنى الممثل لها في مستو مزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 1 cm).

(1) أ) احسب النهايات عند حدود مجال التعريف.

ب) اثبت أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ج) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (d) .

(2) اثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{e^{x-2}}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(3) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها α حيث $0,1 < \alpha < 0,2$

ب) اثبت أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثياتها.

ج) عين معادلة المماس (T) الذي يوازي المستقيم (d) .

(4) ارسم (d) , (T) و (C_f) .

(5) ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $\frac{x}{e^{x-2}} = m + 1$

(6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$ حيث : $h(x) = xe^{2-x}$ والتي تنعدم عند $x = -1$.

ب) احسب A مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (d) والمستقيمين $x = 0$ و $x = 2$.

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين فقط

الموضوع الأول

التمرين الأول: (5نقاط) عين الاقتراح الصحيح في كل حالة من الحالات الآتية مع التعليل :

1) العدد $\ln[(2 - \sqrt{3})^{2022}] + \ln[(2 + \sqrt{3})^{2022}]$ يساوي :

أ - 0 (ب) 20 22 (ج) 1

2) f دالة معرفة على مجال مفتوح يشمل 2، إذا كان منحنى f يقبل مماسا معادلته $y=2$ قان :

أ - $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 1$ ب - $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = 0$ ج - $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = +\infty$

3) حلول المعادلة التفاضلية : $y' - 1 = \sqrt{2}y$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ ب :

أ) $f(x) = Ce^{\sqrt{2}x} + \frac{\sqrt{2}}{2}$ (ب) $f(x) = Ce^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} - 1$ (ج) $f(x) = Ce^{\sqrt{2}x} + 1$

4) الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = |x-1|(x+1)$ ، غير قابلة للاشتقاق عند 1 لان نهاية النسبة $\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$:

أ) عند 1 هي $+\infty$ (ب) عند 1 من يمين 1 ، لا تساوي النهاية عند 1 من يسار (ج) عند 1 هي $-\infty$

5) عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بحيث تضم كل لجنة رئيسا و نائبا له ينتخبون من بين خمسة رجال و ثلاث نساء هو : (أ) 56 (ب) 28 (ج) 64

التمرين الثاني: (4نقاط)

نعتبر D_1 ; D_2 زهرتي نرد ذات ستة أوجه حيث :

▪ وجوه النرد D_1 متساوية الاحتمال ، أربعة منها تحمل الرقم 1 و اثنان منها تحمل الرقم 2 .

▪ وجوه النرد D_2 مرقمة من 1 الى 6 حيث أن احتمال ظهور الوجه الذي يحمل الرقم k هو $\frac{k}{21}$.

1- أ- إذا رمينا النرد D_1 مرة واحدة فما هو احتمال ظهور الرقم 2 ؟.

ب- إذا رمينا النرد D_2 مرة واحدة فما هو احتمال ظهور الرقم 6 ؟.

2- إذا رمينا النردين D_1 ; D_2 معا فما هو احتمال ظهور الرقم 1 :

أ -مرة واحدة بالضبط (ب) مرتين

3- نرمي النردين معا و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمية عدد المرات الذي يظهر فيها الرقم 2

أ عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X

ب -حسب الأمل الرياضي لهذا المتغير العشوائي

التمرين الثالث: (4 نقاط)

- $u_n = \int_n^{n+1} e^{2-x} dx$: المتتالية العددية المعرفة على IN كما يلي
- 1 جـيـن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = e^{2-n} - e^{1-n}$
 - 2 أحسب u_0 ثم برهن بمبدأ الاستدلال بالتراجع . انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$
 - 3 برهن ان المتتالية (u_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول
 - 4 - أحسب بدلالة n الفرق $u_{n+1} - u_n$. ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)
 - ب - استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
 - 5 تضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$
 - أحسب بدلالة n المجموع S_n , ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

التمرين الرابع : (7 نقاط)

- الجزء I : f دالة معرفة على IR بـ : $f(x) = \frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المزود بمعلم
- متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث الوحدة $2cm$ على محور الفواصل و $5cm$ على محور الترتيب
- 1 أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ ثم فسر النتيجة هندسيا
 - 2 (أ) بين انه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = \frac{x + \ln(1+e^{-x})}{e^x}$
 - ب) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ ثم فسر النتيجة بيانيا
 - 3 - نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1; -\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$
 - أ - أدرس تغيرات الدالة g على المجال $[0; +\infty[$
 - ب أحسب $g(0)$ ، ثم إشارة $g(x)$ من أجل x موجب تماما
 - 4 (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(e^x)}{e^x}$
 - ب - استنتج أن الدالة f متناقصة تماما على مجموعة تعريفها ، ثم شكل جدول تغيراتها
 - ج- مثل بيانيا (C_f)
- الجزء II : نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$
- 1 جـيـن أنه من أجل كل عدد حقيقي t : $\frac{1}{1+e^t} = 1 - \frac{e^t}{1+e^t}$
 - 2 باستعمال التكامل بالتجزئة بين أن $F(x) = -\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) - f(x) + 2\ln 2$
 - 3 استنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $x = 0, x = \ln 4, y = 0$

الموضوع الثاني

التمرين الأول (04ن)

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التعليل:

السؤال:	(الإجابة أ)	(الإجابة ب)	(الإجابة ج)
(1) حلول المعادلة التفاضلية $y' - 2y = 1$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:	$x \mapsto ce^{-2x} + \frac{1}{2}$ مع $c \in \mathbb{R}$	$x \mapsto ce^{2x} - \frac{1}{2}$ مع $c \in \mathbb{R}$	$x \mapsto ce^{\frac{1}{2}x} - 2$ مع $c \in \mathbb{R}$
(2) القيمة المتوسطة m للدالة f المعرفة على المجال $[2; 3]$ بالعلاقة $f(x) = e^{2x+3} - x$ تساوي:	$m = \frac{1}{2}(e^9 - e^7 - 5)$	$m = e^2 - \frac{5}{2}$	$m = \frac{1}{2}(e^2 - 5)$
(3) من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n > 2$ يكون:	$\frac{1}{2}(n-1)^2$	$(n-1)^2$	$n^2 - 2n$
(4) عبارة الحد العام U_n للمتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = \int_0^n 2^x \ln 2 dx$ هي:	2^n	$2^n + 1$	$2^n - 1$

التمرين الثاني (05ن)

I المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدّها الأول $u_0 = 6$ و من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}$

1 أ. في المستوي الهندسي إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، مثلّ المستقيم (Δ) و (D) إذا علمت

$$\text{أن : } (\Delta): y = x \text{ و } (D): y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$$

ب. مثلّ و دون حساب على حامل محور الفواصل الحدود: u_0, u_1, u_2 و u_3 .

2 برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n : $u_n > -\frac{2}{3}$

3 بيّن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

II المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام V_n : حيث من أجل كل n من $\mathbb{N}$ $v_n = u_n + \alpha$ ، α عدد حقيقي.

1 عيّن قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ ، ثمّ أحسب حدّها الأول.

2 نضع $\alpha = \frac{2}{3}$: أكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n . استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثمّ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثالث (04ن)

نعتبر صندوقين أحدهما U يحتوي على 3 كرات خضراء و 4 كرات حمراء و الآخر U' يحتوي على كرتين خضراوين

و 5 كرات حمراء، كل الكرات لا نميز بينها باللمس، نرمز للكرات الخضراء بالرمز V و للكرات الحمراء بالرمز R .

- I - نسحب عشوائيا من الصندوق U ثلاث كرات في آن واحد. أحسب احتمال كلٍّ من الحوادث A ، B و C التالية:
- ◀ A : "الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون".
- ◀ B : "الحصول على كرة خضراء واحدة بالضبط".
- ◀ C : "الحصول على كرة حمراء على الأقل".

II - نختار بطريقة عشوائية صندوقا من بين الصندوقين و نسحب منه كرة واحدة عشوائيا:

(1) أنجز شجرة الاحتمالات الموافقة لهذه التجربة العشوائية.

(2) بيّن أنّ احتمال الحصول على كرة خضراء هو: $P(V) = \frac{5}{14}$

(3) إذا كانت الكرة المسحوبة خضراء فما احتمال أن تكون من الصندوق U ؟.

التمرين الرابع (07ن)

يُنسب المستوي إلى المعلم المتعامد $(o; \vec{i}; \vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 1\text{ cm}$ و $\|\vec{j}\| = 4\text{ cm}$

I - الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعلاقة: $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

(1) أدرس تغيرات الدالة g على المجال $]0; +\infty[$ (يطلب منك حساب النهايات)، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يُحقّق: $1,8 < \alpha < 2$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $]0; +\infty[$.

II - الدالة العددية f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ و (C_f) هو تمثيلها البياني في المعلم السابق.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسيا.

(2) أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) بيّن أنّ: $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد الحقيقي $f(\alpha)$ سعته 10^{-2} .

(4) عيّن إحداثيّتي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل، ثم أنشئ المنحنى (C_g) .

III - الدالة العددية G معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعلاقة: $G(x) = \frac{5}{9}x^3 + x - \frac{2}{3}x^3 \ln x$

(1) بيّن أنّ الدالة G هي دالة أصلية للدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

(2) أحسب بدلالة α العدد A_α مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_g) و حامل محور الفواصل و

المستقيمان اللذان معادلاتهما $x = \alpha$ و $x = 1$. حيث (C_g) هو المنحنى البياني الممثل للدالة g في المعلم السابق.

التمرين الثاني (4 نقاط)

(1) أ- احتمال ظهور الرقم 2 هو $\frac{1}{6}$ أي $\frac{1}{3}$ (0,5)

ب- اذا رمينا النرد D_2 مرة واحدة احتمال ظهور الرقم 6 هو $\frac{6}{21}$ أي $\frac{2}{7}$ (0,5)

(2) أ- احتمال ظهور الرقم 1 مرة واحدة بالضبط اي في D_1 فقط او في D_2 فقط $\frac{82}{126} = \frac{1}{21} \times \frac{2}{6} + \left(1 - \frac{1}{21}\right) \times \frac{4}{6}$

(0,5)

ب- مرتين في D_1 و D_2 معا $\frac{4}{6} \times \frac{1}{21} = \frac{4}{126}$ (0,5)

(3) قيم X هي 2,1,0 (0,25)

قانون احتمال المتغير العشوائي هو :

$X=x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$			

0,25

0,25 $P(X=0) = \frac{4}{6} \left(1 - \frac{2}{21}\right) = \frac{4 \times 19}{126} = \frac{76}{126}$

0,25 $P(X=1) = \frac{2}{6} \times \left(1 - \frac{2}{21}\right) + \frac{2}{21} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{6} \times \frac{19}{21} + \frac{8}{126} = \frac{38+8}{126} = \frac{46}{126}$

0,25 $P(X=2) = \frac{2}{6} \times \frac{2}{21} = \frac{4}{126}$

0,75 $E(X) = 0 \times \frac{76}{126} + 1 \times \left(\frac{46}{126}\right) + 2 \left(\frac{4}{126}\right) = \frac{54}{126} = \frac{3}{7}$

التمرين الثالث (4 نقاط)

1 - نبين أن $u_n = e^{2-n} - e^{1-n}$

0,5 $u_n = \int_n^{n+1} e^{2-x} dx = -[e^{2-x}]_n^{n+1} = -[e^{1-n} - e^{2-n}] = e^{2-n} - e^{1-n}$

2 - حساب u_0 ثم البرهان بالتراجع ان $u_n > 0$

نضع $P(n): u_n > 0$

حساب $u_0 = e^2 - e$: ... (0,25)

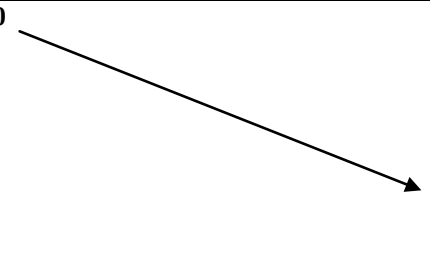
المرحلة 01 : من اجل $n=0$ نجد $u_0 = e^2 - e$ و عليه $P(0)$ محققة

المرحلة 02 : من اجل كل عدد طبيعي n نفرض صحة $P(n)$ ونفرض صحة $P(n+1)$ ، ، (0,75)

- 3 - اثبات أن (u_n) متتالية هندسية
لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{e} u_n$ ومنه (u_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{e}$ و حدها الأول $u_0 = e^2 - e$ (0,5)
- 4 - أ- تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n)
من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = -(e-1)^2 e^{-n}$ ،
نلاحظ $u_{n+1} - u_n < 0$ وعليه المتتالية (u_n) متناقصة (0,5)
ب- الاستنتاج أن المتتالية متقاربة
بما أن (u_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل بالعدد 0 فهي متقاربة $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ (0,5)
- 5 - حساب S_n :
 $S_n = e^2 (1 - \frac{1}{e^{n+1}})$ (0,5)
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e^2$ (0,5)
التمرين الرابع (7 نقاط)
الجزء I

- 1 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ (0,5)
التفسير الهندسي : (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=1$ بجوار $-\infty$ (0,25)
- 2 - أ- لدينا من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = \frac{1}{e^x} \ln[e^x(e^{-x} + 1)] = \frac{x + \ln(1+e^{-x})}{e^x}$ (0,25)
ب- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (0,5)
التفسير الهندسي : (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=0$ بجوار $+\infty$ (0,25)
- 3 - أ- دراسة تغيرات الدالة g
النهايات $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ (0,25)
من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$ ولدينا $g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{(1+x)^2}$ ،
نلاحظ أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$ ، $g'(x) < 0$ (0,5)
ب- جدول التغيرات : لدينا $g(0)=0$

	0	$+\infty$
x		
$g'(x)$		
g	0	



- من جدول التغيرات نستنتج أنه من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $g(x) < 0$ (0,5)
- 4 - أ- حساب $f'(x)$
 f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا : $f'(x) = \frac{1}{e^x} (-\ln(1+e^x) + \frac{e^x}{1+e^x})$ أي $f'(x) = \frac{g(e^x)}{e^x}$ (0,5)
ومنه الدالة f اشارتها من إشارة g أي الدالة f متناقصة تماما على مجموعة تعريفها (0,25)

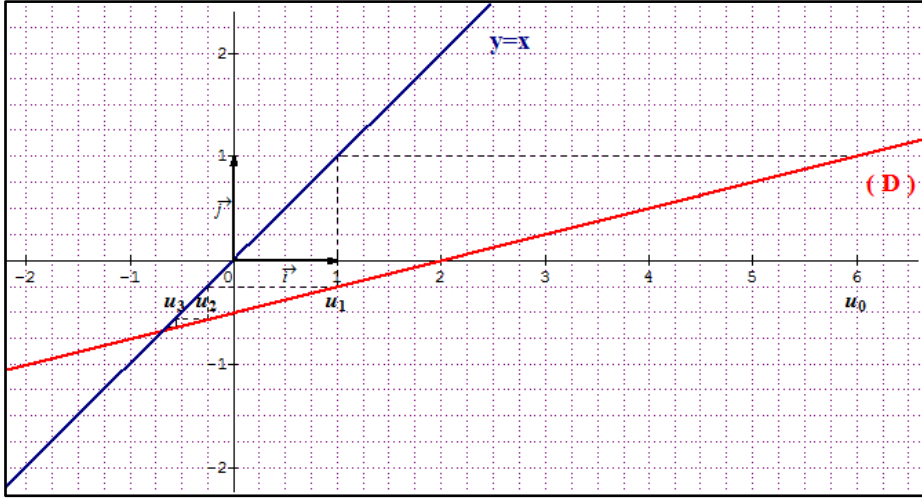
جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		
f	1	

ج- انشاء (C_f) (1)

التقريب:	التصحيح النموذجي المختصر لامتحان البكالوريا التجريبية دورة ماي 2022:
	حل التمرين الأول: (04 نقاط) ■ إختيار الإجابة الصحيحة مع التعليل: (1) الإجابة ب) 0,25 التعليل: المعادلة التفاضلية $y' - 2y = 1$ تكافئ $y' = 2y + 1$ و هي من الشكل $y' = ay + b$ حيث $a = 2$ و $b = 1$ و عليه فإن حلول المعادلة التفاضلية $y' - 2y = 1$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $x \mapsto ce^{2x} - \frac{1}{2}$ مع $c \in \mathbb{R}$ بالتعويض نجد $x \mapsto ce^{2x} - \frac{1}{2}$ مع $c \in \mathbb{R}$ (2) الإجابة أ) 0,25 التعليل: لدينا القيمة المتوسطة m للدالة f المعرفة على المجال $[2; 3]$ بالعلاقة $f(x) = e^{2x+3} - x$ هي: $m = \int_a^b f(x) dx$ بالتعويض نجد: $m = \int_2^3 f(x) dx = \int_2^3 (e^{2x+3} - x) dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x+3} - \frac{1}{2} x^2 \right]_2^3 = \frac{1}{2} (e^9 - e^7 - 5)$ (3) الإجابة ب) 0,25 التعليل: لدينا من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n > 2$ يكون: $C_{n-1}^2 + C_n^2 = \frac{(n-1)!}{2! \times (n-1-2)!} + \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = \frac{(n-1)!}{2 \times (n-3)!} + \frac{n!}{2 \times (n-2)!}$ يكافئ $C_{n-1}^2 + C_n^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-1)(2n-2)}{2} = (n-1)^2$ (4) الإجابة ج) 0,25 التعليل: لدينا من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n = \int_0^n 2^x \ln 2 dx = \int_0^n \ln 2 e^{x \ln 2} dx = \left[e^{x \ln 2} \right]_0^n = 2^n - 1$

حل التمرين الثاني: (05 نقاط)



(1) تمثيل المستقيمان و الحدود:

0,25

0,75

(2) الیهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -\frac{2}{3}$ $p(n)$

أ - مرحلة التحقق: نتحقق من صحة الخاصية p من أجل $n_0 = 0$

لدينا $u_0 = 6$ و بما أن $6 > -\frac{2}{3}$ معناه $u_0 > -\frac{2}{3}$ ما يعني أن الخاصية p صحيحة من أجل $n_0 = 0$.

0,25

ب - مرحلة الوراثة: نفرض أن الخاصية p صحيحة من أجل عدد طبيعي كفي n معناه $u_n > -\frac{2}{3}$

0,25

و نبرهن صحة الخاصية p من أجل $(n+1)$ أي البرهان أن $u_{n+1} > -\frac{2}{3}$

الصفحة 2

لدينا $u_n > -\frac{2}{3}$ يكافئ $\frac{1}{4}u_n > -\frac{1}{6}$ يكافئ $u_{n+1} > -\frac{4}{6}$ يكافئ $u_{n+1} > -\frac{2}{3}$ ما يعني أن الخاصية p صحيحة من أجل $(n+1)$.

0,25

■ الإستنتاج: نستنتج حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $u_n > -\frac{2}{3}$

0,25

(3) لريّن أن المتتالية (u_n) متناقصة نهاما:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2} - u_n = -\frac{3}{4}u_n - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}\left(u_n + \frac{2}{3}\right)$

0,25

و لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > -\frac{2}{3}$ يكافئ $u_n + \frac{2}{3} > 0$ يكافئ $-\frac{3}{4}\left(u_n + \frac{2}{3}\right) < 0$

0,25

يكافئ $u_{n+1} - u_n < 0$ ما يعني أن المتتالية (u_n) متناقصة نهاما.

• إستنتاج التقارب: بما أن المتتالية (u_n) متناقصة نهاما و محدودة من الأسفل بالعدد $-\frac{2}{3}$ فإن المتتالية (u_n) متقاربة.

0,5

I - المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{R}$: $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي.

(1) نعيّن قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha = \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2} + \alpha = \frac{1}{4}(u_n - 2 + 4\alpha)$

0,5

من جهة أخرى تكون المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_n = u_n - 2 + 4\alpha \quad \text{نجد} \quad v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n - 2 + 4\alpha) \quad \text{بالمطابقة مع} \quad v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$$

$$\alpha = \frac{2}{3} \quad \text{يكافئ} \quad -3\alpha = -2 \quad \text{يكافئ} \quad \alpha = -2 + 4\alpha \quad \text{يكافئ} \quad u_n + \alpha = u_n - 2 + 4\alpha$$

$$v_0 = \frac{20}{3} \quad \text{معناه} \quad v_0 = u_0 + \alpha = 6 + \frac{2}{3} = \frac{20}{3} \quad \text{• حساب حدها الأول: لدينا}$$

0,25

(2) أ. الكتلة بدلالة n عبارة الحد العام v_n :

$$v_n = \frac{20}{3 \times 4^n} \quad \text{معناه} \quad v_n = \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{لدينا من أجل كل عدد طبيعي } n: v_n = v_0 \times q^n \quad \text{بالتعويض نجد}$$

0,5

ب. استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n : لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n + \alpha$

$$u_n = \frac{2}{3} \left(\frac{10}{4^n} - 1 \right) \quad \text{يكافئ} \quad u_n = \frac{20}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{2}{3} \quad \text{يكافئ} \quad u_n = v_n - \alpha$$

0,5

• حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \quad \text{لأن} \quad -1 < \frac{1}{4} < 1 \quad \text{لدينا} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{20}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{2}{3} \right) = -\frac{2}{3}$$

0,25

حل التمرين الثالث (04 نواظ)

I - حساب احتمال كل من الحوادث A ، B و C :

$$P(A) = \frac{1}{7} \quad \text{معناه} \quad P(A) = \frac{C_3^3 + C_4^3}{C_7^3} = \frac{5}{35} \quad \text{لدينا} \quad \blacktriangleleft$$

0,5

$$P(B) = \frac{18}{35} \quad \text{معناه} \quad P(B) = \frac{C_3^1 \times C_4^2}{C_7^3} = \frac{18}{35} \quad \text{لدينا} \quad \blacktriangleleft$$

0,5

$$P(C) = \frac{34}{35} \quad \text{معناه} \quad P(C) = \frac{C_4^1 \times C_3^2 + C_4^2 \times C_3^1 + C_4^3}{C_7^3} = \frac{34}{35} \quad \text{لدينا} \quad \blacktriangleleft$$

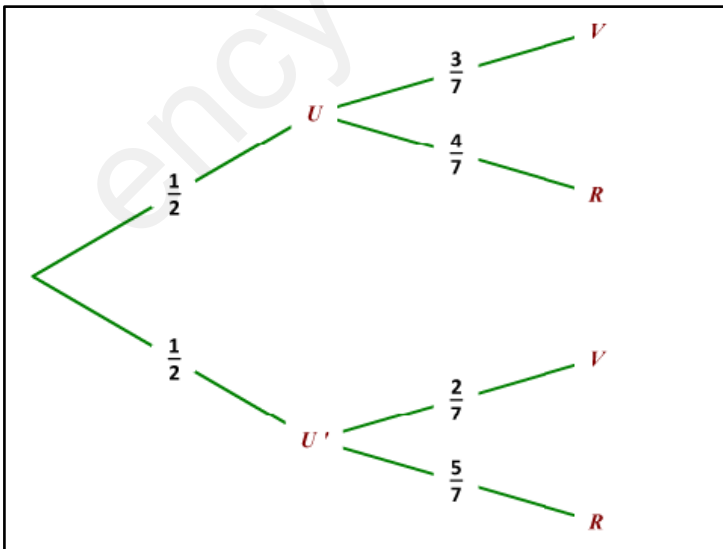
0,5

الصفحة 3

II - نختار صندوقا عشوائيا و نسحب منه كرة واحدة عشوائيا:

(1) إنجاز شجرة الإحتمالات الموافقة لهذه التجربة العشوائية:

01



(2) لنبين أن احتمال الحصول على كرة خضراء هو $P(V) = \frac{5}{14}$

لدينا $P(V) = P(U \cap V) + P(U' \cap V)$ يكافئ $P(V) = P(U) \times P_U(V) + P(U') \times P_{U'}(V)$

بالتعويض نجد $P(V) = \frac{5}{14}$ ما يعني أن $P(V) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{7}$

(3) حساب احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الصندوق U علما أنها خضراء اللون:

لدينا $P_V(U) = \frac{3}{5}$ معناه أن $P_V(U) = \frac{P(U \cap V)}{P(U)} = \frac{P(U) \times P_U(V)}{P(U)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{7}}{\frac{5}{14}} = \frac{\frac{3}{14}}{\frac{5}{14}} = \frac{3}{5}$

x	0	$1 + \infty$
$g'(x)$	+	-

I - الدالة العددية g معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعبارة:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	1	2	$-\infty$

$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$

(1) دراسة تغيرات الدالة g على المجال $]0; +\infty[$:

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 - 2x^2 \ln x) = 1$ النهايات:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^2 - 2x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 - 2 \ln x \right) \right] = -\infty$

المشتقة: الدالة العددية g معرفة وقابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ حيث من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ تكون:

معناه $g'(x) = 2x - 2 \left(2x \times \ln x + \frac{1}{x} \times x^2 \right) = 2x - 4x \ln x - 2x = -4x \ln x$

إشارة المشتقة: لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $4x > 0$

و عليه فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة العبارة $-\ln x$ معناه أن:

اتجاه تغير الدالة g :

الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0; 1[$ و متناقصة تماما على المجال $]1; +\infty[$

جدول تغيرات الدالة g :

(2) لنبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يُحقق: $1,8 < \alpha < 2$

لدينا الدالة g معرفة ومستمرة ورتيبة (متناقصة تماما) على المجال $]1; +\infty[$

إذا بالضرورة فإن الدالة g معرفة ومستمرة ورتيبة (متناقصة تماما) على المجال $]1,8; 2[$.

ولدينا $g(1,8) \approx 0,43$ و $g(2) \approx -0,55$ و بما أن $g(1,8) \times g(2) < 0$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,8 < \alpha < 2$ مع $g(\alpha) = 0$.

▪ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

- II 0,25

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$:

0,25

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{1+x^2} \right) = -\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x^2) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{1+x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 \times \frac{\ln x}{x^2}}{x^2 \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{\ln x}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + 1} \right) = 0$$

0,25

0,25

- التفسير الهندسي للنهائيتين :

• لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ ما يعني أن المنحنى (C_f) مستقيم مقارب معادلته $x=0$ هو حامل محور الترتيب.

مستقيم مقارب معادلته $y=0$ هو

• لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ما يعني أن المنحنى (C_f)

حامل محور الفواصل بجوار $+\infty$.

$]0; +\infty[$

x	0	$+\infty$
$g(x)$	+	-

x من المجال

(2) أ. لزمين أنه من أجل كل عدد حقيقي

0,5

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$$

لدينا الدالة العددية f معرفة وقابلة للإشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ حيث من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ تكون :

0,25

0,25

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times (1+x^2) - 2x \times \ln x}{(1+x^2)^2} = \frac{\frac{1}{x} + x - 2x \ln x}{(1+x^2)^2} = \frac{x \left(\frac{1}{x} + x - 2x \ln x \right)}{x(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2 - 2x^2 \ln x}{x(1+x^2)^2} = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$$

0,5

ب. استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $x(1+x^2)^2 > 0$ و عليه فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

ما يعني أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; \alpha[$ و متناقصة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$.

▪ تشكيلي جدول تغيرات الدالة f :

0,25

$$(3) \text{ لزمين أن: } f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2} : \text{ لدينا } g(\alpha) = 0 \text{ يكافئ } 1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \ln \alpha = 0 \text{ يكافئ } \ln \alpha = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2}$$

$$f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{1 + \alpha^2} \text{ بالتعويض نجد } f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2} \times \frac{1 + \alpha^2}{1 + \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2}$$

0,25

▪ استنتاج حصر للعدد الحقيقي $f(\alpha)$ سعته 10^{-2} :

$$3,24 < \alpha^2 < 4 \text{ يكافئ}$$

$$1,8 < \alpha < 2 \text{ يكافئ}$$

$$\frac{1}{8} < \frac{1}{2\alpha^2} < \frac{1}{6,48}$$

$$6,48 < 2\alpha^2 < 8 \text{ يكافئ}$$

الذي سعته 10^{-2} هو :

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

و عليه فإن حصر للعدد الحقيقي

$$0,13 < f(\alpha) < 0,15$$

0,25

(4) نتعين إحداثي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محاور الفواصل:

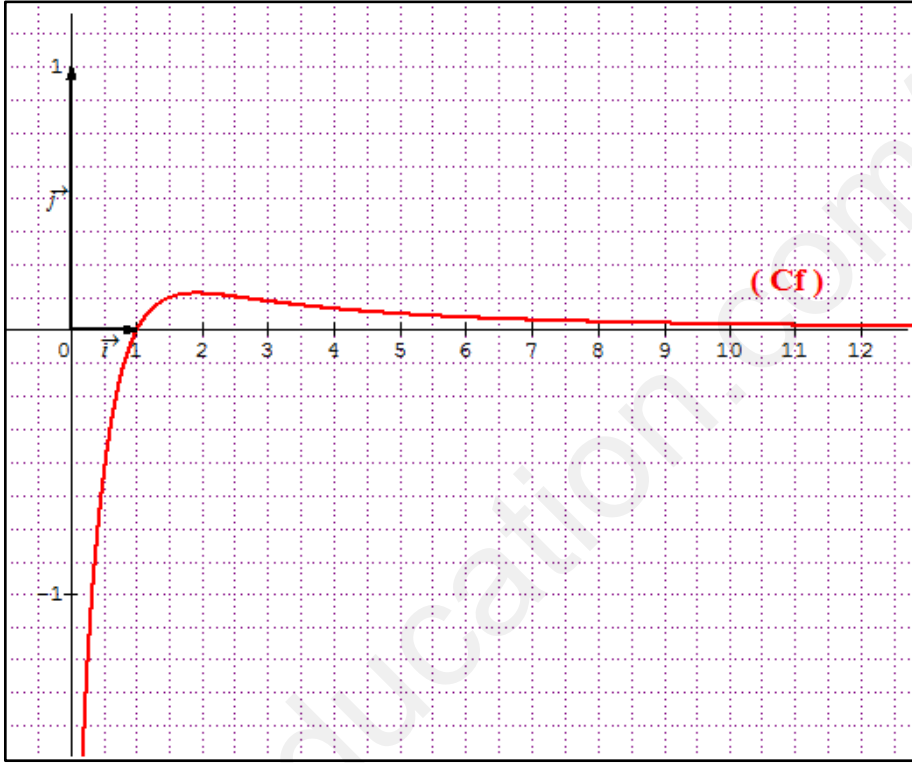
لدينا $f(x) = 0$ تكافئ $\frac{\ln x}{1+x^2} = 0$ تكافئ $\ln x = 0$ تكافئ $x = 1$.

- ما يعني أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محاور الفواصل في النقطة $(1;0)$.

▪ إنشاء المنحنى (C_f) :

المنحنى
 (C_f)
0,5

دالة أصلية
معرفة و
المجال
أجل كل



- III

(1) لربين أن الدالة G هي

للدالة g على المجال

$]0; +\infty[$:

لدينا الدالة العددية G

قابلة للإشتقاق على

$]0; +\infty[$ حيث من

$x \in]0; +\infty[$ تكون:

0,5

0,25

0,25

$$G'(x) = \frac{5}{9} \times 3x^2 + 1 - \frac{2}{3} \left(3x^2 \ln x + x^3 \times \frac{1}{x} \right) = \frac{5}{3}x^2 + 1 - 2x^2 \ln x - \frac{2}{3}x^2 = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$$

و عليه $G'(x) = g(x)$ ما يعني أن الدالة G هي دالة أصلية للدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

(2) حسب بدلالة α العدد A_α : لدينا من أجل كل عدد كل عدد حقيقي x من المجال $[1; \alpha]$: $g(x) \geq 0$ و عليه فإن:

$$G(1) = \frac{14}{9} \text{ و } G(\alpha) = \frac{5}{9}\alpha^3 + \alpha - \frac{2}{3}\alpha^3 \ln \alpha \text{ ولدينا } A_\alpha = \int_1^\alpha g(x) dx = [G(x)]_1^\alpha = G(\alpha) - G(1)$$

$$A_\alpha = \frac{5}{9}\alpha^3 + \alpha - \frac{2}{3}\alpha^3 \ln \alpha - \frac{14}{9} \mu a \text{ و عليه}$$

إنتهى تصحيح الموضوع.

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (04 نقاط)

إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المقترحة مع التبرير.

السؤال	الإجابة أ-	الإجابة ب-	الإجابة ج-
1 التكامل $\int_1^2 \frac{3}{x^4} dx$ يساوي :	$-\frac{9}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{9}{8}$
2 العدد $\ln\left(\frac{2e^3}{\sqrt{3}}\right)$ يساوي :	$3 + \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3$	$3 + \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3$	$3 - \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3$
3 للمعادلة $2 \ln x - \ln(5x - 6) = 0$ حلان متمايزان هما :	$x_1 = 3$ و $x_2 = -2$	$x_1 = 3$ و $x_2 = 0$	$x_1 = 3$ و $x_2 = 2$
4 القيمة المتوسطة m للدالة $f(x) = 3^{x-1}$ على المجال $[2; 3]$ هي :	$\frac{6}{\ln 3}$	-3	$\ln 3$

التمرين الثاني : (05 نقاط)

I. لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $\ln(u_{n+1}) = -1 + \ln(u_n)$.

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 0$.

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ثم إستنتج أنها متقاربة .

(3) بين أن (u_n) هندسية أساسها e^{-1} .

(4) أكتب عبارة u_n بدلالة n . أحسب نهاية u_n .

II. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = 2 + \ln \sqrt{u_n}$.

(1) أكتب v_n بدلالة n ، ثم بين أن (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول v_0 .

(2) أكتب p_n بدلالة n حيث : $p_n = (v_1 + \frac{1}{2})^1 \times (v_2 + 1)^2 \times \dots \times (v_n + \frac{n}{2})^n$.

(3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = e^{2(v_0-2)} + e^{2(v_1-2)} + \dots + e^{2(v_n-2)}$.

أكتب بدلالة n المجموع S_n ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (e-1)S_n$.

التمرين الثالث : (04 نقاط)

لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $v_n = \int_n^{n+1} e^{-x+1} dx$

- (1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : v_n > 0$.
- (2) أكتب عبارة v_n بدلالة n .
- (3) بين أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
- (4) ليكن S_n المجموع المعروف كمايلي : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$
أحسب S_n بدلالة n .

(5) بين أن $S_n = \int_0^{n+1} e^{-x+1} dx$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$.

- (1) أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.
- (2) إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (الوحدة 2 سم)

- (1) عيّن نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.
- (2) أدرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
- (3) بيّن أنّ المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y = x + 1$ بجوار $-\infty$.
- (4) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
- (5) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة O .
- (6) بين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيها.
- (7) أنشئ المستقيمين (Δ) و (T) والمنحني (C_f) .

(8) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي عدد و إشارة حلول المعادلة : $(2x-1)e^{2x} + x = x + m + 1$

III. باستعمال المكاملة بالتجزئة

(1) أحسب التكامل $\int_0^1 (2x-1)e^{2x} dx$

(2) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المماس (T) و المستقيمين ذو المعادلتين :

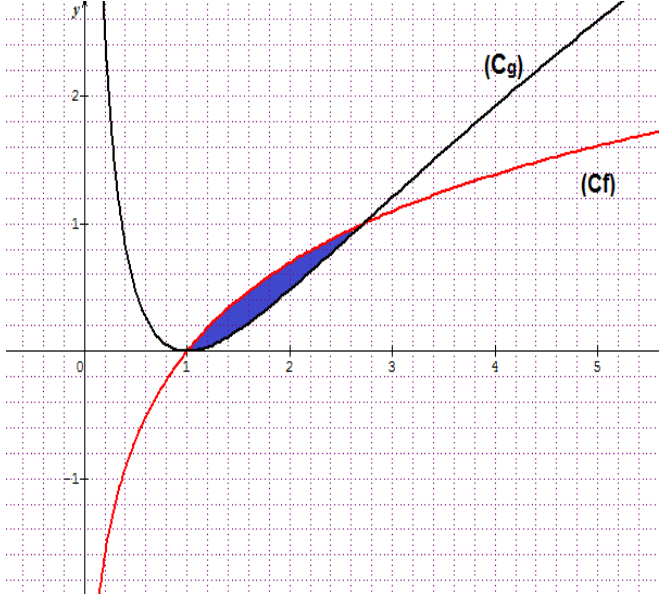
$x=1$ و $x=0$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

المنحنيين (C_f) و (C_g) هما التمثيلان البيانيان على التوالي للدالتين العدديتين f و g المعرفتين على المجال $]0; +\infty[$ كمايلي : $f(x) = \ln(x)$ و $g(x) = (\ln x)^2$ في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{o})$.

I. نبحت عن المساحة A (بوحدة المساحة) للحيز المستوي المظلل.



نضع : $I = \int_1^e \ln(x) dx$ و $J = \int_1^e (\ln x)^2 dx$

(1) تحقق أن الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كمايلي :

$$F(x) = x \ln x - x \text{ هي دالة أصلية للدالة اللوغاريتم}$$

النيبييري. إستنتج I .

(2) برهن بإستعمال المكاملة بالتجزئة أن : $J = e - 2I$

ثم إستنتج J .

(3) أعط قيمة للعدد A .

II. من أجل كل x من المجال $[1; e]$ نضع M النقطة من

المنحنى (C_f) فاصلتها x و N النقطة من المنحنى (C_g) لها نفس الفاصلة من أجل أي قيمة للعدد x .
المسافة MN تكون أعظمية ؟ أحسب القيمة العظمى للعدد MN .

التمرين الثاني: (5 نقاط)

I. يحتوي كيس غير شفاف على 9 كريات متماثلة لا نفرق بينهما باللمس ، منها 4 سوداء تحمل الرقم α ، و ثلاث كريات صفراء تحمل الرقم $(\alpha - 1)$ (حيث α عدد طبيعي غير معدوم)، و كريتين بيضاوين تحملان الرقم 1.

نسحب عشوائيا من هذا الكيس ثلاث كريات في آن واحد.

(1) أحسب إحتمال الأحداث التالية :

B "سحب ثلاث كريات تحمل نفس العدد".

A "سحب على الأكثر كرية بيضاء" ،

C "سحب كريتين بالضبط تحمل الرقم $(\alpha - 1)$ "

II. ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الأرقام المسجلة على الكريات السوداء المسحوبة، و الذي يأخذ القيمة 0 إذا كانت كل الكريات ليست سوداء.

(1) عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي X .

(2) عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

(3) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ بدلالة α .

(4) حدد قيم α من أجل $|E(X) - 1| \leq 2$.

التمرين الثالث: (4 نقاط)

- I. نعتبر المتتالية العددية u_n المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 9$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$ ولتكن المتتالية v_n المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث: $v_n = u_n + 6$.
- (1) بين أن v_n متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول.
 - (2) أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .
- نعتبر المجموعين S_n و S'_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
- (3) أحسب S_n بدلالة n ثم استنتج S'_n بدلالة n .
- II. نعرف المتتالية w_n بـ: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $w_n = \ell_n(v_n)$ (حيث: ℓ_n اللوغاريتم النيبيري)
- (1) بين أن w_n متتالية حسابية يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول.
 - (2) أحسب بدلالة n المجموع: $S''_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$ استنتج النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} S''_n$.

التمرين الرابع: (7 نقاط)

- I. g دالة عددية معرفة على المجال $D =]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 1 - \ln(x)$.
- (1) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
 - (2) استنتج إشارة الدالة g .
- II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $D =]0; +\infty[$ كالتالي: $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln(x)}{x}$.
- (C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المزود بمعلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = 2cm$.
- (1) أوجد نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و على يمين 0. فسر هندسيا النتيجة الثانية.
 - (2) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = x + \frac{1}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C).
 - (3) ادرس الوضع النسبي للمنحني (C) بالنسبة إلى (Δ) .
 - (4) تحقق أنه من أجل كل x ينتمي إلى D : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
 - (5) استنتج اتجاه تغير الدالة f على مجموعة تعريفها، ثم شكل جدول تغيراتها.
 - (6) اكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (T) الذي يمس المنحني (C) عند النقطة $A(1; \frac{3}{2})$.
 - (7) أثبت أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[\frac{1}{2}; 1]$.
 - (8) ارسم المنحني (C) و المستقيمين (Δ) و (T).
- III. نضع من أجل x ينتمي إلى D : $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$.
- (1) احسب $h'(x)$. ما ذا تستنتج؟
 - (2) أوجد بالسنتيمتر المربع S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) وبالمستقيمات التي معادلاتها: $x = 1$; $x = e$; $y = 0$.

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة عينه مع التعليل

(1) نعتبر المجموع T_n حيث : $T_n = \ln 2 + \ln 2^3 + \ln 2^5 + \dots + \ln 2^{2n+1}$ قيمة T_n هي:

(أ) $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (ب) $T_n = 2^{(n+1)^2}$ (ج) $T_n = 2 \ln(n+1)$

(2) نعتبر في المجال $\log x^2 - 2 \log x - 3 = 0$ المعادلة حلول المعادلة هي:

(أ) $S = \{e^{-1}; e^{-3}\}$ (ب) $S = \{10^{-1}; 10^3\}$ (ج) $S = \{10^3\}$

(3) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{2}{x} (1 + \ln x) dx$

نضع : $S = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{36}$ قيمة S هي:

(أ) $S = 1444$ (ب) $S = 2022$ (ج) $S = 1443$

(4) المتتاليتان العدديتان u_n و (v_n) المعرفتان بـ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3} \end{cases}$

و $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n + 1}$ ، قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية هي:

(أ) $\alpha = -1$ (ب) $\alpha = 3$ (ج) $\alpha = 1$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 0 ; u_1 = 1 ; u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n$

نضع : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$ و $w_n = u_n \times 5^n$

(1) برهن ان المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ ثم اكتب v_n بدلالة n .

(2) أ برهن ان المتتالية (w_n) حسابية أساسها 5 ثم اكتب w_n بدلالة n
(ب) استنتج عبارة u_n بدلالة n

(3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $0 < u_{n+1} \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

ج) نضع: من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

بين أن : $0 < u_{n+1} \leq \frac{5}{3} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n \right]$

(4) احسب بدلالة n المجموعين T_n و T'_n بحيث : $T_n = u_0 + 5^1 u_1 + 5^2 u_2 + \dots + 5^n u_n$

و $T'_n = \ln v_0 + \ln v_1 + \ln v_2 + \dots + \ln v_n$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

يريد تلاميذ قسم مكون من 10 ذكور ، 6 اناث أن يشكلوا لجنة تتألف من 3 أفراد لتمثيلهم في مسابقة دراسية

(نفرض أن كل التلاميذ لهم نفس الحظوظ لكي يقع عليهم الاختيار)

. نعتبر الحدثين: E : " أعضاء اللجنة من نفس الجنس " ، F : " أعضاء اللجنة من الجنسين معا "

(1) أ) احسب عدد اللجان التي يمكن تشكيلها.

أ) احسب $P(E)$ و $P(F)$ احتمالي E و F .

(2) نفترض أنه من بين تلاميذ القسم يوجد التلميذ x ، و أخته التلميذة y والتي لا تريد الانضمام الى اللجنة التي

تضم التلميذ x

- احسب احتمال أن يكون أعضاء اللجنة من الجنسين معا

(3) المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل لجنة عدد التلميذات المتواجدات بها.
عين قانون الاحتمال X و احسب $E(X)$ أمله الرياضياتي .

التمرين الرابع: (7 نقاط)

(I) الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$.

1. أدرس تغيرات الدالة g .

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0,35 < \alpha < 0,36$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

(II) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني المستوى منسوب إلى المعلم المتعامد $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (الوحدة $2cm$).

1. أدرس تغيرات الدالة f .

2. أ) بين أن $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$.

ب) عين حصارا لـ $f(\alpha)$.

3. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

4. أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 0$.

5. أنشئ كل من (Δ) ، (T) و (C_f) على المجال $[-1; +\infty[$.

6. أ) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c حتى تكون الدالة F المعرفة بـ: $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ دالة أصلية

للدالة: $x \rightarrow (x^2 + 2)e^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

ب) أحسب بدلالة α المساحة $A(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و (Δ) و المستقيمين اللذين

معادلتيهما $x = -\alpha$ و $x = 0$.

ج) بين أن: $A(\alpha) = 4e^{2\alpha} + 8e^{\alpha} - 16$.

التمرين الرابع: (7 نقاط)

(I) g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4 \ln x$

(1) بين أن الدالة g متزايدة على المجال $]0; +\infty[$.

(2) احسب $g(1)$ ثم حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد حيث: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

(1) بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(2) اثبت أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

(3) بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{2x}$ ثم شكل جدول تغيرات f .

(4) أ - بين أن الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = f(x) - x$ متناقصة تماما على المجال $]0; 1[$.

ب - بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل في المجال $[0,54; 0,56]$ حلا وحيدا α ثم فسر النتيجة بيانيا.

(5) أنشئ المنحنى (C_f) .

(6) أ - بين أن الدالة $x \mapsto -x + x \ln x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب - احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها:

$x = e$ و $x = 1$ ، $y = 0$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية مع التبرير:

(1) نعتبر من أجل كل عدد طبيعي n العدد الحقيقي: $a = \ln(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{2022} + \ln(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^{2022}$

(أ) $a = 2022$ (ب) $a = 0$ (ج) $a = n$

(2) إذا كانت الأعداد $(1 - e^{-2})$ ، $(e^{-2} - e^{-4})$ و α تشكل حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية فإن:

(أ) $\alpha = (1 - e^{-4})$ (ب) $(e^{-2} - e^{-6})$ (ج) $(e^{-4} - e^{-6})$

(3) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$. القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0;1]$ هي:

(أ) $m = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$ (ب) $m = \ln\sqrt{\frac{e+1}{2}}$ (ج) $m = \ln\left(\frac{e-1}{2}\right)$

(4) معامل x^{10} في منشور $(2+x)^{12}$ هو: (أ) 262 (ب) 263 (ج) 264

التمرين الثاني: (5 نقاط)

يحتوي كيس على أربع كريات حمراء تحمل الرقم α و ثلاث كريات خضراء تحمل الرقم $\alpha-1$ و كرتين بيضاوين تحملان الرقم 1، حيث α عدد طبيعي غير معدوم. الكريات متماثلة ولا نميز بينها عند اللمس.

نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات في آن واحد.

نعتبر الحوادث التالية: A "الحصول على كرية بيضاء على الأكثر"، B "الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس العدد" و C "الحصول على كرتين بالضبط تحملان الرقم $\alpha-1$ ".

(1) أ) أحسب إ احتمال كل من الحوادث A، B و C.

ب) ما هو احتمال الحصول على ثلاث كريات تحمل ألوان العلم الوطني؟

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع الأرقام الظاهرة على الكريات الحمراء المسحوبة والذي يأخذ

القيمة 0 إذا لم يتم سحب أي كرية حمراء.

(أ) برر أن القيم الممكنة لـ X هي $\{0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha\}$ ثم عرف قانون احتماله.

(ب) أحسب بدلالة α الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X.

(ج) عين قيمة α التي من أجلها $|E(X) - 1| \leq 2$

التمرين الثالث: (4 نقاط)

المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بحددها الأول u_0 بحيث: $u_0 > \sqrt{3}$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{3}{u_n} \right)$

(1) أ. اثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n} (u_n - \sqrt{3})^2$.

ب. برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n > \sqrt{3}$.

ج. استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

(2) المتتالية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln \left(\frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}} \right)$

أ. اثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} + \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n} (u_n + \sqrt{3})^2$.

ب. برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 ثم استنتج عبارة v_n بدلالة u_0 و n .

ج. أثبت أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) نضع: من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$S_n = \left(\frac{u_0 - \sqrt{3}}{u_0 + \sqrt{3}} \right) \times \left(\frac{u_1 - \sqrt{3}}{u_1 + \sqrt{3}} \right) \times \left(\frac{u_2 - \sqrt{3}}{u_2 + \sqrt{3}} \right) \times \dots \times \left(\frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}} \right)$$

$$S_n = e^{\left(2^{n+1} - 1 \right) \ln \left(\frac{u_0 - \sqrt{3}}{u_0 + \sqrt{3}} \right)}$$

- أثبت أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

التمرين الرابع: (7 نقاط)

(I) الدالة h معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$

وبجدول تغيراتها المقابل:

(3) بين أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا

α يحقق: $0.7 < \alpha < 0.8$

(4) استنتج حسب قيم x إشارة $h(x)$

x	0	α	e	$+\infty$
$h'(x)$	+	+	0	-
$h(x)$	$-\infty$	0	$1 + \frac{2}{e}$	1

(II) الدالة g معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$

(C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس ($O; \vec{i}; \vec{j}$)

(7) أ. احسب $g'(x)$ من أجل كل x من $]0; +\infty[$

ب. استنتج اتجاه تغير الدالة g .

(8) أ. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ثم $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

ب. فسر النتيجةين بيانيا .

ج. شكل جدول تغيرات g .

(III) الدالة f معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = g(x) + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم السابق.

(1) أ - بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = g'(x) \times h(x)$.

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f .

(2) أ. بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

ب. فسر النتيجةين بيانيا

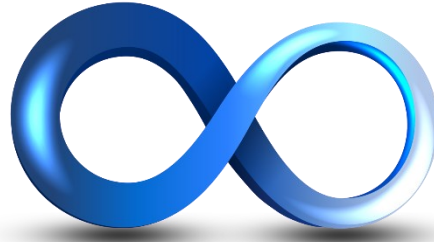
ج . برهن أن: $f(\alpha) = \frac{3}{4}$ ، شكل جدول تغيرات f .

(3) أ. بين أن : (C_g) و (C_f) لهما مماس مشترك (T) ، اكتب معادلة له .

ب. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)]$ ثم فسر بيانيا هذه النتيجة.

ج. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة (C_g) .

(4) أنشئ بدقة المماس (T) ثم (C_f) و (C_g) في نفس المعلم السابق.



الخليج للرياضيات

سنة **ثالثة** ثانوي

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي

إمتحان بكالوريا تجريبية 2022

شعبة

علوم تجريبية

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

تاريخ النشر:

[17 ماي 2022]



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (03 نقاط)

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية، اقترحت ثلاث إجابات، واحدة فقط منها صحيحة، حددها مع التعليل

① حلول للمعادلة التفاضلية $y - y' = 1$ التي تحقق $y(0) = e$ هي:

أ/ $y = e^{x+1}$ ب/ $y = e^{x+1} - e^x + 1$ ج/ $y = e^{x+1} + 1$

② قيمة التكامل A حيث: $A = \int_{-1}^1 xe^x dx$ هي:

أ/ $A = 2e^{-1}$ ب/ $A = 2e$ ج/ $A = 2 + e$

③ حلول المعادلة: $e^x - \sqrt{e^{x-1}} = 0$ هي:

أ/ $S \in \{-1; 1\}$ ب/ $S \in \{0\}$ ج/ $S \in \{-1\}$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

يحتوي صندوق على ثلاث كرات حمراء مرقمة بـ 1، 1، 2 وخمس كرات بيضاء مرقمة بـ 1، 1، 1، 2، 2 وكرتان خضراوان مرقمتان بـ 1، -1 (كل الكرات لا تميز بينها عند اللمس) نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات نعتبر الحوادث التالية:

A: "الكرات المسحوبة مختلفة اللون مثنى مثنى"

B: "يوجد على الأقل كرة خضراء واحدة"

C: "الكرات المسحوبة مجموع أرقامها معدوم"

① احسب احتمال الحوادث A، B و C

② علما أن مجموع أرقام الكريات المسحوبة معدوم، ما احتمال أن تكون مختلفة في اللون مثنى مثنى

③ ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد ألوان الكرات المسحوبة

أ/ بين أن $p(X=2) = \frac{79}{120}$ ، ثم أكتب قانون احتمال المتغير العشوائي X

ب/ احسب الأمل الرياضي $E(X)$ ثم احسب الاحتمال $P(X^2 - 2X \geq 3)$

التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 3$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 8 \left(1 - \frac{3}{u_n + 2} \right)$

① برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا : $2 < u_n < 4$

② بين أن (u_n) متزايدة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة

③ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$

④ استنتج أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$ ثم احسب $0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

⑤ نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$

أ/ بين أن (v_n) هندسية محددا أساسها وحدها الأول

ب/ اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

ج/ اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = -1 + x + 2 \ln x$

① ادرس اتجاه تغير الدالة g

② احسب $g(1)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$

II الدالة العددية f معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{-1 + (x-2) \ln x}{x}$ ، و (C_f) تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 1cm)

① احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، وفسر النتيجة هندسيا، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

② أ/ بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

ب/ عيّن اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

③ ليكن (Γ) المنحنى البياني الممثل للدالة : $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$

أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Γ)

④ بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β ، ثم تحقق أن :

$$0.5 < \alpha < 0.6 \text{ و } 2.9 < \beta < 3$$

⑤ ارسم (Γ) ثم (C_f)

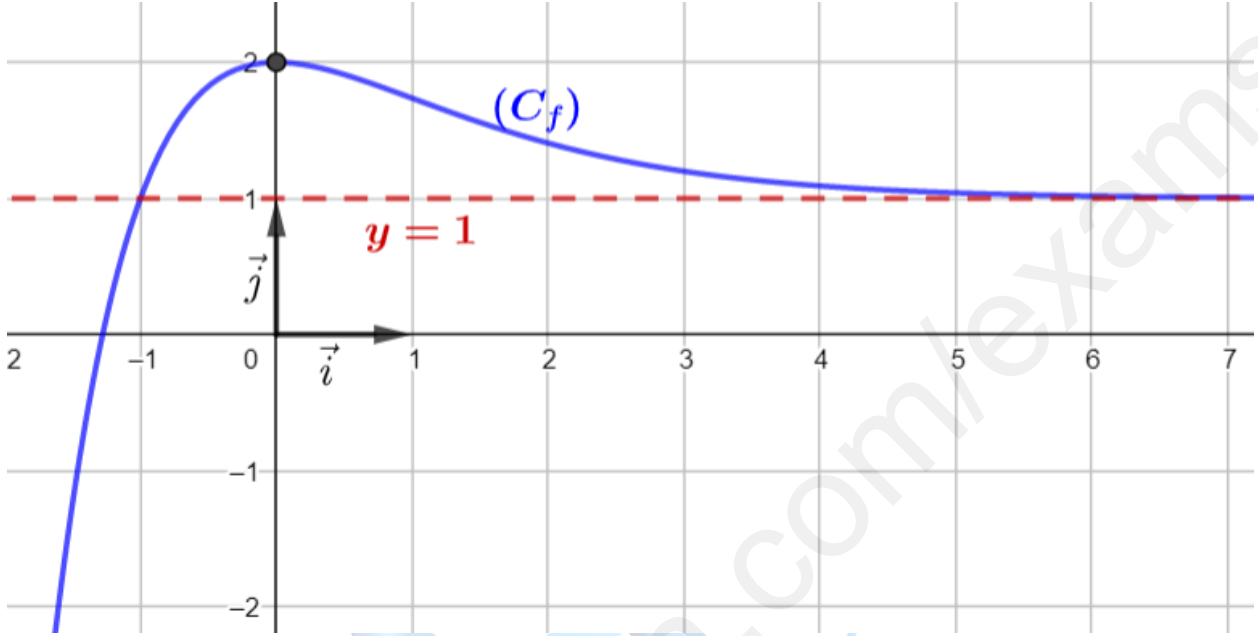
⑥ احسب A مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و (Γ) والمستقيمان ذو المعادلتان $x = 1$ و $x = e$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (03 نقاط)

(I) دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (ax + b)e^{-x} + c$ حيث a, b, c أعداد حقيقية
(تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 1cm)



- بقراءة بيانية، عيّن a, b, c

(II) نضع: $a = b = c = 1$

① باستعمال المكاملة بالتجزئة، عيّن دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x + 1)e^{-x}$ على $\mathbb{R}$ والتي تنعدم من أجل -1

② بيّن أن $A = (e - 1)cm^2$ هي مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين ذو المعادلتين $x = 0$ و $x = -1$

التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

سند وق به ثلاث كريات حمراء وأربع كريات بيضاء و كريتتين خضراوين

نسحب عشوائيا كريتان على التوالي بدون إرجاع

نعتبر الحوادث التالية: A : "الكرتان المسحوبتان من نفس اللون"

B : "سحب كرية بيضاء في المرة الأولى"

① احسب احتمال الحوادث A و B

② استنتج احتمال سحب كريتتين من لونين مختلفين

③ علما أن الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء، احسب احتمال سحب كرتان من نفس اللون

④ ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الكرات البيضاء المسحوبة

أ/ عيّن قيم المتغير العشوائي X ، ثم أكتب قانون احتماله

ب/ احسب الأمل الرياضي $E(X)$ ثم احسب $E(1443X + 2022)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(I) لتكن الدالة f المعرفة على $[1; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$

① ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

② بين أنه من أجل كل $x \geq 1$ فإن: $f(x) \geq 1$

(II) لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ ب $u_0 = 2$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$

① برهن بالتراجع أنه من أجل كل n طبيعي فإن: $u_n \geq 1$

② بين أن (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة

③ نضع من أجل كل n طبيعي: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ و $w_n = \ln(v_n)$

أ/ بين أن (w_n) هندسية أساسها 2 واحسب w_0

ب/ اكتب بدلالة n عبارة w_n ، ثم استنتج بدلالة n عبارة v_n

④ استنتج عبارة u_n بدلالة n ، ثم احسب نهاية (u_n)

⑤ أ/ اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

ب/ اكتب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

التمرين الرابع: (7.5 نقاط)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = (1-x)e^{2-x} + 1$

① ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكل جدول تغيراتها

② بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $g(x) \geq 0$

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $f(x) = x - 2 + xe^{2-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في

مستو منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول هي 1cm)

① احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

② أ/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 2)]$ ، ماذا تستنتج؟

ب/ ادرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (Δ) حيث $y = x - 2$: (Δ)

③ أ/ بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $f'(x) = g(x)$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

④ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0.31; 0.32[$

⑤ بين (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيها

⑥ بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب تعيين معادلتها

⑦ ارسم (T) ، (Δ) و (C_f)

⑧ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = x + m$



الموضوع الأول

♦ التمرين الأول: (03 نقاط)

1 حلل للمعادلة التفاضلية $y - y' = 1$ التي تحقق $y(0) = e$ هي: $y = e^{x+1} - e^x + 1$ [01ن]

التبرير:

لدينا:

$$y - y' = 1 \Rightarrow y' = y - 1 \Rightarrow y = Ce^x - \frac{-1}{1} \Rightarrow Ce^x + 1$$

ولدينا:

$$y(0) = e \Rightarrow Ce^0 + 1 = e \Rightarrow C = e - 1$$

ومنه:

$$y = (e - 1)e^x + 1 \Rightarrow y = e^{x+1} - e^x + 1$$

2 التكامل A حيث: $A = \int_{-1}^1 (xe^x) dx$ هي: $A = 2e^{-1}$ [01ن]

التبرير:

$$A = \int_{-1}^1 (xe^x) dx$$

$$\text{نضع: } u(x) = x \text{ و } v'(x) = e^x$$

$$\text{ومنه: } u'(x) = 1 \text{ و } v(x) = e^x$$

إذن:

$$A = \int_{-1}^1 (xe^x) dx = [xe^x]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x dx = [xe^x - e^x]_{-1}^1 = 2e^{-1}$$

3 حلل المعادلة: $e^x - \sqrt{e^{x-1}} = 0$ هي: $S \in \{-1\}$ [01ن]

التبرير:

$$e^x - \sqrt{e^{x-1}} = 0 \Rightarrow e^x = \sqrt{e^{x-1}} \Rightarrow e^{2x} = e^{x-1} \Rightarrow 2x = x - 1 \Rightarrow x = -1$$

♦ التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

1 حساب احتمال الحوادث A ، B و C : [1.5ن]

$$p(A) = \frac{C_3^1 C_5^1 C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{3 \times 5 \times 2}{120} = \frac{1}{4}$$

$$p(B) = \frac{C_2^1 C_8^2 + C_2^2 C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{2 \times 28 + 1 \times 8}{120} = \frac{8}{15}$$

$$p(C) = \frac{C_3^2 C_3^1}{C_{10}^3} = \frac{3 \times 3}{120} = \boxed{\frac{3}{40}}$$

② حساب احتمال أن تكون مختلفة في اللون مثنى مثنى علما أن مجموع أرقامها معدوم:

$$p_c(A) = \frac{p(A \cap C)}{p(C)} = \frac{\frac{C_2^1 C_2^1 C_1^1}{C_{10}^3}}{\frac{3}{40}} = \frac{\frac{2 \times 2 \times 1}{120}}{\frac{3}{40}} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

③ / تبين أن $p(X = 2) = \frac{79}{120}$

$$p(X = 2) = \frac{C_3^2 C_7^1 + C_5^2 C_5^1 + C_2^2 C_8^1}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{79}{120}}$$

- كتابة قانون احتمال X :

لدينا: $X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$ حيث:

$$p(X = 1) = \frac{C_3^3 + C_5^3}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{11}{120}}$$

$$p(X = 2) = \boxed{\frac{79}{120}}$$

$$p(X = 3) = \frac{C_3^1 C_5^1 C_2^1}{C_{10}^3} = \boxed{\frac{30}{120}}$$

ومنه:

x_i	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{11}{120}$	$\frac{79}{120}$	$\frac{30}{120}$

ب/ حساب الأمل الرياضياتي $E(X)$:

$$E(X) = 1 \frac{11}{120} + 2 \frac{79}{120} + 3 \frac{30}{120} = \boxed{\frac{259}{120}}$$

• حساب $P(X^2 - 2X \geq 3)$

$$P(X^2 - 2X \geq 3) = P(X^2 - 2X - 3 \geq 0) = P((X + 1)(X - 3) \geq 0)$$

لدينا:

X	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$(X + 1)(X - 3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

إذن:

$$P(X^2 - 2X \geq 3) = P(X = 3) = \boxed{\frac{30}{120}}$$

♦ التمرين الثالث: (04.5 نقاط)

① برهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا: $2 < u_n \leq 4$:

نسمي الخاصية $2 < u_n < 4 \dots P(n)$

• لدينا: $2 < u_0 < 4$ ومنه: $2 < 3 < 4$ إذن القضية $P(n)$ محققة من أجل $n = 0$

• نفرض أن: $2 < u_n < 4$ ونثبت أن $2 < u_{n+1} < 4$

• لدينا:

$$2 < u_n < 4 \Rightarrow 4 < u_n + 2 < 6 \Rightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{1}{u_n + 2} < \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{3}{4} < -\frac{3}{u_n + 2} < -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} < 1 - \frac{3}{u_n + 2} < \frac{1}{2} \Rightarrow 2 < 8 \left(1 - \frac{3}{u_n + 2} \right) < 4 \Rightarrow 2 < u_{n+1} < 4$$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع $P(n)$ محققة

② تبين أن (u_n) متزايدة تماما، ثم استنتاج أنها متقاربة؛

[0.5ن]

$$u_{n+1} - u_n = 8 \left(1 - \frac{3}{u_n + 2} \right) - u_n = \frac{-(u_n)^2 + 6u_n - 8}{u_n + 2} = \frac{-(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2}$$

لدينا: $2 < u_n < 4$ ومنه: $0 < u_n - 2 < 2$

لدينا: $2 < u_n < 4$ ومنه: $-2 < u_n - 4 < 0$

لدينا: $2 < u_n < 4$ ومنه: $4 < u_n + 2 < 6$

إذن: $\frac{-(u_n - 2)(u_n - 4)}{u_n + 2} > 0$ وعليه (u_n) متزايدة تماما

• وبما أن (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ 4 فهي متقاربة

③ تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$

[0.5ن]

لدينا:

$$4 - u_{n+1} = 4 - 8 \left(1 - \frac{3}{u_n + 2} \right) \Rightarrow 4 - u_{n+1} = \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2}$$

ولدينا: (u_n) متزايدة ولدينا $u_0 = 3$ ومنه:

$$u_n \geq 3 \Rightarrow u_n + 2 \geq 5 \Rightarrow \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{4(4 - u_n)}{u_n + 2} \leq \frac{4(4 - u_n)}{5}$$

$$\Rightarrow 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$$

④ استنتاج أن $0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

[0.5ن]

لدينا: $4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$ ومنه:

$$\begin{cases} 4 - u_1 \leq \frac{4}{5}(4 - u_0) \\ 4 - u_2 \leq \frac{4}{5}(4 - u_1) \\ \vdots \\ 4 - u_n \leq \frac{4}{5}(4 - u_{n-1}) \end{cases}$$

بالضرب طرفا لطرف نجد:

$$(4 - u_1) \times (4 - u_2) \times \dots \times (4 - u_n) \leq \frac{4}{5}(4 - u_0) \frac{4}{5}(4 - u_1) \times \dots \times \frac{4}{5}(4 - u_{n-1})$$

ومنه:

$$4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n (4 - u_0) \Rightarrow 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \dots (*)$$

ولدينا:

$$u_n < 4 \Rightarrow -4 < -u_n \Rightarrow 0 < 4 - u_n \dots (**)$$

من (*) و (**) نجد أن:

$$0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

• حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$:

[0.5ن]

$$0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \Rightarrow 0 < \lim_{n \rightarrow +\infty} (4 - u_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \\ \Rightarrow 0 < \lim_{n \rightarrow +\infty} (4 - u_n) \leq 0$$

حسب مبدأ النهايات بالحصص نجد أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4 - u_n) = 0$

ومنه: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 4$

⑤

أ/ تبين أن (v_n) هندسية محددًا أساسها وحدها الأول:

[0.5ن]

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1} - 2} = \frac{8\left(1 - \frac{3}{u_n + 2}\right) - 4}{8\left(1 - \frac{3}{u_n + 2}\right) - 2} = \frac{4u_n - 16}{6u_n - 12} = \frac{4(u_n - 4)}{6(u_n - 2)} = \frac{2}{3}v_n$$

ولدينا:

$$v_0 = \frac{u_0 - 4}{u_0 - 2} = -1$$

ب/ كتابة عبارة v_n بدلالة n :

[0.5ن]

$$v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

- استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

[0.5ن]

$$v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2} \Rightarrow v_n u_n - 2v_n - u_n = -4 \Rightarrow u_n(v_n - 1) = -4 + 2v_n$$

$$\Rightarrow u_n = 2 \frac{v_n - 2}{v_n - 1} \Rightarrow u_n = 2 \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 2}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}$$

ج/ اكتب بدلالة n المجموع S_n

[0.5ن]

$$u_n = 2 \frac{v_n - 2}{v_n - 1} = 2 \frac{v_n - 1 - 1}{v_n - 1} = 2 \left(1 - \frac{1}{v_n - 1}\right)$$

ومنه:

$$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = -\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right)$$

♦ التمرين الرابع: (08 نقاط)

(I)

① دراسة اتجاه تغير الدالة g :

[0.5ن]

$$g'(x) = 1 + 2 \frac{1}{x} = \frac{x + 2}{x}$$

لدينا: $g'(x) > 0$ لما $x \in \mathbb{R}_+^*$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}_+^*$

② حساب $g(1)$:

[0.25ن]

$$g(1) = -1 + 1 + 2 \ln 1 = 0$$

- استنتاج إشارة $g(x)$:

[0.5ن]

بما أن الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $]0; +\infty[$ ، و $g(1) = 0$ فإن:

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(II)

1 / حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

[0.5ن]

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{-1 + \overbrace{x \ln x}^0 - 2 \ln x}{x} \right) = +\infty$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$

ب/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

[0.5ن]

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} + \ln x - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty$$

2 / تبين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

[0.75ن]

$$f'(x) = \frac{\left(\ln x + \frac{x-2}{x} \right) x - (-1 + (x-2) \ln x)}{x^2} = \frac{x-1+2 \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

ب/ تعيين اتجاه تغير الدالة f ، وتشكيل جدول تغيراتها:

[0.75ن]

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

- جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	-1	$+\infty$

3 / حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$

[0.75ن]

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1 + (x-2) \ln x}{x} - \ln x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} + \ln x - 2 \frac{\ln x}{x} - \ln x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} - 2 \frac{\ln x}{x} \right) = 0 \end{aligned}$$

- التفسير الهندسي: (C_f) و (Γ) متقاربان بجوار $+\infty$

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Γ) :

[0.5ن]

$$\begin{aligned} f(x) - \ln x = 0 &\Rightarrow -\frac{1}{x} - \frac{2 \ln x}{x} = 0 \Rightarrow -1 - 2 \ln x = 0 \\ &\Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f(x) - \ln x$	+	0	-

• (C_f) فوق (Γ) لما $x \in]0; e^{-\frac{1}{2}}[$

• (C_f) يقطع (Γ) لما $x = e^{-\frac{1}{2}}$

• (C_f) تحت (Γ) لما $x \in]e^{-\frac{1}{2}}; +\infty[$

4 تبين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين:

[01ن]

من جدول تغيرات الدالة f نلاحظ أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين

- **التحقق أن:** $0.5 < \alpha < 0.6$ و $2.9 < \beta < 3$;

• لدينا: $0 < f(0.6) \times f(0.5) < 0$ لأن: $f(0.6) \approx -0.47$ و $f(0.5) \approx 0.08$

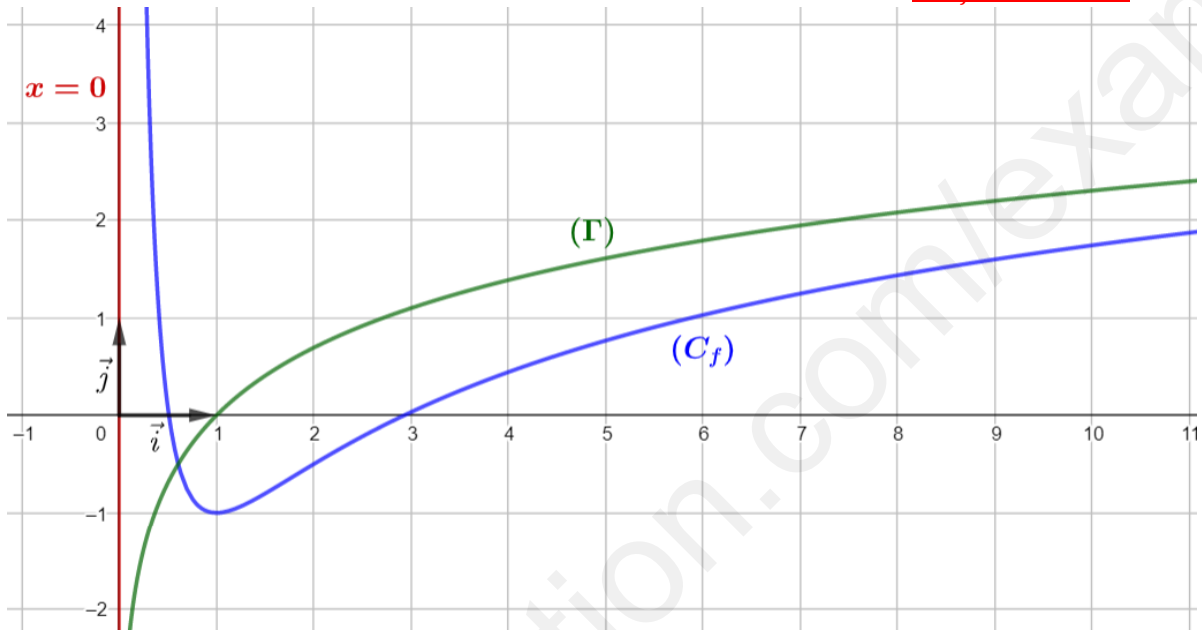
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0.5; 0.6[$

• ولدينا: $0 < f(2.9) \times f(3) < 0$ لأن: $f(2.9) \approx -0.01$ و $f(3) \approx 0.03$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]2.9; 3[$

5 رسم (Γ) و (C_f) :

[01ن]



6 حساب A :

[01ن]

$$A = \int_1^e (\ln x - f(x)) dx = \int_1^e \left(\frac{1}{x} + 2 \frac{1}{x} \ln x \right) dx = \left[\ln x + 2 \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e$$

$$= [\ln x + (\ln x)^2]_1^e = 2 \text{ cm}^2$$

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

♥ لا تنسونا من صالح دعائكم ♥

الأستاذ: قويسم براهيم الخليل



الموضوع الثاني

♦ التمرين الأول: (03 نقاط)

(I) [1.5ن] تعيين a, b و c

من البيان نجد:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \\ f(0) = 2 \\ f'(0) = 0 \end{cases}$$

• لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} ((ax + b)e^{-x} + c) = 1 \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

• ولدينا:

$$f(0) = 0 \Rightarrow (a(0) + b)e^{-0} + c = 2 \Rightarrow b + c = 2 \Rightarrow \boxed{b = 1}$$

• ولدينا:

$$f'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x} = (a - b - ax)e^{-x}$$

ومنه:

$$f'(0) = 0 \Rightarrow (a - b - a(0))e^{-0} = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

(II)

1 تعيين دالة أصلية للدالة f : [01ن]

$$g(x) = (x + 1)e^{-x} \text{ نسمي:}$$

$$v'(t) = e^{-t} \quad \text{و} \quad u(x) = t + 1 \text{ نضع:}$$

$$v(t) = -e^{-t} \quad \text{و} \quad u'(t) = 1 \text{ ومنه:}$$

إذن:

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-1}^x (t + 1)e^{-t} dt = [-(t + 1)e^{-t}]_{-1}^x - \int_{-1}^x -e^{-t} dt \\ &= [-(t + 1)e^{-t}]_{-1}^x - [e^{-t}]_{-1}^x = [-(t + 2)e^{-t}]_{-1}^x = \boxed{-(x + 2)e^{-x} + e} \end{aligned}$$

2 تبيين أن $A = e - 2$ [0.5ن]

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 ((x + 1)e^{-x} + 1) dx = \int_{-1}^0 (x + 1)e^{-x} dx + \int_{-1}^0 dx \\ &= [-(x + 2)e^{-x}]_{-1}^0 + [x]_{-1}^0 = [-(x + 2)e^{-x} + x]_{-1}^0 \\ &= \boxed{(e - 1)} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

♦ التمرين الثاني: (04.5 نقاط)

1 حساب احتمال الحوادث A و B : [01ن]

$$p(A) = \frac{A_3^2 + A_4^2 + A_2^2}{A_9^2} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

$$p(B) = \frac{A_4^1 A_8^1}{A_9^2} = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}$$

2 استنتاج احتمال سحب كرتين من لونين مختلفين: [0.5ن]

$$p(C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{20}{72} = \frac{52}{72} = \frac{13}{18}$$

3 حساب احتمال سحب كرتان من نفس اللون علما أن الكرة المسحوبة في المرة الأولى بيضاء: [0.5ن]

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{A_4^2}{A_9^2}}{\frac{32}{72}} = \frac{\frac{12}{72}}{\frac{32}{72}} = \frac{3}{8}$$

4 أ/ تعيين قيم المتغير العشوائي X ، وكتابة قانون احتماله: [1.5ن]

لدينا: $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$ حيث:

$$p(X = 0) = \frac{A_5^2}{A_9^2} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

$$p(X = 1) = \frac{2A_4^1 A_5^1}{A_9^2} = \frac{40}{72} = \frac{5}{9}$$

$$p(X = 2) = \frac{A_4^2}{A_9^2} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}$$

ومنه:

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{20}{72}$	$\frac{40}{72}$	$\frac{12}{72}$

ب/ حساب الأمل الرياضي $E(X)$: [0.5ن]

$$E(X) = 0 \frac{20}{72} + 1 \frac{40}{72} + 2 \frac{12}{72} = \frac{8}{9}$$

• حساب $E(1443X + 2022)$: [0.5ن]

$$E(1443X + 2022) = 1443E(X) + 2022 = \frac{9914}{3}$$

♦ التمرين الثالث: (05 نقاط)

(I) 1 دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها: [0.5ن]

$$f'(x) = \frac{2x(2x-1) - 2x^2}{(2x-1)^2} = \frac{2x(x-1)}{(2x-1)^2} > 0$$

إذن الدالة f متزايدة تماما على $[1; +\infty[$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	1	$+\infty$

2 تبين أنه من أجل كل $x \geq 1$ فإن: $f(x) \geq 1$: [0.25ن]

من جدول تغيرات الدالة f نجد أن $f(x) \geq 1$

(II) 1 برهان بالتراجع أنه من أجل كل n طبيعي فإن: $u_n \geq 1$: [0.5ن]

نسمي $u_n \geq 1 \dots P(n)$

• لدينا: $u_0 \geq 1$ ومنه: $2 \geq 1$ إذن $P(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$

• نفرض أن $u_n \geq 1$ ونثبت صحة $u_{n+1} \geq 1$

• لدينا: $u_n \geq 1$

وبما أن الدالة f متزايدة تماما على $[1; +\infty[$ فإن:

$$u_n \geq 1 \Rightarrow f(u_n) \geq f(1) \Rightarrow u_{n+1} \geq 1$$

حسب البرهان بالتراجع $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

② تبين أن (u_n) متناقصة تماما، واستنتاج أنها متقاربة:

[0.5ن]

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n)^2}{2u_n - 1} - u_n = \frac{-(u_n)^2 + u_n}{2u_n - 1} = \frac{u_n(1 - u_n)}{2u_n - 1}$$

ولدينا: $u_n \geq 1$ ومنه: $1 - u_n \leq 0$

ولدينا: $u_n \geq 1$ ومنه: $2u_n - 1 \geq 1$

إذن:

$$\frac{u_n(1 - u_n)}{2u_n - 1} < 0$$

وعليه (u_n) متناقصة تماما

• وبما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ 1 فهي متقاربة

③

أ/ تبين أن (w_n) هندسية أساسها 2 وحساب w_0 :

[0.5ن]

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \ln(v_{n+1}) = \ln\left(\frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{(u_n)^2}{2u_n - 1} - 1}{\frac{(u_n)^2}{2u_n - 1}}\right) = \ln\left(\frac{(u_n)^2 - 2u_n + 1}{(u_n)^2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(u_n - 1)^2}{(u_n)^2}\right) = 2 \ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right) = 2 \ln(v_n) = 2w_n \end{aligned}$$

$$w_0 = \ln(v_0) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

إذن (v_n) هندسية أساسها 2 وحدها الأول $-\ln 2$

ب/ كتابة بدلالة n عبارة w_n :

[0.5ن]

$$w_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times (2)^n = \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)$$

• **استنتاج بدلالة n عبارة v_n :**

[0.5ن]

$$w_n = \ln(v_n) \Rightarrow e^{w_n} = v_n \Rightarrow v_n = e^{\ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)} \Rightarrow v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$$

④ استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

[0.5ن]

لدينا:

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \Rightarrow v_n u_n = u_n - 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{1 - v_n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$$

• **حساب نهاية (u_n) :**

[0.5ن]

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}} \right) = 1$$

لأن: $\left(-1 < \frac{1}{2} < 1\right), \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right) = 0$

5

أ/ كتابة بدلالة n المجموع S_n :

$$S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2}\right) = \boxed{\ln(2) (1 - 2^{n+1})}$$

ب/ كتابة بدلالة n الجداء P_n :

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n = e^{w_0} \times e^{w_1} \times \dots \times e^{w_n} = e^{w_0 + w_1 + \dots + w_n} = e^{S_n} = e^{\ln(2)(1 - 2^{n+1})} = \boxed{2^{(1 - 2^{n+1})}}$$

♦ التمرين الرابع: (07.5 نقاط)

(I)

1 دراسة اتجاه تغير الدالة g ، وتشكيل جدول تغيراتها:

- النهايات:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x}e^2 - xe^{-x}e^2 + 1) = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

- المشتقة:

$$g'(x) = -e^{2-x} - (1-x)e^{2-x} = (x-2)e^{2-x}$$

لدينا: $e^{2-x} > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $x-2$:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	0	1

2 تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $g(x) \geq 0$:

من جدول تغيرات الدالة g نجد أن $g(x) \geq 0$ (لأن الدالة g تبلغ قيمة حدية دنيا موجبة)

(II)

1 حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2 - (-x)e^{-x}e^2) = \boxed{+\infty}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$

2 أ/ حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)]$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [xe^{2-x}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-(-x)e^{-x}e^2] = 0$$

• نستنتج أن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y = x + 2$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) :

$$f(x) - (x+2) = xe^{2-x}$$

لدينا: $e^{2-x} > 0$ إذن إشارة الفرق من إشارة x :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+

- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]-\infty; 0[$

- (C_f) يقطع (Δ) لما $x = 0$

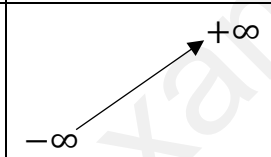
- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]0; +\infty[$

③ / تبين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا: $f'(x) = g(x)$ ؛

$$f'(x) = 1 + e^{2-x} - xe^{2-x} = (1-x)e^{2-x} + 1 = g(x)$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها؛

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه؛

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

④ تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0.31; 0.32[$ ؛

لدينا الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

ولدينا: $f(0.31) \approx -0.01$ و $f(0.32) \approx 0.04$ لأن: $f(0.31) \times f(0.32) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0.31; 0.32[$

⑤ تبين (C_f) يقبل نقطة إنعطاف؛

لدينا: $f'(x) = g(x)$

ومنه: $f''(x) = g'(x)$

إذن إشارة $f''(x)$ من إشارة $g'(x)$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

المشتقة الثانية تنعدم عند $x = 2$ وتغير إشارتها

إذن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف $(\Omega(2; f(2)))$ أي: $\Omega(2; 2)$

⑥ تبين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) ؛

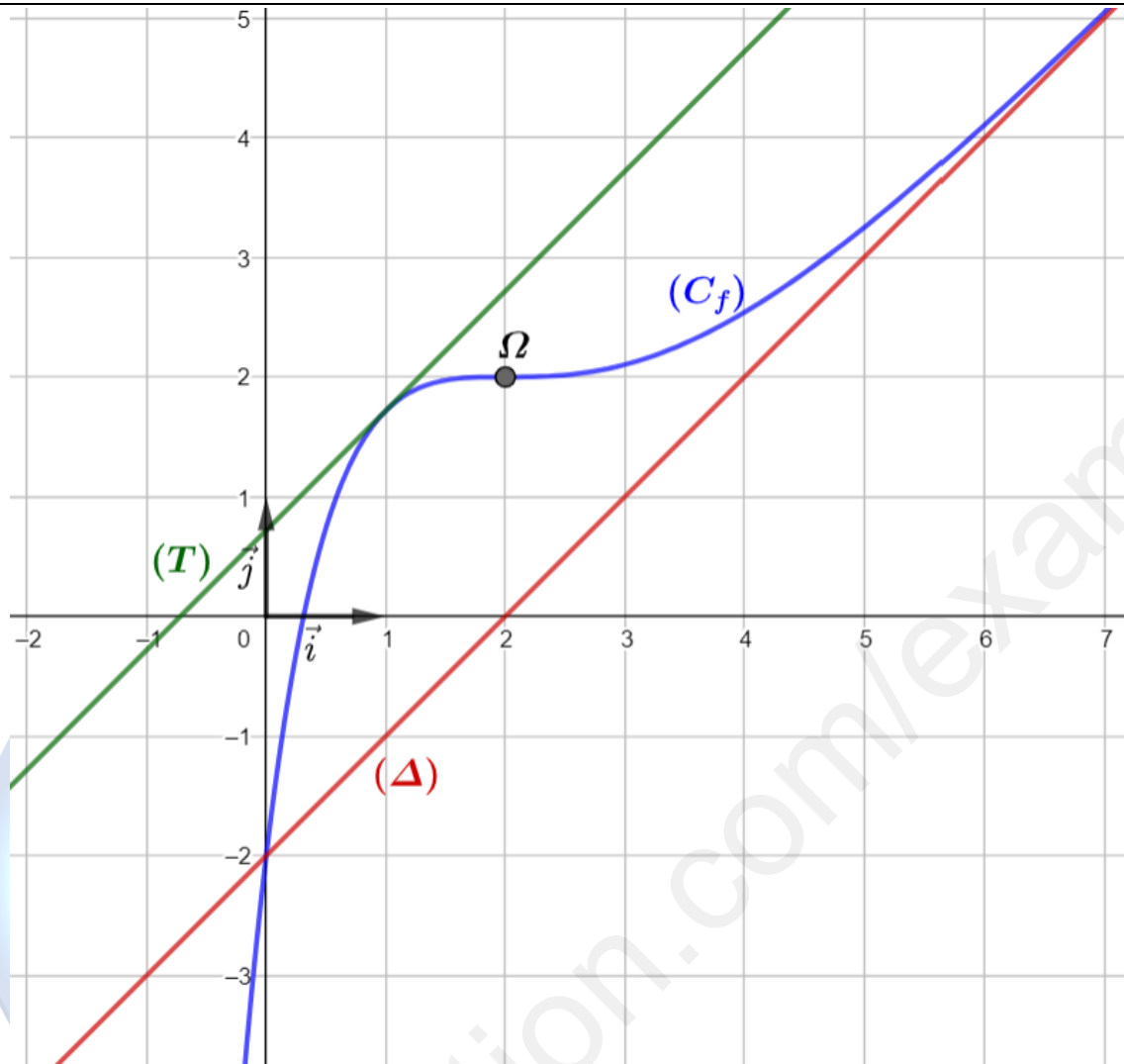
$$f'(a) = 1 \Rightarrow (1-a)e^{2-a} + 1 = 1 \Rightarrow (1-a)e^{2-a} = 0 \Rightarrow 1-a = 0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

إذن (C_f) يقبل مماسا موازيا لـ (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة $x = 1$

- كتابة معادلة (T) ؛

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1) = \boxed{x + e - 2}$$

⑦ رسم (T) ، (Δ) و (C_f) ؛



[0.5ن]

8 المناقشة البينائية:

حلول المعادلة $f(x) = x + m$ هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلات $y_m = x + m$

وهي:

المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا تماما	$m < -2$	لما
المعادلة تقبل حلا معدوما	$m = -2$	لما
المعادلة تقبل حلين موجبيين	$-2 < m < e - 2$	لما
المعادلة تقبل حلا وحيدا قيمته $x = 1$	$m = e - 2$	لما
المعادلة لا تقبل حولا	$m > e - 2$	لما

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

♥ لا تنسونا من صالح دعائكم ♥

الأستاذ: قويسم براهيم الخليل



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

فيما يلي أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل في كل مرة :

(1) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 5}\right)$ و (C) تمثيلها البياني في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

☞ المستقيم ذا المعادلة $x = -1$ هو محور التناظر لـ (C) .

(2) a عدد طبيعي حيث : $a = 5^6 \times 25^{1443}$ ، عدد أرقام العدد a هو : 2022 .

(3) المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{7}$ ، حدها الأول v_0 و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = 2289$ إذن : $v_0 = 1962$.

(4) لاختبار أحد الطلبة وضع أستاذ الرياضيات في علبة خمسة أسئلة في الدوال و أربعة أسئلة في الإحتمالات وثلاثة أسئلة في المتتاليات ، على الطالب أن يسحب عشوائيا سؤالا ثلاث مرات على التوالي دون إرجاع .

☞ احتمال أن يسحب الطالب سؤال في الدوال وسؤال في الإحتمالات وسؤال في المتتاليات هو : $\frac{3}{11}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي الصندوق U_1 على ثلاث كريات تحمل الأرقام : 2 ، 2 و 3 و يحتوي الصندوق U_2 على تسع كريات منها أربعة خضراء تحمل كل منها الرقم 3 وخمس كريات حمراء تحمل الأرقام : 1 ، 2 ، 2 ، 3 و 4 (الكريات لا يمكن التمييز بينها باللمس) نسحب عشوائيا كرية من الصندوق U_1 ونسجل رقمها وليكن n .

إذا كان $n = 2$: نسحب عشوائيا من الصندوق U_2 كريتين على التوالي من دون إرجاع .

إذا كان $n = 3$: نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الصندوق U_2 .

- نعتبر الحدثين التاليين : A : " الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 لها نفس اللون " .

B : " الكريات المسحوبة من الصندوق U_2 تحمل نفس الرقم " .

(1) أ- بين أن : $P(A) = \frac{19}{54}$ ، ثم احسب $P(B)$ إحتمال الحدث B .

ب- بين أن : $P(A \cap B) = \frac{55}{378}$ ، ثم إستنتج : $P_A(B)$.

ج- هل الحدثان A و B مستقلان ؟ علل إجابتك .

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكريات الحمراء المسحوبة من الصندوق U_2 .

- عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{5u_n}{3u_n + 5}$.

(1) احسب كلا من : u_1 ، u_2 و u_3 .

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n > 0$.

(3) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{5(u_{n+1} - u_n)}{6u_n + 5}$.
 ب- إستنتج أن الفرقين : $u_{n+2} - u_{n+1}$ و $u_{n+1} - u_n$ من نفس الإشارة .

ج- برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن : $u_{n+1} - u_n < 0$ ، ثم استنتج إتجاه تغير المتتالية (u_n) .

د- هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟ . برر إجابتك .

(4) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{5}{u_n}$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول v_0 .

ب- عبر عن v_n و u_n بدلالة n ، ثم احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(5) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $S_n = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3 + \dots + nu_nv_n$.

- بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ فإن : $S_n = 5 \left(\frac{n^2 + n}{2} \right)$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$ ، (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد

المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، وحدة الطول هي $2cm$.

(1) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(-x) + f(x) = 2$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل النقطة A كمركز

التناظر يطلب تحديد إحداثيها .

ب- أحسب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ ، ثم فسر النتائج ببيانها .

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$ ، ثم استنتج إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

(3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0 .

II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = f(x) - (x+1)$.

(1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $g'(x) = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$.

(2) عين إتجاه تغير الدالة g ، احسب $g(0)$ ثم حدد إشارة $g(x)$.

(3) إستنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T) .

(4) أ - بين أن : $f(x) = x$ إذا وفقط إذا كان : $g(x) = -1$.

ب - إستنتج أن المستقيم (D) ذا المعادلة : $y = x$ يقطع المنحنى (C_f) في نقطة واحدة فاصلتها α حيث : $2 < \alpha < 3$.

(5) أنشئ المماس (T) ، المنحنى (C_f) و مستقيمه المقاربين .

(6) m وسيط حقيقي ، عين بيانيا قيم m حتى تقبل المعادلة : $f(x) = mx + 1$ حلان مختلفان في الإشارة و حل معدوم .

(III) 1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1} - 1$ ، ثم إستنتج دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$.

(2) احسب بـ : cm^2 مساحة الحيز المستو المحدد بالمنحنى (C_f) ، المستقيم (D) و حامل محور الترتيب والمستقيم الذي معادلته $x = 1$.

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثانيالتمرين الأول: (05 نقاط)

المتتالية (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n}{2 + 2^n \cdot u_n}$.

(1) احسب u_1 .

(2) أ - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$.

ب - ادرس رتبة المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة .

(3) نعرف على $\mathbb{N}$ المتتالية (v_n) كما يلي : $v_n = \frac{1}{2^n \cdot u_n}$.

أ - برهن أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول v_0 .

ب - اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n = \frac{1}{(n+2)2^{n-1}}$.

ج - احسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 \cdot v_0 + u_1 \cdot v_1 + \dots + u_n \cdot v_n$.

أ - بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $S_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

ب - عين أكبر قيمة للعدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $S_n \leq 1,9999$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

يحتوي صندوق على أربع كريات سوداء و كرية واحدة بيضاء (كل الكريات متماثلة ولا فرق بينها عند اللمس) .
نعتبر اللعبة التالية : يقوم اللاعب برمي زهر نرد متزن مرقم من 1 إلى 6 ، إذا كان الرقم الظاهر فرديا نضيف كرية بيضاء في الصندوق و إذا كان الرقم الظاهر زوجيا نضيف كرية سوداء في الصندوق ، بعد ذلك يسحب اللاعب في آن واحد ثلاث كريات من الصندوق .

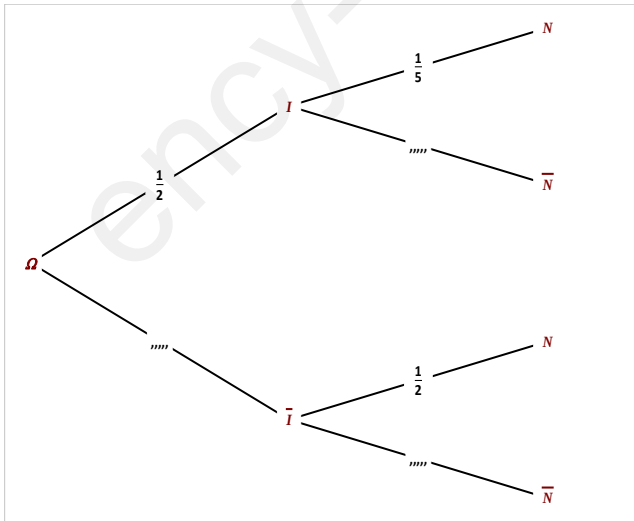
نعبر الأحداث التالية : I " الرقم الظاهر فردي " ، N " الكريات الثلاث المسحوبة سوداء " .

(1) احسب الإحتمالات : $P(I)$ ، $P(N)$ ، $P_I(N)$ ، $P(N \cap I)$ و $P_I(N)$.

(2) أ - أنقل شجرة الإحتمالات المقابلة التي تتمزج هذه التجربة ثم أكملها .

ب - بين أن : $P(N) = \frac{7}{20}$.

(3) علما أن الكريات المسحوبة كلها سوداء ، ما إحتمال أن يكون الرقم الظاهر زوجيا ؟ .



(4) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

أ - بين أن : $P(X=1) = \frac{11}{20}$.

ب - عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

ج - أعط تقديرا للقيمة المتوسطة لعدد الكريات البيضاء المسحوبة ، ثم استنتج التباين $V(X)$.

التمرين الثالث: (03 نقاط)

نعتبر التكاملين التاليين : $I = \int_0^{\ln 2} \frac{3e^x + 2}{e^x + 1} dx$ و $J = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} + 3e^x + 1}{e^x + 1} dx$.

(1) أ - تحقق أن : $I - J = \int_0^{\ln 2} (1 - e^x) dx$.

ب - استنتج أن : $I - J = \ln 2 - 1$.

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\frac{e^{2x} + 3e^x + 1}{e^x + 1} = e^x + 1 + \frac{e^x}{e^x + 1}$.

(3) احسب J ، ثم استنتج I .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) الدالة g معرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = \frac{\ln x}{x} + 1$.

(1) احسب نهايتي الدالة g عند حدود مجموعة تعريفها .

(2) ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها .

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ينتمي إلى المجال $]0,5; 0,6[$.

(4) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + x - 1$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب كلا من : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، و فسر بيانها النهاية عند 0 .

(2) أ - بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = g(x)$.

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

(3) أ - اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

ب - ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (T) .

(4) أنشئ (T) ، ثم مثل (C_f) . (نضع : $f(\alpha) \approx -0,3$)

(5) الدالة h معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x) = -\frac{1}{2}(\ln|x|)^2 - |x| + 1$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

أ - اثبت أن الدالة h زوجية .

ب - اشرح كيفية تمثيل المنحنى (C_h) انطلاقا من (C_f) ، ثم مثله .

(6) m وسيط حقيقي ، نعتبر المستقيمات (Δ_m) المعرفة بالمعادلة : $y = mx - m$.

أ - بين أن جميع المستقيمات (Δ_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثياتها .

ب - ناقش بيانيا و حسب قيم العدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = mx - m$.

(7) أ - بين أن الدالة $x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على $]0; +\infty[$.

ب - باستعمال التكامل بالتجزئة عبر عن العدد $A(\lambda)$ بدلالة λ حيث : $0 < \lambda < 1$ و $A(\lambda) = \int_{\lambda}^1 (\ln x)^2 dx$.

ج - احسب بدلالة λ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، المماس (T) و المستقيمين اللذين معادلتهما :

$$x = \lambda , x = 1$$

إنتهى الموضوع الثاني



2 046260 812018

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

الديوان الوطني لامتحانات و المسابقات
ولاية المنية

وزارة التربية الوطنية
امتحان البكالوريا التجريبي

دورة : ماي 2022

الشعبة : علوم تجريبية

المدة : 03 سا و 30 د

اختبار في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :
الموضوع الأول :

التمرين الأول: (04 نقاط)

إختر الإجابة الصحيحة مع التعليل.

(1) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$ ، من أجل كل عدد حقيقي x :

(أ) $f(-2 - x) = f(x)$ (ب) $f(2 - x) = f(x)$ (ج) $f(-x) = f(x)$

(2) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $u_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{2}{x} (1 + \ln x) dx$

نضع: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{36}$ ، قيمة S هي:

(أ) $S = 2022$ (ب) $S = 1443$ (ج) $S = 1444$

(3) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y' - (\ln 2)y - \ln 8 = 0$ الذي يحقق $y(0) = 1$ هو:

(أ) $y = 2^{x-1} + 3$ (ب) $y = 2^{x+2} - 3$ (ج) $y = 4e^x + 1$

(4) الجدول المقابل يعرف قانون الاحتمال لتجربة عشوائية:

x_i	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0.2	0.4	0.1	0.3

* تبين قانون الاحتمال هو:

(أ) 1.12 (ب) 2.5 (ج) 1.25

* اذا كانت A و B حادثتين مستقلتين حيث $P(A) = 0.3$ ، $P(B) = 0.4$ فإن $P(A \cap B)$ هو:

(أ) 0.12 (ب) 0.7 (ج) 0.75

(5) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C_n^{1000}}{n^{1000}}$ هي:

(أ) 0 (ب) $\frac{1}{1000!}$ (ج) $+\infty$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n^2$

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln\left(\frac{2}{3}u_n\right)$

(1) (ا) برهن بالتراجع ،أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n: 0 < u_n < \frac{3}{2}$.

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية u_n ، ثم استنتج أنها متقاربة.

(2) (ا) أثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها ،وحدها الأول v_0 .

(ب) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثم استنتج أن : $u_n = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$

(ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) نضع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $S'_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$ و $S''_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2$

(ا) أحسب بدلالة n المجموع S_n .

(ب) أثبت أن $e^{S_n} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} S'_n$ ثم عبر عن S'_n بدلالة n .

(ج) احسب S''_n بدلالة n .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

فوج رياضي يتكون من 8 ذكور و 4 إناثا ،يراد تمثيله بلجنة من 3 أعضاء .

(1) (ا) بكم طريقة يمكن إختيارهم.

(ب) ما احتمال أن لا تشمل اللجنة إناثا.

(ج) ما احتمال أن تشمل الجنسين معا.

(2) نفرض اللجنة المشكلة من رئيس ونائب له ،ومنسق.

(ا) بكم طريقة يمكن اختيارهم.

(ب) ما احتمال أن تشمل اللجنة رجلا على الأقل.

(3) تشكل اللجنة الآن كما في السؤال (1-أ) ولكن يشترط الشخص X أن لاتشمل اللجنة الشخص Y ،

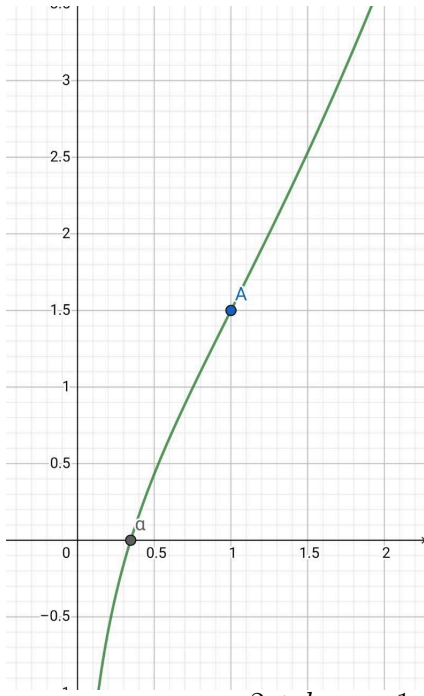
(X ، Y رياضيان من الفوج) .

(ا) ما هو عدد الطرق الممكنة.

(ب) علما أن X و Y ذكران ،أحسب احتمال أن تشمل اللجنة الجنسين معا.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، التمثيل البياني (C_g) للدالة g يقبل A نقطة انعطاف له.



(I)
1) الدالة g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ: $g(x) = a(\ln x + 1) - bx^2$ ، حيث a و b عدنان حقيقيان .

- عين قيمة a و b .

2) من أجل $a = 1$ و $b = -\frac{1}{2}$:

(I) تحقق مما يلي:

• g متزايدة تماما على $]0, +\infty[$.

• α محصور بين 0.3 و 0.4 .

(ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $]0, +\infty[$.

(II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{2 + \ln x}{x} - \frac{1}{2}x - 1$.

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

2) (I) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}g(x)$.

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3) (I) بين أن المستقيم $y = -\frac{1}{2}x - 1$: (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ ، ثم أدرس وضعيته بالنسبة لـ (C_f) .

(ب) بين أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها .

4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β على المجال $]1.3; 1.4[$.

5) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازي لـ (Δ) يطلب تعيين معادلة له .

6) أثبت أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha} - \alpha - 1$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

7) أنشئ (Δ) و (T) ثم (C_f) ، (بأخذ: $f(\alpha) = 1.52$) .

8) ناقش بيانيا وحسب قيم m عدد حلول المعادلة: $\frac{2 + \ln x}{x} - \int_m^{-1} e^0 dt = 0$.

9) عين دالة أصلية للدالة $x \rightarrow \frac{2 + \ln x}{x}$ ، ثم استنتج مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمحصور بين المستقيمين اللذين معادلتاهما : $x = 2$ و $x = 3$.

10) الدالة h معرفة على $]0, +\infty[$ بـ: $h(x) = -|f(x)|$ ، أرسم (C_h) مع شرح كيفية استنتاجه إنطلاقا من (C_f) .

الموضوع الثاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = \frac{e^{2x} - e^x + 1}{e^x - 1}$ وليكن (C_f) المنحنى البياني الممثل لها في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

عين الإقتراح الصحيح الوحيد من الإقتراحات الثلاثة مع التبرير.

(1) من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f(x) = e^x + a + \frac{be^x}{e^x - 1}$ قيمة a و b هي :

(أ) $a = 1, b = 1$ (ب) $a = -1, b = 0$ (ج) $a = -1, b = 1$

(2) الدالة الأصلية للدالة f على $]0; +\infty[$ هي الدالة F والتي تحقق $F(\ln 2) = 2$ هي :

(أ) $F(x) = e^x - \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right)$ (ب) $F(x) = e^x + \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right)$ (ج) $F(x) = e^x - \ln\left(\frac{e^x}{e^x - 1}\right) + \ln 2$

(3) مساحة الحيز A المستوي والمحدد بالمنحنى (C_f) والمنحنى (δ) للدالة $x \rightarrow e^x - 1$ والمستقيمين الذين معادلتهما $x = 1$ و $x = 2$ هي:

(أ) $\ln(2e)$ (ب) $\ln(e - 1)$ (ج) $\ln(e + 1)$

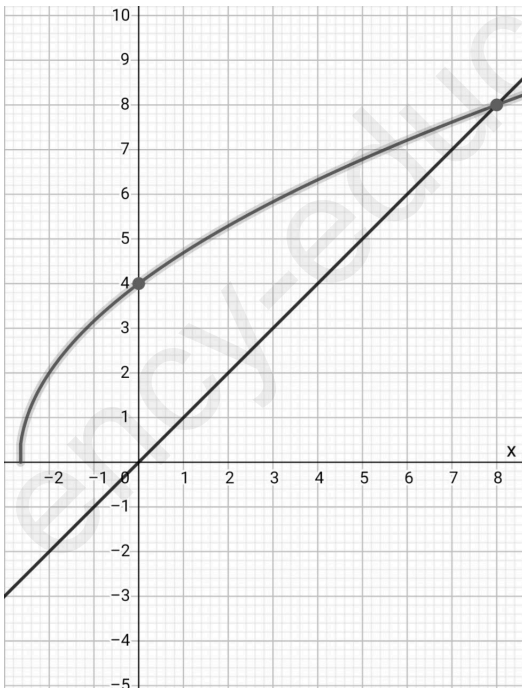
(4) باستعمال المكاملة بالتجزئة لـ $I = \int_1^2 \frac{xe^x}{(e^x - 1)^2} dx$ نجد I يساوي :

(أ) $I = \frac{e^3 - e + 1}{e + 1} - \int_1^2 f(x) dx$ (ب) $I = \frac{e + 1}{e - 1} + \int_1^2 f(x) dx$ (ج) $I = \frac{-e^3 + e + 1}{e + 1} + \int_1^2 f(x) dx$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

(1) $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية حدودها موجبة تماما حيث: $\ln v_2 - \ln v_3 = \ln 2$ و $\ln \sqrt[3]{v_6} + \ln v_2 = 0$.

- عين أساس المتتالية v_n وحدها الأول v_0 ، ثم أكتب v_n بدلالة n وادرس تقاربها.



(2) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = 0$

ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{6u_n + 16}$.

لتكن h الدالة المعرفة على المجال $]-\frac{8}{3}; +\infty[$ كمايلي:

$h(x) = \sqrt{6x + 16}$ ، (C) تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم

ذو المعادلة $y = x$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد

ومتجانس. (أنظر الشكل المقابل).

- أعد رسم الشكل المقابل على ورقة الإجابة ثم مثل على محور

الفواصل الجدود u_0, u_1, u_2, u_3 ثم ضع تخمينا حول اتجاه

تغير (u_n) وتقاربها.

(3) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: 0 \leq u_n < 8$ ثم استنتج اتجاه تغير (u_n) وتقاربها.

(4) (ا) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: 0 < 8 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(8 - u_n)$.

(ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: 0 < 8 - u_n \leq v_n$ ، ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على 9 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس منها كرتين بيضاوين مرقمة بـ: 3، 2 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 3، 3، 1، 3 وأربع كريات سوداء مرقمة بـ: 3، 3، 2، 2. نسحب عشوائيا وفي أن واحد كرتين من الصندوق U_1 . نعتبر الحادثتين:

A : "الكرتين المسحوبتين تحمل نفس الرقم".

B : "الكرتين المسحوبتين تحمل نفس اللون".

(1) (ا) أحسب $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين A و B على الترتيب.

(ب) بين أن $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ ثم استنتج $P(A \cup B)$ و $P_A(B)$.

(2) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة جداء رقمي الكرتين المسحوبتين.

(ا) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضي $E(X)$.

(ب) أحسب: $P(e^{2X} - 5e^X \leq -4)$.

(3) نعتبر الصندوق الأول U_1 وصندوق آخر U_2 يحتوي على 6 كريات متماثلة لا نفرق بينهما باللمس منها كرتين بيضاوين مرقمة بـ: 1، 1 وكرتين حمراوين مرقمة بـ: 3، 1 وكرتين سوداوين مرقمة بـ: 2، 2. نرمي حجر نرد متوازنة مرقمة من 1 إلى 6 مرة واحدة فعند ظهور رقم فردي نسحب كرة من الصندوق الأول U_1 وعند ظهور رقم زوجي نسحب كرة من الصندوق الثاني U_2 .

(ا) بين أن احتمال ظهور كرة بيضاء هو $\frac{5}{18}$.

(ب) علما أن الكرة المسحوبة بيضاء ، ما احتمال أن تكون من الصندوق الثاني U_2 .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$.

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (الوحدة 4cm)

(1) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x + 2 - e^x$.

(ا) ادرس تغيرات الدالة g على المجال $]0; +\infty[$.

(ب) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$. ثم تحقق أن $1.14 < \alpha < 1.15$.

(ج) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

(2) (ا) بين من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$.

(ب) احسب نهاية الدالة f بجوار $+\infty$ ، وفسر النتيجة بيانيا.

(ج) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$.

-استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ وشكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

(4) اكتب معادلة للمستقيم المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0.

(5) (ا) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$

حيث u الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $u(x) = e^x - xe^x - 1$.

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة u ثم استنتج إشارة $u(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(ج) استنتج وضعية المستقيم (T) مع المنحنى (C).

(6) ارسم (T) و (C).

(7) (ا) عين دالة أصلية F للدالة f على المجال $]0; +\infty[$. (استعمل عبارة f في السؤال 2)

(ب) احسب بالسنتيمتر المربع A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) ، والمستقيم (T) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = 2$ (تعطى النتيجة بالتقريب إلى 10^{-2}).

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_1 = \ln(2) \\ u_{n+1} = \ln(2 - e^{-u_n}) \end{cases}$$

1. (0,5) أ، تحقق أن: $u_2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ و $u_3 = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$

(ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n: u_n > 0$.

2. (0,75) أ، بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $2 - e^{-u_n} - e^{u_n} = -e^{-u_n} (e^{u_n} - 1)^2$ ثم استنتج أن: $2 - e^{-u_n} < e^{u_n}$.

(ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة.

3. (0,1) برهن بالتراجع من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4. (0,5) نعتبر الجداء P بحيث: $P = e^{u_1} \times e^{u_2} \times \dots \times e^{u_{2021}}$.
✓ بين أن: $P = 2022$

التمرين الثاني: 04 نقاط

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1. (1) نعتبر الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x) = 1443 - 2022x$.

✓ الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2. (1) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = 2x \ln(x)$.

✓ الدالة الأصلية للدالة h والتي تنعدم عند العدد 1 هي الدالة H المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $H(x) = x^2 \ln(x)$.

3. (0,5) المتتالية العددية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $w_n = \frac{\ln(n)}{e^n}$ متقاربة.

4. (1) نعتبر الدالة g المعرفة على $]1; +\infty[\cup]-\infty; -1[$ بـ: $g(x) = x - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

✓ الدالة g زوجية.

التمرين الثالث: 05 نقاط

يحتوي كيس على سبع كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها أربع كريات بيضاء و ثلاث كريات خضراء.

1. انسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كريات من الكيس.
1. احسب احتمال كل من الحادثتين A و B بحيث A : عدد الكريات البيضاء المسحوبة أكبر تماما من عدد الكريات الخضراء المسحوبة و B : الحصول على كرتين بالضبط من نفس اللون.
2. احسب $P(A \cap B)$ ثم استنتج كلا من $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$.
1. انسحب الآن ثلاث كريات على التوالي دون إرجاع و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات البيضاء المتبقية في الكيس.
1. عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .
2. احسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X ، ثم استنتج $E(1743X - 1962)$.

التمرين الرابع: 07 نقاط

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $g(x) = 2e^{x-1} - x - 1$.
1. احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.
2. أ. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما العدد 1 والآخر α بحيث $-0,6 < \alpha < -0,5$.
- ب. استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.
1. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x - 2 + (x + 2)e^{1-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1. أ. بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- ب. بين أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^{1-x} g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
- ج. بين أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = xe^{1-x}$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثياتها.
2. بين أن $f(\alpha) = 2\alpha + \frac{2}{\alpha + 1}$ ، ثم اعط حصر $f(\alpha)$.
3. أ. بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ ، ثم ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) .
- ب. بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب كتابة معادلته.
4. أ. أنشئ كلا من (Δ) ، (T) ثم مثل (C_f) . نقبل أن $f(\beta) = 0$ بحيث $-1,63 < \beta < -1,61$ $f(\alpha) \approx 3,43$.
- ب. عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = 2(x - 1) + m$ حلين مختلفين في الإشارة.
5. أ. بين أن الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $H(x) = (-x - 3)e^{1-x}$ دالة أصلية للدالة $(x + 2)e^{1-x}$ على $\mathbb{R}$.
- ب. استنتج A مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = -2$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

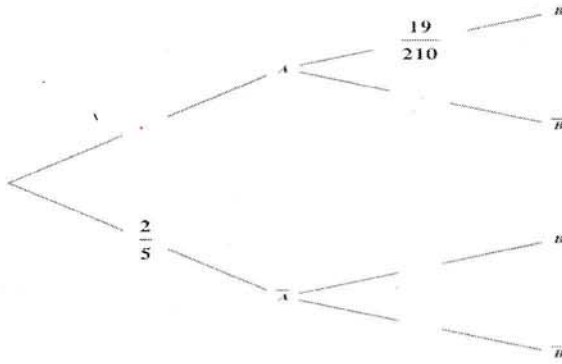
التمرين الأول: 5 نقاط

يحتوي وعاء U على 10 كريات منها خمس كريات حمراء مرقمة بـ: $-2, -1, 0, 1, 2$ وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: $-1, 0, 1$ وكريتين سوداوين مرقمتين بـ: $-1, 1$ ويحتوي وعاء V على 9 كريات موزعة كما يلي: خمس كريات حمراء مرقمة بـ: $1, 2, 2, 2, 2$ وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: $3, 2, -3$ وكريّة سوداء مرقمة بـ: -1 ، ويحتوي وعاء W على خمس كريات منها ثلاث كريات بيضاء وكريتين صفراوين.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربع كريات من أحد الوعاءين U أو V بالكيفية التالية:

نقوم بسحب كريّة واحدة عشوائيا من الوعاء W ، إذا تحصلنا على كريّة بيضاء نسحب الكريات الأربعة من U وإذا تحصلنا على كريّة صفراء نسحب الكريات الأربعة من V .

نسمي A الحدث: الحصول على كريّة بيضاء، ونسمي B الحدث الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم.



1. انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها موضحا طريقة الحساب.

2. استنتج $P(B)$ ثم احسب $P_B(A)$.

3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة.

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي $E(X)$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

1. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدّها الأول: $u_0 = e^{-1}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n \sqrt{u_n}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$.

2. أ) بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ب) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

II. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي بـ: $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \ln(u_n)$.

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدّها الأول.

2. اكتب بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^n}$.

3. احسب بدلالة n المجموع S_n بحيث $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_n)$.

التمرين الثالث: 04 نقاط

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $D = [0; \ln 2]$ بـ: $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$ ، $g(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ ، وليكن

(C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين على الترتيب في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$$\text{نضع } I = \int_0^{\ln 2} f(x) dx \text{ و } J = \int_0^{\ln 2} g(x) dx$$

1. $\frac{1}{3} \leq g(x) \leq \frac{1}{2} : x \in D$ ، ثم أعط حصرا للتكامل J . (8)
2. أثبت أن $I - J = \int_0^{\ln 2} (e^x - 1) dx$ ، ثم استنتج مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و (C_g) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 0$ و $x = \ln 2$. (8)
3. أ) تحقق أنه من أجل $x \in D$: $f(x) = e^x - \frac{e^x}{e^x + 1}$ ، ثم احسب التكامل I . (8)
ب) استنتج قيمة التكامل J ، ثم فسر النتيجة هندسيا. (8)

التمرين الرابع: 07 نقاط

- I. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - 1 - \ln x$.
1. احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها. (8, 5)
2. احسب $g(1)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$. (2, 8)
- II. الدالة f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln x + \frac{2 + \ln x}{x}$ تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
1. أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (8)
ب) بين أنه من أجل $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f . (8)
ج) استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها. (8)
2. ليكن (P) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$.
أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا. (8, 5)
ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (P) . (8)
3. أ) بين أن (C_f) يقطع حامل محاور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α بحيث $0,17 < \alpha < 0,19$ ، ثم استنتج حسب قيم x إشارة $f(x)$. (8, 7, 8)
ب) ارسم (P) ثم ارسم (C_f) . (8, 5)
4. ادرس اتجاه تغير الدالة h المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = [f(x)]^2$ دون تعيين عبارتها. (8)

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح لنصود فيه لاحقاً، الكمال الواجب لتجريبنا في مادة الرياضيات

المشكلة: علوم تجربتي

اخترنا

الحاجة

الموضوع الأول

حد ليمتري في الشكل

$$\begin{cases} U_1 = \ln 2 \\ U_{n+1} = \ln(2 - e^{-U_n}) \end{cases} \quad \text{لدينا}$$

(1) التحقق أن $U_2 = \ln \frac{3}{2}$ و $U_3 = \ln \frac{4}{3}$

$$U_2 = \ln(2 - e^{-U_1}) = \ln(2 - e^{-\ln 2}) = \ln(2 - \frac{1}{2}) = \ln \frac{3}{2}$$

$$U_3 = \ln(2 - e^{-U_2}) = \ln(2 - e^{-\ln \frac{3}{2}}) = \ln(2 - \frac{2}{3}) = \ln \frac{4}{3}$$

(2) البرهان بالتراجع أنه حد أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n > 0$

لدينا $U_1 = \ln \frac{3}{2} > 0$ و $U_2 = \ln \frac{3}{2} > 0$ أي لخاصية منحدرة

من أجل $n \geq 4$ نفرض أنه حد أجل $U_n > 0$ و $U_{n+1} > 0$ و $n \geq 1$

لدينا $U_n > 0$ أي $-U_n < 0$ ومنه $e^{-U_n} < 1$ ومنه $2 - e^{-U_n} > 1$

ومنه $\ln(2 - e^{-U_n}) > 0$ وعليه $U_{n+1} > 0$

وبالتالي $U_{n+1} > 0$ ومنه لخاصية منحدرة حد أجل $n+1$

ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع : $U_n > 0$ لـ $n \in \mathbb{N}^*$

(3) إثبات أنه حد أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $2 - e^{-U_n} - e^{U_n} < 0$

$$2 - e^{-U_n} - e^{U_n} = -e^{-U_n} \left(-\frac{2}{e^{-U_n}} + 1 + \frac{e^{U_n}}{e^{-U_n}} \right)$$

$$= -e^{-U_n} (e^{2U_n} - 2e^{U_n} + 1)$$

ومنه

$$2 - e^{-U_n} - e^{U_n} = -e^{-U_n} (e^{U_n} - 1)^2$$

وبالتالي

المستنتاج أنه : $2 - e^{-U_n} - e^{U_n} < 0$ لـ $n \in \mathbb{N}^*$ حد أجل

لها أن $2 - e^{-U_n} < e^{U_n}$ و بالتالي

حل المتري الثاني:

الإجابة بصريح أو خطأ صح السبرير في الحالة من حالات التالفة:

(1) الدالة $e^{ax} \rightarrow x$ متناقصة فاما على $\mathbb{R}$ فهو صحيح لأنه

الدالة $e^{ax} \rightarrow x$ عبارة عن مركب دالتي متناقصتين في

اتجاه آخر (u متناقصة فاما على $\mathbb{R}$ و $e^x \rightarrow x$ متناقص فاما على $\mathbb{R}$)

(2) خطأ لأن:

$$H(x) = \int_1^x h(t) dt = \int_1^x (2t \ln t) dt$$

نضع $v(t) = t^2$ و $u'(t) = \frac{1}{t}$ ومنه $v'(t) = 2t$ و $u(t) = \ln t$

$$H(x) = [t^2 \ln t]_1^x - \int_1^x t dt$$

ومنه:

$$H(x) = [t^2 \ln t]_1^x - [\frac{1}{2} t^2]_1^x =$$

ومنه:

$$H(x) = x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2}$$

وبالتالي:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{e^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln(n)}{n} \rightarrow 0}{\frac{e^n}{n} \rightarrow +\infty} = 0$$

(3) صحيح لأن:

(4) خطأ لأن: عند أجل $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ فإن $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$

$$g(-x) = -x - \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) = -x - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

و

$$g(-x) = -x + \ln\left(\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}\right) = -x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

ومنه:

$$= -\left(x - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$$

ومنه $g(-x) = -g(x)$ وعليه g دالة فردية وليست زوجية

حل امثلة 8

(I) سحب عشوائي من أن واحد ثلاث كرات من كيس

(1) حساب $P(A)$ و $P(B)$

$$P(A) = \frac{C_4^2 \times C_3^1 + C_4^3}{C_7^3} = \frac{18 + 4}{35} = \frac{22}{35}$$

$$P(B) = \frac{C_4^2 \times C_3^1 + C_4^1 \times C_3^2}{C_7^3} = \frac{18 + 12}{35} = \frac{30}{35} = \frac{6}{7}$$

(2) حساب $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = \frac{C_4^2 \times C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}$$

المستخرج لأحداث $P(A \cup B)$ و $P(B)$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{18}{35}}{\frac{22}{35}} = \frac{18}{22} = \frac{9}{11}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{22}{35} + \frac{30}{35} - \frac{18}{35} = \frac{34}{35}$$

(II) احرف قانون الاحتمال للتوزيع احسنوا X لدينا $X \in \{1, 2, 3, 4\}$ ومنه

x_i	1	2	3	4
P_i	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$P(X=1) = \frac{A_4^3}{A_7^3} = \frac{24}{210} = \frac{4}{35}, \quad P(X=2) = \frac{3A_4^2 \times A_3^1}{A_7^3} = \frac{108}{210} = \frac{18}{35}$$

$$P(X=3) = \frac{3A_4^1 \times A_3^2}{A_7^3} = \frac{72}{210} = \frac{12}{35}, \quad P(X=4) = \frac{A_3^3}{A_7^3} = \frac{6}{210} = \frac{1}{35}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 P_i x_i = \frac{4 + 36 + 36 + 4}{35} = \frac{80}{35} = \frac{16}{7}$$

المستخرج $E(1743X - 1962)$

$$E(1743X - 1962) = 1743 \times E(X) - 1962 = 1743 \times \frac{16}{7} - 1962$$

$$E(1743X - 1962) = 2022$$

(4)

هناك اعمرين الرابع:
 $g(x) = 2e^{x-1} - x - 1$ لدينا (I)

(١) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{x-1} - x - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (2e^{-1} - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}) = +\infty$$

داسة اتجاه تغير الدالة g :

لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}$ $g'(x) = 2e^{x-1} - 1$

وخذ $g'(x) = 0$ نحصل على $2e^{x-1} = 1$ أي $x = 1 - \ln 2$
 وعليه إشارة $g'(x)$ تكون كالآتي:

x	$-\infty$	$1 - \ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+

وخذ الدالة g متناقصة على المجال $]-\infty, 1 - \ln 2]$ و متزايدة على المجال $[1 - \ln 2, +\infty[$

لتسليح جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	α	$1 - \ln 2$	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$		$\ln(2) - 1$		$+\infty$

$$g(1 - \ln 2) = 2e^{-\ln 2} - 1 + \ln 2 - 1 = 1 - 1 + \ln 2 - 1 = \ln(2) - 1$$

(٢) ا ب يان أن لمعادلة $g(x) = 0$ قبل حلين أحدهما واحد ١
 والآخر له حلين $-0.5 < \alpha < -0.6$

لدينا $g(1) = 1$ و $g(0.5) = 0$ و $g(-0.6) < 0$ و $g(-0.5) > 0$
 ولدينا الدالة g حتمية و متصلة على المجال $]-\infty, 1 - \ln 2]$ و بالتحديد
 على المجال $]-0.6, -0.5]$ و $g(-0.6) \times g(-0.5) < 0$

$$g(-0,6) \approx 378,004 \quad \approx 378$$

② $-0,6 < a < -0,5$

$$-0.6 < d < -0.5 \quad \text{جواب ۲}$$

z	$-\infty$	α	1	$+\infty$
$g(z)$	$+$	$+$	$-$	$+$

(۱) البيان أن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$

حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(ب) بیان کنندہ اجل
 لایمیتہ اجل
 $x \in \mathbb{R}$
 $f(x) = e^{1-x} g(x)$
 $1 \leq 1-x$

لدينا من أجل 2012 :

وہم

تَسْكُنُ حَبْلًا خَيْرًا لِلَّهِ وَهُوَ

x	$-\infty$	2	1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$			$+\infty$

$$f(1) = 2 - 2 + 3e^0 = 3$$

ج) بیان آنده حد أجل $f''(x) = xe^{1-x} : x \in \mathbb{R}$

لدينا حد أجل $x \in \mathbb{R}$
 $f''(x) = -e^{1-x} g(x) + g'(x) e^{1-x}$
 $= e^{1-x} (g'(x) - g(x)) = e^{1-x} (2e^{x-1} - 1 - 2e^{x-1} + x + 1)$

وبالتالي $f''(x) = xe^{1-x}$

استنتاج أن (ن) نقول أن الخواص يطلبها أينما شئنا
 لدينا $f''(x) = 0$ تكافئ $x = 0$ وعلى افتراض $f''(x) > 0$ أو $f''(x) < 0$ كما يلي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

لذا فإن $f''(x)$ اخذت حد أجل $x = 0$ وسنجد أن $f''(x)$ اخذت حد أجل $x = 0$ في $(0, f(0))$ و $(0, 2e-2)$ نقول أن الخواص (Cf).

ج) بيان أن $f(x) = 2x - 2 + \frac{2}{x+1}$

لدينا $g(x) = 0$ وحسب الجزء الأول $f(x) = 2x - 2 + (x+1)e^{1-x}$
 أي $e^{1-x} = \frac{1}{2}(x+1)$ ومنه $\frac{1}{e^{1-x}} = \frac{x+1}{2}$

وعليه $e^{1-x} = \frac{2}{x+1}$

$f(x) = 2x - 2 + \frac{2x+2}{x+1}$

$f(x) = 2x - 2 + \frac{2(x+1)}{x+1} + \frac{2}{x+1}$

$f(x) = 2x + \frac{2}{x+1}$

وبالتالي:

اعطاء حصر لـ $f(x)$

لدينا $-0.5 < x < -0.6$ ومنه $-1.2 < 2x < -1$ ①

$0.4 < x+1 < 0.5$ ومنه $2 < \frac{1}{x+1} < 2.5$

ومنه $4 < \frac{2}{x+1} < 5$ ②

لذا $8 < f(x) < 4$ ③

3) تبين أن نقطة (A) ذات المعادلة $y = 2x - 2$ هي نقطة تقاطع (C) عند $x = 0$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2)e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{e^x} = 0$

وهذه نقطة (A) هي نقطة تقاطع (C) في $x = 0$

دالة الوتر (A) هي $f(x) - (2x - 2)$ ونسبة (A) و (C) هي $x = 2$ وهذه نقطة تقاطع (A) و (C) في $x = 2$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+
الوتر (A)	(C) أسفل (A)	(C) في $x = 2$	(C) أعلى (A)
النسبة			

4) تبين أن نقطة (A) هي نقطة تقاطع (T) مع الدالة $y = 2x - 2$

لدينا $f(x) = 2e^{x-1}$ و $g(x) = 2e^{1-x}$ أي $g(x) = 2e^{x-1}$

وهذه $x = -1$ و $y = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$ وهذه نقطة تقاطع (A) و (C) في $x = -1$

وهذه (A) هي نقطة تقاطع (T) مع الدالة $y = 2x - 2$

لدينا $x_0 = -1$ أي $y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$ أي $y = 2x + 2 + e^{-1} - 4$

أي $y = 2x + e^{-1} - 2$ هذه هي معادلة (A)

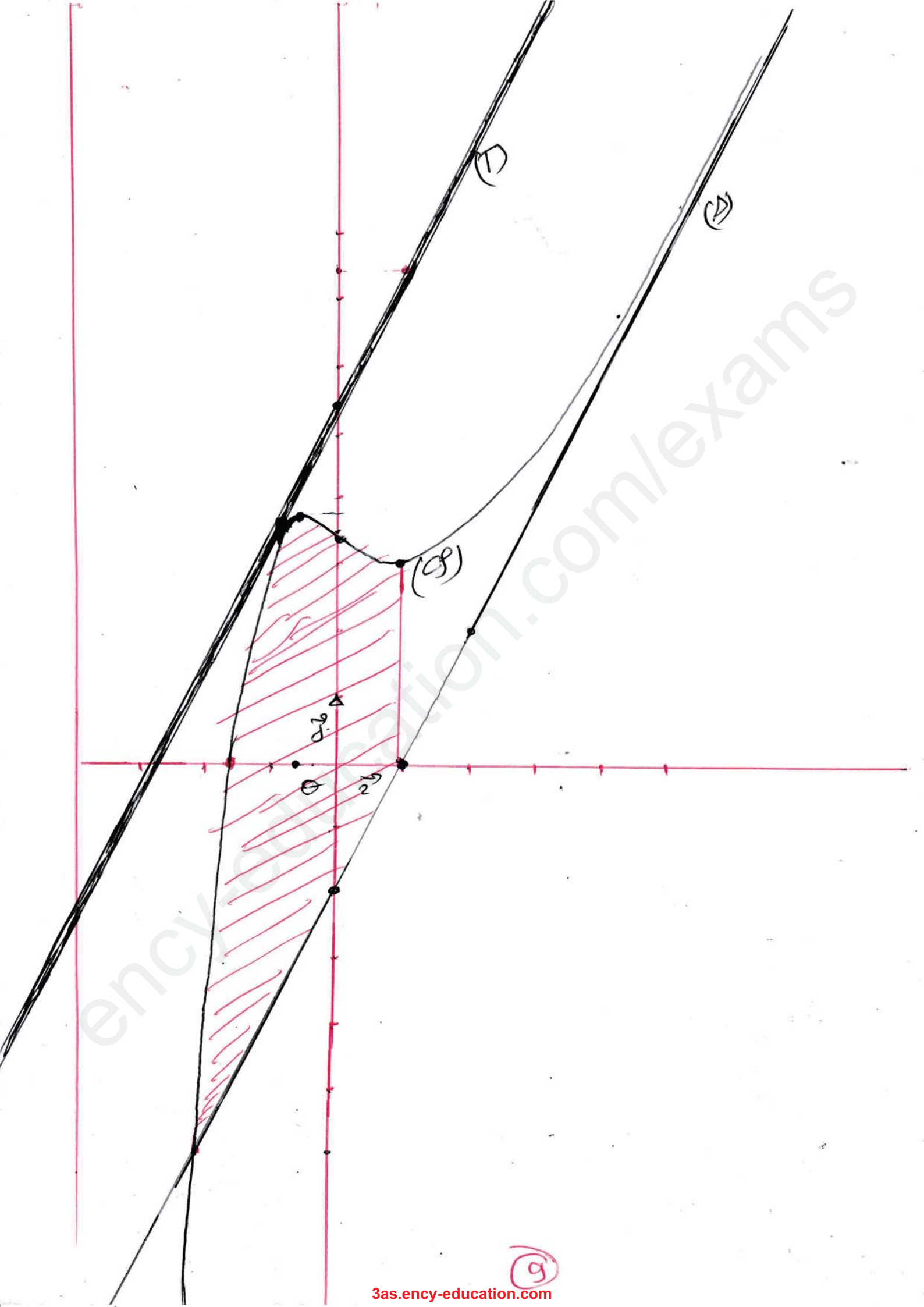
4) إنشاء الدالة (A) و (T) في شكل (C)

(T) $y = 2x + e^2 - 2$

(A) $y = 2x - 2$

x	0	1
y	$e^2 - 2$	e^2

x	0	1
y	-2	0



ن) أحيث λ دانياً على لوسيط λ حدياً m الرجحة λ دانياً لمعادلة

$$f(x) = 2(x-1) + m$$

$$f(x) = 2x + m - 2$$

$$m \in]0, 2[\text{ و } m - 2 \in]-2, 2[$$

فإن لمعادلة $f(x) = 2x + m - 2$ حدين مختلفين في $\mathbb{R}$.

1) $f(x) = 2x + m - 2$ دالة $H(x) = (-x-3)e^{1-x}$ أصلية لـ $f(x)$.

$$H(x) = (-x-3)e^{1-x}$$

$$H'(x) = -e^{1-x} - (-x-3)e^{1-x}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$H'(x) = (-x-2)e^{1-x}$$

$$x \mapsto (-x-2)e^{1-x}$$

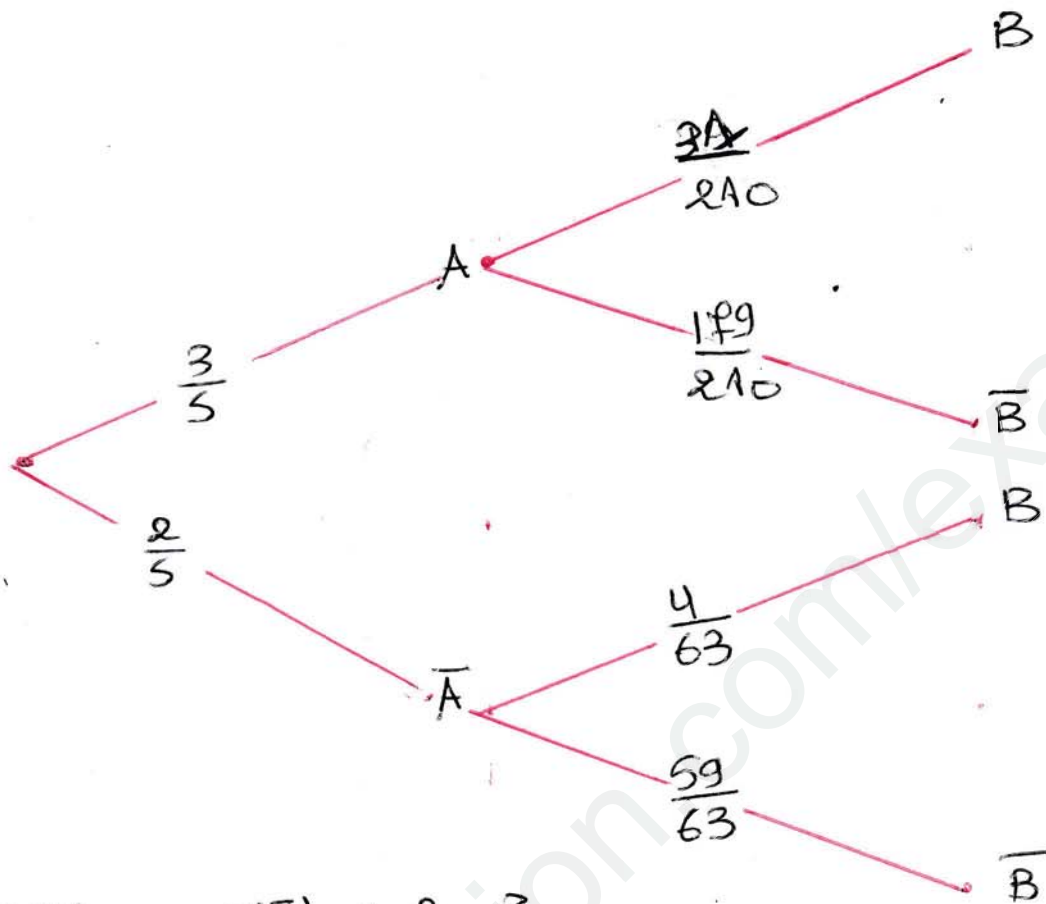
2) $A = \int_{-2}^1 (-x-2)e^{1-x} dx$

$$A = \int_{-2}^1 (-x-2)e^{1-x} dx = [H(x)]_{-2}^1 = H(1) - H(-2)$$

$$A = -4 + e^3 = e^3 - 4$$

ومنه

الموضوع الثاني
حل تمرين الأول
١) نقل الحالات كشجرة الاحتمالات مع توضيح طريقة الحساب



$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{31}{210} = \frac{179}{210}$$

$$P(B) = \frac{C_1^1 \times C_1^1 \times C_1^1 \times C_2^1 + C_4^2 \times C_1^1 \times C_1^1}{C_9^4} = \frac{2 + 6}{126} = \frac{8}{126} = \frac{4}{63}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{4}{63} = \frac{59}{63}$$

في المنته: $P(B)$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{3}{5} \times \frac{31}{210} + \frac{2}{5} \times \frac{4}{63} = \frac{31}{5 \times 70} + \frac{8}{5 \times 63}$$

$$= \frac{1953 + 560}{5 \times 70 \times 63} = \frac{2513}{22050} = \frac{359}{3150}$$

حل أمثلة ثانية
لدينا حد أجل $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} U_{n+1} = U_n \sqrt{\frac{1}{n}} \\ U_0 = e^{-1} \end{cases}$$

(1) البرهان بالترجح أنه حد أجل $n \in \mathbb{N}$: $0 < U_n < 1$: $P(n)$
لدينا $P(0)$ حقيقة لأن $0 < U_0 < 1$

نفرض أنه حد أجل $n \geq 0$: $0 < U_n < 1$ ونبرهن أن $0 < U_{n+1} < 1$
لدينا $0 < U_n < 1$ ومنه $0 < \sqrt{\frac{1}{n}} < 1$ ومنه

$0 < U_n \sqrt{\frac{1}{n}} < 1$ وعليه $P(n+1)$ صحيحة
وبالتالي حسب مبدأ الاستلصال بالترجح فإن $0 < U_n < 1$ حد أجل $n \in \mathbb{N}$.

(2) إثبات أنه حد أجل $n \in \mathbb{N}$: $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$

لدينا $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_n \sqrt{\frac{1}{n}}}{U_n} = \sqrt{\frac{1}{n}}$ ولها أن $0 < U_n < 1$ فإن $0 < \sqrt{\frac{1}{n}} < 1$
وعليه $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$

الاستنتاج أن الحد الأخير لمتتالية (U_n) :

لها أن $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ فإن $U_{n+1} < U_n$ لأن $U_n > 0$ ومنه

المتتالية (U_n) متناقصة ومتماصة لعل L .

(3) الاستنتاج أن لمتتالية (U_n) حقا، بـ

لها أن (U_n) متناقصة ومتماصة لعل L ومحدودة من الأسفل فإنها متقاربة.

حساب $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$

لها أن (U_n) متقاربة فلهذا قبل نهاية حتمية l تحقق $l = f(l)$ في حدية

f معرفة على $[0, 1]$ مع حد أجل $x \in [0, 1]$ فإن

$l \in [0, 1]$ و $f(l) \in [0, 1]$

لدينا $l = f(l)$ تكافئ $l \sqrt{l} = l$ تكافئ $l^3 = l^2$ وتكافئ

$l^3 - l^2 = 0$ أي $l^2(l - 1) = 0$ ومنه $l = 0$ أو $l = 1$

ولها أن (U_n) متناقصة فإن $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$

(II) لدينا $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \ln 2 V_n$

(1) نبدأ من أن (V_n) متناقص هندسي أساسها $\frac{1}{3}$ يطلب حساب حدها الأول

لدينا $V_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \ln 2 V_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{1}{3} \times \ln 2 V_n \sqrt{V_n}$

ومنه $V_{n+1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \ln 2 V_n^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \ln 2 V_n$

ومنه $V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$ وبالتالي (V_n) متناقص هندسي

أساسها $\frac{1}{2}$ $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول : $V_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^0 \ln 2 e^{-1} = -1$

(2) كتابة V_n بدلالة n :

$V_n = V_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$

لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$U_n = \frac{V_n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^n}$ ومنه $U_n = e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^n}$

! نحتاج أن نحد من أجل $n \in \mathbb{N}$:

لدينا $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \ln 2 V_n$ ومنه $U_n = e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^n}$

ومنه $U_n = e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^n}$ ومنه $U_n = e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^n}$

(3) حساب بدلالة n مجموع S_n خطية $S_n = \ln 2 V_0 + \ln 2 V_1 + \dots + \ln 2 V_n$

لدينا $W_n = \ln 2 V_n$ $n \in \mathbb{N}$ ونخرج من أجل $n \in \mathbb{N}$:

لدينا (W_n) متناقص هندسي أساسها $\frac{3}{2}$ $q = \frac{3}{2}$ وحدها الأول $W_0 = -1$

وعليه : $S_n = W_0 \left(\frac{1 - (q)^{n+1}}{1 - q} \right) = - \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{2}} \right)$

ومنه $S_n = - \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{-\frac{1}{2}} \right) = 2 \left(1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \right)$

حل تمرين الثالث
لدينا $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$, $g(x) = \frac{1}{e^x+1}$ وحيث $D_g = D_f = D = [0, \ln 2]$

(1) نبيان أنه من أجل $x \in D$: $\frac{1}{3} \leq g(x) \leq \frac{1}{2}$

لدينا $x \in D$ حيث $0 \leq x \leq \ln 2$ ومنه $1 \leq e^x \leq 2$ ومنه
 $2 \leq e^x + 1 \leq 3$ ومنه $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{2}$ وبالنسبة لـ $f(x)$ من أجل
 $x \in D$ فإن $\frac{1}{3} \leq g(x) \leq \frac{1}{2}$

اعطاء صيغة التكامل $\bar{J}$

لدينا $\frac{1}{3} \leq g(x) \leq \frac{1}{2}$ من أجل $x \in D$ ومنه $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{3} dx \leq \bar{J} \leq \int_0^{\ln 2} \frac{1}{2} dx$ وعليه $\left[\frac{1}{3}x\right]_0^{\ln 2} \leq \bar{J} \leq \left[\frac{1}{2}x\right]_0^{\ln 2}$ ومنه

$\frac{1}{3} \ln 2 \leq \bar{J} \leq \frac{1}{2} \ln 2$ وبالنسبة لـ $I - \bar{J}$

(2) اثبات أن $I - \bar{J} = \int_0^{\ln 2} (e^x - 1) dx$
لدينا $I - \bar{J} = \int_0^{\ln 2} f(x) dx - \int_0^{\ln 2} g(x) dx = \int_0^{\ln 2} (f(x) - g(x)) dx$

ومنه $I - \bar{J} = \int_0^{\ln 2} \left[\frac{e^x}{e^x+1} - \frac{1}{e^x+1} \right] dx = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x - 1}{e^x+1} dx$

ومنه $I - \bar{J} = \int_0^{\ln 2} \frac{(e^x - 1)(e^x + 1)}{(e^x + 1)} dx = \int_0^{\ln 2} (e^x - 1) dx$

المستنتج A حساب التكامل المحدود لـ (f) و (g) حيث $x \geq 0$ و $x \leq \ln 2$

لدينا من أجل $x \in D$: $f(x) - g(x) \geq 0$ ومنه

$$A = I - \bar{J} = \int_0^{\ln 2} (e^x - 1) dx = [e^x - x]_0^{\ln 2}$$

ومنه $A = 2 - \ln 2 - 1 = (1 - \ln 2) u.a$

(3) الف / الحقبة أنه حد أجل $x \in D$: $f(x) = e^x - \frac{e^x}{e^x + 1}$

لدينا $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1} = \frac{e^{2x} + e^x - e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x(e^x + 1)}{e^x + 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}$

ومنه حد أجل $x \in D$: $f(x) = e^x - \frac{e^x}{e^x + 1}$

حساب التكامل I :

$I = \int_0^{\ln 2} f(x) dx = \int_0^{\ln 2} \left(e^x - \frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx = \left[e^x - \ln(e^x + 1) \right]_0^{\ln 2}$

ومنه $I = 2 - \ln 3 - 1 + \ln 2 = 1 + \ln 2 - \ln 3$

وجاءت له $I = 1 + \ln \frac{2}{3}$

(ب) استنتاج قيمة التكامل J :

$J = I - 1 + \ln \frac{2}{3}$

لدينا $I - J = 1 + \ln \frac{2}{3}$ ومنه

$J = 1 + \ln \frac{2}{3} - 1 + \ln 2$

ومنه

وجاءت له $J = \ln \frac{2}{3} + \ln 2 = \ln \frac{4}{3}$

تفسير النتيجة في هذه النسبة

$J = \ln \frac{4}{3}$

لما أنه حد أجل $x \in D$ $g(x) > 0$

فإن حساب الجذر المحدود (ب) وحاصل محو الجواب $\ln \frac{4}{3}$ و $\ln \frac{2}{3}$

$\ln \frac{4}{3} \approx 0.4$

التي تعادل لها $x = \ln 2$ و $x = 0$

حد آخری درجہ:

(I) لہذا $D_g =]0, +\infty[$ $g(x) = x - 1 - \ln x$ $x > 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ و

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x - 1 - \ln x = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}) = +\infty$

درجہ آخری درجہ:

$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

لہذا $x > 0$

وہ $g'(x) = 0$ کا فاصلہ $x = 1$ ہے

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	-	+

وہ $g(x)$ 0 سے $+\infty$ تک $g'(x) > 0$ ہے اور $+\infty$ سے 0 تک $g'(x) < 0$ ہے۔
لہذا $g(x)$ 0 سے $+\infty$ تک $g'(x) > 0$ ہے اور $+\infty$ سے 0 تک $g'(x) < 0$ ہے۔

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	-	+
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

(2) حساب $g(1) = 0$:
استنتاج حساب $g(x)$ کا فاصلہ $x > 0$ ہے

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	+	0	+

$D_g =]0, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(II) لہذا $f(x) = \ln x + \frac{x + \ln x}{x}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(1) حساب

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x + \frac{x}{x} + \frac{\ln x}{x} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln x + \frac{x + \ln x}{x} = -\infty$



(د) بیسیان آنند حد أجل $x > 0$ و $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ و $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1-2-\ln x}{x^2} = \frac{x-1-\ln x}{x^2}$ لدریافت حد أجل $x > 0$

و جابجایی: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

تشیکل جدول تغییرات علامه f' :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	+
$f(x)$		2	$+\infty$

(ج) استدلال آن (CF) قبل نقطه اختلاف یافته است. حد بیسیان آنند حد أجل $x = 1$ و لم تغییر علامه آنند حد أجل $x = 1$ ذات الحاشیاء $(1, 2)$ نقطه اختلاف (CF).

(د) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} = 0$

تفسیر نتیجه هندسی:

نقول آن (CF) و (P) صحیحان فی $x \rightarrow +\infty$ و (د) در استدلال بیسیان (P) و (CF) بیسیان (P) .

لدریافت حد أجل $x = e^{-2}$ و $f(x) - \ln x = 0$ و $x = e^{-2}$ و $x > 0$ و علی بیسیان (P) و (CF) بیسیان (P) و (CF) بیسیان (P) .

x	0	e^{-2}	$+\infty$
$f(x) - \ln x$		-	+
الحد		(CF) أسفل (P)	(CF) أعلى (P)
الحد		(CF) أسفل (P)	(CF) أعلى (P)

3) 4/ بيان أن (CP) نقطة حرجية، لعلها في نقطة حرجية خاصة في $0.14 < q < 0.19$

لذلك، نحتاج إلى دراسة $g(x)$ في $0.14 < q < 0.19$ ، حيث $g(x) = x^2 - 2x + 1$

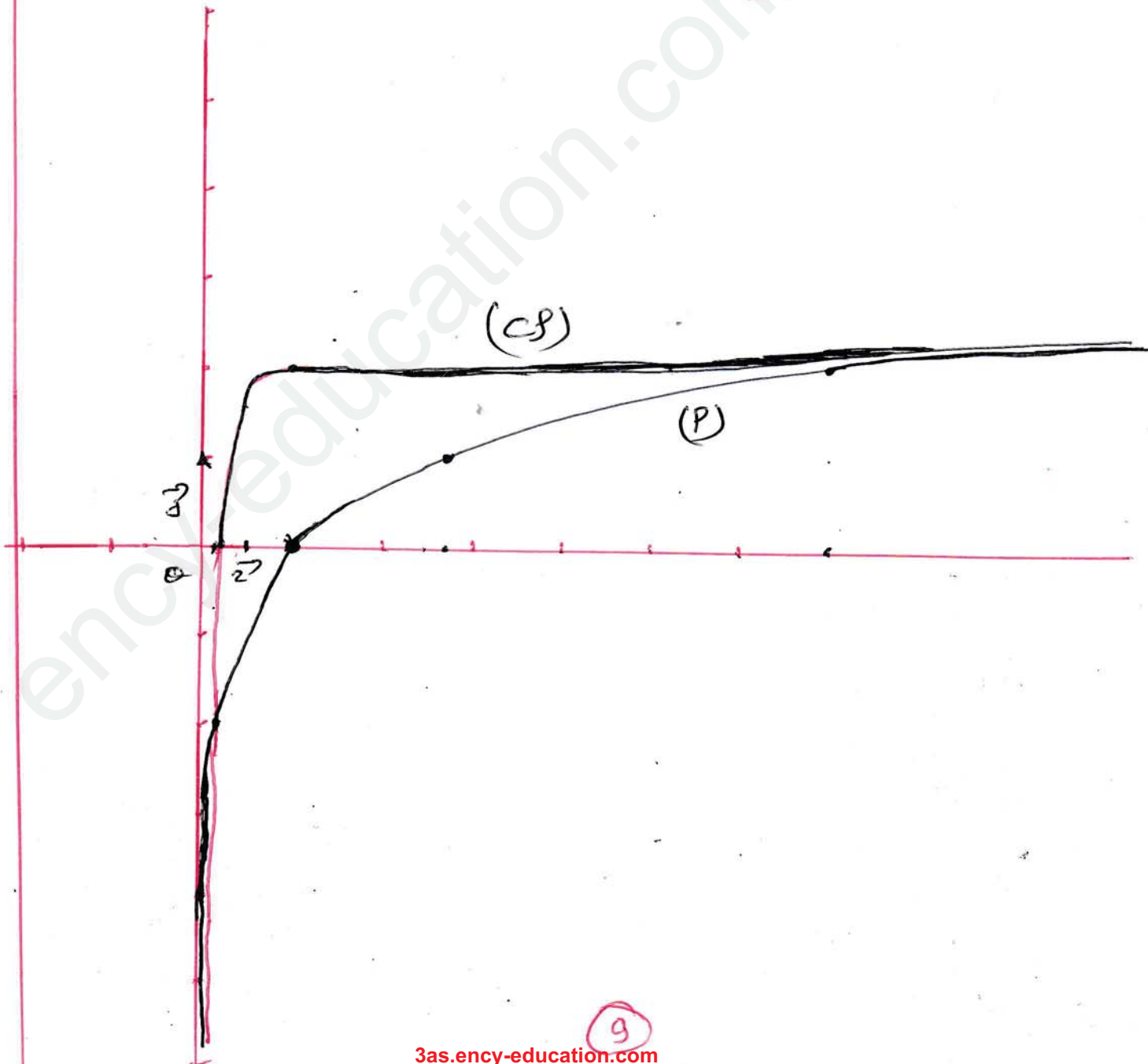
لأن $g(0.14) < 0$ و $g(0.19) > 0$ ، فإن $g(x)$ تتغير من سالب إلى موجب في $0.14 < q < 0.19$

التي هي نقطة حرجية، فإن (CP) نقطة حرجية، لعلها في نقطة حرجية خاصة في $0.14 < q < 0.19$

استنتاج حسب x ، $g(x)$:

x	0	q	$+\infty$
$g(x)$		-	+

(ن) رسم (P) للرسم (CP) :



(4) دالة h معرفة على مجال $[0, +\infty[$:

$$h(x) = [f(x)]^2$$

$$h'(x) = 2f'(x)f(x)$$

لزيادة أجل $x > 0$

ومنه إشارة $h'(x)$ تكون كالآتي :

x	0	a	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	+	+
$f(x)$		-	+	+
$h'(x)$		-	+	+

ومن دالة h متناقصة متزايدة على مجال $]0, a]$

ومتزايدة على مجال $[a, +\infty[$



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

يحتوي صندوق على 5 كرات بيضات مرقمة بـ 1، 1، 1، 0، -1 و 5 كرات سوداء مرقمة بـ 1، 1، 0، 0، -1 (لا نميز بينهم باللمس) نسحب عشوائيا في ان واحد 3 كرات من الصندوق .

(I) نعتبر الأحداث التالية :

A : " الحصول على كرة بيضاء واحدة فقط" B : " الحصول على كرة بيضاء على الأقل "

C : " الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون " D : " الحصول على اللونين الأسود و الأبيض "

F : " مجموع أرقام الكرات الثلاثة المسحوبة يساوي 0 "

(1) أحسب احتمال الأحداث A , B و C .

(2) بين أن : $P(D) = \frac{5}{6}$ ، $P(F) = \frac{31}{120}$ ، $P(C \cap F) = \frac{7}{120}$.

(3) إذا كان مجموع أرقام الكرات الثلاثة المسحوبة يساوي صفر . ماهو احتمال أن تكون الكرات من نفس اللون ؟

(II) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل مخرج مجموع أرقام الكرات الثلاثة المسحوبة .

(1) عين قيم المتغير العشوائي X .

(2) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X . ثم أحسب أمله الرياضيائي .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

• لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 2}$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n < 2$.

(2) أدرس رتبة المتتالية (u_n) . هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$

(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ثم عبر عن v_n بدلالة n .

(ب) إستنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$ ، أحسب S_n بدلالة n .

(4) (أ) بين أن : $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{3}|u_n - 2|$ من أجل كل عدد طبيعي n .

(ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ثم إستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

- نعتبر المعادلة التفاضلية التالية : $(E) \dots \dots \dots y - y' = (2x - 3)e^{-x}$
 - (1) عين العددين الحقيقيين a و b حيث $g(x) = (ax + b)e^{-x}$ حل للمعادلة التفاضلية (E)
 - (2) لتكن $a = 1$ و $b = -1$:
 - (أ) بين ان $f(x) = h(x) + g(x)$ حل للمعادلة التفاضلية (E) اذا كانت $h(x)$ حل للمعادلة التفاضلية $y - y' = 0$
 - (ب) عين حلول المعادلة التفاضلية $y - y' = 0$
 - (ت) استنتج حلول المعادلة التفاضلية (E)

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة R بما يلي : $g(x) = 2 + (x - 2)e^{-x+2}$
 - (1) ادرس تغيرات الدالة g .
 - (2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $1.14 < \alpha < 1.15$.
 - (3) إستنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في i .
 - II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة i بما يلي : $f(x) = 2x - 1 - (x - 1)e^{-x+2}$
 - (1) نسمي $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس (O, i, j)
 - (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - (2) بين أن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
 - (3) (أ) بين أن : $f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2}{\alpha - 2}$ ثم إستنتج حصر $f(\alpha)$.
 - (ب) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب مائل للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$ ثم أدرس الوضع النسبي للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ) .
 - (ت) بين أن المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلة ديكرتية له.
 - (ث) أحسب $f(0)$ و $f(2)$ ثم أنشئ (Δ) ، (T) و $(\mathcal{C}_f)$.
 - (4) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :
- $$(E): 2m - 1 - (x - 1)e^{-x+2} = 0$$
- III. لتكن H الدالة العددية المعرفة على i بما يلي : $H(x) = (ax + b)e^{-x+2}$ حيث a و b عدنان حقيقيان
 - (أ) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h المعرفة بـ : $h(x) = (x - 1)e^{-x+2}$ على R .
 - (ب) ليكن λ عددا حقيقيا حيث ، $\lambda > 1$ و $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما : $x = 1$ و $x = \lambda$.
 - أحسب المساحة $A(\lambda)$ بدلالة λ ثم أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

انتهى الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقاط)

U_1 و U_2 صندوقان متماثلان، الصندوق U_1 يحوي كرتين تحملان الرقمين 1 و 2 والصندوق U_2 يحوي أربع كريات تحمل الأرقام 1, 2, 3, 4. جميع الكريات متماثلة ولا نفرق بينها عند اللمس. I. نختار عشوائيا صندوق ، ثم نسحب منه كرية بطريقة عشوائية.

- (1) ما هو احتمال الحصول على كرية تحمل الرقم 1.
 - (2) إذا كانت الكرية المسحوبة تحمل الرقم 1، ما احتمال ان تكون قد سحبت من الصندوق U_1 .
- II. نجعل محتوى الصندوقين في صندوق واحد ثم نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين.

- (1) ما هو احتمال سحب كرتين تحملان نفس الرقم
- (2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين.

(أ) ماهي قيم المتغير العشوائي X

(ب) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X

(ج) احسب الأمل الرياضي $E(X)$ والتباين والانحراف المعياري

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C ، المعادلة ذات المجهول Z : $(Z - 2i)(Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4) = 0$.
- (2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A, B, C و D ذات اللاحقات $Z_A = \sqrt{3} - i$ ؛ $Z_B = \sqrt{3} + i$ ؛ $Z_C = 2i$ و $Z_D = -\sqrt{3} - i$ على الترتيب .

(أ) أكتب على الشكل الاسي كل من Z_A, Z_B, Z_C و Z_D

(ب) علم النقط A, B, C و D .

(ت) اكتب العدد $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_D}$ على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي . استنتج طبيعة المثلث ABC .

(ث) عين () مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z في كل حالة من الحالات التالية :

$$|z - 2i| = |z + \sqrt{3} + i|$$

$$\frac{z - Z_A}{z - Z_D} = ke^{\frac{\pi}{2}} \text{ و } k \in R^+$$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

I. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 0$ وبعلاقة التراجع الآتية : $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$ من اجل كل عدد طبيعي n

(2) احسب u_1, u_2 ثم بين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 - \frac{4}{u_n + 3}$

(3) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $-1 < u_n \leq 0$.

(4) حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) و استنتج أنها متقاربة.

II. لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: $v_n = \frac{1}{u_n + 1}$

- (أ) اثبت أن (v_n) متتالية حسابية، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
 (ب) اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n ثم احسب $\lim u_n$
 (ج) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0.v_0 + u_1.v_1 + \dots + u_n.v_n$

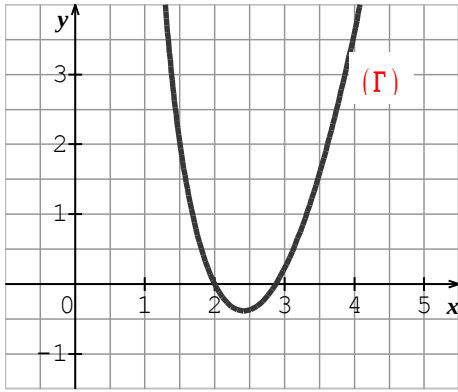
التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]1, +\infty[$ حيث: $g(x) = x^2 - 2x - 4 \ln(x-1)$ (حيث $\ln$: اللوغاريتم النيبيري) (Γ)
 تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل المقابل.

- (1) بقراءة بيانية للمنحنى (Γ) عيّن عدد حلول المعادلة: $g(x) = 0$.
 (2) أحسب $g(2)$ ثم بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $2,87 < \alpha < 2,88$.
 (3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $]1, +\infty[$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $]1, +\infty[$ حيث: $f(x) = x - 3 + \frac{4 \ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ وفسر النتيجة بيانياً ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 (2) (أ) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x - 3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .
 (ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).
 (3) (أ) بين أنه من أجل كل x من $]1, +\infty[$ لدينا: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$.
 (ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
 (4) أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) (نأخذ: $f(\alpha) = 3,9$)
 (5) لتكن الدالة h المعرفة على $]1, +\infty[$ كما يلي: $h(x) = [\ln(x-1)]^2$.
 (أ) أحسب $h'(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1, +\infty[$.
 (ب) أحسب التكامل $\int_2^5 f(x) dx$ ثم فسر النتيجة بيانياً.

انتهى الموضوع الثاني

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول (03 نقاط) :

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاث في كل حالة من الحالات التالية ، مع التبرير :

الاقتراح (ج)	الاقتراح (ب)	الاقتراح (أ)	
$\alpha = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$	$\alpha = \left] \ln 2; \ln 4 \right[$	$\alpha = \ln 2$	نعرف المتتالية (v_n) من أجل كل عدد طبيعي n $v_n = (4^{2\alpha} + 4^\alpha - 5)^n + 3$ قيم العدد الحقيقي α التي تكون من أجلها $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ هي :
90	910	405	معامل x^8 في منشور $(x+3)^{10}$ هو :
840	600	2401	عدد الأعداد الفردية ذات 4 أرقام مختلفة مثنى مثنى والتي يمكن تشكيلها باستعمال الأرقام 1، 3، 4، 5، 6، 7، 9 هي :

التمرين الثاني (05 نقاط) :

$$I. (u_n) \text{ متتالية حسابية متزايدة تماما حدها الأول } u_0 \text{ وأساسها } r \text{ حيث: } \begin{cases} u_1 + 3u_2 + u_3 = 20 \\ u_1^2 + 5u_2 + u_3^2 = 70 \end{cases}$$

(1) أحسب u_2 والأساس r لهذه المتتالية .

(2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n

(3) بين أن العدد 6061 حد من حدود هذه المتتالية ثم عين رتبته وأحسب المجموع $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2021}$

$$II. \text{ نعتبر المتتالية } (w_n) \text{ المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كما يلي : } w_n = \int_n^{n+1} e^{4-3x} dx$$

(1) أحسب w_0 ثم بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : w_n > 0$

(2) أكتب عبارة w_n بدلالة n ، ثم أثبت أن (w_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q

(3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (w_n)

(4) استنتج أن المتتالية (w_n) متقاربة ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$

(5) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = (3w_0 e^{u_0}) + (3w_1 e^{u_1}) + \dots + (3w_n e^{u_n})$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I. نعتبر صندوقين متماثلين U_1 و U_2 بحيث : U_1 يحتوي على خمس كرات حمراء تحمل الأرقام $\{1, 1, 1, 0, -1\}$

وثلاث كرات خضراء تحمل الأرقام $\{0, 1, 1\}$ و U_2 يحتوي على اربع كرات حمراء تحمل الأرقام $\{0, 1, 1, 1\}$

وكرتين خضراوين تحملان الرقمين $\{0, 1\}$

نختار عشوائيا أحد الصناديق فإذا كان U_1 نسحب منه ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع وبطريقة عشوائية وإذا كان

U_2 نسحب منه ثلاث كرات في آن واحد وبطريقة عشوائية كذلك

- (1) أحسب احتمال الأحداث التالية:
- A : " سحب ثلاث كرات من نفس اللون "
- B : " سحب ثلاث كرات تحمل نفس الرقم "
- C : " سحب كرة خضراء على الأقل "
- D : " سحب ثلاث كرات جداء أرقمهما معدوم "
- E : " سحب ثلاث كرات مجموع أرقمهما معدوم "

(2) بيّن أنّ : $P(A \cap B) = \frac{89}{3360}$ ثم استنتج $P(\overline{A \cup B})$ ، هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟ علل جوابك

(3) علما أن الكرات الثلاث المسحوبة من نفس الرقم ، ما هو احتمال أن تكون الكرات الثلاث المسحوبة من الصندوق U_1

II. نأخذ الكرات الموجودة في الصندوقين U_1 و U_2 ونضعها جميعها في صندوق واحد U_3 ثم نسحب عشوائيا منه كرتين في

آن واحد وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة جداء الرقمين اللذان تحملهما الكرتين المسحوبتين .

(أ) عين القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X و عرف قانون احتماله .

(ب) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X .

التمرين الرابع (07 نقاط) :

I. لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = -3x^2 + 2 - \ln x$

(1) أدرس تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $0.8 < \alpha < 0.9$ ثم استنتج إشارة $g(x)$

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - e + \frac{1 - \ln x}{3x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و فسر النتيجة الأولى هندسيا

(2) أ- بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له

ب- أدرس الوضع النسبي بين (C_f) ومستقيمه المقارب المائل (Δ)

(3) بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = -\frac{g(x)}{3x^2}$

(4) استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها

(5) أثبت أنّ $f(\alpha) = 2\alpha - e - \frac{1}{3\alpha}$ ، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

(6) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يوازي المستقيم (Δ) ، ثم اكتب معادلة (T)

(7) أ- أنشئ (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f)

(8) نسمي $A(\alpha)$ مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين

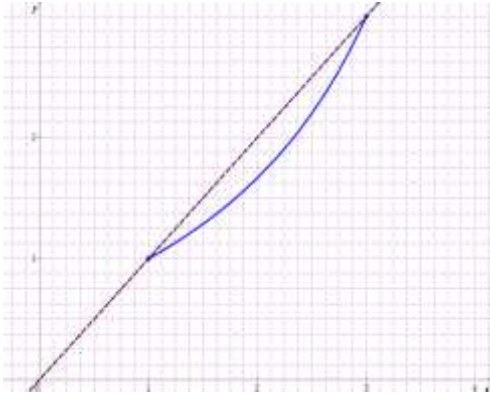
معادلتيهما $x = e$ و $x = \alpha$

✓ بيّن أنّ : $A(\alpha) = \frac{1}{6} (3\alpha^2 - 1)^2 \text{ cm}^2$

(9) لتكن الدالة h المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $h(x) = |f(x)|$

أ- أنشئ (C_h) منحنى الدالة h معتمدا على (C_f) منحنى الدالة f

ب- عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $h(x) = e^m$ أربعة حلول



التمرين الأول (05 نقاط) :

المستوي منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

f الدالة المعرفة على المجال $[1; 3]$ كما يلي : $f(x) = \frac{3+x}{5-x}$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل لها ، (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

I. تحقق ان الدالة f متزايدة تماما على المجال $[1; 3]$ ثم بين أن :

من أجل كل $x \in [1; 3]$ فإن $f(x) \in [1; 3]$

II. (u_n) متتالية معرفة بعدها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) انقل الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، u_3 (لا يطلب حساب الحدود)

ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها .

(2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n \leq \frac{5}{2}$

ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقضة تماما

(3) أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 \leq \frac{4}{5}(u_n - 1)$

ب- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n - 1 \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ ، ثم عين $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$

III. (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $v_n = \frac{u_n - 1}{3 - u_n}$

(1) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ، يطلب حساب حدها الأول v_0

(2) اكتب بدلالة n عبارة v_n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

(3) احسب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = v_0 + 2v_1 + \dots + 2^n v_n$

التمرين الثاني (04 نقاط) :

قسم ثلاثة علوم تجريبية 1 به 26 تلميذ منهم 14 ذكور احدهم اسمه علي و 12 إناث إحداهن اسمها عائشة ، في بداية السنة الدراسية طلبت ادارة ثانوية كتامة من الأستاذ المسؤول عن هذا القسم تشكيل لجنة تتضمن عريف ونائبه الاول ونائبه الثاني (نفرض أن جميع التلاميذ لهم نفس الحظوظ لكي يقع عليهم الاختيار)

(1) ما عدد اللجان التي يمكن تكوينها

(2) أحسب احتمال الأحداث التالية:

A : " اللجنة مشكلة من الذكور فقط "

B : " اللجنة من جنسين مختلفين "

C : " باللجنة أنثى على الأقل "

D : " العريف ذكر "

E : " العريف ذكر والنائب الأول أنثى "

F : " العريف ذكر أو النائب الأول أنثى "

G : " علي عضو باللجنة "

H : " عائشة عريف "

(3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل لجنة $X = -\alpha y + 2z$ حيث y عدد الإناث المتواجدات باللجنة و z

عدد الذكور المتواجدون باللجنة α عدد حقيقي

أ) عين القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X و عرف قانون احتماله .

ب) أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X بدلالة α

ت) عين قيمة العدد الحقيقي α حتى يكون : $E(X) = -\frac{30}{13}$

عين الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاث في كل حالة من الحالات التالية ، مع التبرير:

الاقتراح (ج)	الاقتراح (ب)	الاقتراح (أ)											
$\alpha = 0.2$ $\beta = 3.5$	$\alpha = 8$ $\beta = 0.2$	$\alpha = 15$ $\beta = 0.2$	الجدول التالي يعرف قانون احتمال متغير عشوائي X ، قيمة α و β حتى يكون الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X يساوي 3.5 هي <table><tr><td>x_i</td><td>-3</td><td>-1</td><td>α</td><td>4</td></tr><tr><td>$p(X = x_i)$</td><td>0.10</td><td>0.40</td><td>β</td><td>0.30</td></tr></table>	x_i	-3	-1	α	4	$p(X = x_i)$	0.10	0.40	β	0.30
x_i	-3	-1	α	4									
$p(X = x_i)$	0.10	0.40	β	0.30									
$p(A \cap B) = 0.15$	$p(A \cap B) = 0.45$	$p(A \cap B) = 0.65$	A و B حادثتان إذا كان : $p(A) = 0.3$ و $p(B) = 0.5$ و $\overline{p(A \cup B)} = 0.65$ فإن :										
$S = 2021$	$S = 1011$	$S = 2022$	(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = \int\limits_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{2}{x}(2 + \ln x)dx$ قيمة المجموع $S = u_0 + u_1 + + u_{42}$ هي :										
$a = 2022n$	$a = 2022$	$a = 0$	نعتبر من اجل كل عدد طبيعي n العدد الحقيقي : $a = \ln\left(\sqrt{n+e} - \sqrt{n}\right)^{2022} + \ln\left(\sqrt{n+e} + \sqrt{n}\right)^{2022}$										
$\alpha = 3$	$\alpha = -\ln 2$	$\alpha = -\ln 3$	إذا كانت الأعداد $(1 - 2e^\alpha)$ ، 3 ، 27 بهذا الترتيب تشكل حدود متعاقبة لمتتالية هندسية فإن :										

التمرين الرابع (06 نقاط) :

I. لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي : $g(x) = \frac{x^2(3-x)}{x-1}$

✓ أدرس إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R} - \{1\}$

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$

(1) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. ب- احسب $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و فسر النتائج هندسيا

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{1\}$ فإن : $f'(x) = -\frac{g(x)}{(x-1)^2}$

(3) استنتج اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R} - \{1\}$ ثم شكل جدول تغيراتها

(4) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{1\}$: $f(x) = x - 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2}$

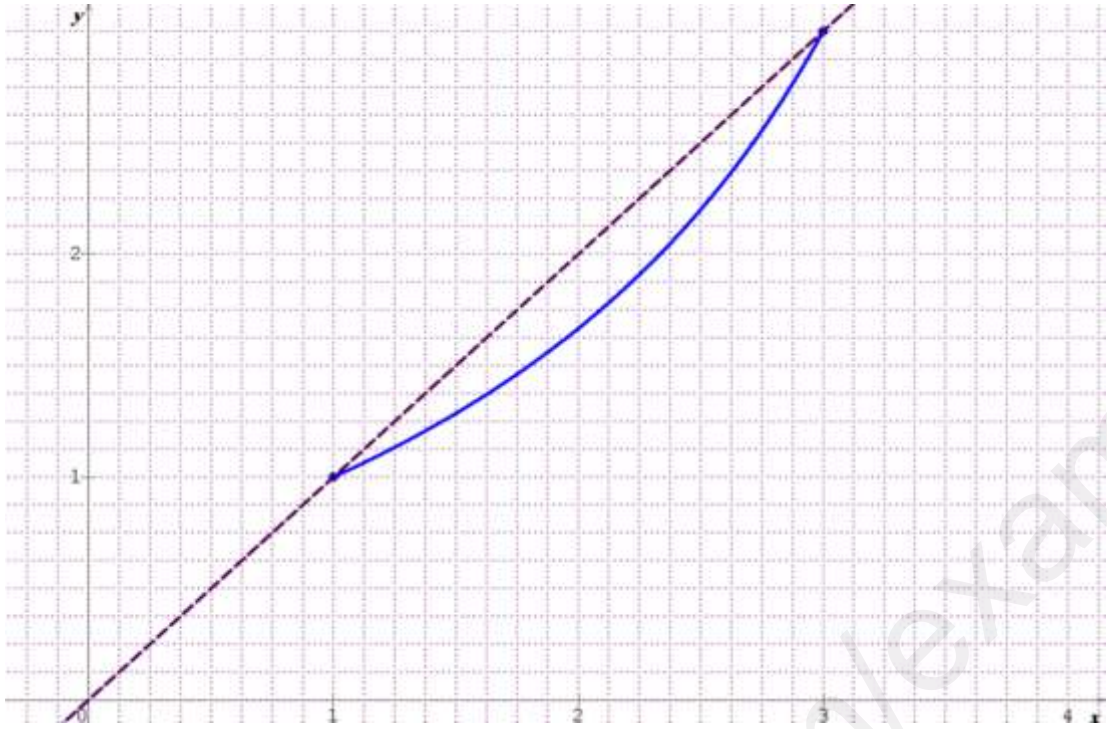
ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له ، ثم أدرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)

(5) بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة فاصلتها α حيث : $0.7 < \alpha < 0.8$

(6) عين معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{1}{3}$

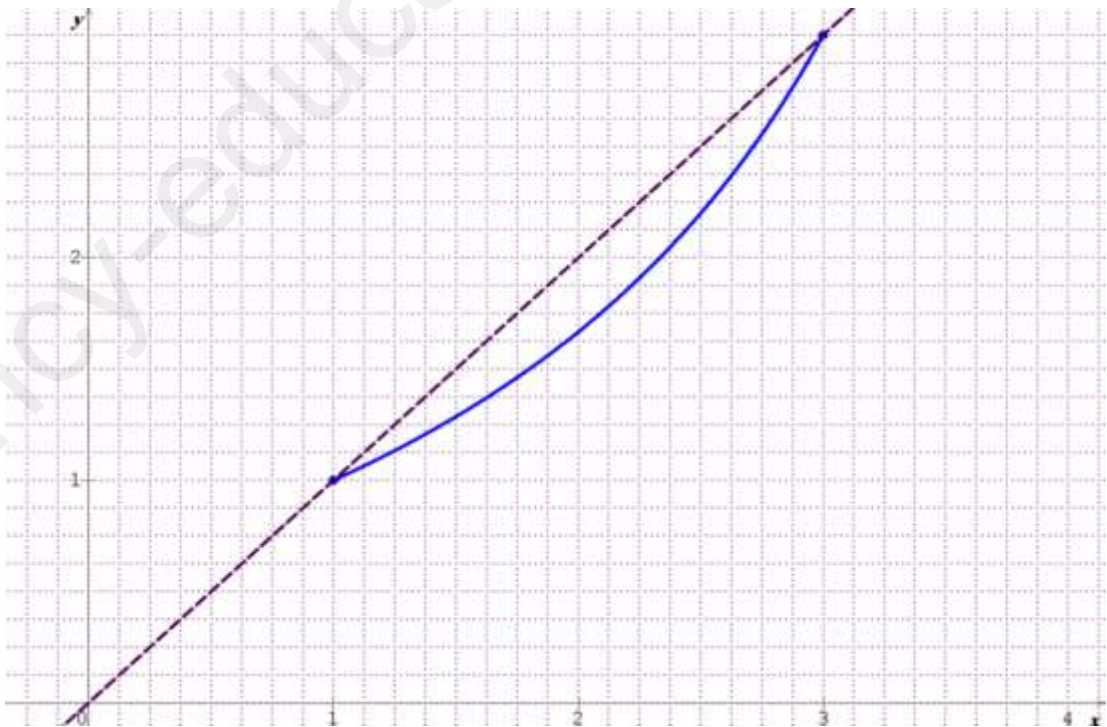
(7) أ- انشئ (T) ، (Δ) والمنحنى (C_f)

ب- ناقش بيانها حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x) - x = m$



الاسم واللقب :

..... ✂ ✂ ✂ ✂



الاسم واللقب :



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقط)

عين الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية ، مع التبرير:

x_i	-2	0	1	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

1. قانون إحتمال المتغير العشوائي X معرف بالجدول المقابل:

الأمّل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي X هو أ) $-\frac{1}{20}$ ب) $-\frac{1}{10}$ ج) $-\frac{3}{20}$

2. إذا كانت الأعداد $(1 - e^{-2})$ ، $(e^{-2} - e^{-4})$ ، α تشكل حدودا متتابعة لمتتالية هندسية، فإن α تساوي:

أ) $(1 - e^{-4})$ ب) $(e^{-4} - e^{-6})$ ج) $(e^{-2} - e^{-6})$

3. الدالة $F: x \rightarrow \ln(2x + 4)$ ، هي دالة أصلية على المجال $[0 : +\infty[$ للدالة f المعرفة بـ:

أ) $\frac{\ln(2x + 4)}{2}$ ب) $f(x) = \frac{1}{x + 2}$ ج) $f(x) = \frac{1}{2x + 4}$

التمرين الثاني: (04 نقط)

تحتوي علبة على مجموعة من القريصات، نصف القريصات سوداء (N) وثلاثها خضراء (V) وسدسها صفراء (J).
75% من القريصات السوداء و 50% من القريصات الخضراء و 25% من القريصات الصفراء شكلها دائري (O). أما بقية القريصات فشكلها مربع (S)
نسحب قريصة واحدة من العلبة.

(1) شكل شجرة الاحتمالات التي تنمذج الوضعية.

(2) احسب الاحتمالات التالية:

الحدث A : "القريصة المسحوبة خضراء دائرية"

الحدث B : "القريصة المسحوبة سوداء مربعة"

الحدث C : "القريصة المسحوبة دائرية"

(3) إذا سحبنا قريصة دائرية الشكل، فما هو احتمال أن تكون خضراء؟

4) نفرض أن مجموع القريصات في اللعبة هو 24 قريصة.
أ) أكمل الجدول التالي:

اللون الشكل	N	V	J	المجموع
O				
S				
المجموع				24

ب) نسحب في آن واحد ثلاث قريصات من اللعبة.

- احسب $P(E)$ احتمال أن تكون القريصات المسحوبة من نفس الشكل
- احسب $P(F)$ احتمال أن تكون القريصات المسحوبة من نفس اللون
- إذا كانت القريصات المسحوبة من نفس الشكل، فما هو احتمال أن تكون من نفس اللون؟

التمرين الثالث: (05 نقط)

المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 2$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1. احسب u_1, u_2 و u_3 ثم خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n)

2. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \leq n + 3$

3. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$

ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

4. (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - n$

أ) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ ، ثم أكتب v_n و u_n بدلالة n .

ب) استنتج $\lim u_n$

ج) احسب بدلالة n : $S_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_{n-1}^2$

التمرين الرابع: (07 نقط)

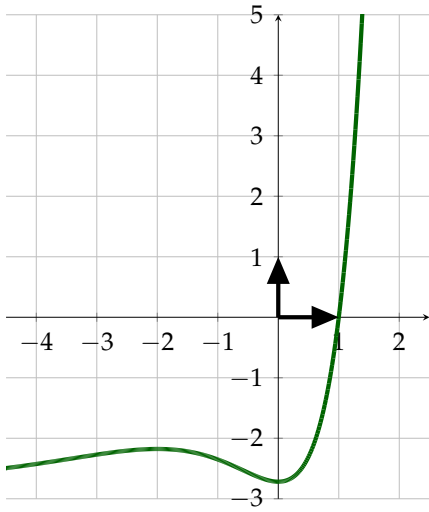
I) الدالة العددية g معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^2 e^x - e$

وليكن (C_g) التمثيل البياني لـ g في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (تؤخذ وحدة الطول $2cm$)

1. احسب $g(1)$.

2. بقراءة بيانية، عين إشارة $g(x)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(-x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



1. احسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسّر النتائج هندسياً.

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$.

3. استنتج أن الدالة f متزايدة تماماً على المجالين $[-1; 0[$ و $]0; +\infty[$ ، و متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; -1]$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4. بين أن المنحنى (Y) ذو المعادلة $y = e^{-x} - 2$ و المنحنى (C_f) متقاربان بجوار $+\infty$ ، ثم ادرس الوضع النسبي لهما.

5. بين كيف يمكن إنشاء (Y) انطلاقاً من منحنى الدالة $e^x \rightarrow x$ ، ثم أنشء كلا من (Y) و (C_f) في المعلم السابق.

III) احسب A ، مساحة الحيز المحدود بـ (Y) و (C_f) والمستقيمات $x = e$ و $x = e^2$.

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقط)

عين الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية ، مع التبرير:

1. إذا كانت f حلاً للمعادلة التفاضلية $y' = -2y$ و (C_f) يقطع حامل محور الترتيب عند $\frac{3}{2}$ فإن مساحة الحيز المحدد

بـ (C_f) والمستقيمات $y = 0$ و $x = 0$ و $x = \ln 3$ تساوي:

أ) $\frac{2}{3}u.a$ ب) $\frac{3}{2}u.a$ ج) $\frac{1}{3}u.a$

2. يتكون فريق عمل من 4 إناث و 3 ذكور ، يراد تشكيل لجنة تضم 3 أعضاء.

إحتمال أن تكون اللجنة من الجنسين هو :

أ) $\frac{6}{7}$ ب) $\frac{4}{7}$ ج) $\frac{1}{7}$

3. لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها e و حدها الأول u_0 ، حيث $u_0 = e^{-\frac{1}{2}}$. (e) أساس اللوغاريتم النيبيري

من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $S_n = \ln(u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n)$

S_n يساوي:

أ) $\frac{n^2 - 1}{2}$ ب) $\frac{n^2 + 1}{2}$ ج) $\frac{n^2}{2}$

التمرين الثاني: (04 نقط)

يحتوي كيس على أربع كريات حمراء تحمل الرقم α ، وثلاث كريات خضراء تحمل الرقم $\alpha - 1$ ، وكريتين بيضاويتين تحملان الرقم 1، حيث α عدد طبيعي فيرم معدوم. الكريات متماثلة ولا تفرق بينها باللمس، نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات في آن واحد.

1. أ) احسب احتمال الأحداث A, B, C ، حيث:

الحدث A : "الحصول على كرية بيضاء على الأكثر"

الحدث B : "الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس الرقم"

الحدث C : "الحصول على كريتين بالضبط تحملان الرقم $\alpha - 1$ "

ب) بين أن احتمال الحصول على ثلاث كريات تحمل ألوان العلم الوطني هو $\frac{2}{7}$.

2. ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة، مجموع الأرقام الظاهرة على الكريات المسحوبة الحمراء، و $X = 0$ إذا لم تسحب كرية حمراء.

أ) برر أن مجموعة قيم X هي: $X = \{0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha\}$

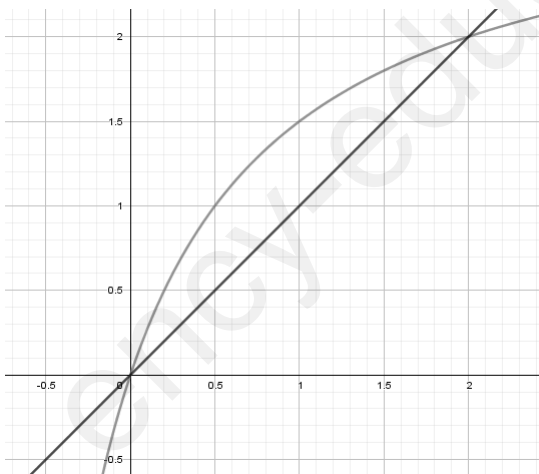
ب) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X

ج) أحسب الأمل الرياضي بدلالة α ، ثم عين قيم α التي من أجلها $|E(X)| \leq 2$

التمرين الثالث: (05 نقط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{3x}{x+1}$ ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ كما في الشكل أدناه:

$$(I) \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 1} \end{cases} \quad (u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كمايلي:}$$



1. أعد رسم الشكل على ورقتك، ثم باستعمال المنحنى (C_f)

والمستقيم ذو المعادلة $y = x$ ، مثل على محور الفواصل الحدود

الأربعة الأولى للمتتالية (u_n)

(دون حسابها وموضحا خطوط الإنشاء)

2. ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

3. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq u_n < 2$

4. أ) أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة، ثم استنتج أنها متقاربة.

ب) أوجد نهاية المتتالية (u_n)

II) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$

1. برهن أن المتتالية (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

2. اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3. احسب $\lim u_n$.

4. اكتب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \frac{u_0}{u_0 - 2} + \frac{u_1}{u_1 - 2} + \frac{u_2}{u_2 - 2} + \dots + \frac{u_n}{u_n - 2}$

التمرين الرابع: (07 نقط)

I) الدالة العددية g معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 2\ln x - 1 - \frac{1}{x^2}$

1. بين أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

2. أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.89 < \alpha < 1.9$

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما x إشارة $g(x)$

II) الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = -x - 2 + \frac{3 + 2\ln x}{x}$ ، و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2. أ) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right)$

ب) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]0; \frac{1}{\alpha}]$ ، ومتناقصة تماما على المجال $[\frac{1}{\alpha}; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

3. أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-x - 2)$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يطلب كتابة معادلته.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

4. أ) بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف A فاصلتها 1

ب) اكتب معادلة المماس ل (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1

5. ارسم (Δ) ، (T) و (C_f) ، (نأخذ $\frac{1}{\alpha} \approx 0.53$ و $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) \approx 0.73$)

III) بين أن $A = 2\text{cm}^2$ ، حيث A هي مساحة الحيز المستوي المحدد ب (C_f) و (Δ) و المستقيمين ذي المعادلتين $x = 1$ و $x = e^{-1}$.

إنتهى الموضوع الثاني

إذ أنت لم تزرع و أبصرت حاصدا ❖❖ ندمت على التفريط في زمن البذر

بالتوفيق في شهادة البكالوريا ❖ أستاذة المادة: تشوك.هـ

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_1 = \ln(2) \\ u_{n+1} = \ln(2 - e^{-u_n}) \end{cases}$$

1. أ، تحقق أن: $u_2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ و $u_3 = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$.

(ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n: u_n > 0$.

2. أ، بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $2 - e^{-u_n} - e^{u_n} = -e^{u_n} (e^{u_n} - 1)^2$ ثم استنتج أن: $2 - e^{-u_n} < e^{u_n}$.

(ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة.

3. برهن بالتراجع من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4. نعتبر الجداء P بحيث: $P = e^{u_1} \times e^{u_2} \times \dots \times e^{u_{2021}}$.

✓ بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $P = 2022$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1. نعتبر الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x) = 1443 - 2022x$.

✓ الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2. نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = 2x \ln(x)$.

✓ الدالة الأصلية للدالة h والتي تنعدم عند العدد 1 هي الدالة H المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $H(x) = x^2 \ln(x)$.

3. المتتالية العددية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $w_n = \frac{\ln(n)}{e^n}$ متقاربة.

4. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ بـ: $g(x) = x - \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

✓ الدالة g زوجية.

يحتوي كيس على سبع كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها أربع كريات بيضاء و ثلاث كريات خضراء.

- I.
 1. احسب احتمال كل من الحادثتين A و B بحيث A : عدد الكريات البيضاء المسحوبة أكبر من عدد الكريات الخضراء المسحوبة و B : الحصول على كرتين بالضبط من نفس اللون.
 2. احسب $P(A \cap B)$ ثم استنتج $P(A \cup B)$ و $P_A(B)$.
- II.
 1. نسحب الآن ثلاث كريات على التوالي دون إرجاع و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات البيضاء المتبقية.
 2. احسب الأمل الرياضي $E(X)$ للمتغير العشوائي X ، ثم استنتج $E(1743X - 1962)$.

التمرين الرابع: 07 نقاط

- I.
 1. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $g(x) = 2e^{x-1} - x - 1$.
 1. ادرس تغيرات الدالة g .
 2. أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما العدد 1 والآخر α بحيث $-0,6 < \alpha < -0,5$.
 - ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.
- II.
 1. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x - 2 + (x + 2)e^{1-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 - أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 - ب) بين أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = e^{1-x} g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
 - ج) بين أنه من أجل $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = xe^{1-x}$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.
 2. بين أن $f(\alpha) = 2\alpha + \frac{2}{\alpha + 1}$ ، ثم اعط حصر $f(\alpha)$.
 3. أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$ ، ثم ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) .
 - ب) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ (Δ) يطلب كتابة معادلته.
 4. أ) أنشئ كلامن (Δ) ، (T) ثم مثل (C_f) . نقبل أن $f(\beta) = 0$ بحيث $-1,61 < \beta < -1,63$ ، يعطى $f(\alpha) \approx 3,73$.
 - ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x) = 2(x - 1) + m$ حلين مختلفين في الإشارة.
 5. أ) بين أن الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $H(x) = (-x - 3)e^{1-x}$ دالة أصلية للدالة $f(x) = 2(x - 1) + m$ على $\mathbb{R}$.
 - ب) استنتج A مساحة الحيز المحدد بـ: (C_f) و (Δ) بين العددين -2 و 1.

الموضوع الثاني

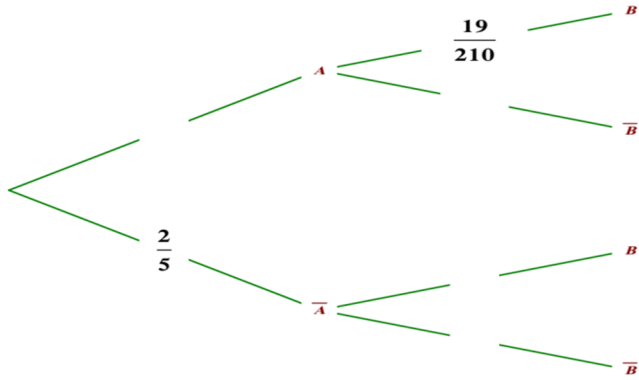
التمرين الأول: 5 نقاط

يحتوي وعاء U على 10 كريات منها خمس كريات حمراء مرقمة بـ: -2، -1، 0، 1، 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: -1، 0، 1 وكريتين سوداوين مرقمتين بـ: -1، 1 ويحتوي وعاء V على 9 كريات موزعة كما يلي: خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 1، 1، 2، 2، 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 3، 2، 3 وكرية سوداء مرقمة بـ: -1، ويحتوي وعاء W على خمس كريات منها ثلاث كريات بيضاء وكريتين صفراوين.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربع كريات من أحد الوعاءين U أو V بالكيفية التالية:

نقوم بسحب كرية واحدة عشوائيا من الوعاء W ، إذا تحصلنا على كرية بيضاء نسحب الكريات الأربعة من U وإذا تحصلنا على كرية صفراء نسحب الكريات الأربعة من V .

نسمي A الحدث: الحصول على كرية بيضاء، ونسمي B الحدث الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم.



1. انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها موضحا طريقة الحساب.

2. استنتج $P(B)$ ثم احسب $P_{\bar{B}}(A)$.

3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة.

➤ عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب أملة الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

1. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحددها الأول: $u_0 = e^{-1}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n \sqrt{u_n}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 1$.

2. أ) بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

ب) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

II. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي بـ: $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \ln(u_n)$.

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الأول.

2. اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^n}$.

3. احسب بدلالة n المجموع S_n بحيث $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + \dots + \ln(u_n)$.

التمرين الثالث: 04 نقاط

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $D = [0; \ln 2]$ بـ: $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$ ، $g(x) = \frac{1}{e^x + 1}$ ، وليكن

(C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين على الترتيب في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$$\text{نضع } I = \int_0^{\ln 2} f(x) dx \text{ و } J = \int_0^{\ln 2} g(x) dx$$

1. بين أنه من أجل $x \in D$: $\frac{1}{3} \leq g(x) \leq \frac{1}{2}$ ، ثم أعط حصرًا للتكامل J .

2. أثبت أن $I - J = \int_0^{\ln 2} (e^x - 1) dx$ ، ثم استنتج مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و (C_g) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 0$ و $x = \ln 2$.

3. أ) تحقق أنه من أجل $x \in D$: $f(x) = e^x - \frac{e^x}{e^x + 1}$ ، ثم احسب التكامل I .
ب) استنتج قيمة التكامل J ، ثم فسر النتيجة هندسيًا.

التمرين الرابع: 07 نقاط

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - 1 - \ln x$.
1. ادرس تغيرات الدالة g .

2. احسب $g(1)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II. الدالة f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln x + \frac{2 + \ln x}{x}$ تمثيلها البياني في المستوى المنسوب

إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل $x \in]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

ج) استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

2. ليكن (P) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \ln x$.

أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيًا.

ب) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (P) .

3. أ) بين أن (C_f) يقطع حامل محاور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α بحيث $0,17 < \alpha < 0,19$ ، ثم استنتج حسب

قيم x إشارة $f(x)$.

ب) ارسم (P) ثم ارسم (C_f) .

4. ادرس تغيرات الدالة h المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $h(x) = [f(x)]^2$ دون تعيين عبارتها.

انتهى الموضوع الثاني

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية



مديرية التربية لولاية الوادي
ثانوية بوشوشة - المختلطة -

المستوى : السنة الثالثة
علوم تجريبية
السنة الدراسية 2021 / 2022

المدة : 3 ساعات ونصف

اختبار البكالوريا التجريبي في مادة : الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول :

التمرين الأول: (04 نقاط)

من بين الاقتراحات الثلاثة لكل سؤال من الاسئلة جواب واحد صحيح فقط حدده مع التعليل:

- (1) الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 1 - \frac{2}{e^x + 1}$ هي دالة:
 - (أ) فردية
 - (ب) زوجية
 - (ج) ليست زوجية وليست فردية
- (2) حل المعادلة التفاضلية: $y' - \ln 3y - \ln 27 = 0$ والذي يحقق $y(0) = 6$ هو
 - (أ) $y(x) = e^x - \ln 3$
 - (ب) $y(x) = 3^{x+2} - 3$
 - (ج) $y(x) = 9e^x - 3$
- (3) A و B حدثان مستقلان و $P(A) = 0.2$ و $P(A \cup B) = 0.35$ ، احتمال الحدث B هو:
 - (أ) $P(B) = 0.15$
 - (ب) $P(B) = 0.1875$
 - (ج) $P(B) = 0.125$
- (4) (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{2}{x} (1 + \ln x) dx$

نضع: $S = U_0 + U_1 + \dots + U_{36}$ قيمة S هي.

 - (أ) $S = 2022$
 - (ب) $S = 1444$
 - (ج) $S = 1443$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

I. f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

- (1) أدرس تغيرات الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- (2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f(x) - x = 0$.
- (3) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $[1; \sqrt{3}]$ فإنّ: $f(x) \in [1; \sqrt{3}]$.

II. (U_n) المتتالية العددية المعرفة بـ $U_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = f(U_n)$.

- (1) (أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq U_n \leq \sqrt{3}$
- (ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة وأحسب نهايتها.
- (2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = \frac{(U_n)^2}{3 - (U_n)^2}$.

(أ) بيّن أنّ المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

(ب) أكتب V_n بدلالة n ، ثم استنتج U_n بدلالة n وأحسب نهاية (U_n) مجدداً.

- (3) أحسب بدلالة n المجموعين S_n و S'_n : $S_n = \frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_1} + \dots + \frac{1}{V_n}$ و $S'_n = \frac{1}{(U_0)^2} + \frac{1}{(U_1)^2} + \dots + \frac{1}{(U_n)^2}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 8 كريات لا نفرق بينها باللمس ، كريتان تحملان الرقم: 0 و أربع كريات تحمل الرقم: 2 وكرية تحمل الرقم: 1 وكرية تحمل الرقم: 4.

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 3 كريات من الصندوق.

نعتبر الحدثين:

A : "الكرات المسحوبة مجموع أرقامها يساوي 6".

B : "الكرات المسحوبة جداء أرقامها يساوي 8"

(1) أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ احتمالي الحدثين A و B على الترتيب.

(2) أحسب $P(A \cap B)$ ، هل الحدثين A و B مستقلان؟. برّر إجابتك.

(3) استنتج $P_A(B)$ ، ثم $P(\overline{A \cap B})$.

(4) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل عملية سحب جداء أرقام الكريات المسحوبة.

(أ) عرّف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب $E(X)$ أمله الرياضي.

(ب) أحسب $P\left(\frac{X^2-16}{X} > 0\right)$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = \frac{(1 + \ln x)^2}{x}$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ وبيّن أنّ: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، ثمّ فسر النتائج المتحصل عليها بيانيا.

(2) (أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{(1 + \ln x)(1 - \ln x)}{x^2}$

(ب) استنتج اتجاه تغيّر الدالة f ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

(ج) أكتب معادلة المستقيم (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.

(3) g الدالة العددية المعرفة على $]1; +\infty[$ ب: $g(x) = 1 - x + \ln x$

(أ) أدرس اتجاه تغيّر الدالة g ، واستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]1; +\infty[$.

(ب) برّر أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]1; +\infty[$: $1 + x + \ln x > 0$.

(ج) استنتج وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (T) .

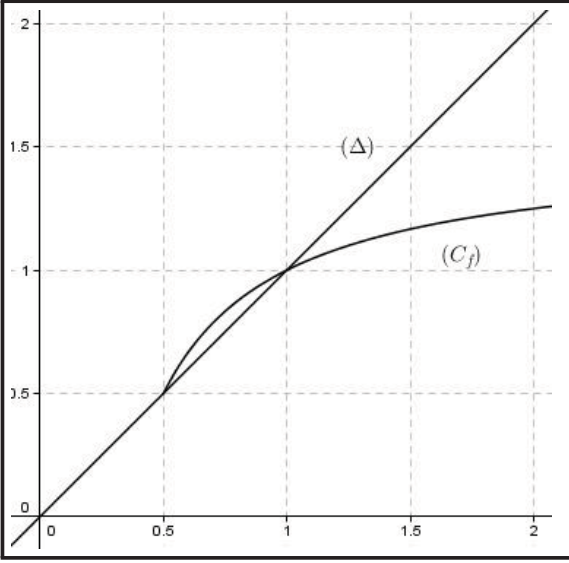
(4) أنشئ المنحنى (C_f) والمستقيم (T) .

(5) m وسيط حقيقي موجب ، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة: $\ln x = \sqrt{m}x - 1$.

(6) أحسب مساحة الحيز المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين التي معادلاتها: $y = x$ ، $x = 1$ و $x = e$.

إنتهى الموضوع الأوّل

الموضوع الثاني :



التمرين الأول: (04 نقاط)

f الدالة المعرفة على المجال $I = [\frac{1}{2}; +\infty[$ كما يلي:
 $f(x) = \frac{3x-1}{2x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي
 المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(\vec{i}; \vec{j})$ و (Δ) مستقيم
 ذو المعادلة $y = x$ (كما في الشكل المقابل)
 (U_n) المتتالية العددية المعرفة بحدّها الأول $U_0 = 2$ ومن أجل
 كل عدد طبيعي $n: U_{n+1} = f(U_n)$.

(1) أنقل الشكل المقابل، مثلّ دون حساب على محور الفواصل
 الحدود U_0, U_1, U_2 و U_3 مبرزاً خطوط الإنشاء.

(2) خمن اتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها.

(3) برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n: U_n > 1$.

(4) أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ، ماذا تستنتج؟

(5) أ) بين أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n: U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$.

ب) استنتج أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n: U_n - 1 \leq (\frac{1}{2})^n$ ، ثم استنتج نهاية المتتالية (U_n) .

(6) (V_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $V_n = \frac{U_n - 1}{2U_{n-1}}$.

أ) بين أنّ المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدّها الأول.

ب) أكتب عبارة U_n بدلالة n .

ج) أحسب بدلالة n المجموع S_n بحيث: $S_n = \frac{V_0-1}{U_0} + \frac{V_1-1}{U_1} + \dots + \frac{V_{n-1}-1}{U_n}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

من بين الاقتراحات الثلاثة لكل سؤال من الاسئلة جواب واحد صحيح فقط حدّدّه مع التعليل:

(1) منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $g(x) = 3x + \frac{e^{-x} - 2}{e^{-x} - 1}$ يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته:

أ) $y = 3x$ ب) $y = 3x + 1$ ج) $y = 3x + 2$

(2) نعتبر العدد الحقيقي $A(\lambda) = \int_1^\lambda x \ln x dx$ حيث $\lambda > 1$ ، علماً أن الدالة: $x \mapsto \frac{x^2}{2} \left[\ln x - \frac{1}{2} \right]$

دالة أصلية للدالة $x \mapsto x \ln x$ ، قيمة λ التي من أجلها $A(\lambda) = \frac{1}{4}$ هي:

أ) $\lambda = e^{-1}$ ب) $\lambda = \sqrt{e}$ ج) $\lambda = 2e$

(3) المعادلة: $\log(11x^2 - 6x + 5) = \log(x^2) + 1$ تقبل حلان في $\mathbb{R}$ هما:

أ) $S = \{1; -5\}$ ب) $S = \{1; 5\}$ ج) $S = \{-1; -5\}$

(4) المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_n = 2 - 3 \left(\frac{1}{4} \right)^n$ هي متتالية

أ) متزايدة تماماً ب) متناقصة تماماً ج) ليست رتيبة

التمرين الثالث: (04 نقاط)

وحدة إنتاجية يسيرها 20 عامل منهم 8 نساء و 12 رجال ، من بينهم العامل " مراد " .

- (1) يريد العمال تشكيل لجنة مؤلفة من ثلاثة عمال . ، أحسب احتمال كل حدث من الحوادث الآتية:
 A : " أعضاء اللجنة نساء " . B : " اللجنة تضم على الأكثر امرأة " . C : " اللجنة تضم على الأقل امرأة " .
- (2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل لجنة مشكلة ، عدد الرجال الموجودين فيها .
 أ) عيّن قانون احتمال المتغير العشوائي X ، ثم أحسب $E(X)$ أمله الرياضي.
 ب) أحسب $P(X^2 - 2X \leq 0)$.
- (3) يريد العمال تشكيل لجنة مؤلفة من رئيس، نائب و كاتب ، أحسب احتمال كل حدث من الحوادث الآتية :
 D : "رئيس اللجنة من الرجال " . E : " رئيس ونائب اللجنة من نفس الجنس " .
 F : "العامل " مراد " موجود في اللجنة " .

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I . نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = (2x + 1)e^{-x} + 1$.

- (1) أحسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.
- (2) أدرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- (3) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.74; -0.73[$.
 ب) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II . f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (-2x - 3)e^{-x} + x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(\vec{o}; \vec{i}; \vec{j})$

- (1) أحسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.
- (2) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.
 ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .
- (3) أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = g(x)$.
 ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.
- (4) بيّن أنّ : $f(\alpha) = \alpha + 1 + \frac{2}{2\alpha + 1}$ ، ثم عيّن حصرا للعدد $f(\alpha)$. (تدور النتائج إلى 10^{-2}).
- (5) بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثيها.
- (6) أنشئ كلاً من (Δ) و (C_f) . (يعطى $f(-1.65) \approx 0$ و $f(1.4) \approx 0$).
- (7) أ) عيّن العددين a و b حتى تكون الدالة $H(x) = (ax + b)e^{-x}$ دالة أصلية للدالة $h(x) = (-2x - 3)e^{-x}$.
 ب) أحسب المساحة $A(\lambda)$ للحيز من المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادليهما $x = 0$ و $x = \lambda$ (حيث λ عدد حقيقي موجب تماماً).
 ج) أحسب: $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

إنتهى الموضوع الثاني

الإجابة النموذجية عن 1 مسألة الكالوريا التجريبية

$$y(n) = C e^{(\ln 3)^n} - \frac{\ln 27}{\ln 3} \quad \text{إذا}$$

$$= C e^{\ln 3^n} - \frac{3 \ln 3}{\ln 3}$$

$$y(n) = C \times 3^n - 3 \quad (1)$$

لدينا $y(0) = 6$ أي

$$C \times 3^0 - 3 = 6$$

$$C = 6 + 3 = 9$$

يتحقق في (1) حيث:

$$y(n) = 9 \times 3^n - 3$$

$$= 3^2 \times 3^n - 3$$

$$y(n) = 3^{n+2} - 3$$

3 / A و B حدثان مستقلان

$$P(A \cup B) = 0,35, \quad P(A) = 0,2$$

احتمال الحدوث B هو

$$P(B) = 0,1875 \quad \text{الاجواب}$$

التحليل:

لدينا A و B مستقلان

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$P(A \cap B) - P(A) = P(B)(1 - P(A))$$

$$P(B) = \frac{P(A \cap B) - P(A)}{1 - P(A)}$$

$$= \frac{0,35 - 0,2}{1 - 0,2} = \boxed{0,1875}$$

الموضوع الأول

التقريب الأول

الإجابة بجميع أخطاء التحليل:

1 / انا في المبرنة على IR د.

$$f(n) = 1 - \frac{e}{e^n + 1}$$

الاجواب: P فردية

التحليل:

$$f(n) = 1 - \frac{e}{e^n + 1} = \frac{e^n - 1}{e^n + 1}$$

* لدينا f متناظرة بالنسبة لـ "0"

أي في كل $a \in \mathbb{R}$ فان $-a \in \mathbb{R}$

$$f(-n) = \frac{e^{-n} - 1}{e^{-n} + 1} = \frac{1 - e^n}{1 + e^n} = - \frac{(e^n - 1)}{e^n + 1}$$

$$= -f(n)$$

وهي f دالة فردية

2 / حل المعادلة التفاضلية $y' - \ln 3 y = \ln 27$

والتي تحقق $y(0) = 6$ هي

$$y(n) = 3^{n+2} - 3 \quad \text{الاجواب}$$

التحليل:

$$y' - \ln 3 y = \ln 27$$

$$y' = (\ln 3) y + \ln 27$$

هي في الشكل $y' = ay + b$

حلها في الشكل

$$y(n) = C e^{an} - \frac{b}{a}$$

التعويض الثاني

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \quad D = \mathbb{R} \quad I$$

11 دراسة دالة f وتبليكل
حول اختيارها
نبقا

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{|x|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{|x|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

* الخاتمة: f

ف دالة f على $\mathbb{R}$ ودالة كالمشتقة

$$f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1} - 2x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$= \frac{2(x^2+1) - 2x^2}{(\sqrt{x^2+1})^3}$$

$$= \frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$\sqrt{x^2+1} > 0 \text{ و } x^2+1 > 0$$

و f دالة زوجية وكما على $\mathbb{R}$

متكاملة معرفة معرفة

$$U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{2}{x} (1 + \ln x) dx$$

المجموع S_n حيث

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{36}$$

$$S_n = 1443$$

التبليكل

$$U_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{2}{x} (1 + \ln x) dx$$

$$= \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left(\frac{2}{x} + 2 \frac{\ln x}{x} \right) dx$$

$$= \left[2 \ln x + (\ln x)^2 \right]_{e^n}^{e^{n+1}}$$

$$= 2 \ln e^{n+1} + (\ln e^{n+1})^2$$

$$- 2 \ln e^n - (\ln e^n)^2$$

$$= 2(n+1) + (n+1)^2 - 2n - n^2$$

$$= 2n+2 + n^2+2n+1 - 2n - n^2$$

$$= 2n+3$$

وهي متكاملة صالحة 1

3 و $r=2$

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{36}$$

$$S_n = \frac{(n-p+1)(U_p + U_n)}{2} \Big|_{p=0}^{n=36}$$

$$= \frac{(36-0+1)(U_0 + U_{36})}{2}$$

$$= \frac{37(3+75)}{2} = \frac{37 \times 78}{2}$$

$$= 1443$$

أي $1 \leq f(n) \leq \sqrt{3}$
 ونه $f(n) \in [1, \sqrt{3}]$

$u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = f(u_n)$ II

11 / 18 بيان أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$

$1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

نفع $P(n) : 1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

$P(0) : 1 \leq u_0 = 1 \leq \sqrt{3}$ (مفيدة)

نقرض أن $P(n)$ مفيدة ونثبت $P(n+1)$

لدينا $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

وبما أن f دالة متزايدة على المجال

$[1, \sqrt{3}]$ فإن

$f(1) \leq f(u_n) \leq f(\sqrt{3})$

$1 \leq \frac{2}{\sqrt{2}} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$

أي $1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$

وننه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: u_n

$1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$

بإدراية إيجاب تغير (u_n)

وإستنتاج تقاربها وصاحب نهاية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{2u_n - u_n \sqrt{u_n^2 + 1}}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$$

$$= \frac{u_n(2 - \sqrt{u_n^2 + 1})}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$$

$f(n) - n = 0$ المعادلة

$f(n) - n = 0$

$\frac{2n}{\sqrt{n^2 + 1}} - n = 0$

$\frac{2n - n\sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 1}} = 0$

وبما أن

$2n - n\sqrt{n^2 + 1} = 0$

$n(2 - \sqrt{n^2 + 1}) = 0$

لما $n = 0$ أو $2 - \sqrt{n^2 + 1} = 0$

$2 - \sqrt{n^2 + 1} = 0$

$\sqrt{n^2 + 1} = 2$

$n^2 + 1 = 4$

$n^2 = 3$

$n = \sqrt{3}$ أو $n = -\sqrt{3}$

وننه حلول المعادلة

$S = \{0, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

3/ بيان أنه من أجل $n \in [1, \sqrt{3}]$

$f(n) \in [1, \sqrt{3}]$ فإن

$n \in [1, \sqrt{3}]$ لدينا

أي $1 \leq n \leq \sqrt{3}$

وبما أن f دالة متزايدة على

المجال $[1, \sqrt{3}]$ فإن

$f(1) \leq f(n) \leq f(\sqrt{3})$

$1 \leq \frac{2}{\sqrt{2}} \leq f(n) \leq \sqrt{3}$

$l=0$ مقبول لأن $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$
 $l=-\sqrt{3}$ مقبول لأن $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$
 $l=\sqrt{3}$ مقبول

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$$

$$V_n = \frac{(u_n)^2}{3 - (u_n)^2} \quad / 2$$

19/ بيان أن (V_n) م متزايدة بطاب
 $V_0 = ?$ و $q = ?$

$$V_{n+1} = \frac{(u_{n+1})^2}{3 - (u_{n+1})^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{2u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}\right)^2}{3 - \left(\frac{2u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{4u_n^2}{u_n^2+1}}{3 - \frac{4u_n^2}{u_n^2+1}}$$

$$= \frac{\frac{4u_n^2}{u_n^2+1}}{\frac{3u_n^2+3-4u_n^2}{u_n^2+1}}$$

$$= \frac{4u_n^2}{-u_n^2+3} = 4 \left(\frac{u_n^2}{3-u_n^2} \right)$$

$$= 4V_n$$

وبما أن (V_n) م متزايدة أسبقا

$$q = 4$$

إشارة الفرق من إشارة

$$\sqrt{u_n^2+1} > 0 \text{ لأن } 1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$$

$$1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$$

$$1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$$

$$1 \leq u_n^2 \leq 3$$

$$2 \leq u_n^2+1 \leq 4$$

$$\sqrt{2} \leq \sqrt{u_n^2+1} \leq 2$$

بفرق الطرفين بالـ (-1) في

$$-2 \leq -\sqrt{u_n^2+1} \leq -\sqrt{2}$$

$$0 \leq 2 - \sqrt{u_n^2+1} \leq 2 - \sqrt{2}$$

$$2 - \sqrt{u_n^2+1} > 0$$

وبما أن (u_n) متزايدة أسبقا

فإن

يمكن استنتاج أن إشارة

$$2 - \sqrt{u_n^2+1}$$

* إجماع :

(u_n) متزايدة أسبقا ومحدودة

من أجل $l \in (3, \sqrt{3})$ مقبولة

* حساب نهاية (u_n)

لدينا (u_n) مقاربة وبالتالي

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

$$f(l) = l$$

$$f(l) - l = 0$$

فإننا نجد المعادلة أسبقا

وحلها هو

$$S = \{0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

$$U_n = \sqrt{\frac{3(\frac{1}{2})4^n}{(\frac{1}{2})4^n + 1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n =$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3(\frac{1}{2})4^n}{\frac{1}{2}4^n + 1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3 \times \cancel{4^n}}{\cancel{4^n}(\frac{1}{2} + \frac{1}{\cancel{4^n}})}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3 \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

3 حساب - خلاصه U_n الی آخر

$$S_n = \frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_1} + \dots + \frac{1}{V_n}$$

لینا $(\frac{1}{V_n})$ م در این باره

$$q' = \frac{1}{9} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{V_0} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$S_n = \frac{1/V_0}{1-q'} (1 - (q')^{n+1})$$

$$= \frac{2}{1 - \frac{1}{4}} (1 - (\frac{1}{4})^{n+1})$$

$$= \frac{2}{\frac{3}{4}} (1 - (\frac{1}{4})^{n+1})$$

$$S_n = \frac{8}{3} (1 - (\frac{1}{4})^{n+1})$$

$$V_0 = \frac{(U_0)^2}{3 - (U_0)^2} = \frac{1}{3 - 1} = \frac{1}{2}$$

ن/ن کتای V_n خلاصه U_n و ا- کتای (U_n) خلاصه U_n حساب - کتای (U_n)

ن/ن کتای (V_n) م در این باره

$$\begin{aligned} V_n &= V_p \times q^{n-p} \\ &= V_0 \times 4^{n-0} \end{aligned} \quad \begin{aligned} p &= 0 \\ q &= 4 \\ n &= n \end{aligned}$$

$$V_n = \frac{1}{2} (4)^n$$

$$U_n = \frac{U_n^2}{3 - U_n^2}$$

$$V_n(3 - U_n^2) = U_n^2$$

$$3V_n - U_n^2 V_n - U_n^2 = 0$$

$$U_n^2 (-V_n - 1) = -3V_n$$

$$U_n^2 = \frac{-3V_n}{-V_n - 1}$$

$$U_n^2 = \frac{3V_n}{V_n + 1}$$

$$\begin{cases} U_n = \sqrt{\frac{3V_n}{V_n + 1}} \end{cases} \quad \begin{aligned} &\text{ای م در این باره} \\ &1 \leq U_n \leq \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$U_n = \sqrt{\frac{3V_n}{V_n + 1}}$$

التمرين الثالث

2	2	1	6
2	2	4	6

الخريطة: نصف 3 كرات

الكيفية: في آن واحد

طريقة العد: توليف $C_8^3 = 56$

"A" الكرات المسوية مطويع أو قاسط مطويع

"B" حيد أو قاسط مطويع

1/ حساب $P(A)$ و $P(B)$

3 كرات 2 أو 4 و 6

$$P(A) = \frac{C_4^3 + C_4^1 \times C_1^1 \times C_2^1}{C_8^3}$$

$$= \frac{4 + 8}{56} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$$

3 كرات 2 أو 1 و 6

$$P(B) = \frac{C_4^3 + C_1^1 \times C_4^1 \times C_1^1}{C_8^3}$$

$$= \frac{4 + 4}{56} = \frac{8}{56} = \frac{1}{7}$$

2/ حساب $P(A \cap B)$ وملاحظة

المشاكل A و B متقلبت

$A \cap B$ الكرات المسوية حيد

وأرقامها 8 ومطويعها 6

توجد حالة واحدة وهي 3 كرات 2

$$P(A \cap B) = \frac{C_4^3}{C_8^3} = \frac{4}{56} = \frac{1}{14}$$

ص 6

$$S'_n = \frac{1}{(u_0)^2} + \frac{1}{(u_1)^2} + \dots + \frac{1}{(u_n)^2}$$

$$V_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2} \quad \text{لدينا}$$

$$\frac{1}{V_n} = \frac{3 - u_n^2}{u_n^2} \quad \text{أو}$$

$$\frac{1}{V_n} = \frac{3}{u_n^2} - 1$$

$$\frac{1}{V_n} + 1 = \frac{3}{u_n^2}$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{V_n} \right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{u_n^2}$$

$$S'_1 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{V_0} + \frac{1}{V_1} + \dots + \frac{1}{V_n} \right) + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3}$$

مره (n+1)

$$S'_n = \frac{1}{3} S_n + \frac{1}{3} (n+1)$$

$$S'_n = \frac{1}{3} \left(\frac{8}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right) \right) + \frac{1}{3} (n+1)$$

$$= \frac{8}{9} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right) + \frac{1}{3} (n+1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln n)^c}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2\ln n + (\ln n)^2}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + \frac{2\ln n}{n} + \frac{(\ln n)^2}{n}$$

$$= 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^2}{n} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln y}{y} \right)^2$$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{2\ln y}{y} \right) = 0$$

وإذا $y=0$ سنقيم مقام بـ أفقي لـ (C)

2/ بيان أن f متصلة في 0

$$f(n) = \frac{(1 + \ln n)(1 - \ln n)}{n^2} \quad \text{في } n \in]0, +\infty[$$

f دالة في 0 على $]0, +\infty[$

وإليك التفاضل

$$f'(n) = \frac{2\left(\frac{1}{n}\right)(1 + \ln n)n - (1 + \ln n)^2}{n^2}$$

$$= \frac{(1 + \ln n)[2 - (1 + \ln n)]}{n^2}$$

$$= \frac{(1 + \ln n)(2 - 1 - \ln n)}{n^2}$$

$$= \frac{(1 + \ln n)(1 - \ln n)}{n^2}$$

X	$-\infty$	-4	0	4	$+\infty$
X	-	-	0	+	+
$X^2 - 16$	+	0	-	-	+
$\frac{X^2 - 16}{X}$	-	0	+	-	+

$$\frac{X^2 - 16}{X} > 0 \quad \text{طول المتراجحة}$$

$$-4 < X < 0 \quad \text{أو} \quad X > 4$$

$$P\left(\frac{X^2 - 16}{X} > 0\right) = P(X > 4)$$

$$= P(X=8) + P(X=16)$$

$$= \frac{8}{16} + \frac{6}{16} = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$$

التحريث الرابع:

$$f(n) = \frac{(1 + \ln n)^c}{n}$$

$$D_f =]0, +\infty[$$

1/ حساب $\lim_{n \rightarrow 0} f(n)$ وبيان
أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$ وتفسير النتائج

$$* \lim_{n \rightarrow 0} f(n) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{(1 + \ln n)^c}{n} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow 0} (1 + \ln n)^c = +\infty$$

$n=0$ سنقيم مقام بـ أفقي

لـ (C)

جاءت معادلة الحاسبات
 ل (T) عند ان نقطة ذات
 الفاعلة "1"

$$(T): y = f'(n)(n-1) + f(1)$$

$$y = 1(n-1) + 1 \quad / \quad f'(1) = 1$$

$$y = n - 1 + 1 \quad / \quad f(1) = 1$$

$(T) \quad y = n$

$g(n) = 1 - n + \ln n$ / 3

$D_g =]1, +\infty[$

* ادر، انة! جلاه خير و

دا نتاج! اشارة $g(n)$ على $]1, +\infty[$

انها g قاعا على $]1, +\infty[$

وبالتالي اشارة g'

$$g'(n) = -1 + \frac{1}{n}$$

$$= \frac{-n+1}{n} < 0$$

لان $n > 1$ و $-n+1 < 0$

وبالتالي g متناقصة على $]1, +\infty[$

انتاج! اشارة $g(n)$

لنا $g(1) = 0$ و g متناقصة

على $]1, +\infty[$ وبالتالي $g(n) < 0$

n	1	$+\infty$
$g(n)$	0	-

دا انتاج الجاه خير و

شكل جدول لقرائتها

لنا $f'(n) = \frac{(1+\ln n)(1-\ln n)}{n^2}$

انتاج! اشارة $f'(n)$ على $]0, 1[$ و $]1, +\infty[$

$1 - \ln n = 0 \quad / \quad 1 + \ln n = 0$

$\ln n = -1$

$\ln n = 1$

$n = e$

$\ln n = -1$

$n = e^{-1}$

n	0	e^{-1}	e	$+\infty$
$1+\ln n$	-	0	+	+
$1-\ln n$	+	+	0	-
$f'(n)$	-	0	+	-

وبالتالي f متزايدة تمامًا على المجال

$]e^{-1}, e[$ و متناقصة على المجالين

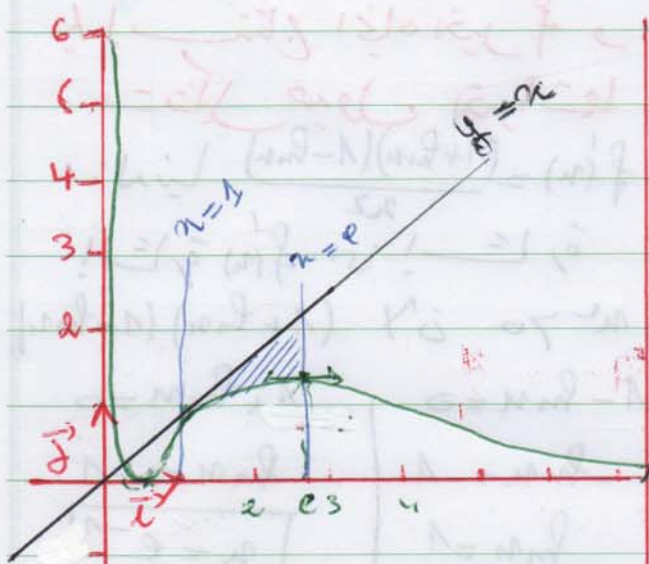
$]e, +\infty[$ و $]0, e^{-1}[$

* جدول اشارة f

n	0	e^{-1}	e	$+\infty$
$f(n)$	-	0	+	-
$f(n)$	$\rightarrow 0$	$\nearrow \frac{2}{e}$	$\searrow 0$	$\rightarrow 0$

$f(e) = \frac{2}{e}$

$f(e^{-1}) = 0$



ب/ تبين أن $n \in [1, +\infty)$

فإن $1+n+lnn > 0$

لدينا $n > 1$

(1) $lnn > 0$

$n > 1$

(2) $n+1 > 2 > 0$

بجمع (1) و (2) فإن

$$1+n+lnn > 0$$

15 المتناقضة البينائية حسب قيم m

ب/ ! منتج وقيمة (Cg) باستثناء طول المحاور $1 \leq m \leq \infty$

$$lnn = \sqrt{mn} - 1$$

$$lnn+1 = \sqrt{mn}$$

$$(lnn+1)^2 = mn$$

$$\frac{(lnn+1)^2}{n} = m$$

$$f(n) = mn$$

المتناقضة تقول اني ايجاد

نقاط تقاطع (Cg) مع

المستقيم الموار ذو المحاور $y=mn$

لدينا $y=mn$ يمثل نقطة

ثابتة و صلا $O(0,0)$

$$f(n) - y = \frac{(1+lnn)^2}{n} - n$$

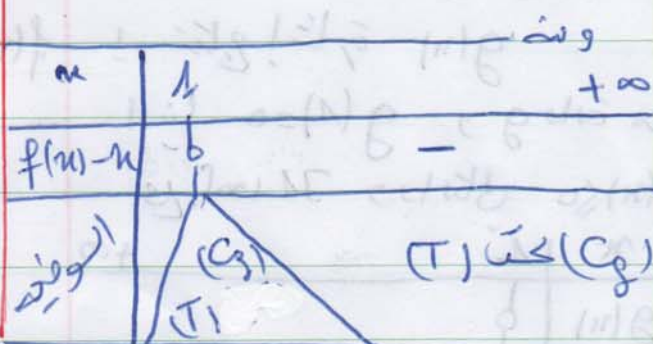
$$= \frac{(1+lnn)^2 - n^2}{n}$$

$$= \frac{(1-n+lnn)(1+n+lnn)}{n}$$

$$= \frac{g(n)(1+n+lnn)}{n} < 0$$

لأن $1+n+lnn > 0$ و $g(n) < 0$ و $n > 0$

المتناقضة	قيم m
ط مضايف	$m=0$
تد طول مسايرة	$0 < m < 1$
حد ان صا مضايف	$m=1$
ط و صير	$m > 1$



سؤال 6 / حساب المساحة
 - المعطى: $(C_f) = 1$ و $y = x$
 $x = e$, $x = 1$, $y = x$

$$A = \int_1^e y - f(x) dx$$

$$= \int_1^e x - \frac{(1 + \ln x)^2}{x} dx$$

$$= \int_1^e x - \frac{1 + 2\ln x + (\ln x)^2}{x} dx$$

$$= \int_1^e x - \frac{1}{x} + 2\frac{\ln x}{x} - \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \ln x - (\ln x)^2 - \frac{1}{3}(\ln x)^3 \right]_1^e$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^2 - 1 - 1 - \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 0 - 0 - 0 \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{7}{3} \right) - \frac{1}{2} \text{ u.a}$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{17}{6} \text{ u.a}$$

وضف مي ايل كرسه طبعي $n: 1 \leq n$
 4/د، اسبج! بچہ ريس (11)، والہ ستاج

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n - 1}{2U_n} - U_n$$

$$= \frac{3u_n - 1 - 2u_n^2}{u_n}$$

$$\frac{-2u_n^2 + 3u_n - 1}{u_n}$$

1, 2 الفرق هو $-2u_n^2 + 3u_n - 2$ ، 1, 2

$x = 11_n$ في

$$-2x^2 + 3x - 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad | a = -2$$

$$= 3^2 - 4(-2)(-1) \quad b = 3$$

$$= 1 \quad \wedge \quad c = -1$$

$$x_1 = \frac{-3+1}{-2(2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-3 - 1}{-2 + 2j} = \frac{-4}{-4} = 1$$

x	$-\infty$	$1/2$	1	$+\infty$
$-2x^2 + 3x - 1$	$-$	0	$+$	$-$

وہجاءت: ۱۶۷۱ قات

$$(U_n) \subset \mathbb{R}, \quad -2U_n^2 + 3U_n - 1 < 0$$

نوع ماده

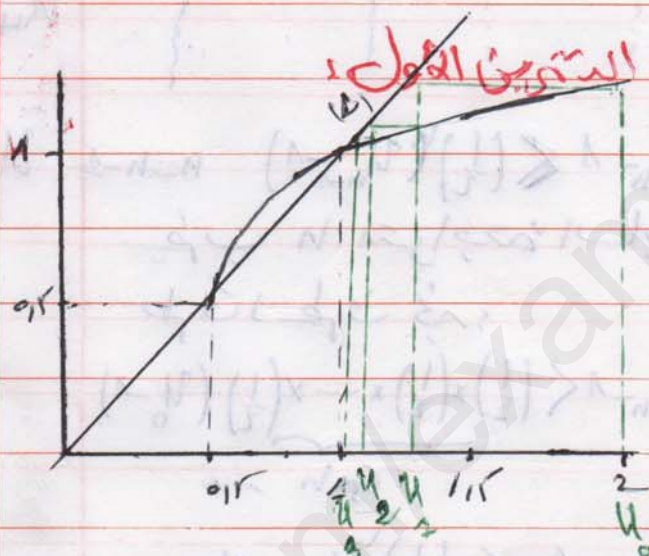
وحيات في منزلة على اطفال [31400] * الى ————— متابع :

(هـ) متناقضة وفردية في الأصل

(17/11) في صلاة

ص ۱۸

الموضوع الثاني



11. 3 سبیل از هر دو

2/ دَفَعَيْنِ الْكَافِرَ الْخَبِيرَ (١١) وَنَقَّابَهَا

لدينا u_0, u_1, u_2, u_3 مرتبة ترتيباً

معدن (U) وگاز

وَسَلَابِيحُ خُوفٍ وَتَعْلَامُ سَعَادَةٍ

$(n-1) \mid (D)$ و (C)

3/ برهات - يراجع انفسه

امر کرنا ہے: 11/7/1

$P(n) : U_n > 1$ نضع

$P(0): U_0 = 271 \text{ (also } \rightarrow 0)$

نشر في أن $P(n)$ صحيحة ونثبت

$$P(n+1) \sim 22.4$$
$$u_n \geq 1$$

وہجائے و متزایہ سے

$$f(v_n) > f(1)$$

$$u_{n+1} \geq 1$$

$$u_{n-1} < \left(\frac{1}{2}\right) (u_{n-1}) \quad n=2$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\}$$

$$u_{n-1} < \left(\frac{1}{2}\right) (u_{n-1}) \quad n=n-1$$

يقرب n من واجهة البداية
طرف الطرف في

$$u_{n-1} < \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \dots \times \left(\frac{1}{2}\right)}_{\text{في } h} (u_0 - 1)$$

$$u_{n-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^h (2-1)$$

$$\boxed{u_{n-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^h}$$

ملاحظة
يمكن برهان يتراجع على
الحد في $u_{n-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^h$

$$V_n = \frac{u_{n-1}}{2u_{n-1}-1} \quad /6$$

IP بيان أن (V_n) م متناهي
 $V_0 = ?$ و $q = ?$

$$V_{n+1} = \frac{3u_{n+1}-1}{2u_{n+1}-1}$$

$$= \frac{3u_n-1}{2u_n} - 1$$

$$= \frac{2(3u_n-1)-1}{2u_n}$$

IP/5 بيان أن u_n من أجل كل n
طبيعي h : $u_{n+1}-1 \leq \frac{1}{2}(u_n-1)$
لدينا

$$u_{n+1}-1 = \frac{3u_n-1}{2u_n} - 1$$

$$= \frac{3u_n-1-2u_n}{2u_n}$$

$$= \frac{u_n-1}{2u_n}$$

$$= \frac{1}{2} (u_n-1)$$

ولدينا $u_n > 1$
أي $2u_n > 2$

$$(1) - \boxed{\frac{1}{2u_n} < \frac{1}{2}}$$

لدينا $u_{n-1} > 1$ يقرب طرفي (1)
بالضرب $\frac{1}{2} (u_n-1)$
 $\frac{1}{2u_n} (u_n-1) < \frac{1}{2} (u_n-1)$

$$\boxed{u_{n+1}-1 < \frac{1}{2} (u_n-1)}$$

إستنتاج أن u_n من أجل كل n طبيعي
 $u_n-1 < \left(\frac{1}{2}\right)^h$: h
لدينا من العلاقة السابقة و
من أجل

$$u_0-1 < \left(\frac{1}{2}\right) (u_0-1) \quad n=0$$

$$u_1-1 < \left(\frac{1}{2}\right) (u_1-1) \quad n=1$$

$$u_n = \frac{V_n - 1}{2V_n - 1}$$

$$u_n = \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$$

S_n حساب المجموع

$$S_n = \frac{V_0 - 1}{u_0} + \frac{V_1 - 1}{u_1} + \dots + \frac{V_n - 1}{u_n}$$

لدينا من المعادلة

$$(2V_n - 1)u_n = V_n - 1$$

$$2V_n - 1 = \frac{V_n - 1}{u_n}$$

$$S_n = (2V_0 - 1) + (2V_1 - 1) + \dots + (2V_n - 1)$$

$$= 2(V_0 + V_1 + \dots + V_n) - (1 + 1 + \dots + 1)$$

$$= 2 \frac{V_0}{(1 - \frac{1}{2})} (1 - (\frac{1}{2})^{n+1}) - (n+1)$$

$$= \frac{2 \left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{2}} (1 - (\frac{1}{2})^{n+1}) - n - 1$$

$$S_n = \frac{4}{3} (1 - (\frac{1}{2})^{n+1}) - n - 1$$

$$= \frac{3u_{n-1} - 2u_n}{2u_n} = \frac{6u_{n-2} - 2u_n}{2u_n}$$

$$= \frac{u_{n-1}}{4u_{n-2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_{n-1}}{2u_{n-2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} V_n$$

وهذا هو الحد العام لـ V_n

وهذا هو الحد العام لـ $q = \frac{1}{2}$

$$V_0 = \frac{u_0 - 1}{2u_0 - 1} = \frac{2 - 1}{2(2) - 1} = \frac{1}{3}$$

وهذا هو الحد العام لـ u_n

وهذا هو الحد العام لـ V_n

وهذا هو الحد العام لـ V_n

$$V_n = V_p \times q^{n-p} \quad \left| \begin{array}{l} p=0 \\ q=\frac{1}{2} \\ n=n \end{array} \right.$$

$$V_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$V_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1} \quad \text{لدينا}$$

$$V_n(2u_n - 1) = u_n - 1$$

$$2V_n u_n - V_n = u_n - 1$$

$$2V_n u_n - u_n = V_n - 1$$

$$(2V_n - 1)u_n = V_n - 1$$

المسألة الثانية

$$= \left(\frac{\lambda^2}{2} (\ln \lambda - \frac{1}{2}) \right) - \left(\frac{1}{2} (-\frac{1}{2}) \right)$$

$$= \frac{\lambda^2}{2} (\ln \lambda - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}$$

حتى يكون $A(\lambda) = \frac{1}{4}$

$$\frac{\lambda^2}{2} (\ln \lambda - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\lambda^2}{2} (\ln \lambda - \frac{1}{2}) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \ln \lambda - \frac{1}{2} = 0 \\ \ln \lambda = \frac{1}{2} \\ \boxed{\lambda = e^{\frac{1}{2}}} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\lambda^2}{2} = 0 \\ \lambda^2 = 0 \\ \lambda = 0 \\ \text{ممنوع} \\ \lambda > 1 \end{array}$$

$$\boxed{\lambda = \sqrt{e}}$$

$$\log(11n^2 - 6n + 5) = \log n^2 + 1 \quad 13$$

نحل في n

الجواب: $S = \{1, 5\}$ أو λ

التحليل

$$\log(11n^2 - 6n + 5) = \log n^2 + 1$$

في $\mathbb{R}^*$ أي

$$11n^2 - 6n + 5 > 0, n^2 > 0$$

$$\log(11n^2 - 6n + 5) = \log n^2 + 1$$

$$\frac{\ln(11n^2 - 6n + 5)}{\ln 10} = \frac{\ln n^2}{\ln 10} + 1$$

اختيار λ بحيث ان صيغة مع

التبرير

1/ صفنا ان f المعرفة على $\mathbb{R}^+$

$$f(n) = \frac{e^{-n} - 2}{e^{-n} - 1} \rightarrow$$

مقابل n ماثل $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n)$ مصادفة

الخط $y = 3n + 2$ / λ التحليل

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) - 3n =$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3n + \frac{e^{-n} - 2}{e^{-n} - 1} - 3n$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-n} - 2}{e^{-n} - 1} = 2$$

و

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) - (3n + 2) = 0$$

ماثل $y = 3n + 2$ و λ

$$(C) \quad (+\infty)$$

$$\lambda > 1, A(\lambda) = \int_1^\lambda n \ln n \, dn$$

$$A(\lambda) = \frac{1}{4} \text{ أي } \lambda$$

$$\lambda = \sqrt{e} \text{ الجواب: } \lambda$$

التحليل

$$A(\lambda) = \int_1^\lambda n \ln n \, dn$$

$$= \left[\frac{n^2}{2} (\ln n - \frac{1}{2}) \right]_1^\lambda$$

التمرين الثالث

عدد الرجال 12
عدد النساء 8

عدد العمال : $20 = 12 + 8$

التجربة تشكيل لجنة من 3 رجال
المهام غير متكررة

طريقة العد وتوقيته $C_{20}^3 = 1140$

1/ حساب احتمال وقوع الحدث التالي

"A" أعضاء اللجنة نساء

$$P(A) = \frac{C_8^3}{C_{20}^3} = \frac{14}{285}$$

"B" اللجنة تضم امرأة واحدة على الأكثر

$$P(B) = \frac{C_8^1 \times C_{12}^2 + C_{12}^3}{C_{20}^3} = \frac{171}{285}$$

"C" اللجنة تضم امرأة على الأقل

$$P(C) = \frac{C_8^1 \times C_{12}^2 + C_8^2 \times C_{12}^1 + C_8^3}{C_{20}^3} = \frac{78}{95}$$

2/ لكن لا يمكن اختيار العشوائي
يرفق بذكر لجنة عدد الرجال
اختراجه بن في اللجنة

$$\ln(11n^2 - 6n + 5) = \ln n^2 + \ln 10$$

$$\ln(11n^2 - 6n + 5) = \ln 10n^2$$

$$11n^2 - 6n + 5 = 10n^2$$

$$n^2 - 6n + 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \begin{cases} a=1 \\ b=-6 \\ c=5 \end{cases}$$

$$= 36 - 4(1)(5) = 16$$

$$n_1 = \frac{6+4}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$n_2 = \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$S = \{1, 5\}$$

وسمى U_n متتالية على N بـ $U_n = 2 - 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$ في مسألة

الجواب P متزايدة كلما
التحليل

$$U_{n+1} - U_n = \left(2 - 3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) - \left(2 - 3\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

$$= -3\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= 3\left(\frac{1}{4}\right)^n \left(-\frac{1}{4} + 1\right)$$

$$= 3\left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{9}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^n > 0$$

وسمى (U_n) متزايدة كلما

"E" رئيس اللجنة وثانيه من نفس

$$P(F) = \frac{A_{12}^2 \times A_{18}^1 + A_{18}^2 \times A_{12}^1}{A_{20}^3} = \frac{3384}{6840} = \frac{47}{95}$$

"F" العامل "مراد" في اللجنة

$$P(F) = \frac{3 \times A_{12}^1 \times A_{18}^2}{A_{20}^3} = \frac{1026}{6840} = \frac{3}{20}$$

التمرين الرابع :

$$g(n) = (2n+1)e^{-n} \quad P_g \in \mathbb{R} \quad \forall$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} g(n) \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) \rightarrow \text{ما}$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow -\infty} g(n) = \lim_{n \rightarrow -\infty} (2n+1)e^{-n} \quad \text{ما}$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n+1)e^{-n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+1}{e^n} = \frac{2}{e} + \frac{1}{e} = \frac{3}{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^n} = 0 \quad \text{لان}$$

2/ دراسة الجاه تغير و تشكيل

حول تغيراتها

g دالة و ا على R و

$$g'(n) = 2e^{-n} - e^{-n}(2n+1)$$

$$= e^{-n}(2 - (2n+1))$$

$$= e^{-n}(1-2n)$$

1/ قانون الاحتمال وحساب
الاحتمال الريا فياتي

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

n_i	0	1	2	3	Σ
$P(X=n_i)$	$\frac{14}{285}$	$\frac{84}{285}$	$\frac{132}{285}$	$\frac{77}{285}$	1
$n_i P_i$	0	$\frac{84}{285}$	$\frac{264}{285}$	$\frac{231}{285}$	

$$P(X=0) = \frac{C_8^3}{C_{20}^3} = \frac{14}{285}$$

$$P(X=1) = \frac{C_{12}^1 \times C_8^2}{C_{20}^3} = \frac{28}{95} = \frac{84}{285}$$

$$P(X=2) = \frac{C_{12}^2 \times C_8^1}{C_{20}^3} = \frac{44}{95} = \frac{132}{285}$$

$$P(X=3) = \frac{C_{12}^3}{C_{20}^3} = \frac{11}{77} = \frac{77}{285}$$

$$E(X) = \sum n_i P_i = \frac{9}{5} = 1.8$$

التجربة : 30 عمال

المهام : رئيس ، نائب ، كاتب

$$A_{20}^3 = 6840$$

حساب احتمال العوائد التالية

"D" رئيس اللجنة من الرجال

$$P(D) = \frac{A_{12}^1 \times A_{18}^2}{A_{20}^3} = \frac{3}{5}$$

أولاً $g(-0.74) \times g(-0.73)$ ومنه يجب
معرفة القيم المتوسطة بين
التي وجدتها $-0.74 < \alpha < -0.73$
حيث $g(\alpha) = 0$

بما أن إشارة $g(n)$
من جدول اختبار - α $+$
ومن $g(\alpha) = 0$ ينتج

n	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(n)$	-	0	+

II
 $f(n) = (-2n-3)e^{-n} + n$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n), \lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) = -\infty$

• $\lim_{n \rightarrow -\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow -\infty} (-2n-3)e^{-n} + n$

$= \lim_{n \rightarrow -\infty} n \left[\frac{-2n-3}{n} e^{-n} + 1 \right]$

$= +\infty$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-2n-3)e^{-n} + n$

$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2n}{e^n} - \frac{3}{e^n} + n$

$= +\infty$

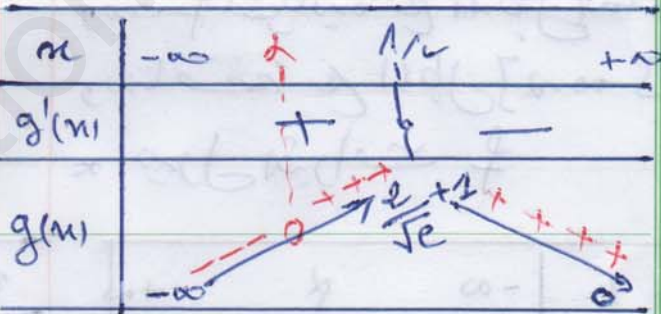
إشارة $g(n)$ إشارة $1-2n$
لأن $e^{-n} > 0$

$1-2n = 0 \Rightarrow 2n = 1$

$n = \frac{1}{2}$

n	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$1-2n$	+	0	-
$g'(n)$	+	0	-

ومن g من أجل $n > \frac{1}{2}$
متزايدة كما في $[-\infty, \frac{1}{2}]$
جدول اختبار g



$g(1/2) = 2e^{1/2} + 1 = \frac{2}{\sqrt{e}} + 1$

$g(n) = 0$ أي $n = -0.74$ و $n = -0.73$

نقطة α بين -0.74 و -0.73

$-0.74 < \alpha < -0.73$

لذا g دالة متزايدة ومتناهية

كما في الجدول $[-0.74, -0.73]$

$g(-0.74) =$

$g(-0.73) =$

$$= e^{-n}(-2 - (-2n-3)) + 1$$

$$= (2n+1)e^{-n} + 1$$

$$= g(n)$$

حالا! نتابع اتجاه تغير f ونشكل جدول تغيراتها

لدينا $f'(n) = g(n)$

إذا إشارة $f'(n)$ هي إشارة $g(n)$

n	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(n)$	-	0	+
$f'(n)$	-	0	+

ونرى f متزايدة على $[\alpha, +\infty)$
 ونناقضه على $]-\infty, \alpha]$
 f جدول التغيرات *

n	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(n)$	-	0	+
$f(n)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

$f(\alpha) = 2 + 1 + \frac{2}{2\alpha+1}$ بيان 4

نثبت ان

$$f(\alpha) - (2+1) - \frac{2}{2\alpha+1} = 0$$

2/ بيان 1/2: $y=n$ (A) متق

مقابل h ، نأخذ (C_g) كجواب $h \rightarrow +\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) - y = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-2n-3)e^{-n} + n - n$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} (-2n-3)e^{-n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2n}{e^n} - \frac{3}{e^n} = 0$$

ونرى $y=n$ (A) متق مقابل h

نأخذ (C_g) كجواب $h \rightarrow +\infty$

1/ دالة وموجة (C_g) دالة (A)

$$f(n) - y = (-2n-3)e^{-n}$$

إشارة الفرق هي إشارة $(-2n-3)$

$$e^{-n} > 0$$

$$-2n-3=0 \Leftrightarrow -2n=3$$

$$n = -\frac{3}{2}$$

n	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$-2n-3$	+	0	-
$f(n)-y$	+	0	-
الوصف	(A) فوق (Cg)	(Cg) نقطة	(Cg) تحت (A)

3/ بيان 1/3: $f'(n) = g(n)$ بيان 4

لدينا f في R والنهاية

المشتقة

$$f'(n) = -2e^{-n} - e^{-n}(-2n-3) + 1$$

$$-4,08 < f(x) < -3,89$$

15/ بيان ان (Cg) قبيل نقطة
! انطاف في جلاب نقطة

لدينا $f'(x)$ ق! لـ R و

$$f''(x) = g'(x)$$

في الفترة I

x	$-\infty$	$1/2$	$+\infty$
$f''(x) = g'(x)$		$\begin{matrix} + \\ \\ - \end{matrix}$	

ومن f'' نعلم ان $x = 1/2$
نقطة انطاف وبقا ومنه (Cg) قبيل
نقطة انطاف هي

$$W(1/2, f(1/2))$$

$$f(1/2) = (-1-3)e^{-1/2} = -\frac{4}{\sqrt{e}}$$

16/ انشاء (Cg) و (Δ) (آخر الموضع)

17/ اثنين a و b حق تكون

H دالة ابلية لـ R

$$H(x) = (ax+b)e^{-x}$$

$$h(x) = (-2x-3)e^{-x}$$

$$H'(x) = h(x)$$

$$H'(x) = a e^{-x} - (ax+b)e^{-x}$$

$$= (-ax - b + a) e^{-x}$$

$$f(x) = x - 1 - \frac{2}{2x+1} =$$

$$= (2x-3)e^{-x} + x - 1 - \frac{2}{2x+1}$$

$$= (-2x-3)e^{-x} - \frac{(2x+1)+2}{2x+1}$$

$$= \frac{-(2x+3)(2x+1)e^{-x} - (2x+3)}{2x+1}$$

$$= \frac{-(2x+3)[(2x+1)e^{-x} + 1]}{2x+1}$$

$$= \frac{-(2x+3)g(x)}{2x+1} = 0$$

حصر لـ $f(x)$

لـ R

$$-0,74 < x < -0,73$$

$$[0,26 < x+1 < 0,27] - (1)$$

$$-1,48 < 2x < -1,46$$

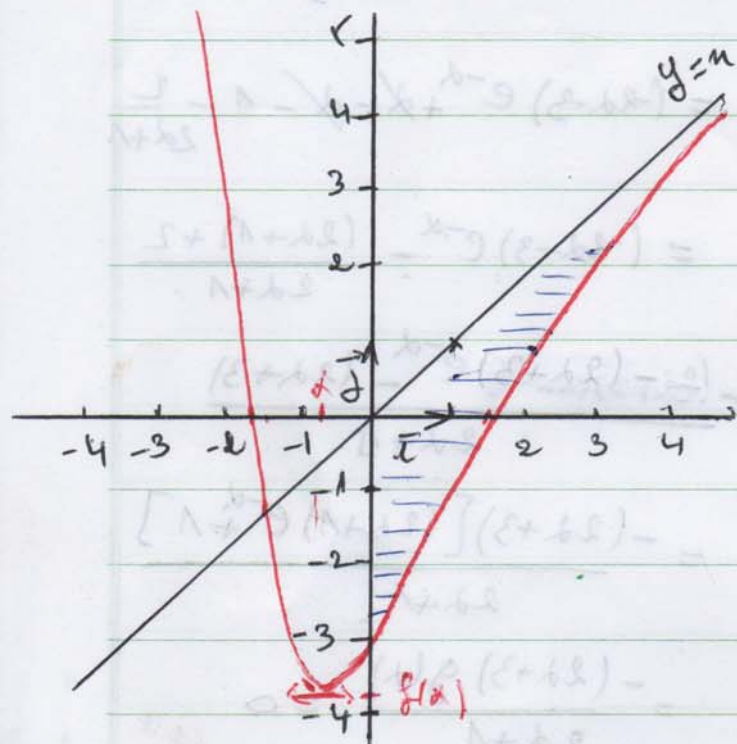
$$-0,48 < x+1 < -0,46$$

$$-2,08 > \frac{1}{2x+1} > -2,17$$

$$-4,16 > \frac{2}{2x+1} > -4,34$$

$$[-4,34 < \frac{2}{2x+1} < -4,16]$$

مع (1) و (2) مع لـ R
جدا



سؤال ٢

$$P(X^2 - 2X \leq 0) \quad 1/5$$

$$X^2 - 2X = 0$$

$$X(X - 2) = 0$$

$$X - 2 = 0 \quad | \quad X = 0$$

$$X = 2$$

X	0	2
$X^2 - 2X$	+	-

$$0 \leq X \leq 2 \quad \text{so } X \text{ is}$$

$$P(X^2 - 2X \leq 0) = P(0 \leq X \leq 2)$$

$$= P(X=0) + P(X=1)$$

$$+ P(X=2)$$

$$= \frac{230}{285}$$

بالطريقة مع الدالة

$$-a = -2 \Rightarrow a = 2$$

$$-b + a = -3 \quad b = 3 + a = 5$$

$$H(u) = (2u + 5) e^{-u}$$

A(λ) = ...

(C) ...

$$y = u, \quad u = \lambda, \quad u = 0$$

$$A(\lambda) = \int_0^\lambda y - f(u) \, du$$

$$= \int_0^\lambda u - (2u - 3) e^{-u} - u \, du$$

$$= [-H(u)]_0^\lambda$$

$$= -H(\lambda) + H(0)$$

$$= -(2\lambda + 5) e^{-\lambda} + 5 \quad \text{u.a}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) =$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} -(2\lambda + 5) e^{-\lambda} + 5$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{-2\lambda}{e^\lambda} - \frac{5}{e^\lambda} + 5$$

$$= 5$$



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على خمس كرات بيضاء، ثلاثة حمراء وكرتين سوداوين متشابهة لا نفرق بينها باللمس. نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربع كرات من الصندوق. نعتبر الحادثتين : A "الحصول على كرة حمراء واحدة فقط"، B "الحصول على كرة بيضاء على الأقل".

(1) بين أن : $P(A) = \frac{1}{2}$, ثم أحسب $P(B)$ احتمال الحدث B .

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل مخرج عدد الكرات الحمراء المسحوبة .
(أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

(ب) بين أن : $P(X=0) = \frac{1}{6}$ و $P(X=2) = \frac{3}{10}$

(3) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$

(4) أحسب الانحراف المعياري $\sigma(X)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

أجب بصح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

(1) الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(-2-x) = f(x)$

(2) (u_n) متتالية هندسية أساسها e وحدها الأول u_0 حيث $u_0 = e^{-\frac{1}{2}}$, نضع من أجل كل عدد طبيعي n ,

$\frac{n^2+1}{2}$: يساوي S_n , $S_n = \ln(u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n)$

(3) الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x^2}$, دالتها الأصلية G على المجال

$]0; +\infty[$ والتي تنعدم من أجل القيمة 1 معرفة بـ : $G(x) = x^2 + x - \frac{1}{x} - 1$

(4) يتكون فريق عمل من 4 اناث و 3 ذكور, يراد تشكيل لجنة تضم 3 أعضاء . احتمال أن تكون اللجنة من الجنسين هو: $\frac{6}{7}$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

أ. (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = \alpha$ (α عدد حقيقي) ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \frac{46}{47}u_n + 43$$

جد قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

II. نفرض أن : $\alpha = 2022$

نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $V_n = U_n - 2021$

(1) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

(2) أكتب عبارة v_n بدلالة n , ثم استنتج u_n بدلالة n .

(3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(4) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(5) نضع من أجل كل عدد طبيعي n , $S_n = \frac{u_0}{v_0} + \frac{u_1}{v_1} + \dots + \frac{u_n}{v_n}$,

- أحسب S_n بدلالة n , ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كمايلي : $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$.

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1.31 < \alpha < 1.32$ ثم استنتج إشارة $g(x)$.

II. لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - e + \frac{1 - \ln x}{x}$, (C_f) المنحني الممثل

للدالة f في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ وفسر النتيجة الأولى هندسيا .

(2) أثبت أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) يطلب تعيين معادلته .

(3) أدرس الوضعية النسبية للمنحني (C_f) والمستقيم (D) .

(4) بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فان : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

(5) استنتج اتجاه تغير الدالة f , ثم شكل جدول تغيراتها.

(6) أثبت أن : $f(\alpha) = 2\alpha - e - \frac{1}{\alpha}$, ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(7) أ) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (D) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.

ب) أكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) .

(8) أنشئ (T) والمنحني (C_f) .

(9) نسمي $A(\alpha)$ مساحة الحيز من المستوي المحددة بالمنحني (C_f) والمستقيم (D) والمستقيمين اللذين معادلتيهما

$x = e$ و $x = \alpha$

- بين أن : $A(\alpha) = 2(\alpha^2 - 1)^2 cm^2$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

- جمعية خيرية تتكون من 7 رجال و 5 نساء من بينهم رجل اسمه أنس , نريد تشكيل لجنة بها 3 أعضاء.
- (1) ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها في حالة أعضاء اللجنة لهم نفس المهام.
 - (2) أحسب احتمال الحوادث التالية : A " اللجنة تضم أنس " B " اللجنة تتكون من رجلين و امرأة " C " اللجنة بها رجل واحد على الأقل " D " اللجنة مكونة من امرأة على الأكثر " .
 - (3) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل اختيار عدد الرجال الذين يحملون اسم أنس في اللجنة المكونة .
 (أ) عين قيم المتغير X .
 (ب) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X وأحسب أمله الرياضي $E(X)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة, عينه مع التعليل .
- (1) الدالة الأصلية F والتي تحقق $F(1)=0$ للدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{x+1}{x}$ هي الدالة :
 (أ) $F(x) = x - 1 + \ln x$ (ب) $F(x) = 1 - x + \ln x$ (ج) $F(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$
 - (2) الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' + 3y = \frac{5}{2}$ هو الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
 (أ) $y = ce^{3x} + \frac{5}{6}$ (ب) $y = ce^{-3x} - \frac{5}{6}$ (ج) $y = ce^{-3x} + \frac{5}{6}$
 - (3) في قسم نهائي 30% متفوقين في مادة الرياضيات و 35% متفوقين في مادة العلوم الفيزيائية و 10% متفوقين في المادتين معا . احتمال أن يكون التلميذ متفوقا في مادة الرياضيات علما أنه متفوق في مادة العلوم الفيزيائية هو:
 (أ) $\frac{2}{7}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{2}{13}$
 - (4) المتتالية العددية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \ln(n+2) - \ln(n+1)$
 من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ يساوي :
 (أ) $\ln(n+2)$ (ب) $-\ln(n+1)$ (ج) $1 - \ln(n+1)$

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = 0$ والعلاقة التراجعية: $u_{n+1} = \frac{2}{2\sqrt{2} - u_n}$

- (1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < \sqrt{2}$
- (2) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة، ثم استنتج أنها متقاربة وأحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$
- (3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{2} - u_n}$
 (أ) بين أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحددها الأول.

(ب) أكتب v_n بدلالة n , واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

(4) لتكن المتتالية (w_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = \ln(u_n)$, وليكن المجموع :

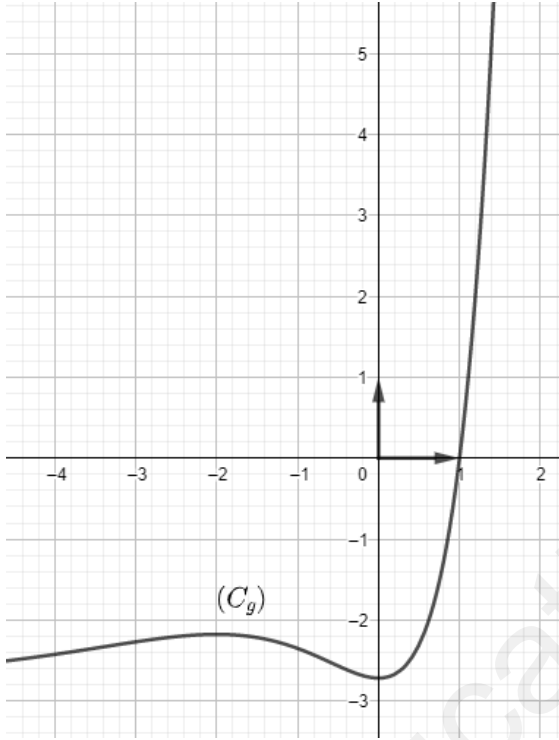
$$S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$$

$$S_n = \frac{1}{2} n \ln 2 - \ln(n+1) \quad \text{-بين أن :}$$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 e^x - e$ و (C_g) تمثيلها البياني في مستو منسوب

إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (كما في الشكل المقابل)



(1) احسب $g(1)$

(2) بقراءة بيانية عين إشارة $g(x)$ ثم استنتج إشارة

$g(-x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$f(x) = e^{-x} - 2 - \frac{e}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم

المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) احسب النهايات الآتية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, ثم فسر النتائج هندسيا

(2) بيّن أن المنحنى (γ) الذي معادلته: $y = e^{-x} - 2$

والمنحنى (C_f) متقاربان بجوار $+\infty$ و $-\infty$, ثم

ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (γ)

(3) بيّن أنه: من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم لدينا:

$$f'(x) = \frac{-g(-x)}{x^2}$$

(4) استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-1; 0]$ و $[0; +\infty]$ ومتناقصة تماما على

المجال $]-\infty; -1]$, ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

(5) بيّن كيف يمكن إنشاء المنحنى (γ) انطلاقا من منحنى الدالة e^x , ثم ارسم بعناية كلا من المنحنيين

(γ) و (C_f) في نفس المعلم السابق

(III) احسب A مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و (γ) والمستقيمت ذات المعادلات $x = e$ و $x = e^2$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

امتحان البكالوريا التجريبي
ماي 2022



ثانوية عيسى حميطوش
مديرية التربية لولاية برج بوعريج
الشعبة: علوم تجريبية

المدة: 3 سا و 30 د (3 ساعات و نصف)

اختبار في مادة: الرياضيات

يحتوي الإمتحان على 4 صفحات من (صفحة 1 من 4) إلى (صفحة 4 من 4) :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{e^{2x} - e^x + 1}{e^x - 1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. عين الإقتراح الصحيح الوحيد من بين الإقتراحات الثلاثة في كل حالة:

(1) من أجل كل عدد حقيقي من $]0; +\infty[$:

(أ) $f(x) = e^x + 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$ (ب) $f(x) = e^x - 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}$ (ج) $f(x) = e^x - 1 - \frac{e^x}{e^x - 1}$

(2) الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ و التي تحقق $F(\ln 2) = 2$ معرفة كمايلي:

(أ) $F(x) = e^x - \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right)$ (ب) $F(x) = e^x + \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right)$ (ج) $F(x) = e^x - \ln\left(\frac{e^x}{e^x - 1}\right) + \ln 2$

(3) ليكن A مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و المنحنى (γ) الممثل للدالة $e^x - 1$ و المستقيمين الذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = 2$:

(أ) $A = \ln(2e)$ (ب) $A = \ln(e - 1)$ (ج) $A = \ln(e + 1)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة كمايلي: $u_0 = \alpha$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1$.

(1) عين α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

(2) نضع في كل مايلي $u_0 = 5$.

(أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + 4$.

(ب) بين أن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثم إستنتج إتجاه تغير (u_n) .

(ت) أحسب نهاية المتتالية (u_n) ، ماذا تستنتج.

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{1}{u_n - 4}$.

(أ) عبر عن v_n بدلالة n .

(ب) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

(4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = \ln(u_0 v_0 - 1) + \ln(u_1 v_1 - 1) + \dots + \ln(u_n v_n - 1)$.

اختبار في مادة: الرياضيات / الشعبة: علوم تجريبية / بكالوريا تجريبية 2022

التمرين الثالث: (05 نقاط)

صندوق U_1 يحتوي على 5 كرة بيضاء و 4 كرات سوداء وصندوق آخر U_2 يحتوي على 3 كرات بيضاء وكرتين سوداوين. نسحب عشوائيا كرة من U_1 و نضعها في U_2 ثم نسحب عشوائيا بعد ذلك كرتين في آن واحد من U_2 . مجموع هذه العمليات تمثل إختبارا و نعتبر الأحداث: I : "الكرة المسحوبة من U_1 بيضاء"

A : "سحب كرتين بيضاوين" B : "سحب كرتين سوداوين" C : "سحب كرتين من لونين متلفين"

(1) أ) تحقق أن $P(I)$ احتمال الحادثة I هو $\frac{5}{9}$.

ب) علما أن الكرة المسحوبة من U_1 بيضاء، بين أن احتمال سحب كرتين بيضاوين من U_2 هو $\frac{2}{5}$.

(2) أنشئ شجرة الاحتمالات التي تتمذج هذه التجربة.

(3) أحسب $P(A)$ ، $P(B)$ و $P(C)$ احتمال الأحداث A ، B و C .

(4) شارك أحمد في لعبة بـ $100DA$ و قام بالإختبار السابق، إذا كانت الكرتان المسحوبتان مختلفتين في اللون يتحصل على $50DA$ وإذا كانت الكرتان بيضاوين يحصل على $200DA$ و وإذا كانت سوداوين يخسر إشتراكه. وليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب الربح الجبري المحقق لأحمد.

- عين قيم X ثم عين قانون احتمال X و احسب أمله الرياضي، بماذا تتصح أحمد.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x + 2 - 2e^x$

(1) أدرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن للمعادلة حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $-1,6 < \alpha < -1,5$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{2(x+1)e^x}{1+2xe^x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $1cm$)

(1) أ) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا.

ب) أدرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 1$ (نقبل أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $1 + 2xe^x > 0$)

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(1+2xe^x)^2}$. استنتج إتجاه تغير f و شكل جدول تغيراتها.

(3) تحقق أن: $f(\alpha) = 1 + \frac{1}{\alpha + 1}$ ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(4) أنشئ (Δ) و (C_f) . (تأخذ $f(\alpha) = -0,8$)

(5) عين قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x) = e^m$ حلان متمايزان.

(6) n عدد طبيعي، I_n مساحة الحيز المحدد بحامل محور الفواصل و المنحنى (C_f) و المستقيمين الذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = n$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $I_n = \ln(1 + 2ne^n) cm^2$

ب) أدرس إتجاه تغير المتتالية العددية (I_n) ثم أحسب ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (04 نقاط)

لكل سؤال توجد إجابة واحدة صحيحة ، عينها مع التعليل:

(1) (w_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي: $w_n = 2n - 1 + e^n$ ، ليكن المجموع: $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$:

(أ) $S_n = n^2 - 1 + \frac{1}{e+1}(e^{n+1} - 1)$ (ب) $S_n = n^2 + 1 + \frac{1}{e-1}(e^{n+1} - 1)$ (ج) $S_n = n^2 - 1 + \frac{1}{e-1}(e^{n+1} - 1)$

(2) f دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{2}{x}(1 + \ln x)$. حلول المعادلة التفاضلية $y' = f(x)$ حيث $y(1) = 0$ هي:

(أ) $y = (1 + \ln x)^2 - 1$ (ب) $y = (1 + \ln x)^2$ (ج) $y = 2(1 + \ln x)^2 - 1$

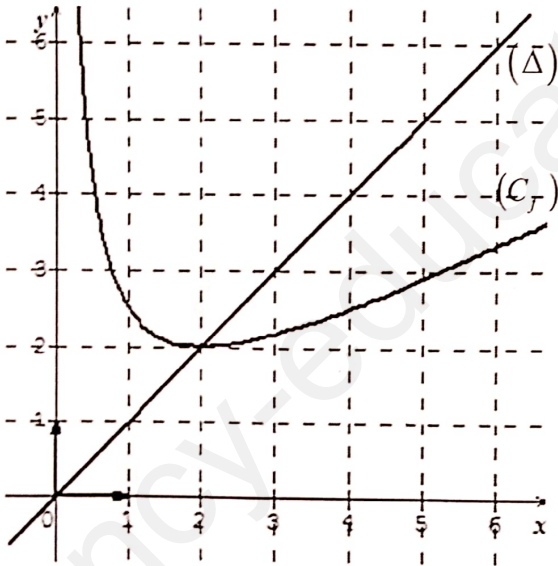
(3) بإستعمال التكامل بالتجزئة $I = \int_1^e (x \ln x) dx$ قيمة I هي:

(أ) $I = e^2 + 1$ (ب) $I = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$ (ج) $I = \frac{1}{4}(e^2 - 1)$

(4) إذا كانت f دالة فردية على $\mathbb{R}$ فإن دالتها الأصلية F على $\mathbb{R}$ هي دالة:

(أ) فردية. (ب) زوجية. (ج) لا فردية ولا زوجية.

التمرين الثاني: (04 نقاط)



I. f دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$ و (Δ) المستقيم

ذو المعادلة $y = x$. (الشكل المقابل)

(1) بين أن الدالة f متزايدة تماما على $[2; +\infty[$.

II. (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 5$ ومن أجل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

(1) أ) مثل على محور الفواصل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 ، دون حسابها مبرزا

خطوط الرسم.

ب) ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها.

(2) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $2 < u_n \leq 5$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة وحدد نهايتها.

(3) أ) بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 < u_{n+1} - 2 \leq \frac{3}{10}(u_n - 2)$.

ب) استنتج أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 < u_n - 2 \leq 3 \times \left(\frac{3}{10}\right)^n$ ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

اختبار في مادة: الرياضيات / الشعبة: علوم تجريبية / بكالوريا تجريبية 2022

التمرين الثالث: (05 نقاط)

يحتوي صندوق على 8 كرات لا نفرق بينها في اللمس ، أربعة حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 وثلاثة صفراء تحمل كلها الرقم 2 وكرة بيضاء مرقمة بـ 2 أيضا.

(1) نسحب عشوائيا ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع و نعتبر الأحداث التالية:

A: "الكرات المسحوبة الثلاثة هي مختلفة الألوان مثنى مثنى"

B: "الكرات المسحوبة الثلاثة تحمل أرقاما مجموعها عدد زوجي"

(أ) أحسب الاحتمالات: $P(A)$ و $P(B)$ ، $P(A \cap B)$ ثم إستنتج $P_A(B)$ و $P(A \cup B)$.

(ب) نسمي X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الألوان المحصل عليها. عيّن قانون الاحتمال للمتغير X ثم أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

(2) نعتبر اللعبة التالية: للمشاركة يدفع اللاعب 100 DA ، ويتحصل على α DA (α عدد حقيقي موجب تماما) لكل لون من الألوان المحصل عليها. ليكن Y المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة الربح الجبري المحقق. تحقق أن $E(Y) = E(\alpha X - 100)$ ثم عين قيمة α حتى تكون اللعبة عادلة.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

f هي الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 2 + (\ln x)^2 - \ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول 1 cm)

(1) (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

(ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) (أ) بين أنه من أجل كل $x \in]0; 1]$ فإن: $x - 1 + 2 \ln x \leq 0$ ومن أجل كل $x \in [1; +\infty[$ فإن: $x - 1 + 2 \ln x \geq 0$.

(ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$ فإن: $f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$ ثم إستنتج إتجاه تغير f وشكل جدول تغيراتها.

(2) بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β حيث: $0,4 < \alpha < 0,5$ و $2,1 < \beta < 2,2$.

(3) (أ) حل في $]0; +\infty[$ المعادلة: $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$.

(ب) أدرس وضعيّة المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم $(\Delta): y = x$.

(4) عين إحداثيي النقطة A من (C_f) بحيث يكون المماس (T) موازيا للمستقيم (Δ) ، ثم أكتب معادلة لـ (T) .

(5) بين أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثيها.

(6) أنشئ (C_f) ، (Δ) و (T) .

(7) (أ) بين أن الدالة $x \mapsto x \ln x - x$ أصلية للدالة $x \mapsto \ln x$ على المجال $]0; +\infty[$.

(ب) بإستعمال التكامل بالتجزئة بين أن: $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$.

(ت) أحسب مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و المستقيمت التي معادلاتها $x = e$ ، $x = 1$ و $y = x$.

إنتهى الموضوع الثاني