أصحيح أم خاطئ

بالنسبة للتمارين من 1 إلى 8 أجب بصحيح أم خاطئ .

1

تكون زاويتي شعاعين متقايستان إذا كان الفرق بين قياسهما مضاعف لـ 2π .

الحل

« تكون زاويتي شعاعين متقايستان إذا كان الفرق بين قياسهما مضاعف لـ 2π » صحيح .

2

إذا كانت $(\vec{u},\vec{v})=(\vec{u}',\vec{v}')$ فإن $\vec{u}$ و $\vec{u}'$ متوازيان و $\vec{v}$ و $\vec{v}'$ متوازيان.

الحل

« إذا كانت $(\vec{u},\vec{v})=(\vec{u}',\vec{v}')$ فإن $\vec{u}$ و $\vec{u}'$ متوازيان و $\vec{v}$ و $\vec{v}'$ متوازيان » خطأ .

3

A ، B ، C ثلاث نقط إحداثياتها القطبية على الترتيب هي :

$$A\left(1,\frac{\pi}{3}\right)\ ,\ B\left(2,\frac{7\pi}{3}\right)\ ,\ C\left(4,-\frac{2\pi}{3}\right)$$

إذن النقط A ، B و C في استقامية .

الحل

« النقط A ، B و C في استقامية » صحيح .

4

في المجال $[-\pi;\pi]$ المعادلة $2\sin 2x=\sqrt{3}$ تقبل أربع حلول فقط .

الحل

« في المجال $[-\pi;\pi]$ المعادلة $2\sin 2x=\sqrt{3}$ تقبل أربع حلول فقط » صحيح .

5

إذا كان α حلا للمعادلة $\cos x=0,6$ فإن العدد $\alpha+105\pi$ هو حل للمعادلة $\cos x=-0,6$.

الحل

« إذا كان α حلا للمعادلة $\cos x=0,6$ فإن العدد $\alpha+105\pi$ هو حل للمعادلة $\cos x=-0,6$ » صحيح .

6

العددان $\frac{2007\pi}{4}$ و $-\frac{5\pi}{4}$ يعلمان نفس النقطة من الدائرة المثلثية .

الحل

« العددان $\frac{2007\pi}{4}$ و $-\frac{5\pi}{4}$ يعلمان نفس النقطة من الدائرة المثلثية » خطأ .

7

بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون :
$\cos^2 x+\sin^2 x=1$ فإن $\sin x$ و $\cos x$ يكون دائما موجبا

الحل

« بما أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون :
$\cos^2 x+\sin^2 x=1$ فإن $\sin x$ و $\cos x$ يكون دائما موجبا » خطأ .

8

مجموعة حلول المتراجحة $\cos^2 x\le 1$ هي $\mathbb{R}$.

الحل

« مجموعة حلول المتراجحة $\cos^2 x\le 1$ هي $\mathbb{R}$ » صحيح .

أسئلة متعددة الاختيارات

بالنسبة للتمارين من 9 إلى 15 اختر الجواب الصحيح من بين الاقتراحات الثلاث .

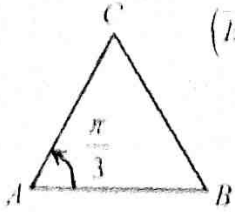
9

إذا كان ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث :
$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}$ فإن ..... $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=$

1) $-\frac{\pi}{3}$ 2) $\frac{\pi}{3}$ 3) $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)$

الحـــل

إذا كان ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث :



$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}$ فإن $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{3}$

و لدينا : $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)=-\frac{\pi}{3}$

و عليه : (2) هو الجواب الصحيح .

10

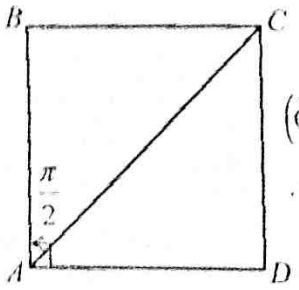
إذا كان $ABCD$ مربع حيث $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\pi}{2}$ فإن :

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=.....$

1) $\frac{\pi}{4}$ 2) $-\frac{\pi}{4}$ 3) $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)$

الحـــل

إذا كان $ABCD$ مربع حيث $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\pi}{2}$ فإن :



$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{\pi}{4}$

من جهة أخرى : $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)=\frac{\pi}{4}$

و عليه : (2) هو الجواب الصحيح .

11

إذا كان $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{\pi}{5}$ فإن ... $=\left(\vec{u},-\vec{v}\right)$

1) $-\frac{\pi}{5}$ 2) $-\frac{4\pi}{5}$ 3) $\pi+\frac{\pi}{5}$

الحـــل

إذا كان $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{\pi}{5}$ فإن $\left(\vec{u},-\vec{v}\right)=\pi+\frac{\pi}{5}$

$\left(\vec{u},-\vec{v}\right)=-\pi+\frac{\pi}{5}=-\frac{4\pi}{5}$

و عليه : (2) و (3) هما الجوابان الصحيحان .

12

إذا كان $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{\pi}{3}$ فإن : ... $=\left(-\vec{u},-\vec{v}\right)$

1) $\frac{\pi}{3}$ 2) $\frac{2\pi}{3}$ 3) $-\frac{\pi}{3}$

الحـــل

إذا كان $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{\pi}{3}$ فإن : $\left(-\vec{u},-\vec{v}\right)=\frac{\pi}{3}$

و عليه : (1) هو الجواب الصحيح .

13

إذا كان $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=-\frac{\pi}{6}$ فإن ... $=\left(2\vec{u},-3\vec{v}\right)$

1) $-\frac{\pi}{6}$ 2) $\frac{\pi}{6}$ 3) $\frac{5\pi}{6}$

الحـــل

إذا كان $\left(\vec{u},\vec{v}\right)=-\frac{\pi}{6}$ فإن $\left(2\vec{u},-3\vec{v}\right)=\pi-\frac{\pi}{6}$

أي $\left(2\vec{u},-3\vec{v}\right)=\frac{5\pi}{6}$

و عليه : (3) هو الجواب الصحيح .

14

إذا كان $\sin x=\frac{1}{2}$ و $0<x<\frac{\pi}{2}$ فإن : ... $=\sin 2x$

1) 1 2) $\frac{1}{4}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

الحـــل

إذا كان $\sin x=\frac{1}{2}$ و $0<x<\frac{\pi}{2}$ فإن : $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

لأن : $\sin x=\frac{1}{2}$ و $0<x<\frac{\pi}{2}$ معناه $x=\frac{\pi}{6}$

عندئذ يكون : $\sin 2x=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

و عليه : (3) هو الجواب الصحيح .

15

إذا كان $\cos x<0$ و $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ فإن ... $=\sin x$

1) موجب 2) سالب 3) لا نعرف

الحـــل

إذا كان $\cos x<0$ و $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ فإن $\sin x>0$

أي $\sin x$ موجب .

و عليه : (1) هو الجواب الصحيح .

$ABCD$ مستطيل مباشر مركزه O .

$AB = a$ و $BAO = \frac{\pi}{3}$.

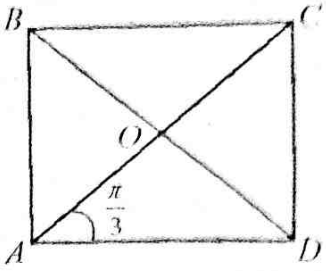
1) ما هي طبيعة المثلث OAB ؟

2) احسب OA ، AC و AD .

3) احسب $\cos(\widehat{BAO})$ و $\sin(\widehat{BAO})$.

4) احسب $\cos(\widehat{AB,AO})$ و $\sin(\widehat{AB,AO})$.

الحـــل



1) تعيين طبيعة المثلث OAB :
الرباعي $ABCD$ مستطيل
و منه النقطة O منتصف كل
من $[AC]$ و $[BD]$
و بالتالي : $OA = OB$
و من جهة أخرى : $\widehat{BAO} = \frac{\pi}{3}$
و عليه المثلث OAB متقايس الأضلاع .

2) حساب OA ، AC و AD :
المثلث OAB متقايس الأضلاع و منه $OA = a$.
من جهة أخرى : O منتصف $[AC]$
و منه : $AC = 2OA = 2OC$
المثلث BAD قائم في A و منه حسب مبرهنة فيثاغورس
نجد : $DB^2 = AB^2 + AD^2$ و منه $AD^2 = 4a^2 - a^2$
و بالتالي $AD^2 = 3a^2$ إذن $AD = a\sqrt{3}$.
و عليه : $OA = a$ ، $AC = 2a$ و $AD = a\sqrt{3}$.

3) حساب $\cos(\widehat{BAO})$ و $\sin(\widehat{BAO})$:

$$\cos(\widehat{BAO}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin(\widehat{BAO}) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4) حساب $\cos(\widehat{AB,AO})$ و $\sin(\widehat{AB,AO})$:

الزاوية (AB,AO) في الاتجاه المباشر و لدينا : $\widehat{BAO} = \frac{\pi}{3}$

و منه $(AB,AO) = \frac{\pi}{3}$ و نجد هكذا أن :

$$\cos(\widehat{AB,AO}) = \frac{1}{2} \text{ و } \sin(\widehat{AB,AO}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان غير معدومين و x قيس للزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$.

1) عين في كل حالة من الحالات التالية القيس الرئيسي و أصغر قيس موجب للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$.

- $x = -\frac{\pi}{3}$
- $x = -\frac{2007\pi}{3}$
- $x = \frac{53\pi}{4}$
- $x = 493\pi$

2) نضع $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ عين في كل حالة من الحالات السابقة قيس الزاوية $\widehat{AOB}$.

الحـــل

1) تعيين القيس الرئيسي و أصغر قيس موجب للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ في كل حالة :

- $(\vec{u},\vec{v}) = x = -\frac{\pi}{3}$:

لدينا : $-\pi < -\frac{\pi}{3} \leq \pi$ و منه $\frac{-\pi}{3}$ هو القيس الرئيسي للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$.

بما أن $(\vec{u},\vec{v}) = -\frac{\pi}{3}$ فإن : $(\vec{u},\vec{v}) = 2\pi - \frac{\pi}{3}$

أي $(\vec{u},\vec{v}) = \frac{5\pi}{3}$.

و عليه : أصغر قيس موجب للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ هو $\frac{5\pi}{3}$.

- $(\vec{u},\vec{v}) = x = -\frac{2007\pi}{3}$:

لدينا : $x = -669\pi = -670\pi + \pi$

العدد -670π مضاعف لـ 2π و منه π قيس آخر للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ و كون $-\pi < \pi \leq \pi$ فإن π هو القيس الرئيسي و هو أصغر قيس موجب للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$.

- $(\vec{u},\vec{v}) = x = \frac{53\pi}{4}$:

لدينا : $x = \frac{56\pi - 3\pi}{4} = 14\pi - \frac{3\pi}{4}$

العدد 14π مضاعف لـ 2π .

و منه : $\frac{-3\pi}{4}$ قيس آخر للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$

و كون $-\pi < \frac{-3\pi}{4} \leq \pi$ فإن $\frac{-3\pi}{4}$ هو القيس الرئيسي للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$.

بما أن $(\vec{u},\vec{v})=\frac{-3\pi}{4}$ فإن : $(\vec{u},\vec{v})=2\pi-\frac{3\pi}{4}$

أي $(\vec{u},\vec{v})=\frac{5\pi}{4}$.

و عليه : أصغر قيس موجب للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$ هو $\frac{5\pi}{4}$.

- $(\vec{u},\vec{v})=x=493\pi$:

لدينا : $x=492\pi+\pi$ و منه π قيس آخر للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$

و كون $-\pi<\pi\leq\pi$ فإن π هو القيس الرئيسي و هو أصغر قيس موجب للزاوية $(\vec{u},\vec{v})$.

2) تعيين قيس الزاوية $\widehat{AOB}$ ، بوضع $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ و $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$:

- $(\vec{u},\vec{v})=x=-\frac{\pi}{3}$:

لدينا : $(\vec{u},\vec{v})=-\frac{\pi}{3}$ و منه $\widehat{AOB}=\frac{\pi}{3}$.

- $(\vec{u},\vec{v})=x=-\frac{2007\pi}{3}$:

لدينا : $(\vec{u},\vec{v})=\pi$ و منه $\widehat{AOB}=\pi$.

- $(\vec{u},\vec{v})=x=\frac{53\pi}{4}$:

لدينا : $(\vec{u},\vec{v})=\frac{-3\pi}{4}$ و منه $\widehat{AOB}=\frac{3\pi}{4}$.

- $(\vec{u},\vec{v})=x=493\pi$:

لدينا : $(\vec{u},\vec{v})=\pi$ و منه $\widehat{AOB}=\pi$.

18

نعتبر النقط A ، B ، C و E في استقامية .

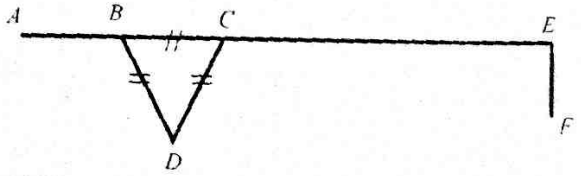
BCD مثلث متقايس الأضلاع .

المستقيم (EF) يعامد (AE) .

- عين قيسا للزوايا الموجهة التالية :

1) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD})$ 2) $(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD})$

3) $(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{EF})$ 4) $(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{EF})$



الحـــل

- تعيين قيسا للزاوية الموجهة في كل حالة :

1) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})=0-\frac{\pi}{3}=\frac{-\pi}{3}$

و عليه : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD})=\frac{-\pi}{3}$

2) $(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$

و عليه : $(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD})=\frac{4\pi}{3}$

3) المستقيم (EF) يعامد المستقيم (AE) و منه :

$(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{EF})=(\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EF})+\pi=\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2}$

و عليه : $(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{EF})=\frac{3\pi}{2}$

4) $(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{EF})=(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BE})+(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{EF})$

$=\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}=\frac{11\pi}{6}$

و عليه : $(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{EF})=\frac{11\pi}{6}$

19

A و B نقطتان متمايزتان من المستوي .

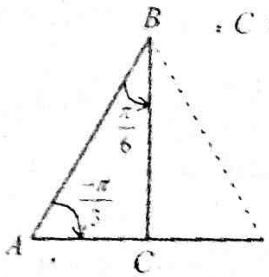
1) عين النقطة C حيث :

$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=\frac{\pi}{6}$ و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-\frac{\pi}{3}$

2) ما هي طبيعة المثلث BAC ؟

الحـــل

1) تعيين النقطة C :



2) تعيين طبيعة المثلث BAC :

لدينا : $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})=\pi$

و منه : $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})=\pi+(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})-(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})$

و بالتالي : $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$

و عليه : المثلث ABC قائم في النقطة C .

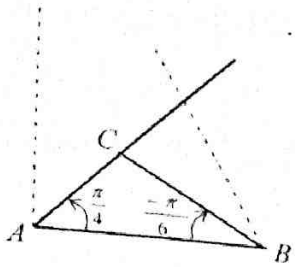
20

A و B نقطتان متمايزتان من المستوي .

1) عين النقطة C التي تحقق :

$(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=-\frac{\pi}{6}$ و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{4}$

2) عين قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$.



الحـــل

1) تعيين النقطة C :

2) تعيين قيسا للزاوية $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$:

لدينا : $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{12}$

و عليه : $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\frac{7\pi}{12}$

بالنسبة للتمارين من 21 إلى 23 . $(O;\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي متعامد و متجانس و مباشر . (C) الدائرة المثلثية مركزها O و $\overrightarrow{OA}=\vec{i}$ و $\overrightarrow{OB}=\vec{j}$.

21

عين على (C) النقط M ، N ، P و Q معلمة بالأعداد :

$\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{7\pi}{4}$ ، $\frac{13\pi}{4}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ على الترتيب .

الحـــل

- تعليم النقط M ، N ، P و Q :

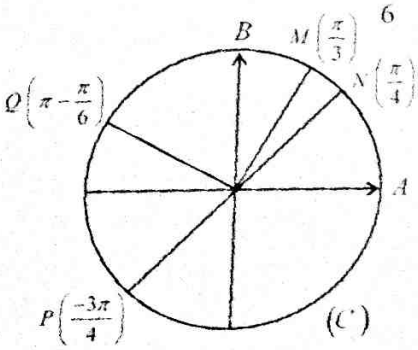
لدينا : $\frac{-7\pi}{4}=-2\pi+\frac{\pi}{4}$ و منه N صورة $\frac{-7\pi}{4}$ هي

ايضا صورة للعدد $\frac{\pi}{4}$.

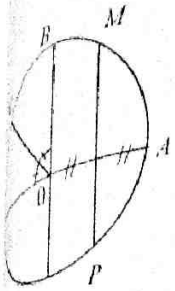
و لدينا : $\frac{13\pi}{4}=4\pi-\frac{3\pi}{4}$ و منه P صورة $\frac{13\pi}{4}$ هي

ايضا صورة للعدد $\frac{-3\pi}{4}$

و لدينا : $\frac{5\pi}{6}=\pi-\frac{\pi}{6}$



22



عين الأعداد x من المجال $]0;2\pi[$ التي تعلم النقط M ، N و P (انظر الشكل) .

الحـــل

- تعيين الأعداد x من المجال $]0;2\pi[$:

• (MP) محور تناظر للقطعة $[OA]$ و منه OAM متقايس الاضلاع و بالتالي العدد x من $]0;2\pi[$ الذي يعلم M هو $\frac{\pi}{3}$.

• $[ON]$ منصف داخلي للزاوية $\widehat{A'OB}$ حيث A' نظيرة A بالنسبة إلى O و منه العدد x من $]0;2\pi[$ الذي يعلم N هو $\frac{3\pi}{4}$.

• النقطة O نظيرة M بالنسبة لمحور الفواصل و منه x من $]0;2\pi[$ الذي يعلم P هو $2\pi-\frac{\pi}{3}$ اي $\frac{5\pi}{3}$

بالنسبة للتمارين من 24 إلى 26 تحقق أن x و y هما قيسان لنفس الزاوية الموجهة .

24 $x=\frac{\pi}{2}$ و $y=-\frac{3\pi}{2}$

الحـــل

لدينا : $x-y=\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}=2\pi$

و بما أن 2π مضاعف لـ 2π فإن $x=\frac{\pi}{2}$ و $y=\frac{-3\pi}{2}$ هما قيسان لنفس الزاوية الموجهة .

25 $x=\frac{11\pi}{4}$ و $y=-\frac{5\pi}{4}$

الحـــل

لدينا : $x-y=\frac{11\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}=4\pi$

و بما أن 4π مضاعف لـ 2π فإن $x=\frac{11\pi}{4}$ و $y=\frac{-5\pi}{4}$ هما قيسان لنفس الزاوية الموجهة .

26 $x=\pi$ و $y=-\dfrac{2556\pi}{4}$

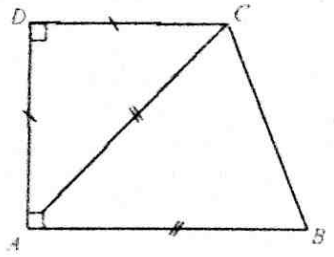
الحـــل

لدينا : $x-y=\pi+\dfrac{2556\pi}{4}=640\pi=2(320)\pi$

و بما أن 640π مضاعف لـ 2π فإن : $x=\pi$

و $y=\dfrac{-2556\pi}{4}$ هما قيسان لنفس الزاوية الموجهة .

29



$ABCD$ شبه منحرف قائم حيث :

$DC=AD$ و $AC=AB$

عين القيس الرئيسي للزوايا الموجهة التالية :

1) $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$ 2) $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right)$

3) $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BA}\right)$ 4) $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AD}\right)$

الحـــل

- تعيين القيس الرئيسي للزوايا الموجهة في كل حالة :

1) $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$:

المثلث ADC قائم في D و متساوي الساقين .

و منه : $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

من جهة اخرى المثلث ABC متساوي الساقين رأسه A

و منه $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$

و بما أن $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\dfrac{\pi}{2}$ لأن $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{\pi}{4}$

و $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ فإن : $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\dfrac{3\pi}{8}$

و كون $-\pi<\dfrac{3\pi}{8}\leq\pi$ فإن $\dfrac{3\pi}{8}$ هو القيس الرئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$.

2) $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right)$:

لدينا : $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right)=-\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{-\pi}{4}$

و بما أن $-\pi<\dfrac{-\pi}{4}\leq\pi$ فإن $\dfrac{-\pi}{4}$ هو القيس الرئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right)$.

3) $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BA}\right)$:

الشعاعان $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{DC}$ مرتبطان خطيا و لهما اتجاهان متعاكسان و منه $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BA}\right)=\pi$.

و بما أن $-\pi<\pi\leq\pi$ فإن π هو القيس الرئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BA}\right)$.

4) $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AD}\right)$:

لدينا : $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AD}\right)=-\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{-\pi}{2}$

و بما أن $-\pi<\dfrac{-\pi}{2}\leq\pi$ فإن $\dfrac{-\pi}{2}$ هو القيس الرئيسي للزاوية $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{AD}\right)$.

30

علما أن قيس الزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ هو $\dfrac{\pi}{2}$ عين قيس الزوايا الموجهة التالية :

1) $(\vec{u},-\vec{v})$ 2) $(2\vec{u},\vec{v})$ 3) $(\vec{u},-3\vec{v})$

4) $(-\vec{u},-\vec{v})$ 5) $(\vec{v},-\vec{u})$

الحـــل

- تعيين قيس الزوايا الموجهة في كل حالة :

1) $\left(\vec{u},-\vec{v}\right)=\pi+\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\pi+\dfrac{\pi}{2}$

و عليه : $\left(\vec{u},-\vec{v}\right)=\dfrac{3\pi}{2}$

2) $\left(2\vec{u},\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\dfrac{\pi}{2}$. و عليه : $\left(2\vec{u},\vec{v}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

3) $\left(\vec{u},-3\vec{v}\right)=\pi+\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\pi+\dfrac{\pi}{2}$

و عليه : $\left(\vec{u},-3\vec{v}\right)=\dfrac{3\pi}{2}$

4) $\left(-\vec{u},-\vec{v}\right)=\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\dfrac{\pi}{2}$. و عليه : $\left(-\vec{u},-\vec{v}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

5) $\left(\vec{v},-\vec{u}\right)=\pi+\left(\vec{v},\vec{u}\right)=\pi-\dfrac{\pi}{2}$

و عليه : $\left(\vec{v},-\vec{u}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

31

علما أن قيس الزاوية الموجهة $(\vec{u},\vec{v})$ هو $-\frac{\pi}{3}$ عين قيس الزوايا الموجهة التالية :

1) $(\vec{v},\vec{u})$ 2) $(5\vec{u},3\vec{v})$ 3) $(2\vec{v},-\vec{u})$ 4) $(-6\vec{u},4\vec{v})$

الحـــل

تعيين قيس الزوايا الموجهة التالية :

1) $(\vec{v},\vec{u}) = -(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\pi}{3}$

2) $(5\vec{u},3\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) = -\frac{\pi}{3}$

3) $(2\vec{v},-\vec{u}) = (\vec{v},\vec{u}) + \pi = \frac{4\pi}{3}$

4) $(-6\vec{u},4\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi = \frac{2\pi}{3}$

بالنسبة للتمارين من 32 إلى 35 عين قيمة $\cos x$ ، $\sin x$ و $\tan x$.

32

1) $x = \frac{\pi}{6}$ 2) $x = -\frac{5\pi}{6}$

3) $x = \frac{17\pi}{6}$ 4) $x = \frac{433\pi}{6}$

الحـــل

تعيين قيمة $\cos x$ ، $\sin x$ و $\tan x$ في كل حالة :

1) $x = \frac{\pi}{6}$:

- $\cos x = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin x = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2) $x = -\frac{5\pi}{6}$:

- $\cos x = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\frac{5\pi}{6}$
$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$
- $\sin x = \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$
$= -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \left(\frac{-1}{2}\right)\times\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

3) $x = \frac{17\pi}{6}$:

- $\cos x = \cos\frac{17\pi}{6} = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right)$
$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$
- $\sin x = \sin\frac{17\pi}{6} = \sin\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right)$
$= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

4) $x = \frac{433\pi}{6}$:

- $\cos x = \cos\frac{433\pi}{6} = \cos\left(72\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin x = \sin\frac{433\pi}{6} = \sin\left(72\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

33

1) $x = \frac{\pi}{3}$ 2) $x = \frac{2\pi}{3}$

3) $x = -\frac{5\pi}{3}$ 4) $x = \frac{29\pi}{6}$

الحـــل

تعيين قيمة $\cos x$ ، $\sin x$ و $\tan x$ في كل حالة :

1) $x = \frac{\pi}{3}$:

- $\cos x = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
- $\sin x = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{2}{1} = \sqrt{3}$ •

(2 $x = \dfrac{2\pi}{3}$:

$\cos x = \cos\dfrac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{-1}{2}$ •

$\sin x = \sin\dfrac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ •

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times (-2) = -\sqrt{3}$ •

(3 $x = -\dfrac{5\pi}{3}$:

$\cos x = \cos\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right) = \cos\dfrac{5\pi}{3}$ •

$= \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{-1}{2}$

$\sin x = \sin\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right) = -\sin\dfrac{5\pi}{3}$ •

$= -\sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right) \times (-2) = \sqrt{3}$ •

(4 $x = \dfrac{29\pi}{6}$:

$\cos x = \cos\dfrac{29\pi}{6} = \cos\left(5\pi - \dfrac{\pi}{6}\right)$ •

$= \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$

$\sin x = \sin\dfrac{29\pi}{6} = \sin\left(5\pi - \dfrac{\pi}{6}\right)$ •

$= \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{-2}{\sqrt{3}} = \dfrac{-\sqrt{3}}{3}$ •

34

(1 $x = \dfrac{\pi}{4}$ (2 $x = \dfrac{5\pi}{4}$

(3 $x = \dfrac{17\pi}{4}$ (4 $x = \dfrac{55\pi}{4}$

الحل

نعبر عن قيمة $\cos x$ ، $\sin x$ و $\tan x$ في كل حالة :

(1 $x = -\dfrac{\pi}{4}$:

$\cos x = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ •

$\sin x = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ •

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{2}{\sqrt{2}} = 1$ •

(2 $x = \dfrac{5\pi}{4}$:

$\cos x = \cos\dfrac{5\pi}{4} = \cos\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$ •

$\sin x = \sin\dfrac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ •

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\dfrac{-2}{\sqrt{2}}\right) = -1$ •

(3 $x = -\dfrac{17\pi}{4}$:

$\cos x = \cos\left(-\dfrac{17\pi}{4}\right) = \cos\left(4\pi + \dfrac{\pi}{4}\right)$ •

$= \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x = \sin\left(-\dfrac{17\pi}{4}\right) = -\sin\left(4\pi + \dfrac{\pi}{4}\right)$ •

$= -\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\dfrac{-2}{\sqrt{2}}\right) = -1$ •

(4 $x = \dfrac{55\pi}{4}$:

$\cos x = \cos\dfrac{55\pi}{4} = \cos\left(14\pi - \dfrac{\pi}{4}\right)$ •

$= \cos\left(\dfrac{-\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x = \sin\dfrac{55\pi}{4} = \sin\left(14\pi - \dfrac{\pi}{4}\right)$ •

$= \sin\left(\dfrac{-\pi}{4}\right) = -\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \times \frac{2}{\sqrt{2}} = -1$ •

35

1) $x = \frac{\pi}{2}$ 2) $x = \frac{3\pi}{2}$

3) $x = \frac{148\pi}{4}$ 4) $x = -\frac{945\pi}{2}$

الحـــل

تعيين قيمة $\cos x$ ، $\sin x$ و $\tan x$ في كل حالة :

1) $x = \frac{\pi}{2}$:

- $\cos x = \cos\frac{\pi}{2} = 0$
- $\sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1$
- $\tan x$ غير معرّف لأن $\cos x = 0$.

2) $x = \frac{3\pi}{2}$:

- $\cos x = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$
- $\sin x = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$
- $\tan x$ غير معرّف لأن $\cos x = 0$.

3) $x = \frac{148\pi}{4}$:

- $\cos x = \cos\frac{148\pi}{4} = \cos 37\pi = \cos\pi = -1$
- $\sin x = \sin\frac{148\pi}{4} = \sin 37\pi = \sin\pi = 0$
- $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{-1} = 0$

4) $x = -\frac{945\pi}{2}$:

- $\cos x = \cos\left(-\frac{945\pi}{2}\right) = \cos\left(472\pi + \frac{\pi}{2}\right)$
  $= \cos\frac{\pi}{2} = 0$
- $\sin x = \sin\left(-\frac{945\pi}{2}\right) = -\sin\frac{945\pi}{2}$
  $= -\sin\left(472\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\frac{\pi}{2} = -1$

- $\tan x$ غير معرّف لأن $\cos x = 0$.

بالنسبة للتمارين من 36 إلى 41
العبارة A .

36

$A = \sin x + \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x)$

الحـــل

تبسيط العبارة A :

$A = \sin x + \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x)$
$= \sin x - \cos x - \cos x = \sin x - 2\cos x$

37

$A = \sin x + \sin(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos x$

الحـــل

تبسيط العبارة A :

$A = \sin x + \sin(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos x$
$= \sin x + \sin x + \cos x - \cos x = 2\sin x$

38

$A = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin(x + 5\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

الحـــل

تبسيط العبارة A :

$A = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin(x + 5\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(x + \pi) + \sin x$
$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin x + \sin x = -\cos x$

39

$A = \cos(\pi - x) - \cos x + \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

الحـــل

تبسيط العبارة A :

$A = \cos(\pi - x) - \cos x + \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
$= -\cos x - \cos x - \sin x + \sin x = -2\cos x$

40 $A = \sin(\pi+x) + \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + \cos(\pi-x) + \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

الحـــل

تبسيط العبارة A :

$$A = \sin(\pi+x) + \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + \cos(\pi-x) + \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= -\sin x - \sin x - \cos x + \cos x = -2\sin x$$

41 $A = \tan(\pi+x) + \tan(2x-\frac{\pi}{2}) + \text{co}\ \tan(2x)$

الحـــل

تبسيط العبارة A :

$$A = \tan(\pi+x) + \tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right) + \text{cotan}(2x)$$
$$= \tan x - \tan\left(\frac{\pi}{2}-2x\right) + \text{cotan}(2x)$$
$$= \tan x - \text{cotan}(2x) + \text{cotan}(2x) = \tan x$$

42

عبر بدلالة $\cos x$ و $\sin x$ عن ما يلي :

1) $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 2) $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

3) $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 4) $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

الحـــل

التعبير بدلالة $\cos x$ و $\sin x$ عن ما يلي :

1) $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$:

من دساتير الجمع نجد :

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sin x\cos\frac{\pi}{4} - \cos x\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$$

2) $\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$:

من دساتير الجمع نجد :

$$\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left[\cos x\cos\frac{\pi}{4} - \sin x\sin\frac{\pi}{4}\right]$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$$
$$= \cos x - \sin x$$

3) $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$:

من دساتير الجمع نجد :

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \cos x\cos\frac{\pi}{6} - \sin x\sin\frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$$

4) $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$:

من دساتير الجمع نجد :

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \sin x\cos\frac{\pi}{6} - \cos x\sin\frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$$

43

1) تحقق من أن : $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$

2) احسب $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$.

3) احسب $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$.

الحـــل

1) التحقق :

لدينا : $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} = \frac{5\pi}{6}$

و عليه : $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$

2) حساب $\cos\frac{5\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$:

لدينا : $\cos\frac{5\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$ ، و من دساتير الجمع نجد:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos^2\frac{\pi}{3}-\sin^2\frac{\pi}{3}\right)$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(2\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=\frac{-\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

و من جهة اخرى لدينا : $\sin\frac{11\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)$

و من دساتير الجمع نجد :

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-2}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

و عليه : $\cos\frac{11\pi}{12}=-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

و $\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

45

1) تحقق من أن : $\frac{7\pi}{24}=\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{24}$

2) تحقق من أن : $\frac{\pi}{24}=\frac{\pi}{2}-\frac{11\pi}{24}$

3) اثبت ان :

$$16\times\sin\frac{\pi}{24}\times\sin\frac{5\pi}{24}\times\sin\frac{7\pi}{24}\times\sin\frac{11\pi}{24}=1$$

الحـــل

1) التحقق :

لدينا : $\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{24}=\frac{12\pi}{24}-\frac{5\pi}{24}=\frac{7\pi}{24}$

و عليه : $\frac{7\pi}{24}=\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{24}$

2) التحقق :

و من جهة اخرى لدينا : $\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$

و من دساتير الجمع نجد :

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

و عليه : $\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ و $\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$

3) حساب $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$:

$$\cos\frac{7\pi}{12}=\cos\left(\pi-\frac{5\pi}{12}\right)=-\cos\frac{5\pi}{12}=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\pi-\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

44

1) تحقق من أن : $\frac{11\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}$

2) احسب $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$.

الحـــل

1) التحقق :

لدينا : $\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi+8\pi}{12}=\frac{11\pi}{12}$

و عليه : $\frac{11\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}$

2) حساب $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$:

لدينا : $\cos\frac{11\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)$

و من دساتير الجمع لدينا :

لدينا : $\frac{\pi}{2}-\frac{11\pi}{24}=\frac{12\pi}{24}-\frac{11\pi}{24}=\frac{\pi}{24}$

و عليه : $\frac{\pi}{24}=\frac{\pi}{2}-\frac{11\pi}{24}$

3) البرهان :

نضع : $A=16\times\sin\frac{\pi}{24}\times\sin\frac{5\pi}{24}\times\sin\frac{7\pi}{24}\times\sin\frac{11\pi}{24}$

$$A=16\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{11\pi}{24}\right)\times\sin\frac{5\pi}{24}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{24}\right)\times\sin\frac{11\pi}{24}$$

$$=16\times\cos\frac{11\pi}{24}\times\sin\frac{11\pi}{24}\times\sin\frac{5\pi}{24}\times\cos\frac{5\pi}{24}$$

$$=4\left(2\times\cos\frac{11\pi}{24}\times\sin\frac{11\pi}{24}\right)\times\left(2\times\cos\frac{5\pi}{24}\times\sin\frac{5\pi}{24}\right)$$

و من العلاقة : $\sin 2\alpha=2\cos\alpha\sin\alpha$

نستنتج أن :

$$A=4\times\sin\left(2\times\frac{11\pi}{24}\right)\times\sin\left(2\times\frac{5\pi}{24}\right)$$

$$=4\times\sin\frac{11\pi}{12}\times\sin\frac{5\pi}{12}$$

$$=4\times\sin\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=4\times\sin\frac{\pi}{12}\times\cos\frac{\pi}{12}$$

$$=2\times\left(2\times\cos\frac{\pi}{12}\times\sin\frac{\pi}{12}\right)=2\times\sin\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)$$

$$=2\times\sin\frac{\pi}{6}=2\times\frac{1}{2}=1$$

و عليه : $A=1$

بالنسبة للتمارين من 46 إلى 50 اثبت انه من أجل كل عدد حقيقي x يكون :

46

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)+$$
$$-3\sin(x-3\pi)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin x$$

الحـــل

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)+$$
$$-3\sin(x-3\pi)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$$
$$=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(10\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)+$$
$$-3\sin(x-\pi)+\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)$$
$$=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+3\sin(x-\pi)+$$
$$-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right).$$
$$=-2\sin x+3\sin x=\sin x$$

47

$$\sin(x+7\pi)-2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$=2\sin\left(\frac{13\pi}{2}-x\right)-\cos\left(x+\frac{7\pi}{2}\right)$$

الحـــل

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$2\sin\left(\frac{13\pi}{2}-x\right)-\cos\left(x+\frac{7\pi}{2}\right)=$$
$$=2\sin\left(6\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(4\pi+x-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$
$$=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\sin x$$
$$=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(\pi+x)$$
$$=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(7\pi+x)$$

48

$$\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$$

الحـــل

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

و بالتالي : $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

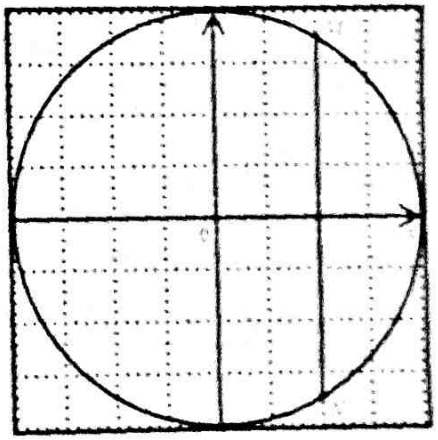
و عليه : $\cos x = -\frac{2}{3}$ و $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

2) الحساب :

- $\cos(\pi - x) = -\cos x = \frac{2}{3}$
- $\cos(\pi + x) = -\cos x = \frac{2}{3}$
- $\sin(\pi - x) = \sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$
- $\tan(\pi - x) = \frac{\sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \times \left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{2}$
- $\tan(\pi + x) = \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

54

(C) دائرة مثلثية



1) ما هي قيم الأعداد الحقيقية x المرفقة للنقطة M ؟ ثم النقطة N ؟

2) استنتج كل الأعداد الحقيقية x بحيث $\cos x = \frac{1}{2}$.

الحل

1) • النقطة M صورة x على الدائرة المثلثية (C) فاصلتها $\frac{1}{2}$ و تنتمي إلى القوس $\overset{\frown}{AB}$ و منه $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

• النقطة N نظيرة M بالنسبة إلى محور الفواصل و منه الأعداد الحقيقية المرفقة بالنقطة N هي $\frac{-\pi}{3} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

2) الاستنتاج :

لدينا :

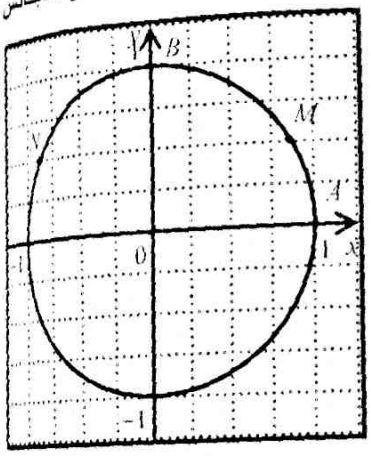
$\cos x = \frac{1}{2}$ يكافئ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

أو $x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

و عليه : كل الأعداد الحقيقية x حيث $\cos x = \frac{1}{2}$ هي $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ او $x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

55

(C) دائرة مثلثية مرفقة بالمعلم المتعامد و المتجانس $(O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.



1) عين كل الأعداد الحقيقية x المرفقة للنقطة M .

2) عين كل الأعداد الحقيقية x المرفقة للنقطة N .

3) استنتج كل قيم x حيث $\sin x = \frac{1}{2}$.

الحل

1) النقطة M صورة x على الدائرة المثلثية (C) ترتيبها $\frac{1}{2}$ و تنتمي إلى القوس $\overset{\frown}{AB}$ و منه $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

2) النقطة N نظيرة M بالنسبة إلى محور التراتيب و منه الأعداد الحقيقية المرفقة بالنقطة N هي $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

3) الاستنتاج :

لدينا :

$\sin x = \frac{1}{2}$ يكافئ $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

أو $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

و عليه : كل الأعداد الحقيقية x حيث $\sin x = \frac{1}{2}$ هي

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

56

باستعمال الدائرة المثلثية (C) أوجد الأعداد الحقيقية x من المجال $[0;2\pi]$ التي تحقق :

1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 4) $\sin x = -1$

الحـــل

1) من أجل كل x من $[0;2\pi]$ لدينا :

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ يكافئ $\left(x = \frac{\pi}{6} \text{ أو } x = 2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$

معناه : $\left(x = \frac{\pi}{6} \text{ أو } x = \frac{11\pi}{6}\right)$.

و عليه : $x = \frac{\pi}{6}$ أو $x = \frac{11\pi}{6}$.

2) من أجل كل x من $[0;2\pi]$ لدينا :

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ يكافئ $\left(x = \pi + \frac{\pi}{4} \text{ أو } x = \pi - \frac{\pi}{4}\right)$

معناه : $\left(x = \frac{5\pi}{4} \text{ أو } x = \frac{3\pi}{4}\right)$.

و عليه : $x = \frac{5\pi}{4}$ أو $x = \frac{3\pi}{4}$.

3) من أجل كل x من $[0;2\pi]$ لدينا :

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ يكافئ $\left(x = \pi - \frac{\pi}{4} \text{ أو } x = \frac{\pi}{4}\right)$.

و عليه : $x = \frac{3\pi}{4}$ أو $x = \frac{\pi}{4}$.

4) من أجل كل x من $[0;2\pi]$ لدينا :

$\sin x = -1$ معناه $x = \frac{3\pi}{2}$. و عليه : $x = \frac{3\pi}{2}$.

57

باستعمال الدائرة المثلثية (C) أوجد الأعداد الحقيقية x من المجال $[-\pi;\pi]$ التي تحقق :

1) $\cos x = \frac{1}{2}$ 2) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\sin x = -\frac{1}{2}$ 4) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

الحـــل

1) من أجل كل x من $[-\pi;\pi]$ لدينا :

$\cos x = \frac{1}{2}$ معناه $\left(x = \frac{-\pi}{3} \text{ أو } x = \frac{\pi}{3}\right)$.

و عليه : $x = \frac{3\pi}{2}$ و $x = \frac{\pi}{3}$.

2) من أجل كل x من $[-\pi;\pi]$ لدينا :

$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ معناه $\left(x = -\pi + \frac{\pi}{6} \text{ أو } x = \pi - \frac{\pi}{6}\right)$.

و عليه : $x = \frac{-5\pi}{6}$ أو $x = \frac{5\pi}{6}$.

3) من أجل كل x من $[-\pi;\pi]$ لدينا :

$\sin x = -\frac{1}{2}$ معناه $\left(x = -\frac{\pi}{6} \text{ أو } x = -\pi + \frac{\pi}{6}\right)$.

و عليه : $x = -\frac{\pi}{6}$ أو $x = \frac{-5\pi}{6}$.

4) من أجل كل x من $[-\pi;\pi]$ لدينا :

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ معناه $\left(x = \frac{-\pi}{4} \text{ أو } x = -\pi + \frac{\pi}{4}\right)$.

و عليه : $x = \frac{-\pi}{4}$ أو $x = \frac{-3\pi}{4}$.

بالنسبة للتمارين من 58 إلى 60 . أوجد بواسطة الحاسبة قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد x في المجال I .

58

$I = [0;\pi]$

1) $\cos x = 0,7$ 2) $\cos x = -0,3$

الحـــل

1) $\cos x = 0,7$ و $I = [0;\pi]$:

تظهر الحاسبة : $x = 0,79539.....$

و منه مدور x إلى 10^{-2} هو $x = 0,80$

2) $\cos x = -0,3$ و $I = [0;\pi]$ ؛

تظهر الحاسبة : $x = 1,875488.....$

و منه مدور x إلى 10^{-2} هو $x = 1,86$

59 $I = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

1) $\sin x = 0,6$ 2) $\sin x = -0,4$

الحـــل

1) $\sin x = 0,6$ و $I = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ؛

تظهر الحاسبة : $x = 0,643501.....$

و منه مدور x إلى 10^{-2} هو $x = 0,64$

2) $\sin x = -0,4$ و $I = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ ؛

تظهر الحاسبة : $x = -0,41151.....$

و منه مدور x إلى 10^{-2} هو $x = -1,41$

60 $I = [-\pi;\pi]$

1) $\cos x = \frac{43}{45}$ 2) $\sin x = -\frac{27}{29}$

الحـــل

1) $\cos x = \frac{43}{45}$ و $I = [-\pi;\pi]$ ؛

تظهر الحاسبة : $\cos^{-1}\left(\frac{43}{45}\right) = 0,29925.....$

و منه مدور x إلى 10^{-2} هو $x = 0,30$ أو $x = -0,30$

2) $\sin x = -\frac{27}{29}$ و $I = [-\pi;\pi]$ ؛

تظهر الحاسبة : $\sin^{-1}\left(\frac{-27}{29}\right) = -1,197237.....$

و منه مدور x إلى 10^{-2} هو $x = -1,18$ أو $x = -1,94$

61 حل في المجال $[0;2\pi[$ المعادلة : $2\cos^2 x = \sin x$

الحـــل

من أجل كل x من $[0;2\pi[$ لدينا :

$2\cos^2 x = \sin x$ تكافئ $2\cos^2 x - \sin x = 0$

و نعلم أن $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ أي $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

و منه : $2\cos^2 x = \sin x$ تكافئ $2(1 - \sin^2 x) - \sin x = 0$

معناه $2\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$ .....(1)

نضع $y = \sin x$ ، فتكتب المعادلة (1) على الشكل :

$2y^2 + y - 2 = 0$ ، مميزها هو $\Delta = 17 > 0$ ومنه للمعادلة حلان هما :

$y_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$ و $y_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$

• إذا كان $y = y_1$ فإن $\sin x = \frac{-1-\sqrt{17}}{4}$ ليس لها حل

لأن $\frac{-1-\sqrt{17}}{4} \notin [-1;1]$.

• إذا كان $y = y_2$ فإن $\sin x = \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$

تظهر الحاسبة أن : $\sin^{-1}\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right) = 0,895907.....$

و منه مدور x إلى 10^{-2} هو $x = 0,90$ أو $x = 2,25$.

الإحداثيات القطبية

64

عين في المستوي المنسوب إلى المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$ النقط التالية المعرفة بإحداثياتها القطبية :

1) $A(1;0)$ 2) $B\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$ 3) $C(1;\pi)$

4) $D\left(1;\frac{3\pi}{2}\right)$ 5) $E\left(2;\frac{3\pi}{4}\right)$ 6) $F\left(3;-\frac{5\pi}{6}\right)$

الحـــل

تعيين النقط A ، B ، C ، D ، E ، F ،

لـــدينا : $OA = OB = OC = OD = 1$ ، $OE = 2$ ، $OF = 3$ ومنه النقط A ، B ، C ، D من الدائرة المثلثية (C) المرفقة بالمعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

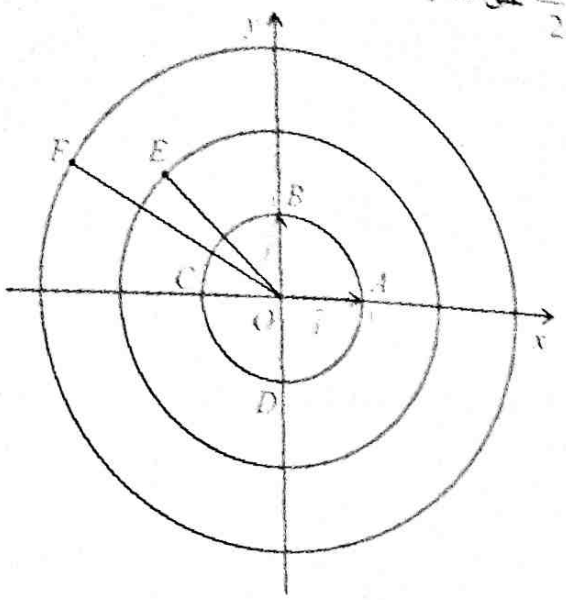
من جهة أخرى ، $\left(\vec{i};\overrightarrow{OA}\right) = 0$ ، $\left(\vec{i};\overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{2}$ ،

$\left(\vec{i};\overrightarrow{OC}\right) = \pi$ ، $\left(\vec{i};\overrightarrow{OD}\right) = \frac{3\pi}{2}$ ، $\left(\vec{i};\overrightarrow{OE}\right) = \frac{3\pi}{4}$ ،

$\left(\vec{i};\overrightarrow{OF}\right) = \frac{-5\pi}{6}$

إذن النقط A ، B ، C ، D صور الأعداد 0 ، $\frac{\pi}{2}$ ، π ،

$\frac{3\pi}{2}$ على الدائرة المثلثية على الترتيب :



65

1) عين في المستوي المنسوب إلى المعلم $(o;\vec{i};\vec{j})$ النقط التالية المعرفة بإحداثياتها القطبية :

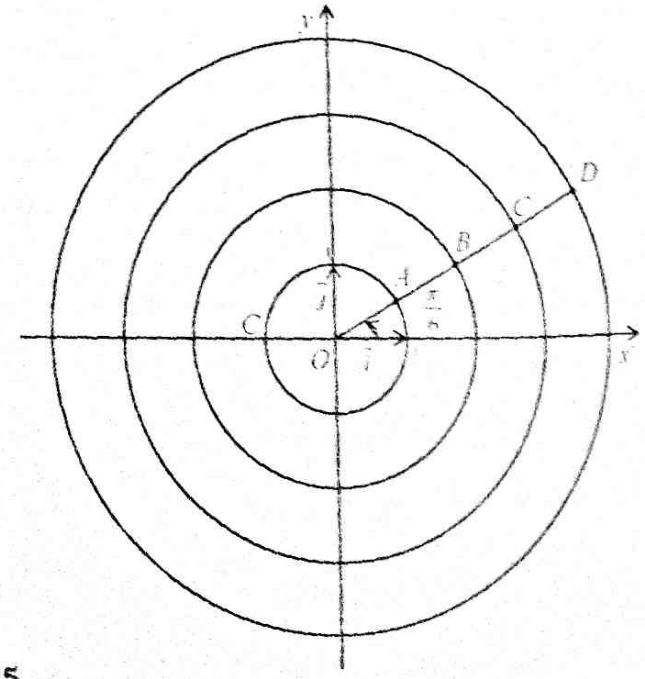
1) $A\left(1;\frac{\pi}{6}\right)$ 2) $B\left(2;\frac{\pi}{6}\right)$

3) $C\left(3;\frac{\pi}{6}\right)$ 4) $D\left(4;\frac{\pi}{6}\right)$

2) اثبت ان النقط A ، B ، C و D على استقامة واحدة مع المبدأ O.

الحـــل

1) تعيين النقط A ، B ، C ، D :



2) إثبات ان النقط A ، B ، C ، D على استقامة واحدة مع المبدأ O :

لدينا : $\left(\vec{i};\overrightarrow{OA}\right)=\frac{\pi}{6}$ ، $\left(\vec{i};\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{6}$ ،

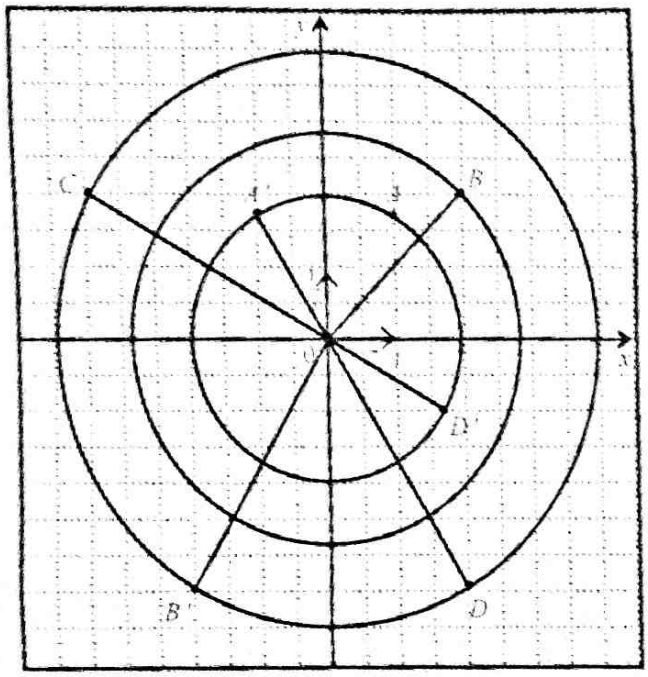
$\left(\vec{i};\overrightarrow{OC}\right)=\frac{\pi}{6}$ ، $\left(\vec{i};\overrightarrow{OD}\right)=\frac{\pi}{6}$

و منه الأشعة $\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{OB}$ ، $\overrightarrow{OC}$ ، $\overrightarrow{OC}$ مرتبة خطيا مثنى مثنى .

و عليه : النقط A ، B ، C و D على استقامة واحدة مع المبدأ O .

66

عين الإحداثيات القطبية (r,θ) مع $\theta\in[0;2\pi[$ للنقط التالية :



الحـــل

- تعيين الإحداثيات القطبية (r,θ) مع $\theta\in[0,2\pi[$:

النقط A ، B ، C ، D ، A' ، B' و D' معرفة بإحداثياتها القطبية كما يلي :

$A\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$ ، $B\left(3;\frac{\pi}{4}\right)$ ، $C\left(4;\frac{5\pi}{6}\right)$ ، $D\left(4;\frac{5\pi}{3}\right)$ ،

$A'\left(2;\frac{2\pi}{3}\right)$ ، $B'\left(4;\frac{4\pi}{3}\right)$ ، $D'\left(2;\frac{11\pi}{6}\right)$.

67

M و N نقطتان معرفتان كما يلي :

$\overrightarrow{ON} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ و $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$

1) احسب الاطوال OM و ON .

2) اوجد القيس الرئيسي للزاويتين الموجهة $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$ و $(\vec{i};\overrightarrow{ON})$

3) استنتج القيس الرئيسي للزاويتين الموجهتين $(\vec{j};\overrightarrow{OM})$ و $(\vec{j};\overrightarrow{ON})$.

4) عين الإحداثيات القطبية للنقطتين M و N .

الحـــل

1) حساب الاطوال OM و ON :

لدينا : $\overrightarrow{OM}\left(\frac{1}{2};\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ و $\overrightarrow{ON}(2;2)$

و منه : $OM^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ و $ON^2 = 4 + 4 = 8$

و عليه : $OM = 1$ و $ON = 2\sqrt{2}$.

2) حساب القيس الرئيسي لـ $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$ و $(\vec{i};\overrightarrow{ON})$:

نضع $(\vec{i};\overrightarrow{OM}) = \theta$ و $(\vec{i};\overrightarrow{ON}) = \theta'$

لدينا : $\begin{cases}\cos\theta = \frac{x_M}{OM}\\ \sin\theta = \frac{y_M}{OM}\end{cases}$ اي $\begin{cases}\cos\theta = \frac{1}{2}\\ \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

و منه : $\theta = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

و عليه : القيس الرئيسي للزاوية $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$ هو $\frac{-\pi}{3}$.

من جهة أخرى لدينا : $\begin{cases}\cos\theta' = \frac{x_N}{ON}\\ \sin\theta' = \frac{y_N}{ON}\end{cases}$

و منه $\begin{cases}\cos\theta' = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta' = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ اي $\begin{cases}\cos\theta' = \frac{2}{2\sqrt{2}}\\ \sin\theta' = \frac{2}{2\sqrt{2}}\end{cases}$

و بالتالي $\theta' = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

و عليه : القيس الرئيسي للزاوية $(\vec{i};\overrightarrow{ON})$ هو $\frac{\pi}{4}$.

3) الاستنتاج :

• لدينا : $(\vec{j};\overrightarrow{OM}) = (\vec{j};\vec{i}) + (\vec{i};\overrightarrow{OM})$

$= \frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{-5\pi}{6}$

و بما ان $-\pi < \frac{-5\pi}{6} \leq \pi$ فان القيس الرئيسي هو $\frac{-5\pi}{6}$.

• و لدينا : $(\vec{j};\overrightarrow{ON}) = (\vec{j};\vec{i}) + (\vec{i};\overrightarrow{ON})$

$= \frac{-\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{-\pi}{4}$

و بما ان $-\pi < \frac{-\pi}{4} \leq \pi$ فان القيس الرئيسي هو $\frac{-\pi}{4}$.

4) تعيين الإحداثيات القطبية للنقطتين M و N .

من السؤال (1 و 2) نستنتج ان كل من M و N لهما بإحداثياتها القطبية كما يلي :

$M\left(1;\frac{-\pi}{3}\right)$ و $N\left(2\sqrt{2};\frac{\pi}{4}\right)$

68

احسب الإحداثيات القطبية للنقط التالية المعرفة بإحداثيتها الديكارتية :

1) $A(-1;1)$ 2) $B(0;-3)$

3) $C\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 4) $D(3\sqrt{2};3\sqrt{2})$

5) $E\left(-\frac{3}{2};-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ 6) $F(-1;\sqrt{3})$

الحـــل

حساب الإحداثيات القطبية لـ A ، B ، C ، D ، E ، F

1) $A(-1;1)$:

نسمي (r,θ) الإحداثيات القطبية و (x,y) الإحداثيات الديكارتية للنقطة A .

لدينا : $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

و من جهة اخرى : $\begin{cases}\cos\theta = \frac{x}{r}\\ \sin\theta = \frac{y}{r}\end{cases}$ اي $\begin{cases}\cos\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

و منه : $\theta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

و عليه : الإحداثيات القطبية للنقطة A هي $\left(\sqrt{2};\frac{3\pi}{4}\right)$.

نتبع نفس الطريقة بالنسبة للنقط الاخرى ، و هكذا نجد أن النقط B ، C ، D ، E ، F معرفة بإحداثياتها القطبية حكما يلي : $B\left(3;\frac{-\pi}{2}\right)$ ، $C\left(1;\frac{-\pi}{3}\right)$ ، $D\left(6;\frac{\pi}{4}\right)$ ،

$E\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{4\pi}{3}\right)$ ، $F\left(2;\frac{2\pi}{3}\right)$.

71

1) علما ان $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ احسب $\cos^2\frac{\pi}{12}$.

2) استنتج قيمة $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

الحـــل

1) حساب $\cos^2\frac{\pi}{12}$:

نعلم ان : $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ .....(*)

لدينا : $\cos\frac{\pi}{6}=\cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right)$ ، و بتطبيق العلاقة (*) السابقة نجد :

$2\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}+1$ و منه $\cos\frac{\pi}{6}=2\cos^2\frac{\pi}{12}-1$

و بالتالي : $\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+2}{4}$

2) استنتاج قيمة $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$:

لدينا : $\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}+2}{4}$ ، و بما ان $0<\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{2}$

فإن $\cos\frac{\pi}{12}>0$ و منه نستنتج ان : $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$

من جهة اخرى :

$\sin^2\frac{\pi}{12}=1-\cos^2\frac{\pi}{12}$ و منه $\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

اذن : $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ لأن $\sin\frac{\pi}{12}>0$

و عليه : $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$ و $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$

72

1) علما ان $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ احسب $\cos^2\frac{\pi}{8}$.

2) استنتج قيمة $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$.

الحـــل

1) حساب $\cos^2\frac{\pi}{8}$:

$\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)$ و منه بتطبيق العلاقة (*) (التمرين السابق) نجد :

$2\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}+1$ و منه $\cos\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$

و بالتالي : $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}+2}{4}$

2) استنتاج قيمة $\cos\frac{\pi}{8}$ و $\sin\frac{\pi}{8}$:

لدينا : $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}+2}{4}$ ، و بما ان $0<\frac{\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$

فإن $\cos\frac{\pi}{8}>0$ و منه نستنتج ان $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$

من جهة اخرى : $\sin^2\frac{\pi}{8}=1-\cos^2\frac{\pi}{8}$

و منه $\sin^2\frac{\pi}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ إذن $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

لأن $\sin\frac{\pi}{8}>0$.

و عليه : $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$ و $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

73

1) احسب قيمة المجموع S_1 حيث :

$$S_1=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$$

2) احسب قيمة المجموع S_2 حيث :

$$S_2=\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}$$

الحـــل

1) حساب قيمة المجموع S_1 :

$$S_1 = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$$
$$= \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$$
$$= \cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}$$
$$= 2\left(\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}\right) = 2 \times 1 = 2$$

2) حساب قيمة المجموع S_2 :

$$S_2 = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$$
$$= \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$$
$$= \sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}$$
$$= 2\left(\cos^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{\pi}{8}\right) = 2 \times 1 = 2$$

74

x عدد حقيقي من المجال $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ حيث : $\cos x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

1) احسب $\cos 2x$.

2) استنتج قيمة x .

الحـــل

1) حساب $\cos 2x$:

من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $\cos 2x = 2\cos^2 - 1$

و لدينا : $\cos x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و منه $\cos^2 x = \frac{8+4\sqrt{3}}{16}$

أي $\cos^2 x = \frac{4+\sqrt{3}}{4}$ إذن $\cos 2x = \frac{2+\sqrt{3}}{2} - 1$

أي $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

و عليه : $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ حيث $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

2) استنتاج قيمة x :

لدينا : $0 < x < \frac{\pi}{2}$ معناه $0 < 2x < \pi$.

و منه : $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ يكافئ $2x = \frac{\pi}{3}$ و منه $x = \frac{\pi}{6}$

و عليه : $x = \frac{\pi}{6}$.

75

x عدد حقيقي من المجال $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ حيث : $\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

1) احسب قيمة $\cos 2x$ و $\sin 2x$.

2) تحقق من ان $\cos 4x = \sin x$.

3) استنتج قيمة x .

الحـــل

1) حساب قيمة $\cos 2x$ و $\sin 2x$:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

لدينا : $\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ و منه $\sin^2 x = \frac{6-2\sqrt{5}}{16}$

إذن $\cos 2x = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{4}$ أي $\cos 2x = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

من جهة أخرى : $\sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x = 1 - \frac{6+2\sqrt{5}}{16}$

أي $\sin^2 2x = \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$.

بما ان $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ فإن $2x \in]0;\pi[$

و منه $\sin 2x > 0$ و بالتالي $\sin 2x = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

2) التحقق من أن $\cos 4x = \sin x$:

لدينا : $\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$

و منه : $\cos 4x = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} - \frac{10-2\sqrt{5}}{16}$

إذن : $\cos 4x = \frac{-4+4\sqrt{5}}{16} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

و عليه : $\cos 4x = \sin x$.

3) استنتاج قيمة x :

لدينا : $\cos 4x = \sin x$ تكافئ $\cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

معناه $4x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi$ او $4x = x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

و منه $x=\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}$ أو $x=\frac{-\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$

من جهة أخرى : $0<x<\frac{\pi}{2}$

و منه $0<\frac{1}{10}+\frac{2k}{5}<\frac{1}{2}$ أو $0<\frac{-1}{6}+\frac{2k}{3}<\frac{1}{2}$

و بالتالي : $\frac{1}{6}<\frac{2k}{3}<\frac{4}{6}$ أو $\frac{-1}{10}<\frac{2k}{5}<\frac{4}{10}$

اي : $\frac{-1}{4}<k<1$ أو $\frac{1}{4}<k<1$ إذن : $k=0$.

من أجل $k=0$ نجد : $x=\frac{\pi}{10}$.

و عليه : قيمة x هي $\frac{\pi}{10}$.

تمرين 17

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

2) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) $\cos x+\sin x=0$

4) $\cos 3x=\cos x$

5) $\cos 2x=\sin x$

6) $\sin 2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

الحـــل

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات المعطاة :

1) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ تكافئ $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}$

معناه $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi$

أو $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{-\pi}{3}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

و منه $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$ أو $x=k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

و عليه : حلول المعادلة المعطاة هي الأعداد الحقيقية x حيث $x=2k\pi$ أو $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

2) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ تكافئ $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

معناه $2x+\frac{\pi}{4}=\frac{-\pi}{3}+2k\pi$

أو $2x+\frac{\pi}{4}=\pi+\frac{\pi}{3}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

و منه $x=\frac{13\pi}{24}+k\pi$ أو $x=\frac{-7\pi}{24}+k\pi$

حيث $k\in\mathbb{Z}$.

و عليه : حلول المعادلة المعطاة هي الأعداد الحقيقية x حيث $x=\frac{13\pi}{24}+k\pi$ أو $x=\frac{-7\pi}{24}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

3) $\cos x+\sin x=0$ يكافئ $\cos x=-\sin x$

معناه $\cos x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

و منه $x=\frac{\pi}{2}+x+2k\pi$ أو $x=\frac{-\pi}{2}-x+2k\pi$

حيث $k\in\mathbb{Z}$.

و بالتالي $x=\frac{-\pi}{4}+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

و عليه : حلول المعادلة المعطاة هي الأعداد الحقيقية x حيث $x=\frac{-\pi}{4}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

4) $\cos 3x=\cos x$ تكافئ $(3x=x+2k\pi$

أو $3x=-x+2k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z})$.

معناه $(x=k\pi$ أو $x=\frac{k\pi}{2}$ حيث $k\in\mathbb{Z})$.

و عليه : حلول المعادلة المعطاة هي الأعداد الحقيقية x حيث $x=k\pi$ أو $x=\frac{k\pi}{2}$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

5) $\cos 2x=\sin x$ تكافئ $\cos 2x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

معناه $2x=\frac{\pi}{2}-x+2k\pi$ أو $2x=x-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

حيث $k\in\mathbb{Z}$.

و منه $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$ أو $x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi$ حيث

$k\in\mathbb{Z}$.

و عليه : حلول المعادلة المعطاة هي الأعداد الحقيقية x حيث $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$ أو $x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

6) $\sin 2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ تكافئ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

معناه $\left(\frac{\pi}{2}-2x=x+\frac{\pi}{6}+2k\pi\right.$

أو $\frac{\pi}{2}-2x=-x-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ حيث $\left.k\in\mathbb{Z}\right)$.

ومنه $\left(x=\frac{\pi}{9}-\frac{2k\pi}{3}\right.$ أو $x=\frac{2\pi}{3}-2k\pi$ حيث $\left.k\in\mathbb{Z}\right)$.

و عليه : حلول المعادلة المعطاة هي الاعداد الحقيقية x حيث

$x=\frac{\pi}{9}-\frac{2k\pi}{3}$ أو $x=\frac{2\pi}{3}-2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

78

حل في المجال I المعادلات التالية :

1) $\sin^2 x-\sin x-6=0$ و $I=\mathbb{R}$.

2) $2\cos^2 x-3\cos x-2=0$ و $I=[0;2\pi[$.

3) $4\cos^2 x+2(1-\sqrt{3})\cos x-\sqrt{3}=0$ و $I=]-\pi;\pi]$.

الحـــل

حل المعادلات في I :

1) $\sin^2 x-\sin x-6=0$ و $I=\mathbb{R}$:

نضع $y=\sin x$ ، تكتب المعادلة (1) كما يلي :

$y^2-y-6=0$ .....(1')

نحل المعادلة (1') نجد : $y=-2$ أو $y=3$

- إذا كان $y=-2$ فإن $\sin x=-2$

و بما أن $-2\notin[-1;1]$ و $\sin x\in[-1;1]$ فإن المعادلة $\sin x=-2$ ليس لها حل .

- إذا كان $y=3$ فإن $\sin x=3$

و بما أن $3\notin[-1;1]$ و $\sin x\in[-1;1]$ فإن المعادلة $\sin x=3$ ليس لها حل .

و عليه : المعادلة (1) ليس لها حلول .

2) $2\cos^2 x-3\cos x-2=0$ و $I=[0;2\pi[$:

نضع $y=\cos x$ ، تكتب المعادلة (2) كما يلي :

$2y^2-3y-2=0$ .....(2')

نحل المعادلة (2') نجد : $y=\frac{-1}{2}$ أو $y=2$

إذا كان $y=2$ فإن $\cos x=2$ ليس لها حل لأن $2\notin[-1;1]$ و $\cos x\in[-1;1]$.

إذا كان $y=\frac{-1}{2}$ فإن $\cos x=\frac{-1}{2}$.

من أجل كل x من I لدينا :

$\cos x=\frac{-1}{2}$ معناه $\left(x=\pi-\frac{\pi}{3}\right.$ أو $\left.x=-\pi+\frac{\pi}{3}\right)$.

و عليه : مجموعة حلول المعادلة (3) هي $\left\{\frac{-\pi}{6};\frac{\pi}{6};\frac{-2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}$.

79

x عدد حقيقي ، نعتبر الدالة f حيث :

$f(x)=\cos x+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$.

1) اثبت انه من أجل كل عدد حقيقي x يكون : $f(x)=0$

2) عين الدالة المشتقة f' .

3) استنتج انه من أجل كل عدد حقيقي x يكون :

$\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$.

الحـــل

1) إثبات أن $f(x)=0$:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا :

$\left(x=\pi+\frac{\pi}{3}\right.$ أو $\left.x=\pi-\frac{\pi}{3}\right)$ معناه : $\cos x=\frac{-1}{2}$

و عليه : مجموعة حلول المعادلة (2) في I هي $\left\{\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right\}$

3) $4\cos^2 x+2(1-\sqrt{3})\cos x-\sqrt{3}=0$ و $I=]-\pi;\pi]$

نضع $y=\cos x$ فتكتب المعادلة كما يلي :

$4y^2+2(1-\sqrt{3})y-\sqrt{3}=0$ .....(3')

نحل المعادلة (3') نجد : $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $y=-\frac{1}{2}$

- إذا كان $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

و منه من أجل كل x من I لدينا :

$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ معناه $\left(x=\frac{\pi}{6}\right.$ أو $\left.x=-\frac{\pi}{6}\right)$.

- إذا كان $y=\frac{-1}{2}$ فإن $\cos x=\frac{-1}{2}$.

و منه من أجل كل x من I لدينا :

$\cos x=\frac{-1}{2}$ معناه $\left(x=\pi-\frac{\pi}{3}\right.$ أو $\left.x=-\pi+\frac{\pi}{3}\right)$.

و عليه : مجموعة حلول المعادلة (3) هي

$\left\{\frac{-\pi}{6};\frac{\pi}{6};\frac{-2\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right\}$.

$$f(x)=\cos x+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}+\pi\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}+\pi\right)$$
$$=\cos x-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\cos x-\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}+$$
$$-\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\cos x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}\cos x$$
$$=\cos x-\cos x=0$$

و عليه : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)=0$.

2) تعيين الدالة المشتقة f' :

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و دالتها المشتقة f' حيث $f'(x)=0$.

3) الاستنتاج :

من جهة لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=0$

و من جهة ثانية من أجل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=-\sin x-\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)$$

و منه نستنتج أن :

$$-\sin x-\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)-\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$$

و عليه : $\sin x+\sin\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=0$

81

لتكن العبارة $E(x)$ حيث : $E(x)=\cos^2 x-\cos^4 x$

1) حلل العبارة $E(x)$ إلى جداء .

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $E(x)=0$.

3) لتكن الدالة f المعرفة بالعبارة :

$$f(x)=\frac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}$$

- عين مجموعة تعريف الدالة f .
- بسط عبارة $f(x)$.

الحـــل

1) تحليل العبارة $E(x)$:

لدينا :

$$E(x)=\cos^2 x-\cos^4 x=\cos^2 x\left(1-\cos^2 x\right)$$

و نعلم أن : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

و منه $1-\cos^2 x=\sin^2 x$

و عليه : $E(x)=\cos^2 x\times\sin^2 x$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $E(x)=0$:

لدينا : $E(x)=0$ تكافئ $\sin x=0$ أو $\cos x=0$

معناه : $x=k\pi$ أو $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

و عليه : حلول المعادلة $E(x)=0$ هي الأعداد الحقيقية x حيث $x=k\pi$ أو $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.

3) • تعيين مجموعة تعريف الدالة f :

تكون العبارة $f(x)$ معرفة إذا وفقط إذا كان :

$$\cos^2 x-\cos^4 x\neq 0$$

و هـــذا يعـــني أن : $x\neq k\pi$ و $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيـــث $k\in\mathbb{Z}$.

و عليه : مجموعة تعريف الدالة f هي

$$D_f=\mathbb{R}-\left\{k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi:k\in\mathbb{Z}\right\}$$

• تبسيط العبارة $f(x)$:

من أجل كل x من D_f لدينا :

$$f(x)=\frac{\sin^2 x-\sin^4 x}{\cos^2 x-\cos^4 x}=\frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$$

و عليه : $f(x)=1$

82

1) علما انه من اجل كل عدد حقيقي x يكون :

$3x=x+2x$

- عبر عن $\cos 3x$ بدلالة $\cos x$ ثم $\sin 3x$ بدلالة $\sin x$.

2) بسط العبارتين التاليتين :

$$A=\frac{\sin 3x}{\sin x}+\frac{\cos 3x}{\cos x}\ ,\quad B=\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}$$

(بعد تعيين مجموعة التعريف) .

الحـــل

1) التعبير عن $\cos 3x$ بدلالة $\cos x$ و $\sin 3x$ بدلالة $\sin x$:

•
$$\cos 3x=\cos(2x+x)$$
$$=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$$
$$=\left(2\cos^2 x-1\right)\cos x-2\cos x\sin^2 x$$
$$=2\cos^3 x-\cos x-2\cos x\left(1-\cos^2 x\right)$$

و عليه : $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$

• $\sin 3x = \sin(2x + x)$

$= \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$

$= 2\sin x \cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x$

$= 2\sin x (1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x$

$= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x$

و عليه : $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

2) تبسيط العبارتين A و B :

• $\cos x = 0$ معناه $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

• $\sin x = 0$ معناه $x = k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

و منه العبارتين A و B معرفتين على D حيث :

$$D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

• من أجل كل x من D لدينا :

$$A = \frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} \quad , \quad B = \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

و من السؤال (1) نستنتج أن :

$$A = \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x} + \frac{4\cos^3 x - 3\cos x}{\cos x}$$

$$= 3 - 4\sin^2 x + 4\cos^2 x - 3$$

$$= 4(\cos^2 x - \sin^2 x) = 4\cos 2x$$

$$B = \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x} - \frac{4\cos^3 x - 3\cos x}{\cos x}$$

$$= 3 - 4\sin^2 x - 4\cos^2 x + 3$$

$$= 6 - 4(\sin^2 x + \cos^2 x) = 6 - 4 = 2$$

و عليه : $A = 4\cos 2x$ و $B = 2$.

83

حلل إلى جداء عوامل العبارات التالية :

1) $A(x) = 1 + \cos 2x + \cos x$

2) $B(x) = 1 - \cos 2x + \sin x$

3) $C(x) = 1 + \cos x + \cos\frac{x}{2}$

4) $D(x) = 1 - \cos x + \sin\frac{x}{2}$

الحـــل

التحليل إلى جداء عوامل العبارات :

1) $A(x) = 1 + \cos 2x + \cos x$

$= 1 + (2\cos^2 x - 1) + \cos x$

$= 2\cos^2 x + \cos x = \cos x (2\cos x + 1)$

و عليه : $A(x) = \cos x (2\cos x + 1)$

2) $B(x) = 1 - \cos 2x + \sin x$

$= 1 - (1 - \sin^2 x) + \sin x$

$= 1 - 1 + 2\sin^2 x + \sin x = 2\sin^2 x + \sin x$

$= \sin x (2\sin x + 1)$

و عليه : $B(x) = \sin x (2\sin x + 1)$

3) $C(x) = 1 + \cos x + \cos\frac{x}{2}$

$= 1 + \cos\left(2 \times \frac{x}{2}\right) + \cos\frac{x}{2}$

$= 1 + 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 + \cos\frac{x}{2}$

$= \cos\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2} + 1\right)$

و عليه : $C(x) = \cos\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2} + 1\right)$

4) $D(x) = 1 - \cos x + \sin\frac{x}{2}$

$= 1 - \cos\left(2 \times \frac{x}{2}\right) + \sin\frac{x}{2}$

$= 1 - \left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) + \sin\frac{x}{2}$

$= \sin\frac{x}{2}\left(2\sin\frac{x}{2} + 1\right)$

و عليه : $D(x) = \sin\frac{x}{2}\left(2\sin\frac{x}{2} + 1\right)$

84

أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون :

1) $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

2) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

الحـــل

1) من اجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$$

$$=\cos x+\sin x$$

و عليه :

$$\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

2) من اجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$$

$$=\cos x-\sin x$$

و عليه :

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

85

برهن ما يلي : $\dfrac{\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}}=1+\sqrt{2}$

الحـــل

البرهان :

لدينا :

$$\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8}$$

من جهة أخرى :

$$\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{8}\right)$$

$$=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}\cos\frac{3\pi}{8}$$

و منه $A=\dfrac{\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}}=\dfrac{\cos\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{3\pi}{8}}$

و بما ان : $\cos\dfrac{3\pi}{8}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{8}\right)=\sin\dfrac{\pi}{8}$

فإن $A=\dfrac{\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}}=\dfrac{\cos\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}}$

و لدينا : $\sin\dfrac{\pi}{4}=2\cos\dfrac{\pi}{8}\sin\dfrac{\pi}{8}$

و منه : $\cos\dfrac{\pi}{8}\sin\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ إذن $\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2}}{4\sin\frac{\pi}{8}}$

و بالتالي : $A=\dfrac{\sqrt{2}}{4\sin^2\frac{\pi}{8}}$

من جهة اخرى : $\cos\dfrac{\pi}{4}=1-2\sin^2\dfrac{\pi}{8}$

اي $2\sin^2\dfrac{\pi}{8}=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

و عليه : $A=\dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$.