MEBARKI2016: التمرين

1) g دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ :

$$g(x)=x-1-2\ln x$$

أ) أحسب : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} g(x)$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

ب) أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ج) أحسب $g'(x)$ و ادرس إشارته ثم شكل جدول تغيرات الدالة g .

د) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]3.5;3.6[$.

ه) أحسب $g(1)$ واستنتج إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$ من أجل x من المجال $]0,+\infty[$.

2) f دالة عددية معرفة كما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=-x^2+x+x^2\ln x \,/\, x\succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}.$$

(ζ_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم بين أن الدالة f مستمرة على المجال $[0;+\infty[$.

ب) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0,+\infty[$: $f'(x)=xg\left(\frac{1}{x}\right)$ واستنتج اتجاه تغير الدالة f .

ج) شكل جدول تغيرات الدالة f .

د) بين أن : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\alpha-1}{2\alpha^2}$ و استنتج حصرا للعدد $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

ه) احسب $f(2)$ و $f\left(\frac{5}{2}\right)$ ثم أنشئ المنحنى (ζ_f).

تذكر جيدا:
" أنك **(تستطيع النجاح)** في حياتك الدراسية ولو كان الناس جميعا يعتقدون أنك غير ناجح . ولكنك **(لن تنجح)** أبدا إذا كنت تعتقد في نفسك أنك غير ناجح".

MEBARKI2016 : الحل

1) لدينا g دالة معرفة على $]0,+\infty[$ بـ : $g(x)=x-1-2\ln x$

أ) **حساب** $\lim\limits_{x \succ 0} g(x)$ **:** $\lim\limits_{x \succ 0} g(x)=\lim\limits_{x \succ 0}(x-1-2\ln x)=+\infty$.

التفسير البياني : بما أن $\lim\limits_{x \succ 0} g(x)=+\infty$ فإن (C_g) يقبل المستقيم ذو المعادلة : $x=0$ (محور التراتيب) مستقيم مقارب .

ب) **حساب:** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ **:** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1-2\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-\frac{1}{x}-2\frac{\ln x}{x})=+\infty$

ج) **حساب** $g'(x)$ **:** لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ و :

$g'(x)=(x-1-2\ln x)'=(x)'-(1)'-(2\ln x)'=1-2\times\frac{1}{x}=1-\frac{2}{x}=\frac{x-2}{x}$ وعليه $g'(x)=\frac{x-2}{x}$

دراسة إشارة $g'(x)$ **:** لدينا إشارة $g'(x)$ من إشارة البسط $(x-2)$ لان $x \succ 0$ (لأن g دالة معرفة على $]0,+\infty[$)

وعليه : $g'(x)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

جدول تغيرات الدالة g **:**

x	0	1	2	3.5	α	3.6	$+\infty$
$g'(x)$	‖	-	0		+		
$g(x)$	‖ $+\infty$	0	$1-2\ln 2$		0		$+\infty$

لدينا : $g(2)=2-1-2\ln 2=1-2\ln 2$

د) **تبيين أن المعادلة** $g(x)=0$ **تقبل حلا وحيدا** α **في المجال** $]3.5;3.6[$:

من خلال جدول تغيرات الدالة g نجد :

الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]3.5;3.6[$

و $g(3.5)\prec 0$ و $g(3.6)\succ 0$

ومنه حسب **مبرهنة القيم المتوسطة** نستنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]3.5;3.6[$.

هـ) **حساب** $g(1)$ **ثم استنتاج إشارة** $g(x)$ **ثم إشارة** $g\left(\frac{1}{x}\right)$ **في المجال** $]0,+\infty[$ **:**

لدينا $g(1)=(1)-1-2\ln(1)=0-2\times0=0$ و منه $g(1)=0$

استنتاج إشارة $g(x)$ **:** من خلال جدول تغيرات الدالة g نستنتج :

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	+	0	-	0	+	

إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$ **:** من خلال جدول إشارة $g(x)$ نجد : $g(x)=0$ لما $x=1$ أو $x=\alpha$ / $g(x)\prec 0$ لما $1\prec x\prec\alpha$

وعليه $g\left(\frac{1}{x}\right)=0$ لما : $\frac{1}{x}=1$ أي $x=1$ أو $\frac{1}{x}=\alpha$ أي $x=\frac{1}{\alpha}$ / $g\left(\frac{1}{x}\right)\prec 0$ لما $1\prec\frac{1}{x}\prec\alpha$ أي $\frac{1}{\alpha}\prec x\prec 1$

تذكر جيدا:
" أنك **(تستطيع النجاح)** في حياتك الدراسية ولو كان الناس جميعا يعتقدون أنك غير ناجح . ولكنك **(لن تنجح)** أبدا إذا كنت تعتقد في نفسك أنك غير ناجح".

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1		$+\infty$
$g\left(\frac{1}{x}\right)$	$\|$	+	0	-	0	+	

(2 f دالة عددية معرفة كما يلي :
$$\begin{cases} f(x)=-x^2+x+x^2\ln x \,/\, x\succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

أ) <u>**حساب**</u> $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **:**
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x^2+x+x^2\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(-1+\frac{1}{x}+\ln x\right)=+\infty$$

<u>**تبيين استمرارية الدالة f على المجال**</u> $[0;+\infty[$

الدالة f مستمرة على المجال $]0,+\infty[$

لأنها عبارة عن مجموع كثير حدود و جداء كثير حدود ودالة لوغارتمية مستمرة على $]0,+\infty[$

<u>**دراسة استمرارية الدالة f عند 0**</u> : هل : $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0} f(x)=f(0)$ ؟

لدينا : $f(0)=0$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0}(-x^2+x+x^2\ln x)=-0+0+0=0$ ومنه : $\lim\limits_{x\xrightarrow{\succ}0} f(x)=f(0)$

وعليه : f مستمرة عند 0 إذن نستنتج أن f مستمرة على المجال $[0;+\infty[$.

ب) <u>**تبيين أنه من أجل كل x من المجال**</u> $]0,+\infty[$ **:** $f'(x)=xg\left(\frac{1}{x}\right)$

قبل حساب $f'(x)$ نقوم بإيجاد : $xg\left(\frac{1}{x}\right)$ لدينا : $xg\left(\frac{1}{x}\right)=x\left[\left(\frac{1}{x}\right)-1-2\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]=x\left(\frac{1}{x}-1+2\ln x\right)=1-x+2x\ln x$

ومن جهة أخرى : $f'(x)=(-x^2+x+x^2\ln x)'=-2x+1+\left[2x\ln x+\frac{1}{x}\times x^2\right]=-2x+1+2x\ln x+x=1-x+2x\ln x$

إذن نستنتج : $f'(x)=xg\left(\frac{1}{x}\right)$.

استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

بما أن $f'(x)=xg\left(\frac{1}{x}\right)$ فإن إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $g\left(\frac{1}{x}\right)$ لأن $x\succ 0$ من أجل x من $]0,+\infty[$

وبما أن :

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1		$+\infty$
$g\left(\frac{1}{x}\right)$	$\|$	+	0	-	0	+	

فإن : f دالة متزايدة تماما لما : $x\in\left]0;\frac{1}{\alpha}\right[\cup]1;+\infty[$ و متناقصة تماما لما $x\in\left]\frac{1}{\alpha};1\right[$

تذكر جيدا:
" أنك **(تستطيع النجاح)** في حياتك الدراسية ولو كان الناس جميعا يعتقدون أنك غير ناجح . ولكنك **(لن تنجح)** أبدا إذا كنت تعتقد في نفسك أنك غير ناجح".

ج) **تشكيل جدول تغيرات الدالة f :** $f(1)=\left(-1^2+1+1^2\ln 1\right)=-1+1+1\times 0=0$

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

د) **تبيين أن : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\alpha-1}{2\alpha^2}$:**

نعلم أن : $g(\alpha)=0$ ومنه : $\alpha-1-2\ln\alpha=0$ إذن : $\ln\alpha=\frac{\alpha-1}{2}$

ومن جهة أخرى : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2\times\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{-1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\times(-\ln\alpha)=\frac{-1+\alpha-\ln\alpha}{\alpha^2}$

و بما أن : $\ln\alpha=\frac{\alpha-1}{2}$ فإن : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{-1+\alpha-\frac{\alpha-1}{2}}{\alpha^2}=\frac{2\left(-1+\alpha-\frac{\alpha-1}{2}\right)}{2\alpha^2}=\frac{-2+2\alpha-(\alpha-1)}{2\alpha^2}=\frac{-2+2\alpha-\alpha+1}{2\alpha^2}$

إذن نستنتج : $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\alpha-1}{2\alpha^2}$

استنتاج حصرا لـ $f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$: نعلم أن : $3.5\prec\alpha\prec 3.6$ ومنه : $2.5\prec\alpha-1\prec 2.6.......(1)$

و بما أن : $3.5\prec\alpha\prec 3.6$ فإن $(3.5)^2\prec\alpha^2\prec(3.6)^2$ إذن : $2(3.5)^2\prec 2\alpha^2\prec 2(3.6)^2$ أي : $24.5\prec 2\alpha^2\prec 25.92.......(2)$

من (1) و (2) نستنتج : $\frac{2.5}{25.92}\prec\frac{\alpha-1}{2\alpha^2}\prec\frac{2.6}{24.5}$ أي : $0.09\prec f\left(\frac{1}{\alpha}\right)\prec 0.10$

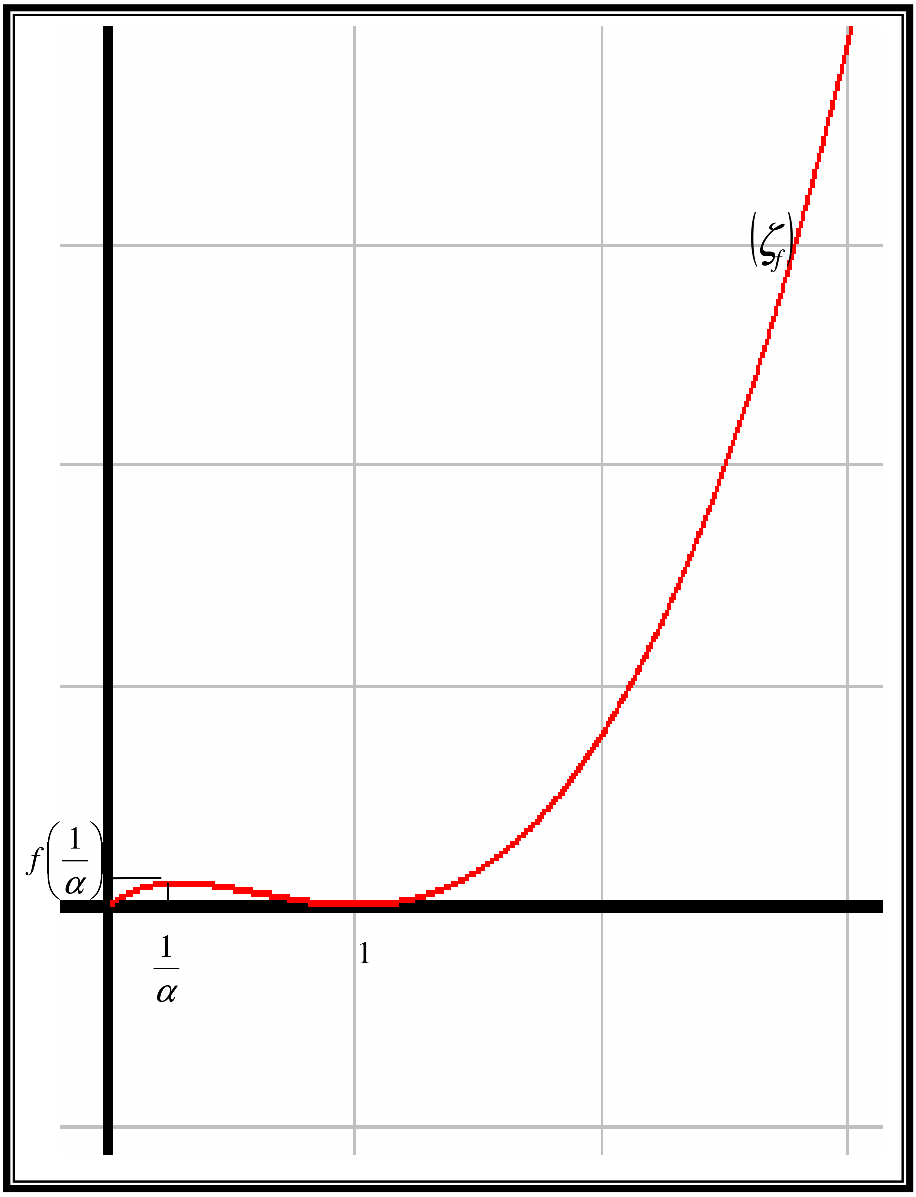
ه) **حساب $f(2)$ و $f\left(\frac{5}{2}\right)$:**

$$f(2)=\left(-2^2+2+2^2\ln 2\right)=-4+2+4\ln 2=-2+4\ln 2\approx 0.8$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=\left(-\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{5}{2}\right)^2\ln\left(\frac{5}{2}\right)\right)=-\frac{25}{4}+\frac{5}{2}+\frac{25}{4}\ln\left(\frac{5}{2}\right)\approx 1.97$$

تذكر جيدا:
" أنك **(تستطيع النجاح)** في حياتك الدراسية ولو كان الناس جميعا يعتقدون أنك غير ناجح . ولكنك **(لن تنجح)** أبدا إذا كنت تعتقد في نفسك أنك غير ناجح".

إنشاء $\left(\zeta_f\right)$ **:** $3.5 \prec \alpha \prec 3.6 \Rightarrow 0.27 \prec \dfrac{1}{\alpha} \prec 0.3$ ، $0.09 \prec f\left(\dfrac{1}{\alpha}\right) \prec 0.10$



تذكر جيدا:

" أنك **(تستطيع النجاح)** في حياتك الدراسية ولو كان الناس جميعا يعتقدون أنك غير ناجح . ولكنك **(لن تنجح)** أبدا إذا كنت تعتقد في نفسك أنك غير ناجح".

انتظروا الجديد