﴿ بسم الله الرحمن الرحيم ﴾

(1) دورة جوان 2008 – رياضيات – الموضوع الأول:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u};\vec{v})$، نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحقتيهما $\sqrt{3}-i$ و $\sqrt{3}+3i$ على الترتيب.

1) أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه O ويحول A إلى B ثم عين زاويته ونسبته.

2) نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يأتي:
$A_0=A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $A_{n+1}=S(A_n)$.
نرمز إلى لاحقة A_n بالرمز z_n.
أ- أنشئ في المستوي المركب النقط A_0 و A_1 و A_2.
ب- برهن أن: $z_n=2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$.
جـ- عين مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تنتمي من أجلها النقطة A_n إلى المستقيم (OA_1).

3) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي:
$u_0=A_0A_1$ و $u_n=A_nA_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n.
أ- بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تحديد حدها الأول u_0 وأساسها q.
ب- استنتج عبارة u_n بدلالة n.
جـ- أحسب، بدلالة n، المجموع S_n حيث:
$S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n$. ثم احسب: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

(2) دورة جوان 2008 – رياضيات – الموضوع الثاني:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ المعرف كما يلي: $P(z)=2z^4-2iz^3-z^2-2iz+2$.

1) بين أنه إذا كان α جذرا لكثير الحدود $P(z)$ فإن $\frac{1}{\alpha}$ جذر له أيضا.

2) تحقق أن: $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$.

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $P(z)=0$.

4) أكتب الحلول على الشكل الأسي.

5) لتكن A و B و C و D النقط من المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{u};\vec{v})$ والتي لاحقاتها على الترتيب: $1+i$ و $-1+i$ و $\frac{-m}{2}-\frac{m}{2}i$ و $\frac{m}{2}-\frac{m}{2}i$ حيث m عدد حقيقي.
- عين m حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا.

(3) دورة جوان 2009 – رياضيات – الموضوع الثاني:

نرفق بكل عدد مركب z يختلف عن العدد المركب 1 العدد المركب $f(z)$ حيث:
$$f(z)=\frac{z-i}{z-1}$$

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة:
$$(45+45i)f(z)=23+45i-2z$$

2) لتكن M صورة العدد المركب z في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u};\vec{v})$.
أ- عين مجموعة النقط M بحيث يكون $f(z)$ عددا حقيقيا سالبا تماما.
ب- أحسب العدد المركب z_0 بحيث:
$$arg\left(f(z_0)\right)=\frac{3\pi}{2} \text{ و } |f(z_0)|=1$$

3) في المستوي المركب نعتبر النقط A، B و C صور الأعداد المركبة 1، i و z_0 على الترتيب.
أ- ما نوع المثلث ABC؟
ب- عين النقطة D نظيرة C بالنسبة إلى المستقيم (AB) واستنتج طبيعة الرباعي $ACBD$.

(4) دورة جوان 2010 – رياضيات – الموضوع الأول:

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة:
$$z^3-3z^2+3z-9=0 \ldots (E)$$

1) أ- تحقق أن 3 حل للمعادلة (E)، ثم عين الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث، من أجل كل عدد مركب z فإن:
$$z^3-3z^2+3z-9=(z-3)(az^2+bz+c)$$
ب- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E).

2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u};\vec{v})$.
النقط A و B و C صور الأعداد المركبة:
$$z_A=3 \text{ و } z_B=i\sqrt{3} \text{ و } z_C=-i\sqrt{3}$$
بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3) D النقطة التي لاحقتها $z_D=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و E صورتها بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.
عين z_E لاحقة النقطة E.

4) F النقطة التي لاحقتها $z_F=1-i\sqrt{3}$.
أ- أحسب $\frac{z_F}{z_E}$ واستنتج أن المستقيمين (OE) و (OF) متعامدان.
ب- عين z_G لاحقة النقطة G بحيث يكون $OEGF$ مربعا.

(5) دورة جوان 2010 – رياضيات – الموضوع الثاني:

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u};\vec{v})$.

1) نسمي A، B و I النقط التي لاحقاتها على الترتيب:
$z_A=1-4i$، $z_B=-1-2i$ و $z_I=1-2i$.
أ- علم النقط A، B و I.
ب- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب: $z=\frac{z_I-z_A}{z_I-z_B}$.
جـ- ما نوع المثلث IAB؟
د- C صورة I بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2. أحسب اللاحقة z_C للنقطة C.
هـ- D مرجح الجملة: $\{(A;1),(B;-1),(C;1)\}$. أحسب اللاحقة z_D للنقطة D.
و- بين أن $ABCD$ مربع.

2) عين وأنشئ (Γ_1) مجموعة النقط M من المستوي حيث:
$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

3) عين وأنشئ (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث:
$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=1$$

(6) دورة جوان 2011 – رياضيات – الموضوع الأول:

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u};\vec{v})$.

A، B، C ثلاث نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A = 1-i$ ، $z_B = -1+i$ ، $z_C = \sqrt{3}(1+i)$

1) أكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة: z_A، z_B، z_C.

2) أ- أحسب طويلة وعمدة العدد المركب: $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$، ثم فسر هندسيا النتائج المحصل عليها.

ب- حدد طبيعة المثلث ABC.

3) عين لاحقة النقطة D بحيث يكون الرباعي $ACBD$ معينا.

4) T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي لاحقتها z، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' = (-1+i)z+1-3i$$

أ- عين طبيعة التحويل T وعناصره المميزة.

ب- عين طبيعة التحويل ToT وعناصره المميزة.

(7) دورة جوان 2011 – رياضيات – الموضوع الثاني:

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:

1) أ- الشكل المثلثي للعدد المركب $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ هو:

$$-\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$$

ب- $a^{2011}+\overline{a}=0$ حيث: $\overline{a}$ مرافق a.

2) في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u};\vec{v})$.

أ- التحويل T الذي كتابته المركبة:

$$z' = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)z$$

دوران زاويته $-\frac{\pi}{4}$ ومركزه مبدأ المعلم.

ب- مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث:

$$arg(z-i) = \frac{-\pi}{4}$$

هي المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ذات اللاحقة i وشعاع توجيهه $\vec{u}$ لاحقته $1+i$.

3) (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = \frac{1}{12}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n+\frac{1}{6}$

أ- $u_n = -\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{2}{3}$.

ب- (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

جـ- (u_n) متباعدة.

(8) دورة جوان 2012 – رياضيات – الموضوع الأول:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z:

$$z^2-\sqrt{2}z+1=0$$

2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u};\vec{v})$. A، B و C نقط من المستوي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = z_A+z_B$.

أ- أكتب على الشكل الأسي الأعداد المركبة: z_A، z_B و $\frac{z_A}{z_B}$.

ب- عين لاحقة كل من A'، B' و C' صور النقط A، B و C على الترتيب بالدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

جـ- بين أن الرباعي $OA'C'B'$ مربع.

3) نسمي (Δ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث:

$$|z-z_A| = |z-z_B|$$

أ- بين أن (Δ) هو محور الفواصل.

ب- بين أن حلي المعادلة: $\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)^2 = i$ عددان حقيقيان. (لا يطلب حساب الحلين)

(9) دورة جوان 2012 – رياضيات – الموضوع الثاني:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z:

$$(z^2+4)(z^2-2\sqrt{3}z+4)=0$$

2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u};\vec{v})$، النقط A، B، C و D التي لواحقها على الترتيب: $z_A = \sqrt{3}+i$، $z_B = \overline{z_A}$، $z_C = -2i$ و $z_D = \overline{z_C}$.

- بين أن النقط A، B، C و D تنتمي إلى دائرة (γ) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها، ثم أنشئ النقط A، B، C و D.

3) نرمز بـ z_E إلى لاحقة النقطة E نظيرة النقطة B بالنسبة إلى المبدأ O.

أ- بين أن: $\frac{z_A-z_C}{z_E-z_C} = e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

ب- بين أن النقطة A هي صورة النقطة E بدوران R مركزه C يطلب تعيين زاويته.

جـ- استنتج طبيعة المثلث AEC.

د- H هو التحاكي الذي مركزه O ونسبته 2.

- عين طبيعة التحويل RoH وعناصره المميزة، ثم استنتج صورة الدائرة (γ) بالتحويل RoH.

(10) دورة جوان 2013 – رياضيات – الموضوع الأول:

I) a و b عددان حقيقيان موجبان تماما. في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{u};\vec{v})$، نعتبر النقط:

A، B، C و E التي لاحقاتها على الترتيب:

$z_A = ae^{i\frac{3\pi}{4}}$، $z_B = -a\sqrt{2}$، $z_C = \overline{z_A}$ و $z_E = be^{i\frac{3\pi}{2}}$.

1) أ- أكتب على الشكل الأسي العدد المركب:

$$\frac{z_A-z_B}{z_A}$$

ثم استنتج طبيعة المثلث OAB.

ب- حدد طبيعة الرباعي $OABC$، ثم استنتج مساحته.

2) التشابه المباشر S ذو المركز O والنسبة $\frac{b}{a}$ والزاوية $\frac{3\pi}{4}$، يحول كل نقطة $M(z)$ من المستوي إلى النقطة $M'(z')$.

أ- أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S، ثم تحقق أن:

$$S(A) = E$$

ب- بين أن مساحة الرباعي $OEFG$ هي b^2 (مقدرة بوحدة المساحة)، حيث:

$$S(B) = F \text{ و } S(C) = G$$

3) أ- أحسب بدلالة a و b العبارة:
$$|z_C|^2+|z_E|^2-2|z_C\times z_E|\cos\left[\arg\left(\frac{z_E}{z_C}\right)\right]$$
ب- استنتج قيمة CE^2 بدلالة a و b.

II) n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن O، لاحقتها z_n.

نضع: $M_0=A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $M_{n+1}=S(M_n)$.

نعتبر المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين من أجل كل عدد طبيعي n، بـ: $u_n=|z_n|$ و $v_n=arg(z_n)$.

1) أكتب العدد المركب $\frac{z_{n+1}}{z_n}$ على الشكل الأسي بدلالة a و b.

2) نفرض أن: $a<b$ و $arg\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right)\in]-\pi;\pi]$.

- بين أن المتتالية (u_n) هندسية، والمتتالية (v_n) حسابية يطلب تعيين أساس وحساب الحد الأول لكل منهما.

3) أحسب بدلالة a، b و n المجموع T_n، حيث:
$$T_n=a+b+\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{a^2}+\cdots+\frac{b^n}{a^{n-1}}$$
ثم: $\lim_{n\to+\infty}T_n$.

4) عين قيم الأعداد الطبيعية n التي تكون من أجلها النقط: O، A و M_n في استقامية.

(11) دورة جوان 2013 – رياضيات – الموضوع الثاني:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z:
$$z^2+z+1=0$$

2) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u};\vec{v})$، النقط A، B و M لواحقها على الترتيب:

$z_A=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$، $z_B=\overline{z_A}$ و z.

(يرمز $\overline{z_A}$ إلى مرافق z_A)

أ- أكتب z_A على الشكل الأسي.

ب- عين مجموعة النقط M من المستوي، حيث:
$$arg[(z-z_A)^2]=arg(z_A)-arg(z_B)$$

3) أ- التحويل النقطي r، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$، حيث:
$$z'=z_A.z+z_B\sqrt{3}$$
- ما طبيعة التحويل r؟ عين عناصره المميزة.

ب- التحاكي h، يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$، حيث:
$$z'=-2z+3i$$
- عين نسبة ومركز التحاكي h.

جـ- نضع: $S=hor$. (يرمز o إلى تركيب التحويلين r و h)

- عين طبيعة التحويل S، مبرزا عناصره المميزة، ثم تحقق أن عبارته المركبة هي:
$$z'=2e^{i\frac{\pi}{3}}(z-1)+i$$

4) نعتبر النقطة Ω ذات اللاحقة i والنقط C، D و E حيث: $S(O)=C$، $S(C)=D$ و $S(D)=E$.

- بين أن النقط O، Ω و E في استقامية.

5) أ- عين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ من المستوي، حيث:
$$z=2e^{i\theta}+e^{i\frac{\pi}{2}}$$
مع: $\theta\in\mathbb{R}$.

ب- عين (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S.

(12) دورة جوان 2014 – رياضيات – الموضوع الأول:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية:
$$(z-1-2i)\left(z^2-2\left(1+\sqrt{3}\right)z+5+2\sqrt{3}\right)=0$$

2) A، B، C و D نقط من المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{u};\vec{v})$ لاحقاتها على الترتيب: $z_A=1+2i$، $z_B=1+\sqrt{3}+i$، $z_C=1+\sqrt{3}-i$ و $z_D=1-2i$.

أ- بين أن: $AB=CD$ و (AD) يوازي (BC).

ب- تحقق أن:
$$\frac{z_A+z_C}{2}\neq\frac{z_B+z_D}{2}$$
ثم استنتج طبيعة الرباعي $ABCD$.

3) أ- بين أن:
$$\frac{z_D-z_B}{z_A-z_B}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$
- استنتج أن D هي صورة A بتشابه مباشر S مركزه B يطلب تعيين نسبته وزاويته.

ب- بين أن المثلث ADB قائم وأن النقط A، B، C و D تنتمي إلى دائرة يطلب تحديد مركزها ونصف قطرها.

جـ- استنتج انشاء للرباعي $ABCD$.

(13) دورة جوان 2014 – رياضيات – الموضوع الثاني:

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O,\vec{u};\vec{v})$.

A و B النقطتان اللتان لاحقتاهما على الترتيب:

$a=-2+6i$ و $b=-1+2i$.

1) أكتب العدد المركب $1+i$ على الشكل الأسي.

2) S التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها z النقطة M' لاحقتها z' حيث:
$$z'=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z+2$$
أ- D النقطة ذات اللاحقة d حيث: $d=2i$.

- جد لاحقة النقطة D' صورة D بالتحويل S. ماذا تستنتج؟

ب- بين أن:
$$z'-d=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-d)$$
- استنتج طبيعة وعناصر التحويل S.

3) (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $3x+5y=11$.

أ- تحقق أن النقطة $M_0(-3;4)$ تنتمي إلى (Δ) ثم عين نقط (Δ) التي إحداثياتها أعداد صحيحة.

ب- M'_0 صورة M_0 بالتحويل S.

- بين أن المستقيمين (BM'_0) و (BA) متعامدان.

4) x و y عددان صحيحان من المجال $[-5;5]$.

عين مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي بحيث يكون المستقيمان (BA) و (BM') متعامدين، حيث M' هي صورة M بالتحويل S.

(14) دورة جوان 2015 – رياضيات – الموضوع الأول:

ينسب المستوي إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u};\vec{v})$.

نعتبر النقط A، B، C، H و I لاحقاتها على الترتيب:

$$\begin{cases} z_A = i \\ z_B = -2+i \\ z_C = -3 \\ z_H = -3+4i \\ z_I = -1-i \end{cases}$$

1) أ- مثل النقط A، B، C، H و I في المعلم $(O,\vec{u};\vec{v})$.

ب- عين نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه B ويحول النقطة A إلى النقطة C.

2) عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC.

3) أ- أكتب على الشكل الجبري العدد المركب:

$$\frac{z_B - z_C}{z_H - z_A}$$

ب- استنتج أن المستقيمين (AH) و (BC) متعامدان.

جـ- بين أن H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC.

4) بين أن النقط G، H و I في استقامية.

5) (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث:

$$z+1+i=\sqrt{5}e^{i\theta}$$

مع $\theta \in \mathbb{R}$.

أ- بين أن النقطة A تنتمي إلى المجموعة (Γ).

ب- عين طبيعة المجموعة (Γ) مع تحديد عناصرها المميزة.

جـ- أنشئ المجموعة (Γ).

د- تحقق أن النقطتين B و C تنتميان إلى المجموعة (Γ).

(15) دورة جوان 2015 – رياضيات – الموضوع الثاني:

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية:

$$z^2 - 2(1-\sqrt{3})z + 8 = 0$$

(لاحظ أن: $(1+\sqrt{3})^2 = 4+2\sqrt{3}$)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{u};\vec{v})$.

A و B نقطتان من المستوي، لاحقتاهما على الترتيب:

$$\begin{cases} z_A = (1-\sqrt{3}) + i(1+\sqrt{3}) \\ z_B = \overline{z_A} \end{cases}$$

2) أ- بين أن:

$$\frac{z_B}{z_A} = e^{-\frac{7\pi}{6}i}$$

ب- استنتج عمدة للعدد المركب z_A.

جـ- استنتج القيمة المضبوطة لكل من العددين $\cos\frac{7\pi}{12}$ و $\sin\frac{7\pi}{12}$.

3) أ- حل، في مجموعة الأعداد الصحيحة، المعادلة ذات المجهول $(x\,;y)$ التالية:

$$7x - 2y = 1$$

ب- بين أنه إذا كانت الثنائية $(x\,;y)$ من الأعداد الصحيحة، حلا للمعادلة: $7x-24y=12$ فإن x يكون مضاعفا للعدد 12.

جـ- استنتج كل الثنائيات $(x\,;y)$ من الأعداد الصحيحة، حلولا للمعادلة:

$$7x - 24y = 12$$

د- عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(z_A)^n$ عددا حقيقيا سالبا تماما.

البعض منا لديه مدارج يقلع منها إلى النجاح،
لكن إن كنت ممّن لا يملكون هذه المدارج،
عليك أن تشيّدها بنفسك.

حظ سعيد

bouguetof.hamid@yahoo.fr