

الرياضيات و البكالوريا السنة الثالثة من التعليم الثانوي

- تذكير ببعض دروس السنة الثانية و الأولى
- دروس مقدمة وفق طريقة المقاربة بالكفاءة بالتفصيل
- تطبيقات مباشرة
- تمارين و مسائل
- حلول لبعض تمارين البكالوريا

تطبيقات مباشرة لكل درس، و تمارين نموذجية محلولة بالتفصيل
و حلول لبعض تمارين الكتاب المدرسي و البكالوريات

للشعب: * رياضي

* تقني رياضي

* علوم تجريبية

و التعليم عن بعد،

إعداد: قواسمية عبد الحميد

إهداء و شكر:

*... إلى والدي الكريمين اللذين حفـزاني على إعداد هذا الكتاب و نشره.
*... و لما كان لزاما علي أن أستعين ببعض المراجع القيمة لأساتذتنا الأفاضل الذين لم يدخروا أي جهد في إفادتنا بكثير من المعارف العلمية و المفاهيم الرياضية أذكر منهم على سبيل المثال لا الحصر السادة:

** أبو بكر خالد سعد الله

** عبد الحفيظ مقـرـان

** قادة عـلاب

** محمود سعـود

** يوسف قرـقـور ...

فإني أتقدم إليهم جميعا بالشكر الجزيل.

فهرس الجزء الأول:

الصفحة:

عرض للفصول و الدروس:

01	 الفهرس
03	 المقدمة
05	 تقديم الكتاب
07	 الباب الأول:

مراجعة عامة و طرق البرهان:

07	 • مراجعة عامة
53	 • طرق البرهان

الباب الثاني:

الفصل الأول:

59	 الدوال العددية:
60	* الدرس الأول: النهايات و العمليات عليها
67	* الدرس الثاني: النهايات و الحصر و المستقيمات المقاربة
74	* الدرس الثالث: الاستمرار
79	* الدرس الرابع: تطبيقات الاستمرارية " مبرهنة القيم المتوسطة "
87	• تمارين حول: النهايات و المستقيمات المقاربة و الاستمرارية
110	* الدرس الخامس: الاشتقاق
118	* الدرس السادس: التفسير الهندسي للاشتقاق (تعريف التفاضل و الرؤية الهندسية)
127	• تمارين حول الاشتقاق
135	* دراسة الدوال: * الناطقة
	* الصماء
	* الجيبية
201	* الدرس السابع: الدالة الأسية و توظيفها
206	* الدرس الثامن: دراسة الدالة الأسية
212	* الدرس التاسع: الدالة اللوغاريتمية
216	* الدرس العاشر: دراسة الدالة اللوغاريتمية
223	* الدرس الحادي عشر:
	- القوى الحقيقية
	- الدالة الأسية ذات الأساس a حيث $a > 0$
	- دالة القوى و تعريف $\sqrt[n]{a}$ مع $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ و $a > 0$

- 229 * الدرس الثاني عشر: الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس a حيث: $a > 0$ و $a \neq 1$ "الدالة اللوغاريتمية العشرية" ..
- 233 *الدرس الثالث عشر: التزايد المقارن
- 241 • تمارين حول الدوال: الأسية و اللوغاريتمية

الفصل الثاني:

- 325 الأعداد الأولية و القسمة في $\mathbb{Z}$ ، و الموافقات
- 326 * الدرس الأول: الأعداد الأولية
- 331 * الدرس الثاني: القسمة في $\mathbb{Z}$ و خواصها
- 335 * الدرس الثالث: القاسم المشترك الأكبر و خواصه
- 340 * الدرس الرابع:
عددان طبيعيين أوليان فيما بينهما
مبرهنة بيزو و مبرهنة غوص و بعض استعمالها
- 344 * الدرس الخامس: المضاعف المشترك الأصغر
- 347 • تمارين حول القسمة في $\mathbb{Z}$ و القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر
- 357 * الدرس السادس: الموافقات في $\mathbb{Z}$
- 360 * الدرس السابع: خواص الموافقة في $\mathbb{Z}$
- 363 • استعمال الموافقات في بعض التمارين
- 371 * الدرس الثامن: التعداد
- 375 • تمارين نموذجية حول الفصل الثاني

مقدمة:

بسم الله الرحمن الرحيم، و الصلاة و السلام على أشرف المرسلين أما بعد:

يسرني أن أضع بين أيادي طالبينا الأعزاء من المستوي النهائي هذا الاعداد المتواضع و كلي أمل في أن يحقق رغباتهم في معرفة بعض خبايا هذا النشاط العلمي المهم – الرياضيات- على الأقل في هذه المرحلة الحاسمة في حياتهم الدراسية، مع العلم أنني اعتمدت في إعدادي للدروس المتناولة على طريقة المقاربة بالكفاءات التي عكفت منظومتنا التربوية على تطبيقها منذ سنوات، و قد صفت وفق تسلسل التوزيع السنوية المعتمدة من قبل وزارة التربية الوطنية.

محتوى هذا الكتاب يقع في جزأين، جزء أول خصص لـ:

* التذكير ببعض المفاهيم التي سبق أن تعرض لها الطالب في سنوات سابقة و وضعت تحت عنوان الباب الأول، أما الباب الثاني فخصص لستة فصول تناولنا في هذا الجزء فصلين هما:

* الدوال العددية التي أخذت حصة الأسد في هذا الجزء،
 * القسمة و الموافقات في $\mathbb{Z}$ بالنسبة لشعبي "الرياضي" و "التقني الرياضي"
 و البقية في:

الجزء الثاني الذي خصص لـ:

* الهندسة الفضائية،

* الأعداد المركبة،

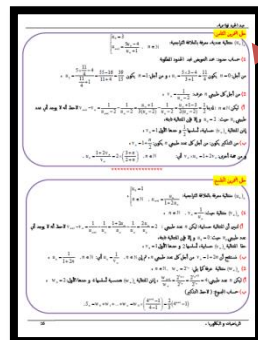
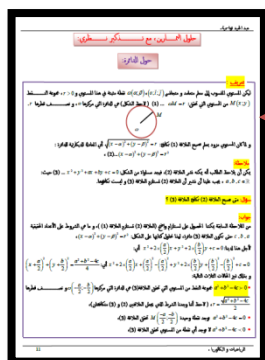
* المتتاليات العددية،

* الدوال الأصلية و التكاملات،

و نحن في انتظار انتقاداتكم و اقتراحاتكم على البريد الإلكتروني:

Gouasmia.Abdelhamid@Gmail.com

تقديم الكتاب:

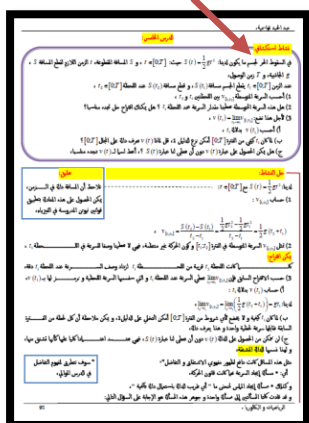


* تمارين لمراجعة بعض المفاهيم

* تذكير نظري لتلك المفاهيم

* حلول لتلك التمارين

* في بعض الدروس أدرجنا أنشطة لاستنفاد المعلومات التي اكتسبها الطالب من قبل، قصد إحساسه بضرورة توسيع تلك المعلومات أو إضافة معلومات أخرى تمكنه دعما لحل بعض الاشكاليات الرياضية،
* يتم تقديم هذا التوسيع أو تلك المعلومات اللازمة للطالب في الدرس، وقد عنون بنـ "بناء المعارف"،



* وقد أرفقت بعض الدروس ببعض المعارف التاريخية، والتي تمكن أهميتها في جعل الطالب متصلا بالواقع، وإبعاده عن تلك النظرة التجريدية التي وصفت بها الرياضيات

* لقد دُعّم كل درس أو فصل بمجموعة من التطبيقات، و التمارين النموذجية والمسابقات والحلول لبعض البكالوريات.



الباب الأول:

*مراجعة عامة،

* طرق البرهان.

مراجعة عامة حول:



إن هذه التمارين جاءت لمراجعة بعض المفاهيم التي نحتاج إليها خلال هذه السنة في بعض الفصول،

تمارين حول الدائرة في المستوي:

التمرين الأول:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس، أعط المعادلة الديكارتية للدائرة (C) في كل حالة من الحالات التالية:

- (1) دائرة مركزها $\Omega(2;-1)$ و طول نصف قطرها $2\sqrt{2}$ ،
- (2) دائرة مركزها $\Omega(1;3)$ و تمر من النقطة $A(-1;2)$ ،
- (3) دائرة أحد أقطارها $[AB]$ حيث: $A(-4;-3)$ و $B(2;-1)$ ،
- (4) دائرة مركزها $\Omega(1;3)$ و المستقيم (Δ) ذو المعادلة: $x - 3y + 5 = 0$ مماس لها،
- (5) دائرة تمر من النقط التالية: $A(5;3)$ ، $B(4;-2)$ و $C(0;4)$.

التمرين الثاني:

لتكن (E_m) مجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي التي تحقق: $x^2 + y^2 + 2mx - 4my + 1 = 0$ ، $m \in \mathbb{R}$

- 1- ناقش حسب قيم m مجموعة النقط (E_m) ،
- 2- نأخذ $m = 1$:
 - (a) عين العناصر المميزة لـ (E_1) ،
 - (b) عين نقط تقاطع (E_1) مع المستقيم (Δ') الذي معادلته: $y = x + 1$ ،
 - (c) عين معادلة المستقيم (Δ) المماس لـ (E_1) في النقطة $d(-1;4)$.

تمارين حول المرجح ثم الجداء السلمي في المستوي:

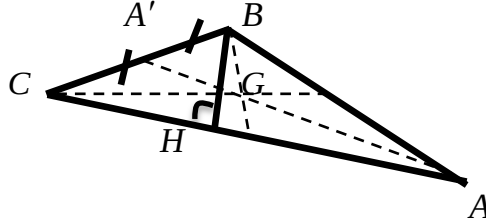
التمرين الثالث:

ABC مثلث قائم في A ، النقط F, E, D تحقق: $\overline{AD} = \frac{4}{5}\overline{AB}$ ، نظيرة A بالنسبة لـ C و F نظيرة C بالنسبة لـ B ،

- (1) أنجز الرسم،
- (2) أثبت أن:
 - (أ) مرجح الجملة $\{(A;1), (B;4)\}$ ،
 - (ب) مرجح الجملة $\{(A;1), (C;-2)\}$ ،
 - (ج) مرجح الجملة $\{(B;2), (C;-1)\}$ ،
- (3) أثبت أن المستقيمت (CD) ، (BE) و (AF) متقاطعة وفق نقطة واحدة
يمكن استعمال مرجح الجملة $\{(A;\alpha), (B;\beta), (C;\delta)\}$ حيث: α, β, δ هي أعداد حقيقية مختارة بصفة حسنة).

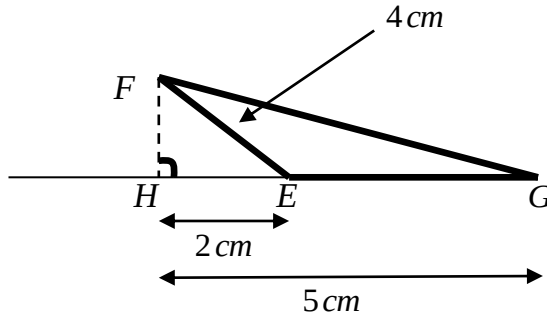
التمرين الرابع:

- ABC مثلث بحيث: $AC = 8\text{ cm}$, $BC = 5\text{ cm}$, $AB = 7\text{ cm}$ ،
 H المسقط العمودي للنقطة B على $[AC]$ ، G مركز ثقل المثلث ABC ،
 (1) باستعمال مبرهنة الكاشي، احسب أقياس زوايا المثلث ABC (تدور النتائج إلى 10^{-1}) ،
 (2) احسب الجداء السلمي: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ، باستعمال عبارة أخرى للجداء السلمي احسب الطول AH ،
 (3) • اكتب $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ (تذكر: $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ ، حيث: A' منتصف $[BC]$) ،
 • استنتج طول AG ،
 لاحظ الشكل:



التمرين الخامس:

- ليكن FEG مثلث، H المسقط العمودي للنقطة F على (EG) ، بحيث: $EF = 4\text{ cm}$ و $EH = 2\text{ cm}$ ، $HG = 5\text{ cm}$ ،
 احسب الجداءات السلمية التالية: $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EH}$ و $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG}$ ، $\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GH}$ ، $\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{HE}$ ، وأخيرا $(\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{HE}) \cdot \overrightarrow{FG}$.
 لاحظ الشكل:



حول العلاقات المثلثية:

التمرين السادس:

x عدد حقيقي، بسط العبارات التالية:

$$C = \cos^4(x) - \sin^4(x) \text{ و } B = (\cos(x) + \sin(x))^2 + (\cos(x) - \sin(x))^2 \text{ و } A = 2\cos^2(x) + 3\sin^2(x)$$

$$\text{ و } D = \cos(x + 5\pi) + \sin(7\pi - x) + \cos(x + 19\pi) \text{ و } E = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(7\pi - x) + \sin^2(9\pi + x) + \sin^2\left(x - \frac{5\pi}{2}\right)$$

التمرين السابع:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \\
 (2) \quad & \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \\
 (3) \quad & 2\sin(3x) = 3 \\
 (4) \quad & 2\cos(x) - 1 = 0 \\
 (5) \quad & 2\sin(2x) + \sqrt{3} = 0 \\
 (6) \quad & 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0 \\
 (7) \quad & \sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \\
 (8) \quad & \sin^2\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin^2(2x + \pi)
 \end{aligned}$$

حول المتتاليات العددية:

التمرين الثامن:

لتكن المتتالية العددية $(u_n)_n$ المعرفة بالعلاقة التراجعية:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(1) احسب u_1, u_2 ،(2) نعتبر المتتالية $(v_n)_n$ المعرفة بما يلي: $v_n = \frac{1}{u_n - 2}, n \in \mathbb{N}$ ،(أ) بين أن $(v_n)_n$ متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{3}$ ،(ب) استنتج u_n بدلالة n .

التمرين التاسع:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n} \end{cases}$$

(1) نعتبر المتتالية المعرفة بما يلي: $v_n = \frac{1}{u_n}$ وهذا من أجل كل عدد طبيعي n ،(أ) بين أن المتتالية $(v_n)_n$ حسابية، و عين أساسها وحدها الأول،(ب) استنتج v_n ثم u_n بدلالة n ،(2) نعتبر المتتالية $(w_n)_n$ المعرفة كالتالي: $w_n = 2^{v_n}, n \in \mathbb{N}$ ،(أ) بين أن المتتالية $(w_n)_n$ هندسية محددا أساسها q وحدها الأول w_0 ،(ب) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$.

التمرين العاشر:

لتكن $(u_n)_n$ متتالية حسابية معرفة كما يلي: $\begin{cases} u_6 + u_8 = 40 \\ u_{10} = 29 \end{cases}$

- (1) عين أساس المتتالية وحدها الأول،
- (2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n ،
- (3) عين قيمة العدد الطبيعي n إذا علمت: $u_n = 44$ ،
- (4) احسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{15}$.

التمرين الحادي عشر:

لتكن $(u_n)_n$ متتالية هندسية متزايدة وكل حدودها موجبة،

- (1) عين u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 إذا علمت أن: $u_1 + u_2 + u_3 = 42$ و $u_0 \times u_4 = 144$ ،
- (2) - عين بدلالة n الحد العام u_n ،
- احسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{99}$
- احسب الجداء: $P = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{99}$

المعادلات من الدرجة الثانية:

التمرين الثاني عشر:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

- $$\begin{aligned} & x^2 + 2x = 0 \quad \bullet \\ & 2x^2 - 4 = 0 \quad \bullet \\ & x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \bullet \\ & -x^2 + 2x + 3 = 0 \quad \bullet \\ & x^2 + x - 6 = 0 \quad \bullet \\ & x^2 + x + 1 = 0 \quad \bullet \end{aligned}$$

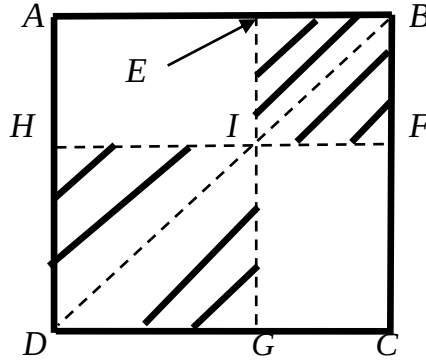
التمرين الثالث عشر:

بين أن α جذر لـ $P(x)$ ، ثم عين a, b, c بحيث يكون: $P(x) = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c)$ ، ثم عين حلول المعادلة $P(x) = 0$ ، وإشارة كثير الحدود $P(x)$ في كل حالة من الحالات التالية:

- (1) $\alpha = 1$ و $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$
- (2) $\alpha = -2$ و $P(x) = 4x^3 - 4x^2 - 15x + 18$
- (3) $\alpha = -1$ و $P(x) = x^3 - x^2 + x + 3$

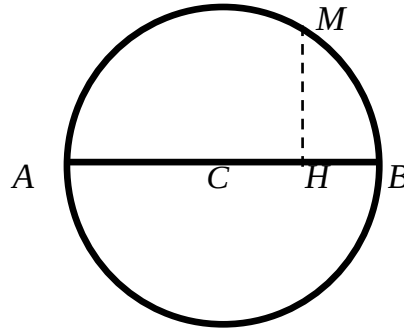
التمرين الرابع عشر:

$ABCD$ مربع طول ضلعه 1 وحدة، I نقطة من القطر $[BD]$ ، نعين مربعين $EBFI$ و $HIGD$ ، كيف يمكن اختيار النقطة I بحيث يكون مجموع مساحتي المربعين مساويا لـ $\frac{2}{3}$.



التمرين الخامس عشر:

نعتبر الدائرة ذات القطر $AB = 8$ ، M نقطة من الدائرة، H المسقط العمودي للنقطة M على $[AB]$ ، نضع: $CH = x$ ، حيث: C مركزها،



(1) احسب MH^2 بدلالة x ،

(2) احسب MA^2 بدلالة x ،

(3) عين M بحيث: $MA^2 + 3MH^2 = 77$.

التمرين السادس عشر:

(1) حل في $[-\pi; \pi]$ المعادلة: $\cos(4\theta) = 0$ ،

(2) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي θ :

$$\cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1$$

(3) أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $8x^2 - 8x + 1 = 0$ ،

ب) نضع: $x = \cos^2(\theta)$ ، استنتج قيمة مضبوطة لـ: $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ و $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ و $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ و $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$.

حول الدوال العددية:

التمرين السابع عشر:

$$f_2(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1 \quad (2)$$

$$f_4(x) = \operatorname{tg}(x) \quad (4)$$

$$f_6(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (6)$$

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \quad (1) \text{ عين مجموعة تعريف الدوال التالية:}$$

$$f_3(x) = \cos(x) \quad (3)$$

$$f_5(x) = \sqrt{-x^2 + 4} \quad (5)$$

التمرين الثامن عشر:

$$f(x) = \frac{\cos(3x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(3x)}{\sin(x)} \text{ : حيث:}$$

(1) عين D_f مجموعة تعريف f ،

$$(2) \text{ أكتب } f \text{ بدلالة } \cos(2x), \text{ ثم احسب: } f\left(\frac{2\pi}{3}\right) \text{ و } f\left(\frac{-5\pi}{6}\right), f\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

$$(3) \text{ حل في المجال }]0; \pi[\text{ المعادلة: } f(x) = -2, \text{ و مثل صور حلولها على الدائرة المثلثية،}$$

$$(4) \text{ استنتج حلول المتراجحة: } f(x) < -2 \text{ في المجال }]0; \pi[.$$

التمرين التاسع عشر:

$$f \text{ دالة عددية معرفة على } \mathbb{R} \text{ بـ: } f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$(1) \text{ عين العددين الحقيقيين } a, b \text{ بحيث يكون: } f(x) = (x+a)^2 + b,$$

$$(2) \text{ عين اتجاه تغير الدالة } f \text{ على المجالين: }]-\infty; 2] \text{ و } [2; +\infty[,$$

$$(3) \text{ أنشئ جدول تغيرات } f \text{ ثم عين قيمة } x \text{ بحيث تكون } f \text{ أصغر ما يمكن،}$$

$$(4) \text{ اعتمادا على منحنى الدالة مربع أنشئ } (C_f) \text{ منحنى الدالة } f \text{ في معلم متعامد ومتجانس،}$$

$$(5) \text{ حل بيانيا المتراجحتين: } f(x) \geq 0 \text{ و } f(x) < 0,$$

$$(6) \text{ اعتمادا على } (C_f) \text{ أنشئ } (C_h) \text{ منحنى الدالة } h \text{ حيث: } h(x) = |f(x)|.$$

التمرين العشرون:

$$\text{عين } f \circ g \text{ و } g \circ f, \text{ في كل حالة من الحالات التالية:}$$

$$(1) f(x) = x^2 + 1 \text{ و } g(x) = \frac{1}{x},$$

$$(2) f(x) = 4x^2 - 3x \text{ و } g(x) = 2x^2 - 1,$$

$$(3) f(x) = \frac{2x-1}{x+1} \text{ و } g(x) = x+1,$$

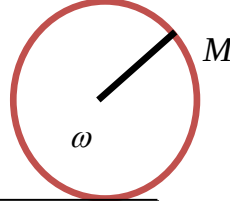
$$(4) f(x) = \sqrt{x-1} \text{ و } g(x) = \frac{1}{x}.$$

حلول التمارين، مع تذكير نظري:

حول الدائرة في المستوي:

تعريف:

ليكن المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ ، $\omega(\alpha; \beta)$ نقطة مثبتة في هذا المستوي و $r > 0$ ، مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوي التي تحقق: $\omega M = r$... (1) (لاحظ الشكل) هي الدائرة التي مركزها ω ، و نصف قطرها r .



و لما كان المستوي مزود بمعلم تصبح العلاقة (1) تكافئ: $\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2} = r$ أي المعادلة الديكارتيّة للدائرة:
 $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$... (2)

ملاحظة:

يمكن نشر العلاقة (2)، فنجد مساواة من الشكل: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$... (3) حيث: a, b, c من $\mathbb{R}$ ، يجب علينا أن نشير أن العلاقة (2) تستلزم العلاقة (3) و ليست تكافئها،

سؤال: متى تصبح العلاقة (2) تكافئ العلاقة (3) ؟

جواب:

من الملاحظة السابقة يمكننا الحصول على استلزام واضح (العلاقة (2) تستلزم العلاقة (3))، إذن ما هي الشروط على الأعداد الحقيقية a, b, c حتى تكون العلاقة (3) دائرة، لهذا نحاول كتابتها على الشكل: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ ،
 لأجل هذا لدينا: $x^2 + 2 \times \left(\frac{a}{2}\right)x + y^2 + 2 \times \left(\frac{b}{2}\right)y + c = 0$ أي:

$$x^2 + 2 \times \left(\frac{a}{2}\right)x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + 2 \times \left(\frac{b}{2}\right)y + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} \quad \text{في الأخير نجد:}$$

و بذلك نميز الحالات الثلاث التالية:

• $a^2 + b^2 - 4c > 0$ مجموعة النقط من المستوي التي تحقق العلاقة (3) هي الدائرة التي مركزها $\omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$ و نصف قطرها

$$r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}, \quad (\text{لاحظ أننا وجدنا الشرط الذي يجعل العلاقتين (2) و (3) متكافئتين،})$$

• $a^2 + b^2 - 4c = 0$ توجد نقطة وحيدة $M\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$ تحقق العلاقة (3) (تذكر أن $a^2 + b^2 = 0$ معناه $a = b = 0$)،

• $a^2 + b^2 - 4c < 0$ لا توجد أي نقطة من المستوي تحقق العلاقة (3)،

حل التمرين الأول:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس:

من التذكير النظري، أمكن كتابة المعادلة الديكارتية للدائرة (C) في كل حالة:

(1) $M(x; y) \in (C)$ مركزها $\Omega(2; -1)$ و طول نصف قطرها $2\sqrt{2}$ معناه: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 8$ ،

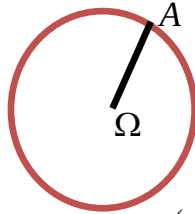
تذكر أنه من أجل: a, b من $\mathbb{R}^*$ و n, m من $\mathbb{Z}$:

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad \sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}, \quad a \geq 0, b \geq 0$$

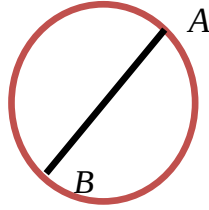
(2) (C) دائرة مركزها $\Omega(1; 3)$ و تمر من النقطة $A(-1; 2)$: من هذه المعطيات يمكن ببساطة حساب طول نصف القطر،

أي: $r = \Omega A = \sqrt{(x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2} = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5}$



أي: $M(x; y) \in (C)$ معناه $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$

(3) (C) أحد أقطارها $[AB]$ ، حيث: $A(-4; -3)$ ، $B(2; -1)$:



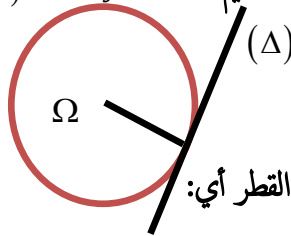
من الواضح أنه يمكن تعيين مركز الدائرة و بالتالي طول نصف القطر أي:

$$\Omega \left(x_\Omega = \frac{x_A + x_B}{2}; y_\Omega = \frac{y_A + y_B}{2} \right) = \left(\frac{2-4}{2}; \frac{-1-3}{2} \right) = (-1; -2)$$

و $r = A\Omega = B\Omega = \sqrt{(-4+1)^2 + (-3+2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

أي: $M(x; y) \in (C)$ معناه $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 10$

(4) (C) دائرة مركزها $\Omega(1; 3)$ ، و يسها المستقيم $(\Delta): x-3y+5=0$ ،

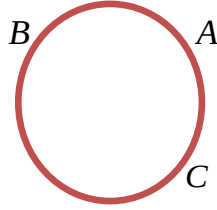


من هاته المعطيات أمكن حساب طول نصف القطر أي:

$$r = d(\Omega; (\Delta)) = \frac{|x_\Omega - 3y_\Omega + 5|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|1-9+5|}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

تذكير: ليكن المستقيم $(\Delta): ax + by + c = 0$ و نقطة $\omega(x_0; y_0)$ من المستوي، عندئذ: $d(\omega; (\Delta)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

(5) دائرة تمر من النقط التالية: $A(5;3)$, $B(4;-2)$, $C(0;4)$ ،



طريقة أولى :

$$A \in (C) \text{ معناه } 5^2 + 3^2 + a \times 5 + b \times 3 + c = 0$$

$$B \in (C) \text{ معناه } 4^2 + (-2)^2 + a \times 4 + b \times (-2) + c = 0$$

$$C \in (C) \text{ معناه } 0^2 + 4^2 + a \times 0 + b \times 4 + c = 0$$

$$\begin{cases} 5a + 3b + c = -34 \\ 4a - 2b + c = -20 \\ 4b + c = -16 \end{cases}$$

من المعادلة الثالثة لدينا: $c = -16 - 4b$ ، وعند التعويض في المعادلتين المتبقيتين نجد: أي: $\begin{cases} 5a + 3b - 16 - 4b = -34 \\ 4a - 2b - 16 - 4b = -20 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5a - b = -18 \\ 2a - 3b = -2 \end{cases} \text{ عند ضرب المعادلة الأولى في العدد: } (-3) \text{ نجد: } \begin{cases} -15a + 3b = 54 \\ 2a - 3b = -2 \end{cases}$$

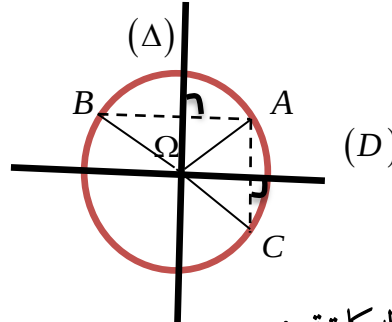
$$b = 5 \times (-4) + 18 = -2 \text{ ومنه: } c = -16 - 4(-2) = -8$$

و منه نحصل على $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$ ، وعند الرجوع إلى التذكير نجد:

$$M(x; y) \in (C) \text{ معناه } (x-2)^2 + (y-1)^2 = 13$$

طريقة ثانية:

لتكن Ω مركز الدائرة التي نأمل أن نجد إحداثيها، لدينا المساواة $\Omega A = \Omega B = \Omega C$ أي أمكن كتابة: $\Omega \in (\Delta) \cap (D)$ حيث: (Δ) هو محور القطعة المستقيمة $[AB]$ ، و (D) هو محور القطعة المستقيمة $[AC]$



لنعين عندئذ معادلتين كل من (Δ) و (D) الديكاريتين:

بالنسبة لـ (Δ) : يمكن ملاحظة أن $\overline{AB}$ شعاع عمودي على المستقيم (Δ) أي المعادلة الديكارية: $-x - 5y + c_1 = 0$ ،

وكون المستقيم (Δ) يشمل منتصف القطعة $[AB]$ أمكن تعيين قيمة c_1 ، أي: $-x - 5y + 7 = 0$: (Δ) ،

بالنسبة لـ (D) : نفس الخطوات التي قادتنا إلى المعادلة الديكارية لـ (Δ) توصلنا إلى: $-5x + y + 9 = 0$: (D) ، إذن:

$$\Omega \in (\Delta) \cap (D) \text{ معناه: } \begin{cases} -x_{\Omega} - 5y_{\Omega} + 7 = 0 \\ -5x_{\Omega} + y_{\Omega} + 9 = 0 \end{cases} \text{ عند حل هذه الجملة نجد: } \Omega(2;1) \text{ و عليه وجدنا مركز الدائرة، وأخيرا}$$

$$r = \Omega A = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \text{، أي: } M(x; y) \in (C) \text{ معناه } (x-2)^2 + (y-1)^2 = 13$$

حل التمرين الثاني:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس،

(1) مجموعة النقط $M(x; y)$ التي تحقق: $x^2 + y^2 + 2mx - 4my + 1 = 0$... حيث: m وسيط حقيقي،
 (1) المناقشة حسب قيم الوسيط m طبيعة المجموعة (1):

المساواة (1) تكافئ: $(x+m)^2 + (y-2m)^2 = 5m^2 - 1$ ، و عليه نميز الحالات التالية: $m \in \left] -\infty; \frac{-1}{\sqrt{5}} \right[\cup \left] \frac{1}{\sqrt{5}}; +\infty \right[$ /

مجموعة النقط $M(x; y)$ من المستوي هي الدائرة التي مركزها $\Omega_m(-m; 2m)$ و طول نصف قطرها $r_1 = \sqrt{5m^2 - 1}$

ب/ $m \in \left\{ \frac{-1}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}} \right\}$ هناك نقطة وحيدة تحقق المساواة (1) إحداثياتها $M(-m; 2m)$ ،

ج/ $m \in \left] \frac{-1}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}} \right[$ لا توجد أي نقطة من المستوي تحقق المساواة (1) ، إذن المجموعة (E_m) خالية.

(2) $m = 1$ إذن نحن في الحالة / المدرسة سابقا أي مجموعة النقط هي دائرة ،

أ عناصرها: المركز $\Omega_1(-1; 2)$ و طول نصف القطر 2 ،

ب تعيين مجموعة نقط تقاطع المستقيم $(\Delta'): y = x + 1$ مع الدائرة (E_1) ،

لتكن $A(a; b) \in (E_1) \cap (\Delta')$ أي: $\begin{cases} b = a + 1 \\ a^2 + b^2 + 2a - 4b + 1 = 0 \end{cases}$ عند التعويض الواضح نجد:

$a^2 + (a+1)^2 + 2a - 4(a+1) + 1 = 0$ أي $a^2 - 1 = 0$ و منه: $a \in \{-1; 1\}$ ، عند التعويض نجد $b \in \{0; 2\}$ ،
 أي: $(E_1) \cap (\Delta') = \{(-1; 0), (1; 2)\}$.

ج المعادلة الديكارتيّة للمماس (Δ) للدائرة (E_1) في النقطة $d(-1; 4)$: من الواضح بداية أن النقطة d من (E_1) "تحقق من هذا"

طريقة أولى:

الشعاع $\overline{\Omega_1 d}$ عمودي على المستقيم (Δ) إذن المعادلة الديكارتيّة تعطى على الشكل: $2y + c = 0$: (Δ) و كون $d \in (\Delta)$ ،
 إذن: $(\Delta): y = 4$ ،

طريقة ثانية:

النقطتان d, Ω_1 هما نفس الفاصلة، إذن تقعان على مستقيم مواز لمحور الترتيب، و بالتالي نستنتج أن المستقيم (Δ) مواز لمحور الفواصل لما كان المعلم متعامدا، و كونه يشمل النقطة d فتكون معادلته على النحو: $(\Delta): y = 4$.



لكي تنجح، يجب على رغبتك في النجاح أن تفوق خوفك من الفشل

حول المرجح و الجداء السلمي في المستوي:

أولاً:

تعريف المرجح لثلاث نقط مثلاً:

نرفق النقط A, B, C المختلفة من المستوي بالأعداد الحقيقية α, β, δ على التوالي، نسمي تلك الأعداد السابقة بأثقال أو أوزان النقط الثلاث، و نقول أن الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \delta)\}$ مثقلة،

سوف نطرح **السؤال**: هل توجد نقط G من المستوي تحقق: $\vec{GA} + \beta \vec{GB} + \delta \vec{GC} = \vec{0}$ (*) ؟

جواب:

لا يمكننا تمثيل النقطة G انطلاقاً من العلاقة (*)، و سبب هذا العجز تواجدها في كل شعاع من الأشعة الثلاثة السابقة، لأجل هذا نستعمل علاقة شال و هذا بتحليل العلاقة بالنسبة للنقطة A ، فنجد: $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GA} + \beta \vec{AB} + \delta \vec{GA} + \delta \vec{AC} = \vec{0}$ معناه $(\alpha + \beta + \delta) \vec{AG} = \beta \vec{AB} + \delta \vec{AC}$ ، نية تمثيل النقطة G تمنحنا الشعور بأن العلاقة الأخيرة التي تكافئ العلاقة (*) المحصل عليها تحل الإشكال، لأجل هذا نميز الحالتين:

• $\alpha + \beta + \delta \neq 0$ أي توجد نقطة G وحيدة تحقق العلاقة (*) تدعى هذه النقطة مرجح الجملة المثقلة $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \delta)\}$ ، نشير أنه إذا كانت الأثقال متساوية نسمي المرجح بمركز الأبعاد المتناسبة و إذا كانت النقط الثلاث ليست على استقامة تسمى مركز ثقل المثلث ABC أو الجملة السابقة.

$$\bullet \bullet \alpha + \beta + \delta = 0$$

(أ) إذا كان: $\beta \vec{AB} + \delta \vec{AC} = \vec{0}$ عندئذ جميع نقط المستوي تحقق (*).

(ب) $\beta \vec{AB} + \delta \vec{AC} \neq \vec{0}$ ونحصل على تناقض سببه المساواة بين شعاع لا يعدم و شعاع معدوم، و تفسير هذا أنه لا توجد أي نقطة من المستوي تحقق (*).

إليك الخصائص:

لتكن G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \delta)\}$

الخاصية الأولى:

من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا: $(\alpha + \beta + \delta) \vec{MG} = \alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \delta \vec{MC}$ (يكثّر استعمال هذه العلاقة) و إذا كان المستوي مزوداً بمعلم يكون من هذه الخاصية و من أجل $M \equiv O$: $x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \delta x_C}{\alpha + \beta + \delta}$, $y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \delta y_C}{\alpha + \beta + \delta}$

الخاصية الثانية:

إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \delta)\}$ و G_1 مرجح الجملة المثقلة $\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$ فإن: G مرجح الجملة $\{(G_1; \alpha + \beta), (C; \delta)\}$.

الخاصية الثالثة:

(1) $M \in (AB)$ معناه M مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta)\}$ حيث: α, β عدنان حقيقيان،

(2) $M \in (ABC)$ معناه M مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \delta)\}$ حيث: α, β, δ أعداد حقيقية،

نشير أن النقط الثلاث يجب أن تكون ليست على استقامة أي أنها تشكل مستوي،

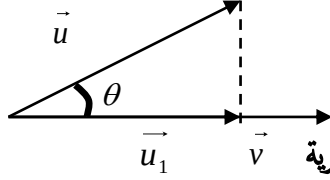
الخاصية الرابعة:

G مرجح الجملة $\{(A; \alpha), (B; \beta), (C; \delta)\}$ معناه G مرجح الجملة $\{(A; k\alpha), (B; k\beta), (C; k\delta)\}$ حيث: $k \in \mathbb{R}^*$.

هام جدا:

- نقول عن شعاعين $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ من المستوي أنها مرتبطان خطيا إذا استطعنا كتابة كل منهما بدلالة الآخر، أي وجد عدد حقيقي $k \in \mathbb{R}^*$ بحيث: $\vec{u} = k\vec{v}$ ، في خلاف هذا نقول أن الشعاعين مستقلان خطيا معناه إذا كان: $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ فإن $\alpha = \beta = 0$ ،
- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ أشعة من المستوي غير معدومة مستقلة خطيا معناه إذا كان: $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \delta\vec{w} = \vec{0}$ فإن $\alpha = \beta = \delta = 0$ ،
- يمكن تعميم هذا على n شعاع، $n \geq 2$ ، أي إذا استطعنا كتابة أحد الأشعة بدلالة الأشعة المتبقية فإنها مرتبطة خطيا.

ثانياً: تعريف الجداء السلمي:



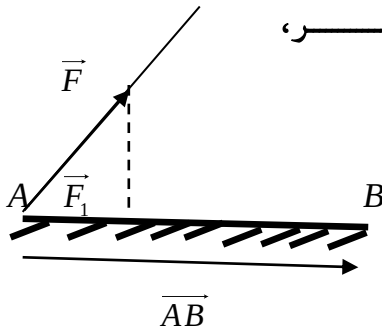
ليكن $\vec{u}, \vec{v}$ شعاعين من هذا المستوي، لاحظ الشكل المقابل:
 ليكن $\vec{u}_1$ المسقط العمودي للشعاع $\vec{u}$ على الشعاع $\vec{v}$ ،
 الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}, \vec{v}$ والذي سنرمز له بـ $\vec{u} \cdot \vec{v}$ تعريفاً هو: جداء القيمة الجبرية للشعاع $\vec{u}_1$ وطول الشعاع $\vec{v}$ أي: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}_1 \cdot \vec{v}$ ،
 من هذا التعريف يمكن استخراج العلاقة: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\theta)$ ، حيث θ الزاوية المحصورة بين الشعاعين $\vec{u}, \vec{v}$ ونقصد بالقيمة الجبرية:

إذا كان الشعاعان $\vec{u}_1$ و $\vec{v}$ لهما نفس الاتجاه يكون: $\vec{u}_1 = u_1$ ، أما إذا كانا مختلفين في الاتجاه يكون: $\vec{u}_1 = -u_1$.

حالة خاصة:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{u}\| \cos(0) = \|\vec{u}\|^2$$

يظهر مفهوم الجداء السلمي في الفيزياء بشكل واضح كما يلي:



يريد شخص نقل جسم ما من النقطة A إلى النقطة B دون رفع الجسم أي عن طريق الجسر، بقوة F لها نفس اتجاه الحركة،
 نود حساب العمل الذي يبذله هذا الشخص،
 نعم أن العمل مساو لطول الانتقال مضروب في القوة اللازمة لهذا الانتقال،
 في الحقيقة المركبة الثانية $\vec{F}_1$ هي التي تقوم بالعمل كله كونه جر، إذن العمل $W = AB \cdot F_1$ ،
 وحسب تعريف الجداء السلمي: $W = \vec{F} \cdot \vec{AB}$ ،
 إذن الجداء السلمي $\vec{F} \cdot \vec{AB}$ هو العمل المبذول لنقل جسم من النقطة A إلى B بقوة F .

خواص الجداء السلمي في المستوي:

ليكن $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ أشعة من المستوي، و α عدد حقيقي،

$$(1) \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \text{ نقول الجداء السلمي تبديلي،}$$

$$(2) \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v}$$

$$(3) \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$(4) (\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \text{ أو } (\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$(5) (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

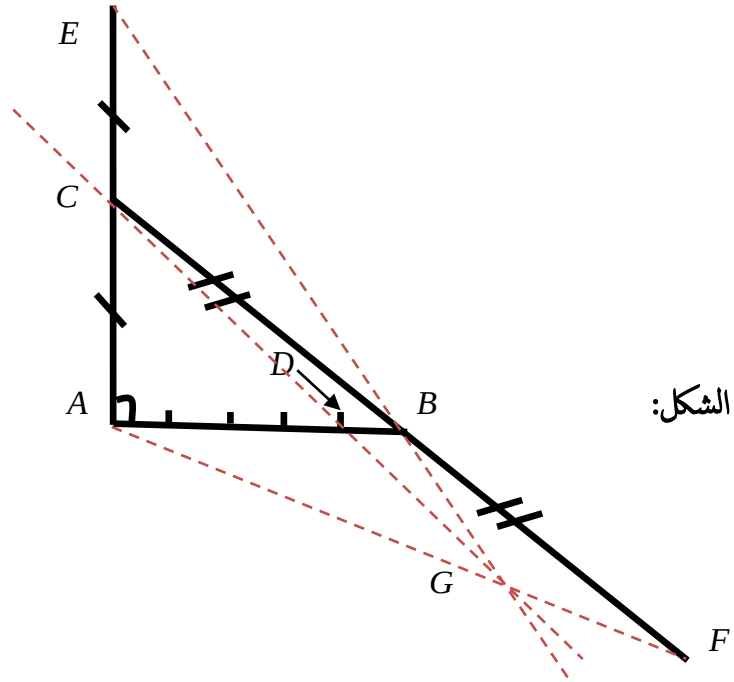
$$(6) \text{المستوي مزود بمعلم متعامد ومتجانس، يكون من الخاصية (4) } \vec{u} \cdot \vec{v} = x \cdot x' + y \cdot y' \text{ مع العلم: } \vec{u}(x; y) \text{ و } \vec{u}(x'; y')$$

بعض استعمالات الجداء السلمي في المستوي:

• $\vec{u} \perp \vec{v}$ معناه $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ • A, B نقطتان من المستوي، مجموعة النقط M من هذا المستوي التي تحقق $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$ هي الدائرة التي قطرها $[AB]$.

مثلث قائم ABC

حل التمرين الثالث:



(1) نرسم الشكل:

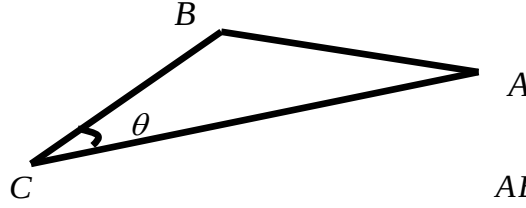
(2) أ) لدينا من المعطيات: $\vec{DA} = \frac{4}{5}\vec{BA}$ و اعتمادا على الهدف الذي نأمل أن نصـل إليه نكتب:—ب) لدينا نظيرة النقطة A بالنسبة لـ C و بالتالي تكون المساواة واضحة $\vec{EC} = \vec{CA}$ أي: $\vec{EA} = 2\vec{EC}$ وهذا يكافئ $\vec{EA} - 2\vec{EC} = \vec{0}$ (لاحظ أن $1-2=-1$) ، أي مرجح الجملة $\{(A;1), (C;-2)\}$ ،ج) نعلم كذلك من المعطيات أن نظيرة النقطة C بالنسبة لـ B و بالتالي: $2\vec{FB} = \vec{FC}$ ، أي: $2\vec{FB} - \vec{FC} = \vec{0}$ و بعد تأكدبسيط من $2-1=1$ أمكن القول أن F مرجح الجملة $\{(B;2), (C;-1)\}$ ،(3) نلاحظ أن النقطة G مرجح الجملة $\{(A;1), (B;4), (C;-2)\}$ تفني بالغرض،

(لاحظ خواص المرجح) عند تطبيق الخاصية الثانية ثم الخاصية الثالثة (1) و هذا ثلاث مرات نحصل على المطلوب ببساطة، لا بأس بشيء من التوضيح:

 G مرجح الجملة $\{(A;1), (B;4), (C;-2)\}$ و D مرجح الجملة $\{(A;1), (B;4)\}$ من (2) أ) و حسب الخاصية الثانية G مرجح الجملة $\{(D;5), (C;-2)\}$ و حسب الخاصية الثالثة $G \in (DC)$ ، و بنفس الطريقة نبين أن $G \in (EB)$ و $G \in (FA)$ ،أي المستقيمان الثلاثة (FA) و (EB) و (DC) متقاطعة، وفق النقطة G فقط كون المثلث ABC قائم،خلاصة: $(FA) \cap (EB) \cap (DC) = \{G\}$.

حل التمرين الرابع:

تذكير بمبرهنة الكاشي:

مثلث ABC مثلث كفي، لاحظ الشكل:

لدينا حسب "الكاشي":

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \times CB \cos \theta$$

لأن: $AB^2 = (\overrightarrow{AB})^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})^2 = AC^2 + CB^2 - 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ و حسب الجداء السلمي نجد العلاقة المحصل عليها في نص المبرهنة،

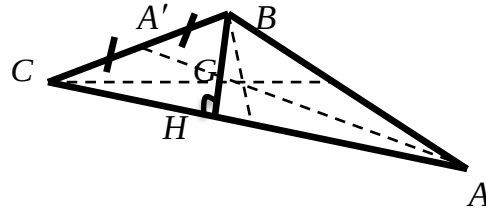
لاحظ أن مبرهنة فيثاغورث حالة خاصة من هذه المبرهنة و هذا من أجل $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(1) حساب أقياس زوايا المثلث:

نطبق مبرهنة الكاشي في كل مرة على ضلع من أضلاع المثلث نجد المطلوب:

$$\bullet \text{ } AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \times CB \cos(\widehat{ACB}) \text{ أي: } \cos \widehat{ACB} = \frac{AC^2 + CB^2 - AB^2}{2AC \times CB} \text{ عند التعويض}$$

$$\text{نجد: } \cos \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \text{ و منه: } \widehat{ACB} = 60^\circ$$



$$\bullet \text{ } AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos(\widehat{ABC}) \text{ أي: } \cos \widehat{CBA} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \times BC} \text{ عند التعويض}$$

$$\text{نجد: } \cos \widehat{CBA} = \frac{1}{7} \text{ و منه: } \widehat{CBA} \approx 81.8^\circ$$

و يمكن استنتاج الزاوية المتبقية $\widehat{BAC} \approx 180^\circ - 81.8^\circ - 60^\circ = 38.2^\circ$ لتأكد من هذا باستعمال مبرهنة الكاشي:

$$\bullet \text{ } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos(\widehat{BAC}) \text{ أي: } \cos \widehat{CAB} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC} \text{ عند التعويض}$$

$$\text{نجد: } \cos \widehat{BAC} = \frac{88}{112} = \frac{11}{14} \text{ و بالتالي: } \widehat{BAC} = 38.2^\circ$$

(2) حساب الجداء السلمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$:

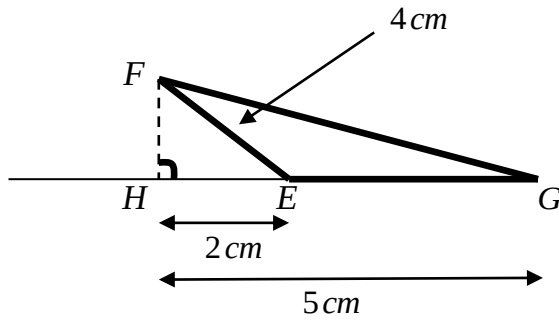
$$\text{لدينا: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 7 \times 8 \times \left(\frac{11}{14}\right) = 44$$

$$\text{و من جهة أخرى نعلم أن } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AH \times AC \text{ أي: } AH = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{44}{8} = \frac{11}{2}$$

(3) كتابة $\overrightarrow{AG}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$:حسب التذكير لدينا $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ و كون A' منتصف القطعة $[BC]$ نكتب: $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ خواص متوازي أضلاع،و منه: $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ و من جهة أخرى نستنتج من العلاقة المحصل عليها أخيرا كتابة:

$$\overrightarrow{AG} \times \overrightarrow{AG} = AG^2 = \frac{1}{9}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{9}(AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})$$

$$AG = \frac{1}{3}\sqrt{49 + 64 + 88} = \sqrt{\frac{67}{3}} \text{ عند التعويض العددي:}$$



حل التمرين الخامس:

نرسم الشكل المساعد:

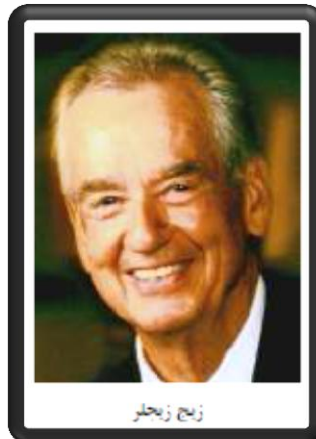
حساب الجداءات السلمية:

$$\overrightarrow{GE} \cdot \overrightarrow{GH} = GE \times GH = 3 \times 5 = 15 \text{ و } \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = -EH \times EG = -2 \times 3 = -6 \text{ و } \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EH} = EH^2 = 4$$

$$(\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{HE}) \cdot \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HE} \cdot \overrightarrow{FG} = -12 + 10 = -2 \quad , \quad \overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{HE} = HF \times HE \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

حسب فيثاغورس

إذا أردت بلوغ هدفك، فعليك تخيل نفسك و قد بلغته، قبل أن تبلغه في الواقع.

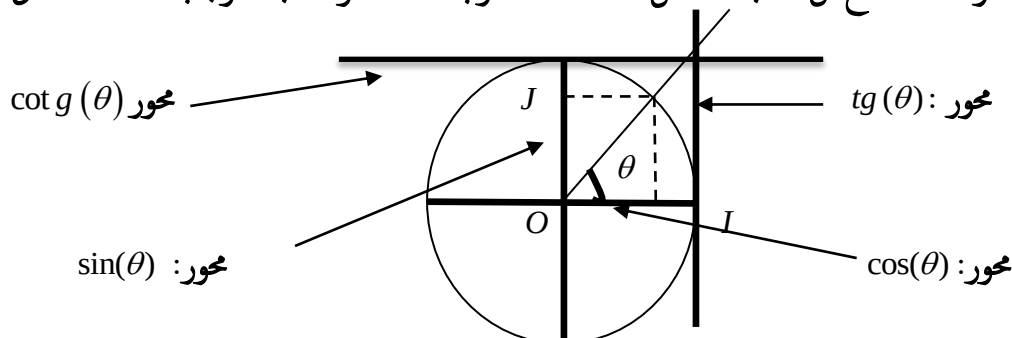


قائلها:

حول العلاقات المثلثية:

الدائرة المثلثية:

نسمي كل دائرة (C) مزودة بمعلم (O; I; J) طول نصف قطرها 1 وحدة ، و موجبة بالدائرة المثلثية، وقد اصطلح أن الاتجاه المعاكس لعقارب الساعة هو الاتجاه الموجب، لاحظ الشكل:



من الدائرة المثلثية: $\cos(\theta)$ نسبة المجاور إلى الوتر،

$\sin(\theta)$ نسبة المقابل إلى الوتر،

$tg(\theta)$ نسبة المقابل إلى المجاور (أو نسبة $\sin(\theta)$ إلى $\cos(\theta)$)،

$\cot g(\theta)$ نسبة المجاور إلى المقابل (أو نسبة $\cos(\theta)$ إلى $\sin(\theta)$)،

كذلك أمكن كتابة: $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ ، $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ من أجل عدد حقيقي θ .

جيب و جيب تمام أهم الزوايا الشهيرة:

$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	θ
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\cos(\theta)$
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\sin(\theta)$

بعض التحولات من $\cos$ إلى $\sin$ والعكس:

عند ملاحظة المثلث القائم في الشكل المقابل يمكن أن نبين ببساطة:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta)$$

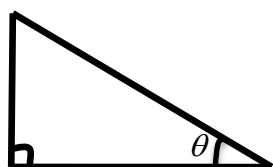
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right) = \sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta)$$

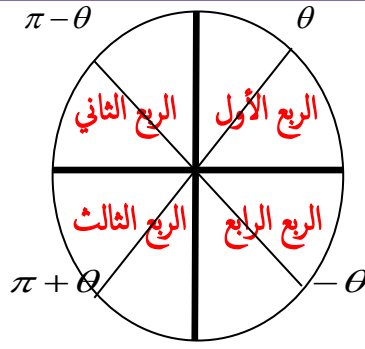
ومنه

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right) = \cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

وكذلك:



أرباع الدائرة المثلثية:



و من هاته الدائرة أمكن كتابة:

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$$

$$\begin{cases} \theta = \theta' + 2k\pi \\ \theta = -\theta' + 2k\pi \end{cases} \text{ يعني } \cos(\theta) = \cos(\theta') ,$$

$$\begin{cases} \theta = \theta' + 2k\pi \\ \theta = \pi - \theta' + 2k\pi \end{cases} \text{ يعني } \sin(\theta) = \sin(\theta')$$

$$\theta = \theta' + k\pi \text{ يعني } \operatorname{tg}(\theta) = \operatorname{tg}(\theta')$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ حيث: } \theta = \theta' + k\pi \text{ يعني } \operatorname{cotg}(\theta) = \operatorname{cotg}(\theta')$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$$

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) \end{aligned} \quad \text{... (*)} \quad \sin \text{ و } \cos \text{ مجموع زاويتين :}$$

في حالة: $\alpha = \beta$ تكون العلاقات المهمة:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

وكون: $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ ، وبكتابة $\cos^2(\alpha)$ بدلالة $\sin^2(\alpha)$ في هذه العلاقة السابقة ثم كتابة $\sin^2(\alpha)$ بدلالة $\cos^2(\alpha)$

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= 2\cos^2(\alpha) - 1 \\ \cos(2\alpha) &= 1 - 2\sin^2(\alpha) \end{aligned} \quad \text{نجد العلاقتين:}$$

تحويل الجداء إلى مجموع:

$$\text{من (*) و بوضع } \alpha + \beta = a \text{ و } \alpha - \beta = b \text{ (لاحظ أن } \alpha = \frac{a+b}{2}, \beta = \frac{a-b}{2} \text{)}$$

$$\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cos(a) + \cos(b)), \quad \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \times \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cos(b) - \cos(a))$$

$$\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \times \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{1}{2}(\sin(a) + \sin(b)), \quad \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \times \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{1}{2}(\sin(a) - \sin(b))$$

حل التمرين السادس:

تبسيط العبارات باستعمال العلاقات المذكورة في التذكير النظري: $x \in \mathbb{R}$

- $A = 2\cos^2(x) + 3\sin^2(x) = 2 + \sin^2(x)$
- $B = (\cos(x) + \sin(x))^2 + (\cos(x) - \sin(x))^2 = 1 + 2\cos(x) \times \sin(x) + 1 - 2\cos(x) \times \sin(x) = 2$
- $C = \cos^4(x) - \sin^4(x) = (\cos^2(x))^2 - (\sin^2(x))^2 = (\cos^2(x) + \sin^2(x))(\cos^2(x) - \sin^2(x)) = \cos(2x)$
- $D = \cos(x + 5\pi) + \sin(7\pi - x) + \cos(x + 19\pi) =$
 $\cos(x + \pi) + \sin(\pi - x) + \cos(x + \pi) =$
 $-\cos(x) + \sin(x) - \cos(x) = \sin(x) - 2\cos(x)$
- $E = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos(7\pi - x) + \sin^2(9\pi + x) + \sin^2\left(x - \frac{5\pi}{2}\right) =$
 $\cos(x) - \cos(x) + \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

حل التمرين السابع:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات: لاحظ التذكير النظري،

$$\text{أي: } \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{3} = 2x + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ 3x - \frac{\pi}{3} = \pi - 2x - \frac{\pi}{4} + 2k'\pi \end{cases} \quad \text{معناه: } \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \quad /1$$

$$\text{إذن: } x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \quad \text{أو} \quad x = \frac{13\pi}{60} + \frac{2k\pi}{5} \quad \text{حيث: } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{و بالتالي: } \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{معناه: } \cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad /2$$

$$\text{أي: } \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 4x = \frac{-\pi}{2} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{6} = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 3x + \frac{\pi}{6} = -x - \frac{\pi}{3} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{إذن: } x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{أو} \quad x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{حيث: } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(3x) = \frac{3}{2} \quad \text{معناه: } 2\sin(3x) = 3 \quad (3) \quad \text{هذه المعادلة لا تقبل حلولاً في } \mathbb{R} \text{ لأننا نعلم أن } \sin(\theta) \in [-1; 1] \text{ من أجل كل } \theta \text{ من } \mathbb{R} \text{ (لاحظ التذكير)،}$$

$$2\cos(x) - 1 = 0 \quad \text{أي: } \cos(x) = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{معناه: } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{أو} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{حيث: } k \in \mathbb{Z}, \quad (4)$$

$$\begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{أي: } \sin(2x) = \frac{-\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{معناه: } 2\sin(2x) + \sqrt{3} = 0 \quad (5)$$

$$\text{إذن: } x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{أو} \quad x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \quad \text{حيث: } k \text{ من } \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{أي: } \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{معناه: } 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0 \quad (6)$$

$$\text{إذن: } x = \frac{5\pi}{24} + k\pi \quad \text{أو} \quad x = \frac{13\pi}{24} + k\pi \quad \text{حيث: } k \text{ من } \mathbb{Z}$$

$$\sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{معناه: } \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \quad (\text{لاحظ التذكير}), \quad (7)$$

$$\begin{cases} -4x + \frac{\pi}{4} = 2x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ -4x + \frac{\pi}{4} = -2x - \frac{\pi}{3} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{أي: } \cos\left(-4x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{إذن: } x = -\frac{\pi}{72} - k\frac{\pi}{3} \quad \text{أو} \quad x = \frac{7\pi}{24} - k\pi \quad \text{حيث: } k \text{ من } \mathbb{Z}$$

$$\sin^2\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin^2(2x + \pi) \quad \text{معناه: } \cos^2(4x) = \sin^2(2x) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \quad (\text{لاحظ التذكير}), \quad \text{معناه:} \quad (8)$$

$$|\cos(4x)| = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right| \quad \text{أي: } \cos(4x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \quad (*) \quad \text{أو: } \cos(4x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \quad (**)$$

$$\text{حل } (*): x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \quad \text{أو} \quad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{حيث: } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{حل } (**): \text{بعد هذا التحويل، } \cos(4x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x + \pi\right) \quad \text{أي} \quad \cos(4x) = \cos\left(-2x + \frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{وبالتالي:}$$

$$x = -\frac{3\pi}{4} + k\pi \quad \text{أو} \quad x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3} \quad \text{أي الحلول المطلوبة هي اتحاد حلول المعادلة } (*) \text{ و } (**).$$

حول المتتاليات العددية:

الصلة u بين $\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}$ التي ترفق n بالعدد الحقيقي أو المركب (سوف نتعرف إلى مجموعة جديدة تسمى المركبة) $u(n)$ تسمى **متتالية عددية** ونرمز للعدد $u(n)$ بـ u_n ونسميه الحد العام للمتتالية و يقرأ u دليل n و مجموعة حدودها مجمعة نرمز لها بـ $(u_n)_n$

و نقول أن: • المتتالية $(u_n)_n$ **متزايدة** إذا: من أجل كل $n: u_{n+1} - u_n \geq 0$ (و هذا يكافئ $u_{n+1}/u_n \geq 1$ إذا كانت الحدود موجبة تماما)
• المتتالية $(u_n)_n$ **متناقصة** إذا: من أجل كل $n: u_{n+1} - u_n \leq 0$ (و هذا يكافئ $u_{n+1}/u_n \leq 1$ إذا كانت الحدود موجبة تماما)
و نقول أن المتتالية **رتيبة**،
• المتتالية $(u_n)_n$ **ثابتة** إذا: من أجل كل $n: u_{n+1} - u_n = 0$ ،

المتتالية المتقاربة: $(u_n)_n$ متقاربة نحو l ، أي نستطيع جعل u_n قريبا بالقدر الذي نريد من العدد الحقيقي l شرط أن يكون n كبيرا بالقدر الكافي، و نكتب $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ ، وإذا كان خلاف ذلك نقول أن $(u_n)_n$ متتالية متباعدة،
لدينا هذه الحالات الخاصة:

$\lim_{n \rightarrow \infty} (q)^n = 0$ و $-1 < q < 1$ منه:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (q)^n = +\infty$ و $q > 1$ منه:
 $q \leq -1$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} (q)^n$ غير موجودة - أي متذبذبة - و بالتالي المتتالية متباعدة،
لاحظ الحالة التافهة $q = 1$ ،

و سنعالج ثلاثة أنواع من المتتاليات:

• $(u_n)_n$ متتالية ليست هندسية ولا حسابية، تنشأ في أغلب التمارين متتاليات مستنبطة من المتتالية $(u_n)_n$ هندسية أو حسابية و بذلك يمكن تعيين u_n بدلالة n ، و نستطيع حساب أي حد، و كذلك نهاية هذه المتتالية.

• $(u_n)_n$ متتالية هندسية إذا كان:
من أجل كل $n: \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ ،
و نسمي q أساس المتتالية الهندسية،
نسمي q و الحد الأول بعناصر المتتالية الهندسية،
• عبارة الحد العام: $u_n = u_0 (q)^n$ ،
أو $u_n = u_p (q)^{n-p}$ من أجل كل عدد طبيعي n حيث: u_p حد معطى،
• مجموع حدود متعاقبة لمتتالية هندسية:
$$\frac{1 - \text{عدد الحدود الأساس}}{1 - \text{الحد الأول}}$$

لدينا الخاصية: a, b, c ثلاثة حدود متعاقبة لمتتالية هندسية، عندئذ:
 $b^2 = ac$ (الوسط الهندسي)،

• $(u_n)_n$ متتالية حسابية إذا كان:
من أجل كل $n: u_{n+1} - u_n = r$ ،
و نسمي r أساس المتتالية الحسابية،
نسمي r و الحد الأول بعناصر المتتالية الحسابية،
• عبارة الحد العام: $u_n = nr + u_0$ ،
أو $u_n = (n-p)r + u_p$ من أجل كل عدد طبيعي n حيث: u_p حد معطى،
• مجموع حدود متعاقبة لمتتالية حسابية:
$$\frac{(\text{عدد الحدود}) (\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})}{2}$$

لدينا الخاصية: a, b, c ثلاثة حدود متعاقبة لمتتالية حسابية، عندئذ:
 $2b = a + c$ (الوسط الحسابي).

تعريف:

نقول أن المتتالية $(u_n)_n$:

- محدودة من الأعلى إذا وجد عدد k من $\mathbb{R}$ حيث: $u_n \leq k$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ،
- أو محدودة من الأسفل إذا وجد عدد k' من $\mathbb{R}$ حيث: $k' \leq u_n$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ،
- أو محدودة إذا وجد k من $\mathbb{R}_+^*$ حيث: $|u_n| \leq k$ من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}$.

مبرهنة مهمة:

لتكن $(u_n)_n$ متتالية عددية إذا تحققت إحدى الدعاوي:

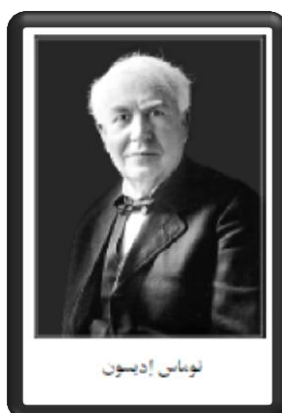
- $(u_n)_n$ متزايدة تماما و محدودة من الأعلى،
 - $(u_n)_n$ متناقصة تماما و محدودة من الأسفل،
- فإن $(u_n)_n$ متقاربة.

ملاحظة:

هاته المبرهنة تثبت أن متتالية ما متقاربة دون إعطاء قيمة لنهايتها.

من مقولات إديسون توماس:

كثير من إخفاقات الحياة هي لأناس لم يدركوا كم كانوا من قرييين من بلوغ النجاح.



توماس إديسون

توماس إديسون

حل التمرين الثامن:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (u_n)_n \text{ متتالية عددية، معرفة بالعلاقة التراجعية:}$$

(1) حساب الحدين u_1, u_2 : عند التعويض نجد الحدود المطلوبة،

$$\text{من أجل: } n=0 \text{ يكون } u_1 = \frac{5 \times 3 - 4}{3 + 1} = \frac{11}{4} \text{ ، ومن أجل: } n=1 \text{ يكون } u_2 = \frac{5 \times \frac{11}{4} - 4}{\frac{11}{4} + 1} = \frac{55 - 16}{11 + 4} = \frac{39}{15}$$

(2) من أجل كل طبيعي n عرفت المتتالية: $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$

$$(أ) \text{ ليكن } n \text{ من } \mathbb{N} : \text{ لدينا } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1} - 2} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{u_n + 1}{3(u_n - 2)} - \frac{1}{u_n - 2} = \frac{u_n + 1 - 3}{3(u_n - 2)} = \frac{1}{3}$$

لاحظ أنه لا يوجد أي عدد طبيعي n_0 حيث: $u_{n_0} = 2$ وإلا فإن المتتالية ثابتة عند القيمة 2 وهذا غير ممكن،

إذن المتتالية $(v_n)_n$ حسابية، أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول $v_0 = 1$

(ب) من التذكير يكون: من أجل كل عدد طبيعي n يكون: $v_n = 1 + \frac{n}{3}$

$$\text{و من جهة أخرى: } v_n \times u_n = 1 + 2v_n \text{ أي: } u_n = \frac{1 + 2v_n}{v_n} = \frac{1 + 2(1 + (n/3))}{1 + (n/3)} = \frac{1 + 2 + (2n/3)}{1 + (n/3)} = \frac{9 + 2n}{3 + n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

حل التمرين التاسع:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + 2u_n} \end{cases} \quad (u_n)_n \text{ متتالية معرفة بالعلاقة التراجعية:}$$

(1) $(v_n)_n$ متتالية عددية حيث: $v_n = \frac{1}{u_n}, \quad n \in \mathbb{N}$

$$(أ) \text{ لنبين أن المتتالية حسابية: ليكن } n \text{ عدد طبيعي: } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1 + 2u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{2u_n}{u_n} = 2$$

لاحظ أنه لا يوجد أي عدد طبيعي n_0 حيث: $u_{n_0} = 0$ وإلا فإن المتتالية ثابتة عند القيمة 0 وهذا غير ممكن لأن $u_0 = 1$

حقا المتتالية $(v_n)_n$ حسابية، أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = 1$

(ب) نستنتج أن $v_n = 1 + 2n$ من أجل كل عدد طبيعي n ، ثم إن $u_n = \frac{1}{v_n}, \quad n \in \mathbb{N}$ أي: $u_n = \frac{1}{1 + 2n}, \quad n \in \mathbb{N}$

(2) $(w_n)_n$ متتالية عرفت كما يلي: $w_n = 2^{v_n}, \quad n \in \mathbb{N}$

(أ) ليكن n عدد طبيعي: $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{2^{v_{n+1}}}{2^{v_n}} = \frac{2^{v_n+2}}{2^{v_n}} = 4$ ، إذن المتتالية $(w_n)_n$ هندسية أساسها 4 وحدها الأول: $w_0 = 2$

(ب) حساب المجموع: (لاحظ التذكير)

$$S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n = w_0 \times \left(\frac{4^{n+1} - 1}{4 - 1} \right) = \frac{2}{3} (4^{n+1} - 1)$$

حل التمرين العاشر:

$(u_n)_n$ متتالية حسابية تحقق: $\begin{cases} u_6 + u_8 = 40 \\ u_{10} = 29 \end{cases}$ ، من الوسط الحسابي يمكن كتابة: $u_7 = \frac{u_6 + u_8}{2} = 20$ ولدينا: $u_{10} = u_7 + (10-7)r$ ، حيث: r هو أساس هاته المتتالية، عند التعويض العددي نجد: $29 = 20 + 3r$ أي: $r = 3$ هذا من جهة و من جهة أخرى: $20 = u_7 = u_0 + 7 \times 3$ أي: $u_0 = -1$ ، فنحصل على المطلوب في (1)،

(2) كتابة u_n بدلالة n :كون المتتالية $(u_n)_n$ متتالية حسابية يكون: $u_n = -1 + 3n$ من أجل كل عدد طبيعي n ،(3) تعيين n حتى يكون: $u_n = 44$ ، نقوم بحل المعادلة البسيطة ذات المجهول n : $-1 + 3n = 44$ أي: $n = 15$ ،(4) حساب المجموع S :

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_{15} = \frac{15}{2}(u_1 + u_{15}) = 345$$

حل التمرين الحادي عشر:

 $(u_n)_n$ متتالية هندسية ذات حدود موجبة، و متزايدة:(1) لدينا: $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 42 \\ u_0 \times u_4 = 144 \end{cases}$ ، من المعطيات يمكن كتابة $u_1 = u_0(q)^1, u_2 = u_0(q)^2, u_3 = u_0(q)^3, u_4 = u_0(q)^4$ منالمعادلة الثانية لدينا: $u_0 \times u_4 = u_0 \times u_0 \times q^4 = u_0^2 \times q^4 = (u_0 \times q^2)^2 = u_2^2 = 144$ ، وكون الحدود موجبة أمكن كتابة $u_2 = 12$ ،و عند التعويض في المعادلة الأولى نجد: $u_1 + u_3 = 30$ (*) و من الوسط الهندسي أمكن كتابة: $u_1 \times u_3 = u_2^2 = 144$ (**)يمكن تشكيل معادلة من الدرجة الثانية أو من (*), (**) يمكن القول أن u_1, u_3 حلان للمعادلة من الدرجة الثانية:

$$x^2 - 30x + 144 = 0 \quad (\text{لاحظ التذكير في الصفحة الموالية}) \quad \text{عند حساب المميز: } \Delta = 30^2 - 4 \times 144 = (18)^2 \quad \text{أي الحلين:}$$

$$x_1 = \frac{30+18}{2} = 24, \quad x_2 = \frac{30-18}{2} = 6 \quad \text{، لكن أيها } u_1 \text{ و } u_3 \text{ ، شروط التمرين تزيل هذا اللبس كون المتتالية متزايدة، أي:}$$

$$u_1 = 6, \quad u_3 = 24 \quad \text{، ولدينا: } u_4 \times u_2 = u_3^2 \quad \text{أي: } u_4 = \frac{576}{12} = 48 \quad \text{أمكن استنتاج: } q = 2 \quad \text{حيث: } q \text{ هو أساس هذه}$$

المتتالية، أي: $u_0 = 3$ ،(2) تعيين بدلالة n عبارة الحد العام: $u_n = u_0 \times (q)^n = 3 \times 2^n, n \in \mathbb{N}$ ،(3) حساب المجموع: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{99} = u_0 \times \frac{2^{100} - 1}{2 - 1} = 3(2^{100} - 1)$

حساب الجداء:

$$P = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{99} = u_0 \times u_0 \times q^1 \times u_0 \times q^2 \times \dots \times u_0 \times q^{99} = u_0^{100} \times q^{1+2+\dots+99} = 3^{100} \times 2^{\frac{99(1+99)}{2}} = 3^{100} \times 2^{4950}$$

حول معادلات من الدرجة الثانية :

نسعى معادلة من الدرجة الثانية كل معادلة تكتب من الشكل:

$$(1) \dots ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$$

سؤال: هل يمكن إيجاد حلول هذه المعادلة في $\mathbb{R}$ ؟

جواب:

نحسب الكمية: $\Delta = b^2 - 4ac$ والتي تسمى مميز المعادلة (1) ونميز:

$$\Delta < 0$$

المعادلة لا تقبل حلولاً في $\mathbb{R}$ ،

$$\Delta = 0 \text{ المعادلة (1) تقبل حلاً مضاعفاً } x_0$$

$$\text{حيث: } x_0 = \frac{-b}{2a}$$

$$\Delta > 0 \text{ المعادلة (1) تقبل حلين } x_1, x_2 \text{ مختلفين}$$

$$\text{حيث: } x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

هل يمكن التفكير في حل هذه المعادلة وهذا بإيجاد مجموعة أوسع من $\mathbb{R}$ في حالة $\Delta < 0$ ؟

خواص:

لتكن المعادلة $(1) \dots ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$

(1) نرض أن: $\Delta \geq 0$ وبالتالي المعادلة تقبل حلين x_1, x_2 عندئذ: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ، $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ أي:

$$(1) \text{ تكافئ: } x^2 - \left(\frac{-b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \text{ معناها: } x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \times x_2 = 0 \text{ (2)}$$

من هذه التكافؤات يمكن أن نستنتج:

- يكون x_1, x_2 حلين للمعادلة (1) إذا وفقط كانا حلين للمعادلة (2)،
- إذا علم مجموع عددين حقيقيين وجداؤهما فهما حلان للمعادلة: $x^2 - \text{مجموع}x + \text{جداؤهم} = 0$ ، حيث قصد بـ م بالمجموع وج بالجدا،
- **(2) إذا كان $\Delta > 0$ و x_1, x_2 حلي المعادلة (1) (مثلاً: $x_1 < x_2$)، فيمكن كتابة:** $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ ، وإشارة كثير الحدود $ax^2 + bx + c$ تعطى على النحو:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$: إشارة الحدود:	موافق لإشارة a	مخالف لإشارة a	موافق لإشارة a	مخالف لإشارة a

• وإذا كان $\Delta = 0$ و x_0 الحل المضاعف للمعادلة (1)، فيمكن كتابة: $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$

وإشارة كثير الحدود $ax^2 + bx + c$ تعطى على النحو:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$: إشارة الحدود:	موافق لإشارة a	موافق لإشارة a	موافق لإشارة a

• وإذا كان: $\Delta < 0$ فإن المعادلة (1) لا تقبل حلولاً في $\mathbb{R}$ وكثير الحدود $ax^2 + bx + c$ لا يقبل تحليلًا في $\mathbb{R}$ ،

وإشارة كثير الحدود $ax^2 + bx + c$ تعطى على النحو:

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$: إشارة الحدود:	موافق لإشارة a	موافق لإشارة a

حالات خاصة (لتسهيل الحساب):

- (1) إذا كان أحد الحلول في معادلة من الدرجة الثانية هو 1 فإن الحل الآخر هو $\frac{c}{a}$ ،
- (2) إذا كان أحد الحلول في معادلة من الدرجة الثانية هو -1 فإن الحل الآخر هو $-\frac{c}{a}$ ،
- (3) إذا كان مجموع المعاملات مساويا لـ 0 فإن 1 حل لهذه المعادلة.

ملاحظة:

نقول α حل للمعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ ، و جذر لكثير الحدود $P(x)$ مع: $P(x) = ax^2 + bx + c$.

حل التمرين الثاني عشر:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$\bullet x^2 + 2x = 0 \text{ معناه: } x(x+2) = 0 \text{ أي: } x = 0 \text{ أو } x = -2 \text{ ومنه: } S = \{0; -2\}$$

$$\bullet 2x^2 - 4 = 0 \text{ معناه: } x^2 - 2 = 0 \text{ أي: } S = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$$

$$\bullet x^2 - 3x + 2 = 0 \text{، نلاحظ أن مجموع المعاملات مساوية للصفر أي 1 حل للمعادلة و بالتالي: } \frac{2}{1} = 2 \text{ الحل الآخر،}$$

$$\text{أي: } S = \{1; 2\}$$

$$\bullet -x^2 + 2x + 3 = 0 \text{، يمكن ملاحظة أن -1 حل للمعادلة و بالتالي } -\frac{3}{-1} = 3 \text{ الحل الآخر، أي: } S = \{-1; 3\}$$

$$\bullet x^2 + x - 6 = 0 \text{، عند حساب المميز: } \Delta = 1^2 - 4 \times (1) \times (-6) = 25 = 5^2 \text{ أي الحلول هي: } S = \{-3; 2\} \text{، لأن:}$$

$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2, x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$$

$$\bullet x^2 + x + 1 = 0 \text{، عند حساب المميز } \Delta = 1^2 - 4 \times (1) \times (1) = -3 \text{ أي المعادلة لا تقبل حولا في } \mathbb{R}.$$

حل التمرين الثالث عشر:

$$(1) P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 \text{ و } \alpha = 1$$

من الملاحظ أن مجموع المعاملات مساويا لـ 0، وهذا كاف للقول أن 1 جذر لكثير الحدود،
ومنه $P(x)$ يقبل القسمة على $x - 1$ أي:

$$\begin{array}{r|l} P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 & x - 1 \\ \underline{-(x^3 - x^2)} & x^2 - 4 \\ -4(x - 1) & \\ \underline{-4(x - 1)} & 00 \end{array}$$

$$\text{ومنه } a=1, b=0, c=-4 \text{ أي: } P(x) = (x-1) \times (x^2 - 4)$$

أو يمكن استعمال النشر و المطابقة (ترك للقارئ)، و عليه حلول المعادلة: $P(x) = 0$ هي: $S = \{-2; 1; 2\}$.

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
إشارة: $x^2 - 4$	+	○	-	-	+
إشارة: $x - 1$	-	-	○	+	+
إشارة: $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$	-	○	○	○	+

(2) $P(x) = 4x^3 - 4x^2 - 15x + 18$ و $\alpha = -2$ ،

من أجل $x = -2$ نجد $4 \times (-2)^3 - 4 \times (-2)^2 - 15 \times (-2) + 18 = 0$ أي -2 جذر لكثير الحدود،
و عليه $P(x)$ يقبل القسمة على $x + 2$ أي:

$$\begin{array}{r|l}
 P(x) = 4x^3 - 4x^2 - 15x + 18 & x + 2 \\
 \underline{-(4x^3 + 8x^2)} & 4x^2 - 12x + 9 \\
 -12x^2 - 15x + 18 & \\
 \underline{-(-12x^2 - 24x)} & 9x + 18 \\
 9x + 18 & \\
 \underline{-(9x + 18)} & 00
 \end{array}$$

و بالتالي: $P(x) = 0$ معناه: $(x + 2) \times (4x^2 - 12x + 9) = 0$ أي: $\begin{cases} x = -2 \\ 4x^2 - 12x + 9 = 0 \end{cases}$ نحسب المميز لتعيين حلول المعادلة

الثانية: $\Delta = 144 - 144 = 0$ و عليه المعادلة تقبل حلا مضاعفا $x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ أي: $S = \left\{-2, \frac{3}{2}\right\}$ ،

x	$-\infty$	-2	$3/2$	$+\infty$
إشارة: $x + 2$	-	○	+	+
إشارة: $4x^2 - 12x + 9$	+	+	○	+
إشارة: $P(x) = 4x^3 - 4x^2 - 15x + 18$	-	○	○	+

(3) $P(x) = x^3 - x^2 + x + 3$ و $\alpha = -1$ ،

عند تعويض قيمة α في المعادلة نجد $P(-1) = 0$ أي: -1 جذر لكثير الحدود،
و عليه $P(x)$ يقبل القسمة على $x + 1$ أي:

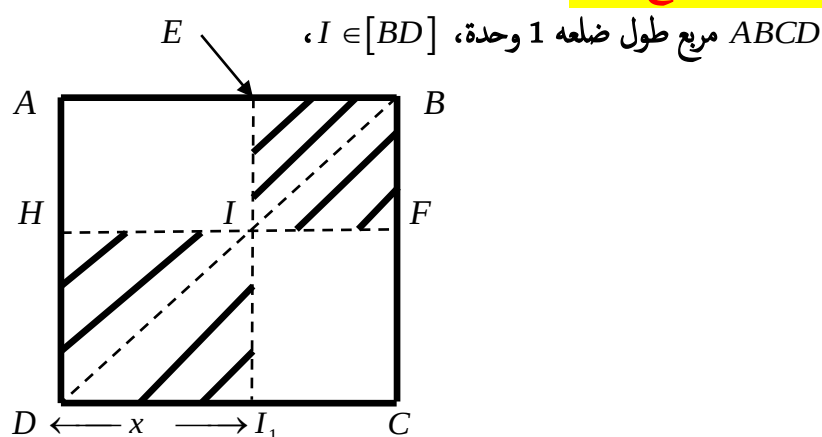
$$\begin{array}{r|l}
 P(x) = x^3 - x^2 + x + 3 & x + 1 \\
 \underline{-(x^3 + x^2)} & x^2 - 2x + 3 \\
 -2x^2 + x + 3 & \\
 \underline{-(-2x^2 - 2x)} & 3x + 3 \\
 3x + 3 & \\
 \underline{-(3x + 3)} & 00
 \end{array}$$

و منه $P(x) = 0$ معناه $(x+1) \times (x^2 - 2x + 3) = 0$ أي: $\begin{cases} x = -1 \\ x^2 - 2x + 3 = 0 \end{cases}$ و $\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$ أي المعادلة الثانية لا تقبل حلولاً في $\mathbb{R}$ ،

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x^2 - 2x + 3$: إشارة		+	+
$x + 1$: إشارة	-	○	+
إشارة:	-	○	+

$P(x) = x^3 - x^2 + x + 3$

حل التمرين الرابع عشر:



لتكن I_1 المسقط العمودي للنقطة I على (DC) ، نضع: $DI_1 = x$ لاحظ أن $x \in [0; 1]$ ، مساحة المربعين هي: $S_{HII_1D} = x^2$

و $S_{EBFI} = (1-x)^2 = x^2 - 2x + 1$ المطلوب أن يكون: $S_{HII_1D} + S_{EBFI} = \frac{2}{3}$ أي: $2x^2 - 2x + 1 = \frac{2}{3}$ أي:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{6+2\sqrt{3}}{12} = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \\ x_2 = \frac{6-2\sqrt{3}}{12} = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

وعند حساب المميز: $\Delta = 36 - 24 = 12$ أي المعادلة تقبل حلين هما:

هاتان القيمتان مقبولتان لأنها من المجال $[0; 1]$ ، و منه يوجد موضعان للنقطة I يحققان المطلوب.

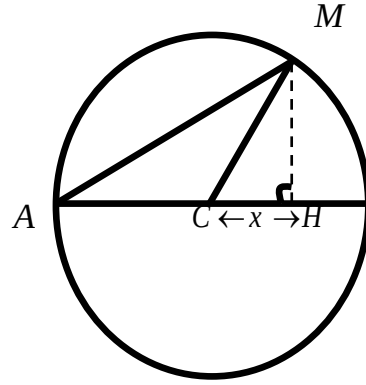
من مقولات تشرشل وينستون:



وينستون تشرشل

المتشائم يرى صعوبة في كل فرصة، والمتفائل يرى فرصة في كل صعوبة.

حل التمرين الخامس عشر:



يمكن ملاحظة أن: $x \in [-4; 4]$ ، حيث x هو القيس الجبري للشعاع $\overrightarrow{CH}$ في المعلم $(C; \vec{i})$ مع $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$

(1) حساب HM^2 بدلالة x :

حسب فيثاغورث لدينا: $CH^2 + HM^2 = CM^2 = 16$ أي: $HM^2 = 16 - x^2$ ،

(2) حساب MA^2 بدلالة x :

كذلك حسب فيثاغورث $MA^2 = MH^2 + HA^2$ أي: $MA^2 = 16 - x^2 + (4+x)^2 = 32 + 8x$ ،

(3) نعين موضع النقطة M حتى يكون: $MA^2 + 3MH^2 = 77$ (لاحظ أن تعيين موضع النقطة M مرتبط بتعيين الكمية x) من (1) و (2) نستنتج $32 + 8x + 48 - 3x^2 = 77$ أي نحصل على المعادلة من الدرجة الثانية: $3x^2 - 8x - 3 = 0$ نحسب المميز $\Delta = 64 + 36 = 10^2$ ومنه: $x_1 = \frac{8+10}{6} = 3$ ، $x_2 = \frac{8-10}{6} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$ ، وبالتالي هناك أربع مواضع لـ M تحقق المطلوب.

حل التمرين السادس عشر:

(1) حل في $[-\pi; \pi]$ المعادلة $\cos(4\theta) = 0$ ، أي: $\cos(4\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ ومنه

$$\begin{cases} 4\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 4\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

أي: $\theta = \frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ وكون $-\pi < \theta \leq \pi$ تكون الحالتان:

$$\theta = -\frac{\pi}{8} + \frac{2k'\pi}{4}, k' \in \mathbb{Z}$$

الأولى: $-\pi < \frac{\pi}{8} + \frac{2k\pi}{4} \leq \pi$ معناه: $-8 < 1 + 4k \leq 8$ معناه: $-\frac{9}{4} (= -2,25) < k \leq \frac{7}{4} (= 1,75)$ أي $k \in \{-2; -1; 0; 1\}$ ،

و عليه الحلول المقبولة في المساواة الأولى هي: $S_1 = \left\{ \frac{-7\pi}{8}; \frac{-3\pi}{8}; \frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8} \right\}$ ،

الثانية: $-\pi < -\frac{\pi}{8} + \frac{2k'\pi}{4} \leq \pi$ معناه: $-8 < -1 + 4k' \leq 8$ معناه: $-\frac{7}{4} (= -1,75) < k' \leq \frac{9}{4} (= 2,25)$ أي: $k' \in \{-1; 0; 1; 2\}$ ،

إذن الحلول المقبولة في المساواة الثانية هي: $S_2 = \left\{ \frac{-5\pi}{8}; \frac{-\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8} \right\}$ ، وأخيرا الحلول المطلوبة هي: $S = S_1 \cup S_2$

(2) لتكن θ من $\mathbb{R}$:

$$\cos(4\theta) = \cos(2(2\theta)) = 2\cos^2(2\theta) - 1 = 2(2\cos^2(\theta) - 1)^2 - 1 = 2(4\cos^4(\theta) - 4\cos^2(\theta) + 1) - 1$$

$$\cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1 \text{ أي:}$$

(3) أ) حل المعادلة: $8x^2 - 8x + 1 = 0$

نحسب المميز: $\Delta = 64 - 32 = 32 = (4\sqrt{2})^2$ أي: $x_1 = \frac{8+4\sqrt{2}}{16} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ و $x_2 = \frac{8-4\sqrt{2}}{16} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

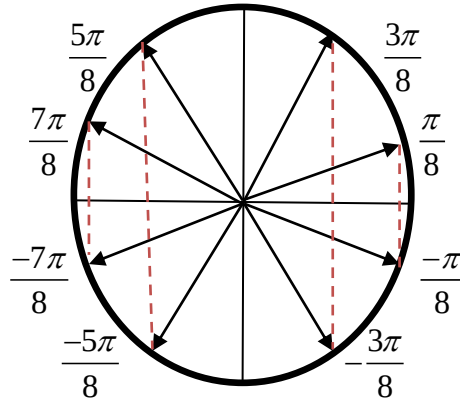
ب) نضع: $x = \cos^2(\theta)$

تصبح المعادلة في أ) على النحو $8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1 = 0$ ، ومن جهة أخرى $\cos(4\theta) = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1$ من (1) وجدنا حلول المعادلة $\cos(4\theta) = 0$ ذات المجهول θ ، أي: $\theta \in S_1 \cup S_2$

واعتادا على (3) أ) نكتب: $\cos^2(\theta) = x_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ أو $\cos^2(\theta) = x_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

أي: $\cos(\theta) = \pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ أو $\cos(\theta) = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$ دوماً: $\theta \in S$

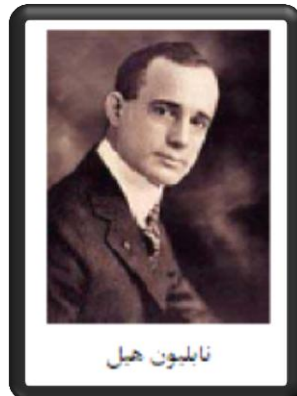
من تموضع الزوايا في المجموعة $S = S_1 \cup S_2 = S$ $\left\{ \frac{-5\pi}{8}; \frac{-\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}; \frac{-7\pi}{8}; \frac{-3\pi}{8}; \frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8} \right\}$



نستنتج: $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ و $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ و $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ و $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

من مقولات نابليون هيل:

إذا لم تستطع أن تفعل أشياء عظيمة، افعل أشياء صغيرة بطرق عظيمة.



نابليون هيل

حول الدوال العددية:

(أ) تعريف دالة: كل صلة f تربط عنصرا x من $\mathbb{R}$ بعنصر على الأكثر y من $\mathbb{R}$ تسمى دالة، ندعو: x سابقة أو لاحقة و y صورة السابقة x ،

(ب) مجموعة تعريف الدالة: السوابق x التي لها صور تسمى مجموعة تعريف الدالة f ونرمز لها بـ: D_f ،

(ج) التمثيل البياني للدالة f هو المنحنى المشكل من النقط $M(x; y)$ حيث: $f(x) = y$ ونرمز له عادة بـ: (C_f) ،

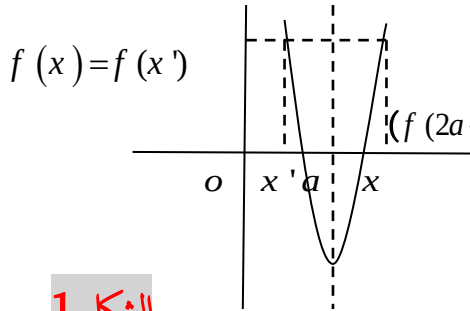
(د) إليك ميزات يمكن أن تتصف بها بعض الدوال:

f دالة معرفة على D_f ، وتمثيلها البياني (C_f) في معلم متعامد ومتجانس:

□ **محور التناظر:** (لاحظ الشكل 1)

نقول أن $x = a$ محور تناظر f **معناه** (1) $(x + x' = 2a) x, x' \in D_f$ ،

$$(2) f(x) = f(x') \quad (f(2a - x) = f(x))$$



الشكل 1

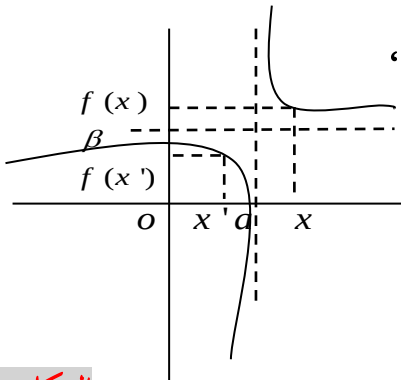
التفسير الهندسي:

نقول أن المنحنى (C_f) متناظر بالنسبة للمستقيم $x = a$

□ **مركز التناظر:** (لاحظ الشكل 2)

نقول أن $\omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر f **معناه** (1) $(x + x' = 2\alpha) x, x' \in D_f$ ،

$$(2) \frac{f(x) + f(x')}{2} = \beta \quad (f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta)$$



الشكل 2

التفسير الهندسي:

نقول أن المنحنى (C_f) متناظر بالنسبة للنقطة $\omega(\alpha; \beta)$

حالتان خاصتان (شفعية دالة):

- **الدالة الزوجية:**

f دالة زوجية **معناه** (1) من أجل كل x من D_f يكون $-x$ من D_f ،

$$(2) f(-x) = f(x)$$

التفسير الهندسي: - يكون بيان الدالة الزوجية متناظرا بالنسبة لمحور الترتيب (هذا إثبات ثان للدالة الزوجية)،

- **الدالة الفردية:** f دالة فردية **معناه** (1) من أجل كل x من D_f يكون $-x$ من D_f ،

$$(2) f(-x) = -f(x)$$

التفسير الهندسي: - يكون بيان الدالة الفردية متناظرا بالنسبة للمبدل (هذا إثبات ثان للدالة الفردية)،

ملاحظة:

لاحظ أنه لإثبات أن دالة ما زوجية أو فردية يجب التأكد من الشرطين معا وليس التأكد من الشرط الثاني فقط، ونقول الدالة **شفعية**.

الدوال الدورية:

لتكن الدالة f المعرفة على المجال I ، و $q \in \mathbb{R}^*$ ،
من أجل كل عدد حقيقي x من I يكون $x + q \in I$ ، و تحقق:
 $f(x + q) = f(x)$ ، نقول أن الدالة f دورية و نسمي q دورة للدالة f ،
و عادة يسمى دورها 'إن وجد' أصغر عدد حقيقي موجب تماماً يحقق العلاقة السابقة.

مثال توضيحي لدوال دورية لا تقبل دوراً:

إليك الدالة العددية φ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Q} \\ 1 & ; x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

ليكن $x \in \mathbb{R}$: من أجل $q = \frac{1}{n}$ ، $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا الحالتان:

$x \in \mathbb{Q}^*$ من الواضح أن $x + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ أي: $\varphi\left(x + \frac{1}{n}\right) = 0 = \varphi(x)$ ،

$x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}^*$ من الواضح أن $x + \frac{1}{n} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ أي: $\varphi\left(x + \frac{1}{n}\right) = 1 = \varphi(x)$ ،

وبالتالي الخلاصة $\varphi\left(x + \frac{1}{n}\right) = \varphi(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x ،

وبالتالي $\frac{1}{n}$ دورة للدالة φ ، و نلاحظ أنه لا يوجد عدد من الشكل السابق يكون هو الأصغر، و بالتالي لا وجود للدور.

بعض الدوال التي كثر استعمالها:

- دالة كثير الحدود: هي تلك الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ مع $a_n \neq 0$ ،

و $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ من $\mathbb{R}$ ،

و نسمي n درجة كثير الحدود، و منحني كل منها يدعى: "قطعاً مكافئاً"

- الدالة الناطقة: هي كل دالة تكتب على الشكل: $\frac{f}{g}$ حيث: f, g دالتا كثير حدود،

و هي معرفة على $\mathbb{R}$ ما عدا القيم التي تجعل الدالة g معدومة،

- الدالة الصماء: هي تلك الدالة التي تكتب على الشكل: $\sqrt{f(x)}$ حيث: f دالة ليست مربعاً تاماً،

و هي معرفة على $\mathbb{R}$ ما عدا القيم التي تجعل الدالة f ذات إشارة سالبة تماماً،

- الدالة $\cos$: هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ نحو المجال $[-1; 1]$ ، بـ $x \mapsto \cos x$ و هي دورية ودورها 2π ،

- الدالة $\sin$: هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ نحو المجال $[-1; 1]$ ، بـ $x \mapsto \sin x$ و هي دورية ودورها 2π .

ملاحظة:

يمكن أن نصادف بعض الدوال التي تتشكل من مزج للدوال السابقة (تركيب دوال؟) أو دوال أخرى سنتعرض لها هذه السنة.

الدوال الرتيبة:

لتكن f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ ،

- دالة متزايدة تماماً على جزء I_1 من I معناه من أجل كل x_1, x_2 من I_1 مثلاً: $x_1 < x_2$ يكون $f(x_1) < f(x_2)$ ،

أو * $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ من أجل كل x_1, x_2 من I_1 مختلفين،

- دالة متناقصة تماماً على جزء I_2 من I معناه من أجل كل x_1, x_2 من I_2 مثلاً: $x_1 < x_2$ يكون $f(x_1) > f(x_2)$ ،

أو * $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ من أجل كل x_1, x_2 من I_2 مختلفين،

و نقول: "الدالة رتيبة تماماً" إذا كانت "متزايدة تماماً" أو "متناقصة تماماً"،

- دالة ثابتة على جزء I_3 من I معناه من أجل كل $x_1, x_2 \in I_3$ مثلاً: $x_1 < x_2$ يكون $f(x_1) = f(x_2)$ ،

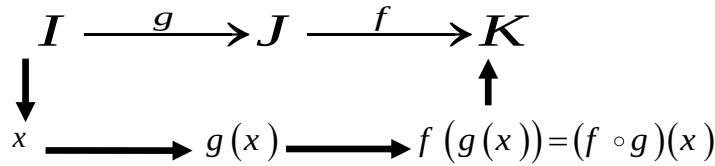
(إذا كانت المتباينات السابقة ليست تامة نقول أن الدالة f رتيبة).

تركيب الدالتين:

g دالة معرفة من I نحو J ، و f معرفة من J من D_f في K ، f تركيب g والتي سنرمز لها بـ $f \circ g$ و نقرأ: f دائرة g ،

هي تلك الدالة المعرفة من I في K بـ $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ،

لاحظ هذا المخطط:



عندما يهديك القدر ليمونة، اصنع عصير ليمون.



دليل كارنجي

قائلها:

التمثيل البياني لبعض الدوال و التحويلات النقطية:

f دالة عددية معرفة على I ، (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ،
و a, b من $\mathbb{R}$ ، نعرف انطلاقاً من هذه الدالة الدوال:

$f_1(x) = f(x) + b$ مع $x \in I$ و $f_2(x) = f(x + a)$ حيث: $x + a \in I$ مع $f_3(x) = f(x + a) + b$ ، $x + a \in I$ مع $f_4(x) = -f(x)$ و $f_5(x) = f(-x)$ و $f_6(x) = -f(-x)$ و $f_7(x) = f(|x|)$ و $f_8(x) = f(-|x|)$ ،
سؤال: هل يمكن تمثيل المنحنى الممثل لكل من $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8$ انطلاقاً من (C_f) ؟

جواب: نعم،

- (C_{f_1}) انسحاب للمنحنى (C_f) بشعاع $b\vec{j}$ ،
- (C_{f_2}) انسحاب للمنحنى (C_f) بشعاع $-a\vec{i}$ ،
- (C_{f_3}) انسحاب للمنحنى (C_f) بشعاع $-a\vec{i} + b\vec{j}$ ،
- (C_{f_4}) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل،
- (C_{f_5}) نظير (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب،
- (C_{f_6}) تركيب تناظرين الأول بالنسبة لمحور الفواصل و آخر محور التراتيب أو العكس،
- يمكن ملاحظة أن الدالة f_7 دالة زوجية و بالتالي تقتصر في الدراسة على المجال $[0; +\infty[$:
فمن أجل $x \in [0; +\infty[$ يكون $f_7(x) = f(x)$ أي (C_{f_7}) ينطبق على (C_f) في المجال $[0; +\infty[$ و تكمل البقية أي على المجال $] -\infty; 0]$ بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب لأن الدالة زوجية كما أسلفنا الذكر،
- يمكن ملاحظة أن الدالة f_8 دالة زوجية و بالتالي تقتصر في الدراسة على المجال $] -\infty; 0]$:
فمن أجل $x \in] -\infty; 0]$ يكون $f_8(x) = f(x)$ أي (C_{f_8}) ينطبق على (C_f) في المجال $] -\infty; 0]$ و تكمل البقية أي على المجال $[0; +\infty[$ بالتناظر بالنسبة لمحور التراتيب لأن الدالة زوجية كما أسلفنا الذكر،

لا بأس بشيء من التوضيح:

المنحنى (C_{f_1}) :

لتكن النقطة $M_1 \in (C_{f_1})$ ، كيف يمكن تعليم هذه النقطة انطلاقاً من نقطة معلمة من المنحنى (C_f) !!!!!

يوجد $x_1 \in I$: $M_1 = (x_1; g(x_1)) = (x_1; f(x_1) + b) = (x_1; f(x_1)) + (0; b)$ نضع: $M_1' = (x_1; f(x_1)) \in (C_f)$

و $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ يمكن ملاحظة أن $\vec{u}$ شعاع ثابت، أي كل نقطة من المنحنى (C_{f_1}) انسحاب لنقطة من (C_f) بشعاع $\vec{u}$ ،

المنحنى (C_{f_2}) :

لتكن النقطة $M_2 \in (C_{f_2})$ ، كيف يمكن تعليم هذه النقطة انطلاقاً من نقطة معلمة من المنحنى (C_f) !!!!!

يوجد $x_2 \in I_h$: $M_2 = (x_2; h(x_2)) = (x_2; f(x_2 + a)) = (x_2 + a; f(x_2 + a)) + (-a; 0)$

أي كل نقطة من المنحنى (C_{f_2}) انسحاب لنقطة من (C_f) بشعاع $(-a; 0)$ ، يمكن للقارئ تبيان ما تبقى ببساطة.

حل التمرين السابع عشر:

تعين مجموعة التعريف للدوال التالية:

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \quad (1)$$

 f_1 لها معنى من أجل $x^2 - 1 \neq 0$ أي: $D_{f_1} = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$$f_2(x) = \frac{1}{3}x^2 + 1 \quad (2)$$

نلاحظ أن أي قيمة لـ x من $\mathbb{R}$ لها صورة وفق الدالة f_2 دون أي مشكل أي: $D_{f_2} = \mathbb{R}$

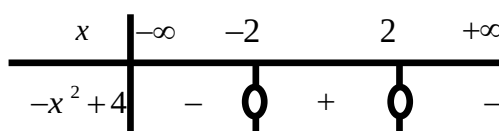
$$f_3(x) = \cos(x) \quad (3)$$

$$D_{f_3} = \mathbb{R}$$

$$f_4(x) = \tan(x) \quad (4)$$

$$D_{f_4} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$f_5(x) = \sqrt{-x^2 + 4} \quad (5)$$

 f_5 لها معنى إذا $-x^2 + 4 \geq 0$
ندرس إشارة الكمية $-x^2 + 4$:أي: $D_{f_5} = [-2; 2]$

$$f_6(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (6)$$

f_6 معرفة إذا $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ أي: $D_{f_6} =]0; +\infty[$

حل التمرين الثامن عشر:

$$f(x) = \frac{\cos(3x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(3x)}{\sin(x)}$$

(1) تعين مجموعة تعريف الدالة:

 f لها معنى إذا $\cos(x) \neq 0$ و $\sin(x) \neq 0$ أي: $D_f = \mathbb{R} - \left\{ k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
(2) كتابة f بدلالة $\cos(2x)$ لدينا: من أجل كل x من D_f :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\cos(3x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(3x)}{\sin(x)} = \frac{\cos(x) \times \cos(2x) - \sin(x) \times \sin(2x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(x) \times \cos(2x) + \cos(x) \times \sin(2x)}{\sin(x)} \\ &= \cos(2x) - \frac{\sin(x) \times 2 \times \cos(x) \times \sin(x)}{\cos(x)} + \cos(2x) + \frac{\cos(x) \times 2 \times \cos(x) \times \sin(x)}{\sin(x)} \\ &= 2\cos(2x) - 2\sin^2(x) + 2\cos^2(x) = 4\cos(2x) \end{aligned}$$

- حساب بعض الصور: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ و $f\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = 4\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 2$ و $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -2$

(3) حل في المجال $]0; \pi[$ المعادلة: $f(x) = -2$ أي: $4\cos(2x) = -2$ و عليه: $\cos(2x) = \frac{-1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\text{و منه: } \begin{cases} 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{3} + k'\pi, k' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

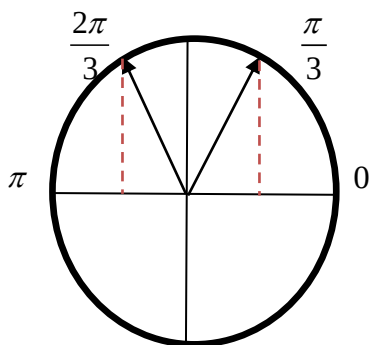
لنبحث عن قيود لـ k, k' تجعل: $x \in]0; \pi[$ ، لهذا نميز الحالتين:

الأولى: $0 < \frac{\pi}{3} + k\pi < \pi$ معناه: $0 < 1 + 3k < 3$ أي: $k = 0$ ،

الثانية: $0 < -\frac{\pi}{3} + k'\pi < \pi$ معناه: $0 < -1 + 3k' < 3$ أي: $k = 1$ ،

حلول المعادلة في المجال $]0; \pi[$ هي: $S = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$ ،

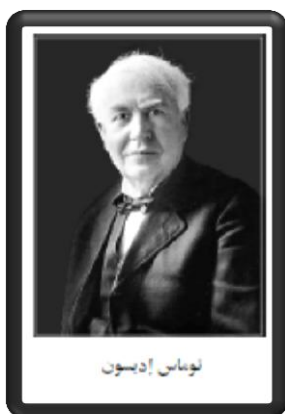
- تمثيل صور الحلول على الدائرة المثلثية:



(4) استنتاج حلول المتراجحة $f(x) < -2$ في المجال $]0; \pi[$:

$f(x) < -2$ معناه: $\cos(2x) < \frac{-1}{2}$ معناه: $|\cos(x)| < \frac{1}{2}$ ،

من الدائرة المثلثية السابقة يمكن استنتاج: $S = \left]\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right[- \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.



لويس إديسون

العبقريّة 1% و 99% عرق.

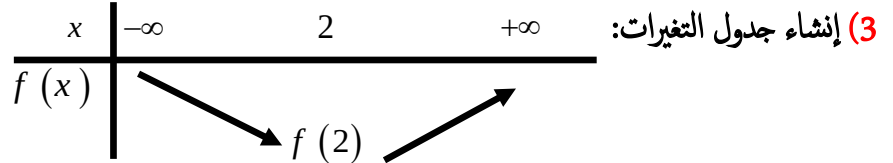
حل التمرين التاسع عشر:

f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ،

(1) ليكن x عددا حقيقيا، لدينا: $f(x) = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x - 2)^2 - 1$ أي: $a = -2, b = -1$

(2) ليكن x_1, x_2 من $[2; +\infty[$ مع: $2 \leq x_1 < x_2$ أي: $0 \leq x_1 - 2 < x_2 - 2$ ومنه: $(x_1 - 2)^2 - 1 < (x_2 - 2)^2 - 1$ أي: $f(x_1) < f(x_2)$ إذن f متزايدة تماما على المجال $[2; +\infty[$ ،

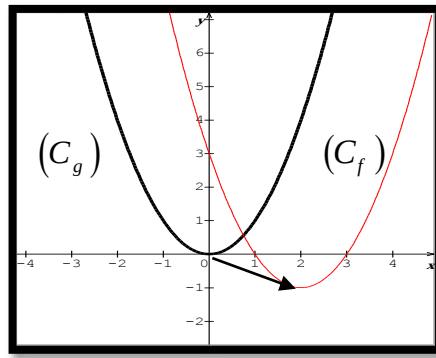
وليكن x_1, x_2 من $]-\infty; 2]$ مع: $x_1 < x_2 \leq 2$ أي: $x_1 - 2 < x_2 - 2 \leq 0$ ومنه: $(x_1 - 2)^2 - 1 > (x_2 - 2)^2 - 1$ أي: $f_1(x) > f_2(x)$ إذن f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 2]$ ،



من جدول التغيرات نستنتج أن القيمة: $x_0 = 2$ تجعل f أصغر ما يمكن،

(4) لدينا $x \mapsto g(x) = x^2$ الدالة مربع، أمكن ملاحظة: $f(x) = g(x - 2) - 1$ أي: منحنى الدالة f عبارة على انسحاب لمنحنى

الدالة مربع بشعاع $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ لاحظ الشكل:



(5) حل المتراجحتين بيانيا:

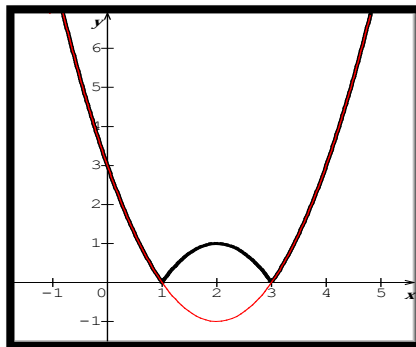
$f(x) \geq 0$ من البيان نجد: $S_1 =]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$ ، و $f(x) < 0$ كذلك من البيان نجد: $S_2 =]1; 3[$ ،

(6) اعتمادا على (C_f) ننشئ (C_h) حيث: $h(x) = |f(x)|$ ، اعتمادا على (5) يمكن كتابة:

أي: $(C_h) \equiv (C_f)$ على المجال $]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[$ ، $\begin{cases} h(x) = f(x) , x \in]-\infty; 1] \cup [3; +\infty[\\ h(x) = -f(x) , x \in]1; 3[\end{cases}$

ينطبق

و (C_h) نظير لـ (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل على المجال $]1; 3[$ ، كما يظهر في الشكل:



حل التمرين العشرين:

تعيين $f \circ g$ و $g \circ f$:

$$(1) \quad D_{f \circ g} = \mathbb{R}^* \text{ مع } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} + 1$$

$$\text{و } D_{g \circ f} = \mathbb{R} \text{ مع } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 1) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$(2) \quad D_{f \circ g} = \mathbb{R} \text{ مع } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x^2 - 1) = 4(2x^2 - 1)^2 - 3(2x^2 - 1)$$

$$\text{و } D_{g \circ f} = \mathbb{R} \text{ مع } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(4x^2 - 3x) = 2(4x^2 - 3x)^2 - 1$$

$$(3) \quad D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{-2\} \text{ مع } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = \frac{2(x+1)-1}{x+1+1} = \frac{2x+1}{x+2}$$

$$\text{و } D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{-1\} \text{ مع } (g \circ f)(x) = g\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = \frac{2x-1}{x+1} + 1 = \frac{2x-1+x+1}{x+1} = \frac{3x}{x+1}$$

$$(4) \quad D_{f \circ g} =]0;1] \text{ مع } (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{1}{x}-1} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$D_{g \circ f} =]1;+\infty[\text{ مع } (g \circ f)(x) = g(\sqrt{x-1}) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

الجهد المتواصل، وليس الذكاء أو القوة، هو مفتاح إطلاق قدراتنا الكامنة.



وينستون تشرشل

Winston Churchill

معلومات متفرقة:

خواص مهمة للقيمة المطلقة:

a, b عدنان حقيقيان أو عبارتان جبريتان، و $r > 0$:

$$* \quad |a| = |b| \text{ معناه } \begin{cases} a = b \\ \text{أو} \\ a = -b \end{cases} \quad \text{"أو" يعني "اتحاد".}$$

$$* \quad |a+b| \leq |a| + |b| \quad \text{أو} \quad |a-b| \leq |a| + |b|$$

$$* \quad ||a| - |b|| \leq |a - b| \quad \text{أو} \quad ||a| - |b|| \leq |a + b|$$

$$* \quad |x| \leq r \text{ معناه } x \in [-r; r]$$

$$* \quad |x| \geq r \text{ معناه } x \in]-\infty; -r] \cup [r; +\infty[$$

المتغير والوسيط:

يجب أن يكون الفرق واضحاً بين الكائنات الرياضية:

المتغير والوسيط والمجهول، كما نعلم كذلك أن معطيات كل تمرين تحدد طبيعة كل كائن،

مثلاً:

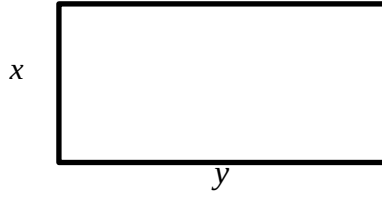
* لتكن الدالة العددية $f(x)$ هنا $x \mapsto f(x)$ متغير،

* لتكن المعادلة من الدرجة الثانية: $x^2 + 2mx + 2 = 0$ مع $m \in \mathbb{R}$ ، نقول x مجهول و m وسيط.

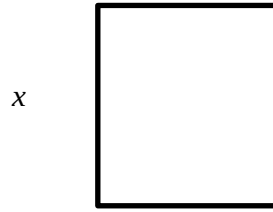
مساحات و محيطات و أحجام بعض الأشكال:

مساحات بعض الأشكال:

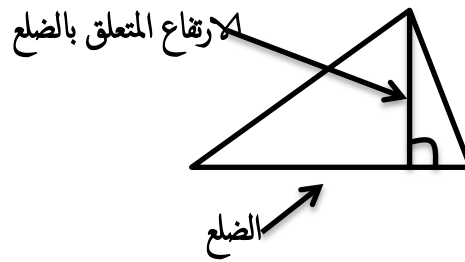
مساحة المستطيل: $x \times y$ حيث: x و y عرض و طول المستطيل على الترتيب، الشكل:



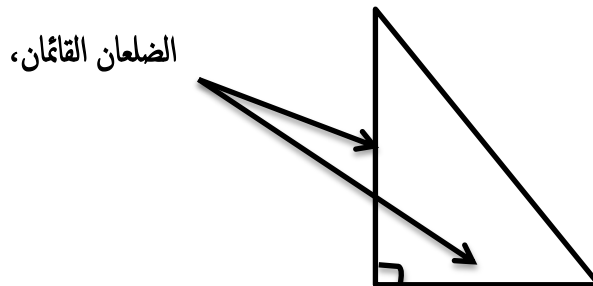
مساحة المربع: x^2 حيث: x طول ضلع المربع، الشكل:



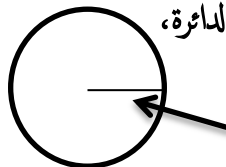
مساحة المثلث: $\frac{1}{2}$ طول الضلع $\times$ طول الارتفاع المتعلق به، الشكل:



حالة خاصة: مساحة مثلث قائم: $\frac{1}{2}$ جداء طول الضلعين القائمين،



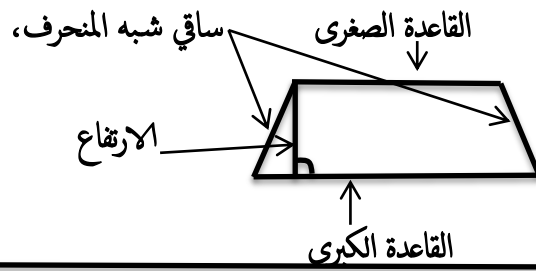
مساحة القرص: $\pi \times r^2$ حيث: r طول نصف قطر الدائرة،



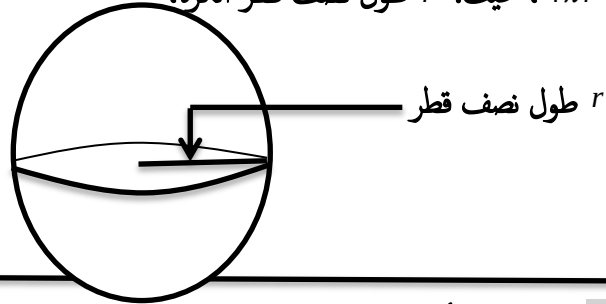
طول نصف قطر

الشكل:

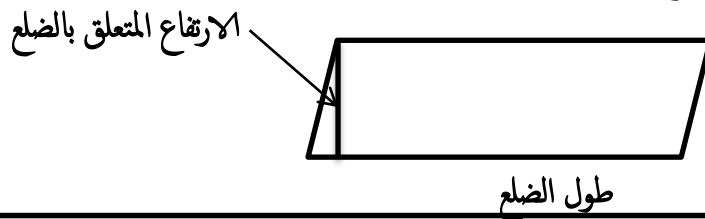
مساحة شبه المنحرف: $\frac{1}{2} \times (\text{القاعدة الصغرى} + \text{القاعدة الكبرى}) \times \text{الارتفاع}$ ، الشكل:



مساحة سطح كرة: $4\pi r^2$ ، حيث: r طول نصف قطر الكرة،



مساحة متوازي أضلاع: طول أحد الأضلاع في الارتفاع المتعلق به،



محيطات بعض الأشكال:

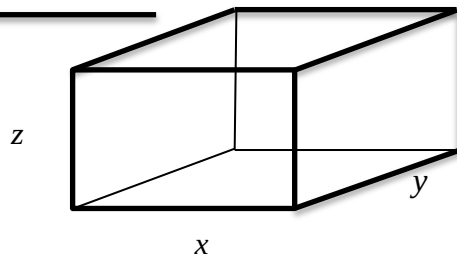
محيط المستطيل: $2(x + y)$ حيث: x, y بعدا المستطيل،

محيط المربع: $4x$ ، حيث: x طول الضلع،

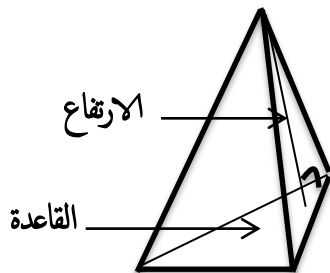
محيط الدائرة: $2\pi r$ ، حيث: r طول نصف قطر الدائرة.

حجم بعض الأشكال:

حجم متوازي أضلاع: $V = x \times y \times z$ ، الشكل:



حجم رباعي وجوه منتظم: $V = \frac{1}{3} S \times h$ ، حيث: S مساحة القاعدة و h الارتفاع المتعلق بالقاعدة الشكل:



حجم كرة: $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ ، حيث: r نصف قطر الكرة.

أبجدية اللغة اليونانية الصغيرة والكبيرة:

الكبيرة الصغيرة

$\alpha = A$: alfa	$\iota = I$: iota	$\rho = P$: rho
$\beta = B$: beta	$\kappa = K$: kappa	$\sigma = \Sigma$: sigma
$\gamma = \Gamma$: gamma	$\lambda = \Lambda$: lamda	$\tau = T$: tau
$\delta = \Delta$: delta	$\mu = M$: mu	$\vartheta = \Upsilon$: upsilon
$\varepsilon = E$: epsilon	$\nu = N$: nu	$\phi = \Phi$: phi
$\zeta = Z$: dzeta	$\xi = \Xi$: ksi	$\chi = X$: khi
$\eta = H$: eta	$o = O$: omicron	$\psi = \Psi$: psi
$\theta = \Theta$: theta	$\pi = \Pi$: pi	$\omega = \Omega$: omega

من علماء العرب:



الخوارزمي:

هو أبو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي القرطبي، يعتقد أنه من مواليد عام (164 هـ - 781م)، وقد توفي بعد (232 هـ - 874م)، وحسب بعض الروايات فقد انتقلت عائلته من مدينة خوارزم في أوزبكستان - حالياً - إلى بغداد، ويعتبر الخوارزمي من أوائل علماء الرياضيات المسلمين، وهو مؤسس علم الجبر الذي يتقاسم لقبه مع ديوفانتوس.

أسهمت أعماله كثيراً في تقدم الرياضيات خلال العصر الذي عاش فيه، وهو الذي عمل في بيت الحكمة في بغداد، وقد كلفه المأمون به برسم خارطة للأرض عمل فيها أكثر 70 جغرافياً، كما عينه أيضاً على رأس خزانة كتبه، وطلب منه جمع الكتب اليونانية وترجمتها، فاستفاد الخوارزمي من الكتب التي كانت متوافرة في مكتبة الخليفة، إذ درس الرياضيات والجغرافية والفلك والتاريخ، كما كان محيطاً بالمعارف اليونانية والهندية، ونشر كل أعماله بالعربية التي كانت لغة العلم آنذاك، وقد ترك الخوارزمي بعد وفاته العديد من المؤلفات في علوم الفلك والجغرافيا.

كان الخوارزمي مسؤولاً بشكل أساسي عن نشر نظام ترقيم الهندي في بلد الشام والعراق والجزيرة العربية وفارس وتركيا وأفغانستان وأوروبا، سيما وأن بعض أعماله اعتمدت على علوم الفلك في فارس وبابل، وعلى الأرقام الهندية والرياضيات اليونانية، وقد نظم الخوارزمي وصوّب بيانات بطليموس حول أفريقيا والمناطق السابقة الذكر، كما ساعد في عمل مشروع لتحديد محيط الأرض.

أرسى الخوارزمي الأساس للابتكار في الجبر وعلم المثلثات، وكان له أسلوب منهجي في حل المعادلات الخطية والتربيعية، ذلك الأسلوب الذي أدى إلى الجبر، كما ترك عدة مؤلفات منها: (الجمع والتفريق في الحساب الهندي)، (رسم الربع المعمور)، (تقويم البلدان)، (العمل بالإسطرلاب)، (صورة الأرض)، الذي اعتمد فيه على كتاب المجسطي لبطليموس مع إضافات وشروح وتعليقات، كما أعاد كتابة (كتاب السندهند الكبي)، الذي ترجم إلى العربية، فأضاف إليه في زمن الخليفة المنصور، وأطلق عليه (السندهند الصغير)، وفي كتاب (حساب الجبر والمقابلة) (الجبر)؛ عرض الخوارزمي أول حل منهجي للمعادلات الخطية والتربيعية.

في علم الجبر ألف الخوارزمي (الكتاب المختصر في الجبر والمقابلة) الذي ترجم إلى اللاتينية على يد روبرت تشستر (1145م)، وقد اشتق مصطلح الجبر من اسم إحدى العمليات الأساسية مع المعادلات التي وصفت في هذا الكتاب، ثم ترجمه جيرارد أوف كريمةونا، وتوجد نسخة عربية فريدة منه محفوظة في أوكسفورد ترجمها إيف روزين عام 1831م، كما توجد ترجمة لاتينية محفوظة في كامبريدج.

يعتبر الجبر النص التأسيسي للجبر الحديث، حيث قدم للعالم بياناً شاملاً لحل المعادلات متعددة الحدود حتى الدرجة الثانية، وعرض طرائق أساسية للحد والتوازن، في إشارة منه إلى نقل المصطلحات المطروحة إلى الطرف الآخر من المعادلة.

كانت لإسهامات الخوارزمي تأثيرها على اللغة، فدخل مصطلح الجبر واللوغاريتمات والـ (zero) كل اللغات، والمثبت أنه في القرن الـ 12 الميلادي انتشرت أعمال الخوارزمي في أوروبا من خلال الترجمات اللاتينية التي كان لها تأثير كبير على تقدم الرياضيات فيها.

طرق البرهان:

تمهيد:

من المعلوم أن الرياضيات علم دقيق رغم الفرضيات و البديهيات و المسلمات الموضوعة من طرف كبار الرياضياتيين التي نجعل برهانها أحيانا، كما نعلم أن الدقة التي وصفت بها الرياضيات سابقا سببها وجوب إعطاء أي سبب، أو تبرير لأي خطوة متبعة للوصول إلى علاقة تعد هدفا يجب أن نقضي إليه، و من ثمة ظهرت طرق البرهان سنعرف على بعضها الآن، و سوف نتطرق لما بقي منها في درس المتتاليات لارتباطه بالأعداد الطبيعية.

بعض البراهين:

البرهان بالخلف (أو البرهان بالتناقض أو الجدل):

هناك نوعان:

الأول: حالة المطلوب لا يحوي استلزاما: لإثبات صحة A عبارة رياضية، تتبع الخطوات التالية:

- نفرض أن A خاطئة،
- و بعلاقات رياضية متلاحقة نصل إلى تناقض $*$ ، و منه صحة A .

مثال: برهن أن $\sqrt{2}$ عدد أصم،

البرهان: لنستعمل البرهان بالخلف:

لنفرض جدلا أن $\sqrt{2}$ ليس عددا أصما أي عدد ناطق و منه وجود $a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{Z}^*$ حيث $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ (*)
و $PGCD(a; b) = 1$ أي الكسر غير قابل للاختزال، عند تربيع (*) نجد $a^2 = 2b^2$ (**) أي a^2 عدد زوجي و منه a عدد زوجي، أي: $a = 2\alpha$ عند التعويض في (**) نجد $b^2 = 2\alpha^2$ أي b^2 عدد زوجي و منه b عدد زوجي، و هذا تناقض مع كون $PGCD(a; b) = 1$. و بالتالي $\sqrt{2}$ عدد أصم.

الثاني: حالة استلزام، لإثبات صحة: P يستلزم Q تتبع الخطوات التالية:

- قبل المعطيات P و نفرض أن الناتج Q خاطئ،
- و بعلاقات رياضية متلاحقة نصل إلى تناقض $*$ ،

$*$ و نقصد بالتناقض: تناقضا مع الفرضيات أو تناقضا رياضيا،

و منه صحة الاستلزام.

مثال:

بين الاستلزام: علمنا أن $\sqrt{2}$ عدد أصم فإن $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ كذلك أصم،

برهان:

لدينا $\sqrt{2}$ عدد أصم، لنفرض أن $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ليس عدد أصم أي: $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r \in \mathbb{Q}^*$ و منه $\sqrt{3} = r - \sqrt{2}$ و عند التربيع:

$3 = r^2 - 2\sqrt{2}r + 2$ أي: $\sqrt{2} = \frac{r^2 - 1}{2r} \in \mathbb{Q}$ و هذا تناقض مع المعطيات، و بالتالي: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ عدد أصم.

ملاحظة:

في البرهان بالخلف، رأينا أننا ننفي عبارات رياضية نود برهانها، لأجل هذا وجب لفت الانتباه للنفيين:

العبرة:	النفي:
مهما يكن x العبارة A صحيحة،	يوجد على الأقل x_1 حيث A خاطئة،
يوجد x_1 حيث العبارة A صحيحة،	مهما يكن x العبارة A خاطئة،

البرهان بمثال مضاد:

يستعمل هذا البرهان لإثبات خطأ علاقة رياضية فقط، أي لإثبات عدم صحة A نقوم بإيجاد مثال ينفي ما جاء به A ،

مثال:

كل عدد طبيعي فردي هو أولي،
هذه القضية خاطئة، لأن 9 عدد فردي وليس أوليا (3 قاسم)، يسمى هذا مثالا مضادا.

البرهان باستعمال التكافؤ:

المطلوب إثبات صحة عبارة رياضية معقدة A ، نقوم بمكافأتها بعبارة صحيحة B أو يمكن اثباتها ببساطة،

مثال:

برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $1 - \frac{2}{x} \geq -\frac{1}{x^2}$

حل:

ليكن $x \in \mathbb{R}^*$: المتباينة التي نود برهانها تكافؤ $\begin{cases} (x-1)^2 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ وهذه الأخيرة محققة من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم، وبالتالي

$$\text{صحة المتباينة } 1 - \frac{2}{x} \geq -\frac{1}{x^2}$$

البرهان المباشر:

ننطلق من معطيات التمرين و بتحديد الهدف، نسلک طرقا منطقية للوصول إليه.

مثال:

بين من أجل كل عدد حقيقي x حيث: $x > -1$: $\frac{2x-1}{x-1} \leq \frac{2x+\sin(x)}{x-1} \leq \frac{2x+1}{x-1}$

لدينا: $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ من أجل كل عدد حقيقي $x > -1$ ، أي: $2x-1 \leq 2x+\sin(x) \leq 2x+1$ وكون $x-1 > 0$ أمكن

ضرب المتباينة السابقة في $\frac{1}{x-1}$ دون تغيير اتجاه المتباينة أي: $\frac{2x-1}{x-1} \leq \frac{2x+\sin(x)}{x-1} \leq \frac{2x+1}{x-1}$

و. ه. م.

من علماء العرب:



سنان بن الفتح الحراني:

هو سنان بن أبي الفتح الحراني، ولد في مدينة حران، وهو عالم رياضيات وفلك، عاش في القرن الـ3 الهجري، وتوفي عام (331هـ / 942م).

كان سنان بن الفتح الحراني عالماً فذاً ماهراً في الرياضيات خاصة، مغرمًا بالابتكار في الطرائق التي تجري بها عمليات الحساب والجبر، ومغرمًا بتوثيق العلاقة بين أسس علمي الحساب والجبر في عمليات رياضية موحدة، ويتضح ذلك عند مراجعة كتبه العلمية.

من أهم إنجازاته ابتكار طريقة جديدة لإجراء العمليات الحسابية التي تتعلق بالضرب والقسمة بواسطة عمليتي الجمع والطرح قبل علماء الرياضة الغربيين المحدثين، مثل: نابيير، بريكر، بورجي، فمهد بهذه الطريقة لابن حمزة المغربي لوضع الأسس للوغاريتمات بحساب المتواليات العددية والحسابية، وهي الطريقة التي تعتمد عليها الحواسيب الآن في التعامل مع كافة المعلومات اللغوية والعددية، كما ابتكر طريقة جديدة قدم فيها تصوراً جديداً للأسس وعلاقات بعضها في الأعداد.

ما يزال التراث العلمي لابن سنان مخطوطاً، وهو محفوظ في المكتبات العربية والإسلامية والغربية، وهو الذي ترك كتاباً في (شرح الجمع والتفريق)، (والكعب والمال والأعداد المتناسبة) الذي ألفه في القرن الـ3 الهجري، كما ألف كتاب (الجبر والمقابلة)، حيث أجرى الجبر والمقابلة على 3 مراتب متناسبة: ذات، وسط، وطرفين، وحل معادلات تكعيبية من الدرجة الأولى بطريقة الخطأين، كما حل معادلات تكعيبية من الدرجة الثالثة، وله أيضاً (حساب المكعبات)، وهو كتاب طريف فيه ابتكار فيه مسائل صناعية مختلفة يغلب عليها الصفة العملية، وعلى مسائل متنوعة في المساحة والحجوم، و(التخت) في الحساب الهندي، وكتاب (حساب الوصايا) الخاص بالمواريث وما يماثلها.

الباب الثاني:

الدروس

الفصل الأول:

الدوال العددية.

أهداف الدرس الأول:

- مفهوم النهايات
- النهايات و العمليات عليها،
- حالات عدم التعيين و طرق إزالتها.

الدرس الأول:

نشاط استكشافي:

لتكن الدالتان العدديتان f و g المعرفتان بـ $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ و $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ ،

(1) عين مجموعة تعريف كل من f ، g ،

(2) أ) احسب الصور التالية: $f(10)$ ، $f(50)$ ، $f(200)$ ، ضع تخميننا حول نهاية الدالة f عندما يسعى x إلى $+\infty$ ،
نرمز لها بـ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ،

ب) ليكن A عددا حقيقيا موجبا تماما، أوجد $\delta > 0$ (لاحظ أنه بدلالة A) بحيث يتحقق الاستلزام:
إذا كان $x > \delta$ فإن $f(x) > A$ ، ألا يعتبر هذا إثباتا للتخمين السابق؟

ج) ماذا عن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ،

(3) أ) احسب الصور التالية: $g(-0.99)$ ، $g(-0.999)$ ، $g(-1.1)$ ، $g(-1.01)$ ، ضع تخميننا حول نهاية الدالة g عندما يقترب x من -1 ،

ب) ليكن ε عددا حقيقيا موجبا تماما، أوجد $\delta > 0$ بحيث يتحقق الاستلزام: إذا كان $|x + 1| < \delta$ فإن $|g(x) + 2| < \varepsilon$ ،
ج) ماذا عن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ،

(4) أ) احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ ، قارن النتيجة المحصل عليها بـ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x))$ ،
ب) احسب: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ، كيف يمكنك حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x))$ في هذه الحالة.

حل النشاط:

تعليق:

(1) تعيين مجموعة تعريف الدالتين f ، g :

• f معرفة من أجل كل عدد حقيقي أي: $D_f = \mathbb{R}$ ،

و g معرفة معناه $x + 1 \neq 0$ أي: $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$ ،

(2) أ) حساب الصور:

$$f(10) = \frac{1}{2}(100 - 1) = 49.5, f(50) = \frac{1}{2}(2500 - 1) = 1249.5,$$

$$f(200) = \frac{1}{2}(40000 - 1) = 19999.5$$

التخمين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ،

ب) $A \in \mathbb{R}_+^*$ ، لنبحث عن $\delta > 0$ حيث يتحقق الاستلزام المطلوب ،

علينا نبدأ بالبحث عن قيم لـ x موجبة و تحقق $f(x) > A$ أي: $x^2 > 2A + 1$ ،

(وكون دراستنا في جوار $+\infty$) أي: $x > \sqrt{2A + 1}$ و بالتالي نأخذ $\delta = \sqrt{2A + 1}$ -

- بهذا العمل بينا أننا نستطيع جعل $f(x)$ كبيرا بالقدر الذي نريد شرط أن يكون

x كبيرا بالقدر الكافي، حقا فالتخمين الموضوع في محله، أي: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ - - -

نقول أن بينا النهاية باستعمال التعريف ،

تعليق:

(ج) لو كانت دراستنا في (ب) في جوار $-\infty$ ، لكتبنا: $x^2 > 2A + 1$ معناه: $-x > \sqrt{2A + 1}$ أي: $x < -\sqrt{2A + 1}$ ، نأخذ: $\delta = -\sqrt{2A + 1} < 0$ أي: يمكن جعل $f(x)$ كبيرا بالقدر الذي نريد و هذا عندما يكون x صغيرا بقدر كافي،

يبرهننا النهاية باستعمال التعريف،

و منه: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ، (أ) حساب الصور:

$g(-0.99) = -1.99$, $g(-0.999) = -1.999$, $g(-1.1) = -2.1$, $g(-1.01) = -2.01$
التخمين: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2$

(ب) $\varepsilon > 0$ معطى، لنبحث عن $\delta > 0$ الذي يتحقق من أجل الاستلزام، لدينا:

لاحظ أن المسافة بين $g(x)$ و -2

تعطى $|g(x) + 2| = |x - 1 + 2| = |x + 1| < \varepsilon$ أي نأخذ $\delta = \varepsilon$ ، و بهذا نستطيع جعل

بالعلاقة $|g(x) - (-2)|$

الصورة $f(x)$ قريبة من -2 بالقدر الذي نريد شريطة أن يكون x قريباً بالقدر الكافي من -1 ، أي التخمين صحيح،

سوف نعتمد هنا فصاعداً على الملاحظة دون المرور صراحة بالتعريف الذي اعتمدنا عليه سابقاً،

(ج) حساب النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

المساواة سليمة لأننا بعيدون عن القيمة -1

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1)$$

$$= +\infty$$

يمكن أن نعتمد على التعريف لإثبات:

كذلك لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1) = -\infty$$

(أ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty + (+\infty) = +\infty$ و من جهة أخرى:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}(x^2 - 1) + x - 1 \right)$$

يمكن جعل المقدار $\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$ كبيراً

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} \right) = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

بالقدر الذي نريد إذا كان x كبيراً بكفاية،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

سؤال 1: هل يمكن توزيع رمز النهاية على الجمع دوماً ماذا عن الجداء و القسمة؟

هذه الكمية غير محددة، تسمى هذه الحالة:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty + (-\infty) = +\infty - \infty$$

حالة عدم التعيين،

لا يمكننا كتابة: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + g(x))$ بدلالة $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

سؤال 2: هل توجد حالات أخرى عدا هذه الحالة، وكيف يمكن

إيجاد النهاية $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + g(x))$ عندئذ؟

بناء المعارف:

جواب 1: لتكن f و g دالتين معرفتين في جوار α حيث: $\alpha \in \mathbb{R}$ أو $\alpha = \pm\infty$ (أي $\alpha = +\infty$ أو $\alpha = -\infty$)

النهايات والجمع:

- إذا كان: $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = a \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = b \in \mathbb{R}$ فإن: $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) + \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = a + b$
- إذا كان: $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = b \in \mathbb{R}$ فإن: $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) + \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \infty + b = \infty$
- إذا كان: $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty$ فإن: $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) + \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty$
- إذا كان: $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = -\infty$ فإن: $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) + \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = -\infty$
- إذا كان: $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty$ فإن: $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) + \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = -\infty + \infty$ (1) لا يمكننا تعيين $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) + g(x))$ دون تحر أكثر في هذه الحالة

النهايات والضرب:

- إذا كان: $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = a \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = b \in \mathbb{R}$ فإن: $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \times \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = a \times b$
- إذا كان: $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = b \in \mathbb{R}^*$ فإن: $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \times \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \infty \times b = \infty$
- إذا كان: $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$ فإن: $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \times \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \infty \times 0$ (2) لا يمكننا تعيين $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) \times g(x))$ دون تحر أكثر في هذه الحالة

• إذا كان: $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \infty$ فإن: $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \times \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \infty$ (مع مراعات الإشارات)

النهايات والقسمة:

- إذا كان: $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = a \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = b \in \mathbb{R}^*$ فإن: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)} = \frac{a}{b}$
- إذا كان: $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = a \in \mathbb{R}^*, \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$ فإن: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)} = \frac{a}{0}$
- نميز حالتين: 1* $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)} = \frac{a}{0^+} = +\infty, a > 0$ أو $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)} = \frac{a}{0^+} = -\infty, a < 0$
- 2* $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)} = \frac{a}{0^-} = -\infty, a > 0$ أو $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)} = \frac{a}{0^-} = +\infty, a < 0$
- إذا كان: $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = a \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \infty$ فإن: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)} = \frac{a}{\infty} = 0$
- إذا كان: $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0$ فإن: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)} = \frac{0}{0}$ (3)
- إذا كان: $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \infty$ فإن: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ (4) لا يمكننا تعيين النهاية $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x)/g(x))$ في الحالتين دون تحر أكثر

جواب 2:

نسمي (1), (2), (3), (4) بحالات عدم التعيين أو كميات غير محددة ونلخصها بـ $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0(\pm\infty)$, $+\infty - \infty$, فإذا تحصلنا أثناء حساب النهاية على أحد الكميات الأربع السابقة نكتب "ح ع ت" اختصاراً للعبارة "حالة عدم التعيين"، ويجب علينا سلك سبل أخرى لتعيين النهاية، نذكر على سبيل المثال لا الحصر:

- تغيير شكل الدالة (مثلاً: ملاحظة عامل مشترك أو استعمال المرافق). لاحظ التطبيق في آخر الدرس، أو نغير المتغير وسوف نشاهد مثلاً هذه الطريقة في التمرين 02 صفحة 88 وسوف نستعملها في مسائل قادمة)،

- مفهوم الاشتقاق (سنتعرف على هذا المفهوم في فصل لاحق لاحظ التمرين 02 صفحة 128)،

- أو:

الخواص:

(1) دالة كثير حدود أي: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ مع $a_n \neq 0$ عندئذ: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (a_n x^n)$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_0}{a_n x^n} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n$$

(2) دالة ناطقة أي: $f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0}$ مع $a_m \neq 0, b_n \neq 0$ عندئذ: (حيث n و m من $\mathbb{N}^*$)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m}{b_n} x^{m-n}$$

لاحظ أن الخاصيتان محقتان في جوار $+\infty$ أو $-\infty$ فقط،

تذكر أن: مرافق $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ هو: $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ أو العكس.

تمرين تطبيقي:

احسب النهايات التالية:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+3}{x-4}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

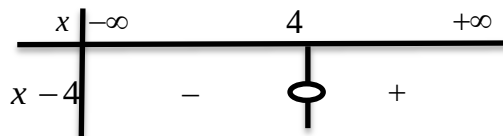
$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x), \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + p^2} - p}{\sqrt{x^2 + q^2} - q}, p, q > 0, \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$$

حل:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x+3}{x-4} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x+3}{x-4} = \frac{11}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x+3}{x-4} = \frac{11}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

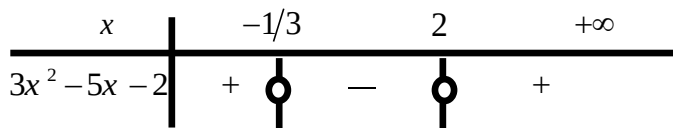


لأن:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 10}{3x^2 - 5x - 2} = \frac{-2}{0}$$

نقوم بدراسة إشارة المقام $3x^2 - 5x - 2$ ، جذر له أي الجذر الآخر هو: $-\frac{1}{3}$ ،



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 10}{3x^2 - 5x - 2} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 2x - 10}{3x^2 - 5x - 2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 2x - 10}{3x^2 - 5x - 2} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \end{cases} \text{ أي:}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{ن}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3, \quad (a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \text{ نعلم أن:}$$

ح، ع، ت

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{ن}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x \times (\sqrt{1+x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}$$

ح، ع، ت

المرافق

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x = +\infty - \infty \xrightarrow{\text{ن}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{1}{2}$$

ح، ع، ت

المرافق

x عامل مشترك من البسط والمقام،

مع العلم أن $\sqrt{x^2} = |x|$ وكون $x \rightarrow +\infty$ نزع رمز القيمة المطلقة،

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x = +\infty - \infty \xrightarrow{\text{ن}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1} = -\frac{1}{2}$$

ح، ع، ت

المرافق

x عامل مشترك من البسط والمقام،

مع العلم أن $\sqrt{x^2} = |x|$ وكون $x \rightarrow -\infty$ نكتب $\sqrt{x^2} = -x$ ،

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + p^2} - p}{\sqrt{x^2 + q^2} - q} = \frac{0}{0}$$

ح، ع، ت

وهي حالة عدم التعيين، لنستعمل المرافق لإزالتها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + p^2} - p}{\sqrt{x^2 + q^2} - q} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + p^2} - p) \times (\sqrt{x^2 + q^2} + q)}{(\sqrt{x^2 + q^2} - q) \times (\sqrt{x^2 + q^2} + q)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + p^2} - p) \times (\sqrt{x^2 + q^2} + q)}{x^2 + q^2 - q^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + p^2} - p) \times (\sqrt{x^2 + p^2} + p) \times (\sqrt{x^2 + q^2} + q)}{x^2 \times (\sqrt{x^2 + p^2} + p)} = \frac{q}{p}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) = +\infty - \infty$$

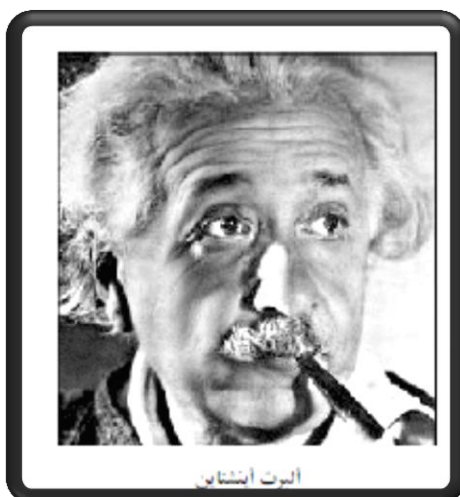
ح، ع، ت

وهي حالة عدم التعيين، لنستعمل المرافق لإزالتها:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = 0$$

من مقولات ألبرت أينشتاين:

العلامة الحقيقية للذكاء ليست كم المعرفة بل هي القدرة على التخيل.



ألبرت أينشتاين

أهداف الدرس الثاني:

- النهايات باستعمال الحصر،
- المستقيمت المقاربة،
- نهاية مركب دالتين.

الدرس الثاني:

نشاط استكشافي:

- لتكن $f(x) = 2x - 1 + \frac{2 + \sin(1 - 2x)}{2x - 1}$ بـ: $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ على المجال
- (1) أ) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ يكون: $2x - 1 + \frac{1}{2x - 1} \leq f(x)$
- ب) هل يمكنك استنتاج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ ، ما التأويل الهندسي للنهاية الثانية
- (2) أ) بين أن: $\frac{1}{2x - 1} \leq \frac{2 + \sin(1 - 2x)}{2x - 1} \leq \frac{3}{2x - 1}$ من أجل كل عدد حقيقي x من $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$
- ب) استنتج أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = 0$ ، وأعط تأويلا هندسيا لهذه النهاية.

تعليق:

$$-1 \leq \sin(\theta) \leq 1$$

من أجل كل θ من $\mathbb{R}$

حل النشاط:

- (1) أ) ليكن $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ لدينا $-1 \leq \sin(1 - 2x) \leq 1$ أي: $1 \leq 2 + \sin(1 - 2x) \leq 3$
- من جهة أخرى لدينا: $x > \frac{1}{2}$ معناه: $2x - 1 > 0$ أي أمكن كتابة:

$$(*) \dots 2x - 1 + \frac{1}{2x - 1} \leq f(x) \text{ ، } 2x - 1 + \frac{1}{2x - 1} \leq 2x - 1 + \frac{2 + \sin(1 - 2x)}{2x - 1} = f(x)$$

- ب) - لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - 1 + \frac{1}{2x - 1}\right) = +\infty$ أي عندما يكون x كبيرا كفاية يمكن أخذ
- $2x - 1 + \frac{1}{2x - 1}$ كبير بالقدر الذي نريد، المتراجحة (*) تضمن كذلك كبر $f(x)$ ، ومنه
- نستنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$- \text{ و من جهة أخرى } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left(2x - 1 + \frac{1}{2x - 1}\right) = +\infty \text{ أي عند أخذ } x \text{ قريبا من } \frac{1}{2} \text{ بكفاية}$$

يمكن أخذ $2x - 1 + \frac{1}{2x - 1}$ كبيرا بالقدر الذي نريد، والمتراجحة (*) تضمن كبر $f(x)$ ، ومنه

كأننا أثبتنا النهايتين بالتعريف

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = +\infty$$

و التفسير الهندسي لهذه النهاية أن منحنى الدالة f يقارب المستقيم الذي معادلته $x = \frac{1}{2}$ نقول أنه مستقيم مقارب عمودي

- (2) أ) كذلك من أجل $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$ لدينا $-1 \leq \sin(1 - 2x) \leq 1$ أي: $1 \leq 2 + \sin(1 - 2x) \leq 3$

$$\text{أي: } (*) \dots \frac{1}{2x - 1} \leq \frac{2 + \sin(1 - 2x)}{2x - 1} \leq \frac{3}{2x - 1}$$

الفرق بين منحنى f والمستقيم

$y = 2x - 1$ يقترب من الصفر

كلما كان x كبير.

$$- \text{ ب) لدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \sin(1 - 2x)}{2x - 1} = 0$$

لأن:

تعليق:

الكيمان $\frac{1}{2x-1}$ ، $\frac{3}{2x-1}$ قريبان من 0 بالقدر الذي نريد و هذا من أجل x كبير و من المتراجحة المضاعفة (**) تكون: $\frac{2+\sin(1-2x)}{2x-1}$ قريبة من 0 بالضرورة،

سؤال 1:

هل يمكن تعميم استنتاج النهايتين في 1/ ب و 2/ ب ؟

التأويل الهندسي:

منحنى الدالة f يقارب المستقيم الذي معادلته $y = 2x - 1$ من أجل x كبير ----- يدعى مستقيما مقاربا مائلا في جوار $+\infty$ ،

سؤال 2:

هل يمكن وضع خلاصة حول المستقيمات المقاربة للمنحنيات ؟

سؤال 3:

يمكن أن نلاحظ في هذا النشاط أننا باستعمال خواص الدالة $\sin$ استطعنا حساب النهايات المذكورة، ماذا لو كانت عبارة الدالة أعقد، فكيف يمكننا حساب النهاية عندئذ ؟

بناء المعارف:

جواب 1:

مبرهنات خاصة بالحصر:

ليكن α عددا حقيقيا أو $+\infty$ أو $-\infty$ ، و f, g, h دوالا معرفة في جوار α :

المبرهنة الأولى:

• إذا كان: $f(x) \leq g(x)$ من أجل كل x قريب من α و:

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty \quad 1$$

$$\text{أو } \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = -\infty \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = -\infty \quad 2$$

المبرهنة الثانية:

إذا كان $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ من أجل كل x قريب من α و $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l$ فإن $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = l$ حيث: l عدد حقيقي.

حالتان خاصتان:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = 0 \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0 \text{ و } |f(x)| \leq g(x)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = 0 \text{ و } |f(x) - l| \leq g(x) \text{ ، طبعا المتباينتان محققتان في جوار } \alpha$$

جواب 2:

المستقيمية المقاربة:

- f دالة معطاة، عند حساب النهايات لهذه الدالة على حدود مجموعة تعريفها، نجد عموماً الحالات التالية:
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ نقول أن $y = b$ معادلة مستقيم مقارب أفقي لمنحنى الدالة f في جوار ∞ .
 - $\lim_{x \rightarrow a \in \mathbb{R}} f(x) = \infty$ نقول أن $x = a$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f .
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ و:

** أمكن كتابة f على الشكل: $f(x) = ax + b + h(x)$ مع $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$ ،

أو ** $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ ،

نقول أن $y = ax + b$ معادلة مستقيم مقارب مائل في جوار ∞ . و نقصد بـ ∞ : $+\infty$ أو $-\infty$.

$$\text{مع: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ و } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$$

* لدراسة الوضع النسبي لمنحنى الدالة f و مستقيم $y = ax + b$ (Δ)، نقوم بدراسة إشارة الفرق: $f(x) - (ax + b)$ لهذا ننشئ الجدول:

x	$+\infty$ النقاط التي تتغير عندها الوضعية $-\infty$
$f(x) - (ax + b)$ إشارة:	
الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)	فوق أو تحت أو يقطع

لنستغل فرصة التعرف على المستقيمية المقاربة و نعرف المنحنيات المقاربة:

إذا كانت f دالة معطاة، و استطعنا كتابتها على الشكل: $f(x) = g(x) + h(x)$ حيث (C_g) المنحنى الممثل للدالة g ، و $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$ عندئذ المنحنى (C_f) مقارب لـ (C_g) في جوار ∞ ، مع (C_f) المنحنى الممثل لـ f ،

جواب 3:

لن نضطر إلى حصر دالة أو عبارة لحساب نهايتها دائماً بمجرد ذكر هاته المبرهنة التي نقبلها دون برهان:

مبرهنة:

a, b, c تمثل أعداداً حقيقية أو $+\infty, -\infty$ ، f, v, u دوال عددية مع: $f = v \circ u$ إذا كان: $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ و $\lim_{x \rightarrow b} v(x) = c$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$.

ملاحظة:

لن نعتمد دائماً على هذه المبرهنة، لحساب النهايات بعد تعرفنا على مفهوم "الاستمرار"، أوردناه في الدرس الموالي.

تمرين تطبيقي 01:

f دالة عددية معرفة على المجال $]1; +\infty[$ بـ :

$$f(x) = \frac{2x + \sin(x)}{x - 1}$$

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x > 1$:

$$\frac{2x - 1}{x - 1} \leq f(x) \leq \frac{2x + 1}{x - 1}$$

(2) استنتج نهاية f عند $+\infty$.

حل :

(1) ليكن $x > 1$:

لدينا: $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ أي: $2x - 1 \leq 2x + \sin(x) \leq 2x + 1$ وكون $x - 1 > 0$ أمكن ضرب المتباينة السابقة في $\frac{1}{x - 1}$

دون تغيير اتجاه المتباينة أي: $\frac{2x - 1}{x - 1} \leq f(x) \leq \frac{2x + 1}{x - 1}$ أي: $\frac{2x - 1}{x - 1} \leq \frac{2x + \sin(x)}{x - 1} \leq \frac{2x + 1}{x - 1}$

(2) لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x - 1} = 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x - 1}$ ومن المتباينة السابقة (أو بتطبيق نظرية الحصر) نستنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

تمرين تطبيقي 02:

نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{-x^2 - 3x - 3}{x + 2}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب

إلى معلم متعامد ومتجانس،

(1) احسب نهاية f عند $+\infty$ و $-\infty$ ،

(2) احسب نهاية f عند -2 ، ثم أعط تفسيراً بيانياً للنتيجة،

(3) عين الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x \neq -2$ تكون $f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 2}$ ،

(4) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً يطلب تعيينه، نسميه (d) ،

(5) حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (d) ،

(6) عين إحداثيي النقطة Ω نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين، ثم بين أن النقطة Ω مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

حل :

$$f(x) = \frac{-x^2 - 3x - 3}{x + 2} \quad \text{و} \quad D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

(1) حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 - 3x - 3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$$

لاحظ الخواص المذكورة في الدرس الأول

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 3x - 3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x^2 - 3x - 3}{x + 2} = \frac{-1}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-x^2 - 3x - 3}{x + 2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{-x^2 - 3x - 3}{x + 2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \end{cases} \quad (2)$$

لاحظ الدرس الأول،

التفسير الهندسي لهاته النهاية:

من الدرس، منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته: $x = -2$ ،

(3) تعيين a, b, c من $\mathbb{R}$:

طريقة أولى: ليكن $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$

$$f(x) = \frac{-x^2 - 3x - 3}{x + 2} = \frac{-(x+2)^2 + x + 2 - 1}{x + 2} = -x - 2 + 1 - \frac{1}{x + 2} = -x - 1 - \frac{1}{x + 2}$$

أي: $a = -1, b = -1, c = -1$

طريقة ثانية:

نستعمل طريقة القسمة:

$$\begin{array}{r|l} -x^2 - 3x - 3 & x + 2 \\ \hline -x^2 - 2x & -x - 1 \\ \hline -x - 3 & \\ -x - 2 & \\ \hline -1 & \end{array}$$

أي: $\frac{-x^2 - 3x - 3}{x + 2} = -x - 1 - \frac{1}{x + 2}$ من أجل كل عدد حقيقي مختلف عن -2 ، أو يمكن استعمال طريقة المقارنة "تترك للقارئ" ،

(4) لدينا من العبارة المحصل عليها سابقا $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x + 2} = 0$ وحسب ما ورد في الدرس المنحنى الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا

(d) مائلا معادلته: $y = -x - 1$ في جوار $-\infty$ أو $+\infty$ ،

(5) تحديد الوضع النسبي لـ (C_f) و (d) :

حسب ما ورد في الدرس نقوم بدراسة إشارة الفرق: $f(x) - y = \frac{-1}{x + 2}$ لهذا نشكل الجدول:

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
إشارة $x + 2$	-	0	+
إشارة $\frac{-1}{x + 2}$	+		-
الوضع النسبي:	(C_f) فوق (d)		(C_f) تحت (d)

(6) تعيين إحداثي Ω نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين:

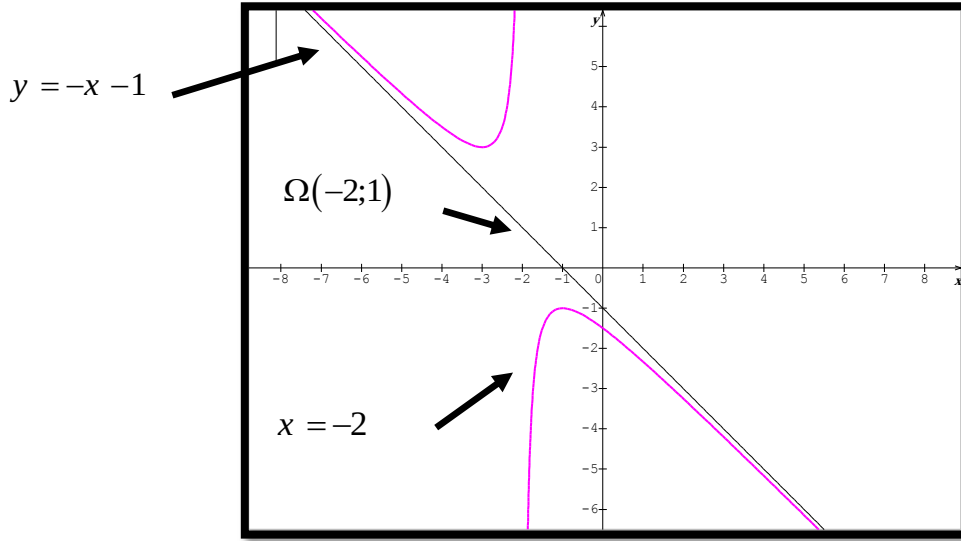
لتكن $\Omega(x_0; y_0)$ من المستقيم المقارب العمودي للمنحنى (C_f) أي $x_0 = -2$ ، ومن المستقيم المقارب المائل للمنحنى أي:

$y_0 = -x_0 - 1$ ومنه $y_0 = 2 - 1 = 1$ ، ومنه $\Omega(-2; 1)$ ،

• ليكن $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$ يكون $-4 - x \in \mathbb{R} - \{-2\}$

(لأنه لو فرضنا عكس ذلك أي $-4 - x = -2$ لوجدنا $x = -2$ وهذا مرفوض فرضا)،

لدينا $f(-4-x) + f(x) = 4+x-1 - \frac{1}{-x-4+2} - x - 1 - \frac{1}{x+2} = 4+x-1 + \frac{1}{x+2} - x - 1 - \frac{1}{x+2} = 2 \times (1)$
 أي $\Omega(-2;1)$ مركز تناظر لمنحنى الدالة f ،
 برسم منحنى الدالة f نتأكد من كل ما سبق:



قال:

عمر بن الخطاب "رضي الله عنه":

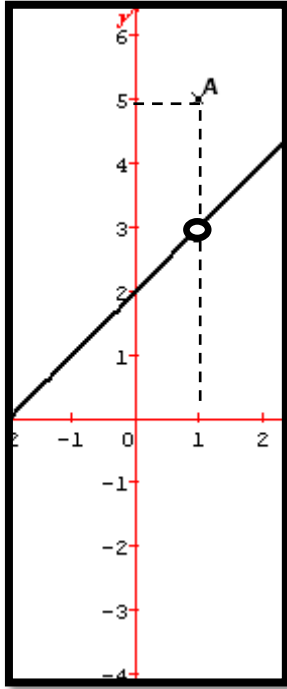
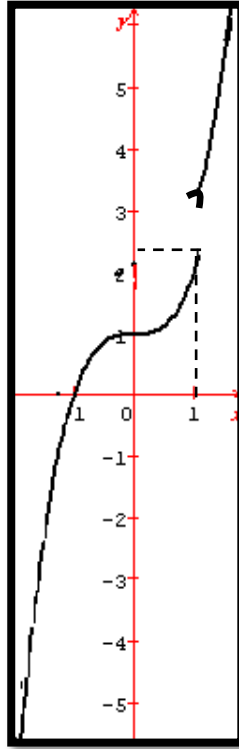
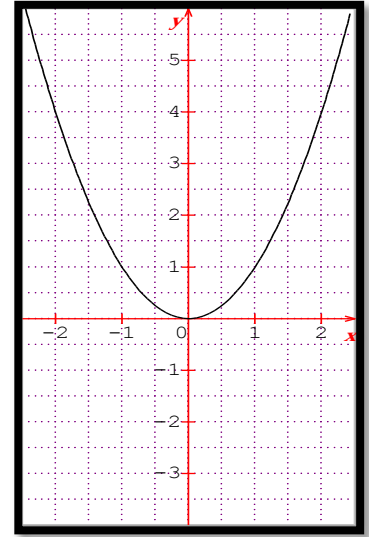
تعلّم فليس المرء يولد عالماً وليس أخو علم كمن هو جاهل
 فإنّ كبير القوم لا علم عنده صغير إذا التفّت عليه المحافل

أهداف الدرس الثالث:

- استمرارية دالة عند قيمة،
- الاستمرار على يمين و يسار قيمة،
- الاستمرار على مجال.

الدرس الثالث:

نشاط استكشافي:

إليك التمثيل البياني للدوال h, g, f :التمثيل البياني لـ h ،التمثيل البياني لـ g ،التمثيل البياني لـ f ،

- (1) أين من التمثيلات البيانية السابقة يمكن رسمه دون رفع القلم،
- (2) قارن بين: $f(1)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ثم $g(1)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ ثم $h(1)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$ من حيث المساواة،
- (3) هل توجد علاقة بين رسم البيانات السابقة دون رفع القلم والنهايات ؟

تعليق:

البيانان الممثلان لـ h و g يمكن رسمهما دون رفع القلم على مجموعة تعريفها عدا النقطة ذات الفاصلة 1.

نلاحظ تطابق النهاية من اليسار عند القيمة 1 و صورته بالنسبة للدالة g ،
نقول أن الدالة g مستمرة على يسار 1.

حل النشاط:

- (1) من الأشكال المعطاة نلاحظ أن التمثيل البياني للدالة f يمكن رسمه دون رفع القلم في حين نضطر إلى القفز في كل من بيان g و بيان h عند النقطة ذات الفاصلة 1،
- (2) لدينا بملاحظة بيانية: $f(1)=1$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=1$ أي $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=f(1)$ و $g(1)=2$ و $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)=3$ و $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) \neq g(1)$ أي: $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) \neq g(1)$ و $h(1)=5$ و $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)=3$ أي: $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) \neq h(1)$ ،
- (3) من الجواب (2) يمكن الإحساس أنه أعطي تفسير رياضي لتلك القفزات (نقول عدم الاستمرارية) في رسم المنحنيين السابقين لـ h, g وهذا:
 - عدم تطابق النهاية من اليمين واليسار عند القيمة 1 بالنسبة للدالة g .
 - عدم تطابق النهاية عند القيمة 1 و صورته بالنسبة للدالة h ،
نقول عندئذ أن الدالتين h, g غير مستمرتين عند 1،
في حين استطعنا رسم المنحنى دون رفع القلم بالنسبة لمنحنى الدالة f وهذا:

• لتطابق النهاية عند النقطة 1 و صورته بالنسبة للدالة f ، نقول أن f مستمرة عند 1،

سؤال 1: هل يمكن تعميم التفسير الرياضي المحصل عليه في حل هذا النشاط لاستمرارية دالة ما عند نقطة كيفية؟

سؤال 2: ماذا عن الاستمرار من اليمين و اليسار؟

سؤال 3: هل يمكن تعريف الاستمرار على مجال معطى؟

بنــــــــاء المعارف:

جواب 1:

تعريف استمرار دالة عند نقطة:

لتكن f دالة معرفة على جزء J من $\mathbb{R}$ ، و I مجال مفتوح من J تنتهي إليه القيمة a
 f مستمر عند a معناه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ أي: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} x\right) = f(a)$ (أو $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$)

ملاحظة 1:

هذا التعريف يوحي لنا بأن f معرفة عند القيمة a و $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجودة في $\mathbb{R}$ (أي عدد حقيقي).

جواب 2:

تعريف استمرار دالة على اليمين:

لتكن f دالة معرفة على جزء J مفتوح من $\mathbb{R}$ يشمل a
 f مستمر على يمين a معناه $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

تعريف استمرار دالة على اليسار:

لتكن f دالة معرفة على جزء J من $\mathbb{R}$ يشمل a
 f مستمر على يسار a معناه $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

ملاحظة 2:

نقول على دالة f أنها مستمرة عند a إذا وفقط إذا كانت مستمرة على يمين و يسار a ،

من التاريخ:

يعتبر مفهوم النهاية و الاستمرار من أصعب المفاهيم من حيث الإدراك، و المراحل التي عاشتها الرياضيات قبل عهد كوشي - شفارتز تؤكد ذلك إذ ظل الرياضياتيون ينتظرون عدة قرون حتى تم تشكيل تعريف شاف و كاف لهذا المفهوم قبل القرن 18.

جواب 3:

f دالة معرفة على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$
 نقول أن f مستمرة على المجال المفتوح I إذا وفقط إذا كانت مستمرة عند كل قيمة منه.

ملاحظات مهمة:

إذا كانت f مستمرة عند a ، و $f(a) > 0$ (على التوالي $f(a) < 0$) فإنه يوجد مجال مفتوح يشمل a حيث تبقى f موجبة تماما داخله (سالبة تماما داخله) نقول الدالة f تحافظ فيه على إشارتها.

تمرين تطبيقي 1:

ادرس استمرارية الدوال التالية على مجموعة تعريفها:

- دالة ثابتة على $\mathbb{R}$ ،
- دالة كثير حدود مع $D_f = \mathbb{R}$ ،
- $f(x) = \cos(x)$ مع $D_f = \mathbb{R}$ ،
- $f(x) = \sin(x)$ مع $D_f = \mathbb{R}$.

حل:

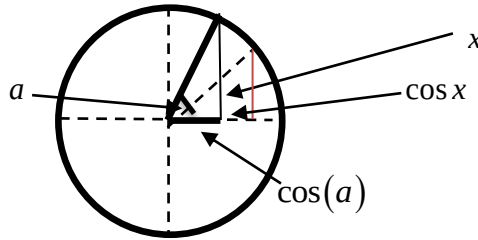
دراسة الاستمرارية:

كون الدالة الثابتة حالة خاصة من دالة كثير الحدود نكتفي بالدراسة:

• دالة كثير حدود أي: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ وليكن a من $\mathbb{R}$ ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) = a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \dots + a_0 = f(a)$$

حسب مفهوم النهاية والجمع،

مع العلم أن $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ،إذن f مستمرة على $\mathbb{R}$ ،• $f(x) = \cos(x)$ مع $D_f = \mathbb{R}$ ،ليكن $a \in \mathbb{R}$ ، من الدائرة يمكن استنتاج: $\lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a)$ أي: f مستمرة على $\mathbb{R}$ ،و بنفس الطريقة يمكن أن نبين استمرار دالة $\sin$ على $\mathbb{R}$ ،

تمرين تطبيقي 2:

لتكن f, g دالتين معرفتين و مستمرتين عند a ،

بين أن:

• $f + g$ مستمرة عند a ،• $f \times g$ مستمرة عند a ،• $\frac{f}{g}$ مستمرة عند a حيث: $g(a) \neq 0$ ، ماذا لو كان: $g(a) = 0$.

حل:

• f, g دالتان مستمرتان عند a ، أي: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ ،

$$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a)$$

حسب مفهوم النهاية والجمع،

إذن $f + g$ مستمرة عند a ،

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a) \times g(a) = (f \times g)(a) \bullet$$

حسب مفهوم النهاية والضرب

إذن $f \times g$ مستمرة عند a ،

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \left(\frac{f}{g} \right)(a) \quad , \quad g(a) \neq 0 \bullet$$

حسب مفهوم النهاية والقسمة،

إذا كان: $g(a) = 0$ تكون الدالة $\frac{f}{g}$ غير معرفة عند a وهذا كاف للحكم أنها غير مستمرة عند a .

تمرين تطبيقي 3:

• لتكن f, g دالتين معرفتين و مستمرتين عند a و $f(a)$ على التوالي،

بين أن $g \circ f$ مستمرة عند a ،

هل توجد دالة ليست مستمرة عند أي قيمة من مجموعة تعريفها؟

حل:

• لدينا: f مستمر عند a معناه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \beta$ و g مستمرة عند $f(a)$ معناه: $\lim_{x \rightarrow f(a)} g(x) = g(f(a)) = \delta$

و عليه تصبح نهاية الدالة $g \circ f$ حسب أحد المبرهنات المذكورة في الدرس 2: $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \delta = (g \circ f)(a)$

أي $g \circ f$ مستمرة عند a .

• طرح هذا السؤال من قبل أسلافنا و قد اهتموا إلى أمثلة تبين وجود دوال غير مستمرة عند كل قيمة من مجموعة تعريفها،
نأخذ على سبيل المثال:

$$\bullet \varphi(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{Q} \\ 1 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \text{ هذه الدالة معرفة على } \mathbb{R} \text{ ، نلاحظ أننا عندما نأخذ: } a \in \mathbb{R} \text{ نجد: } \varphi(a) = 0 \text{ أو } \varphi(a) = 1$$

لكن النهاية $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ غير موجودة (متذبذبة بين القيمتين 0 و 1، أي لا تستقر عند قيمة)،

و هذا كاف للقول أن: φ غير مستمرة من أجل كل قيمة من $\mathbb{R}$ ،

"إن التطبيقات السابقة سوف نعتمدها خواصا تستعمل في المستقبل و دون برهان"

على قدر أهل العزم تأتي العزائم
وتأتي على قدر الكرام المكارم
وتعظم في عين الصغير صغارها
وتصغر في عين العظيم العظائم

أبو الطيب المتنبي

أهداف الدرس الرابع:

- أهم مبرهنة في الاستمرار "مبرهنة القيم المتوسطة"،
- تطبيقاتها في إثبات قبول معادلات حلولا في $\mathbb{R}$.

الدرس الرابع:

نشاط استكشافي:

- لتكن f دالة معرفة و مستمرة، و متناقصة تماما على المجال $[-2; 4]$ ، لدينا المتباينة $f(-2) > 3 > f(4)$ ، و لتكن المجموعة A الجزئية من $[-2; 4]$ حيث: $A = \{x \in [-2; 4], f(x) > 3\}$ ،
- (1) بين أن هذه المجموعة غير خالية،
 - (2) اذكر عنصر من المجال $[-2; 4]$ لا ينتمي إلى A ،
 - (3) ليكن $c \in [-2; 4]$ أصغر عدد لا ينتمي للمجموعة A ،
 (أ) بين أنه إذا كان $f(c) < 3$ لا يكون c أصغر عدد لا ينتمي للمجموعة A ،
 (ب) استنتج أن $f(c) = 3$ و اذكر التفسير الهندسي للنتيجة المحصل عليها،
 - (4) بين أن العدد c وحيد في هذه الحالة (إرشاد: استعمل تناقص الدالة f)،
 - (5) اكتب خلاصة.

حل النشاط:

f معرفة و مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[-2; 4]$ ، و $f(-2) > 3 > f(4)$ (*) ولدينا المجموعة:

$$A = \{x \in [-2; 4], f(x) > 3\}$$

- (1) من (*) لدينا $f(-2) > 3 > f(4)$ أي: $-2 \in A$ و منه المجموعة A غير خالية،
- (2) من (*) لدينا كذلك $f(4) < 3$ أي: $4 \notin A$ ،
- (3) من $c \in [-2; 4]$ أصغر عدد لا ينتمي للمجموعة A ، نلاحظ أن كل عنصر أكبر من c لا ينتمي إلى A كون f الدالة متناقصة تماما على المجال $[-2; 4]$ ، إليك هذا التوضيح مع $\alpha > c$ مع $\alpha \in [-2; 4]$ ، أي: $f(\alpha) < f(c) \leq 3$ ،
 (أ) نضع: $g(x) = f(x) - 3$ ، يمكن ملاحظة أن الدالة g دالة مستمرة على المجال $[-2; 4]$ كونها مجموع دالتين الأولى الدالة f المستمرة فرضا و الثانية الدالة الثابتة و التي أثبتنا استمرارها، ومن الفرض $f(c) < 3$ نستنتج أن $g(c) < 0$ من الاستمرار نستنتج أنه يوجد مجال مفتوح ينتمي إليه c تحافظ g بإشارتها السالبة داخله،
 أي وجد عدد c_1 يحقق $c_1 < c$ حيث $g(c_1) < 0$ أي: $f(c_1) < 3$ و هذا تناقض كون c أصغر عنصر لا ينتمي إلى A ،
 (ب) من (أ) يمكن أن نستنتج $f(c) = 3$ ،
- (4) التفسير الهندسي: المستقيم ذو المعادلة $y = 3$ يقطع منحنى الدالة f في النقطة ذات الفاصلة c ،
- (5) لنستعمل الخلف و لنفرض وجود c' يختلف على c حيث: $f(c') = 3$ نلاحظ أن $c' > c$ كون c أصغر عنصر، و من تناقص الدالة f أمكن كتابة $3 = f(c') < f(c) = 3$ أي: $3 < 3$ وهذا تناقض منطقي، و منـه وحدانية العدد c ،

خلاصة:

f دالة مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[-2; 4]$ و $f(-2) > 3 > f(4)$ يوجد و وحيد عدد حقيقي $c \in [-2; 4]$ حيث: $f(c) = 3$ ،

سؤال: هل خلاصة النشاط صحيحة دوما؟

بناء المعارف:**جواب:** إليك هاته المبرهنة:**مبرهنة القيم المتوسطة:**

f دالة معرفة على المجال $[a; b]$ ، و مستمرة على المجال $[a; b]$ و k عدد حقيقي محصور بين: $f(a), f(b)$ ،
عندئذ يوجد على الأقل عدد حقيقي c من $[a; b]$ حيث: $f(c) = k$.

مساعدة للبرهان:

يمكن تقسيم المجال $[a; b]$ إلى مجالات جزئية تكون f رتيبة على كل منها، متبعا نفس الخطوات المذكورة في النشاط ثبتت هذه المبرهنة،

من التاريخ:

تعد مبرهنة القيم المتوسطة من أهم المبرهنات في باب الدوال المستمرة. وقد برهن عليها في الربع الأول من القرن التاسع عشر من طرف التشيكي بولزانو و الفرنسي كوشي و يمكن شرح هذه المبرهنة - بشكل بسيط - كالتالي: إنه لا يمكن المرور من ضفة نهـر إلى أخرى دون قفز و دون أن تبذل أقدامنا، وهذا مانعـبر عنه رياضيا بـ إذا أخذت الدالة إشارتين مختلفتين عند القيمتين a, b فإن هذه الدالة تتعدم على الأقل مرة واحدة في المجال $[a, b]$.

حالة خاصة و مهمة:

f دالة معرفة على المجال $[a; b]$ ، و مستمرة على المجال $[a; b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$ و
يوجد على الأقل c من $[a; b]$ حيث: $f(c) = 0$
(يفضل البعض تسمية هاته الحالة بمبرهنة القيم المتوسطة في حين المبرهنة السابقة بالنقطة المتوسطة).

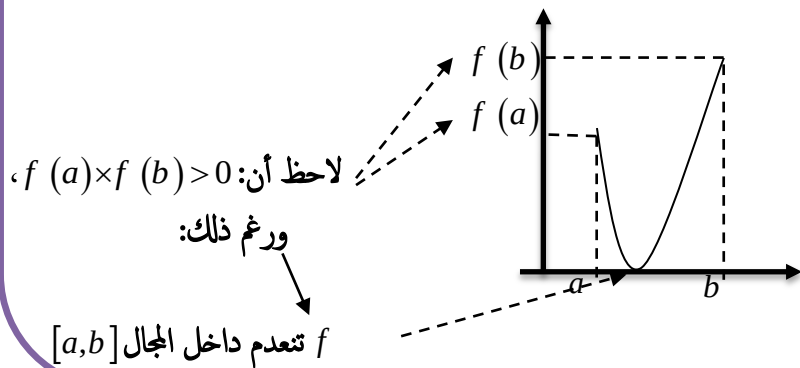
ملاحظة 1:

إذا كانت الدالة f رتيبة تماما على المجال $[a; b]$ فإن الحل يكون وحيدا كما لاحظنا في النشاط.

ملاحظة 2:

شروط مبرهنة القيم المتوسطة، كافية و ليست لازمة، بمعنى:

يمكن أن تقبل المعادلة $f(x) = 0$ حـلا في المجال $[a, b]$ ، دون أن يكون $f(a) \times f(b) < 0$ ، كما نشاهد في الشكل: (طبعا الدالة f مستمرة على هذا المجال)،

**ملاحظة 3 مهمة:**

يمكن استبدال الشرط $f(a) \times f(b) < 0$ بـ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow b} f(x) < 0$ أو $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \times f(b) < 0$ أو $f(a) \times \lim_{x \rightarrow b} f(x) < 0$ وهذا حسب الحاجة في كل تمرين.

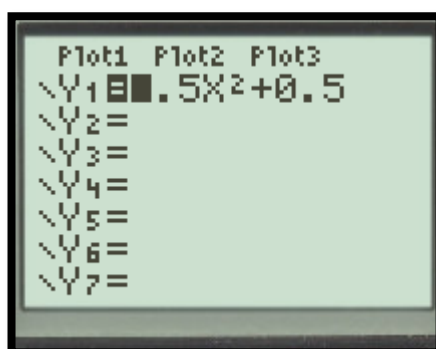
ملاحظة 4:

مبرهنة القيم المتوسطة تبين وجود حل دون الحصول على قيمته صراحة وهذا عموماً، لذلك نلجأ إلى طرق عديدة من بينها:
- طريقة التنصيف (لاحظ التطبيق 2)، - طرق عددية وتعتمد على المتتاليات العددية، أو نستعمل الآلة الحاسبة البيانية كما يلي:

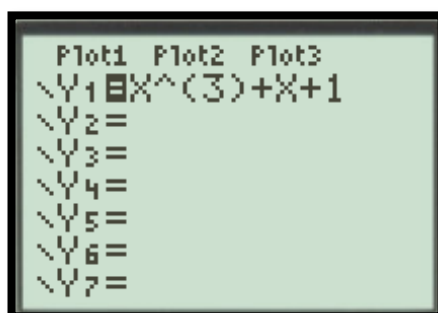
Ti 83

(A) رسم بيان الدالة :

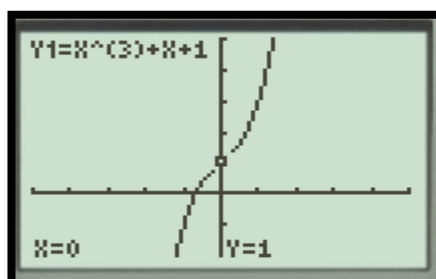
بالضغط على الأيقونة:  ، يظهر :



تقوم بكتابة عبارة الدالة f مثلاً نختار $f(x) = x^3 + x + 1$ ،

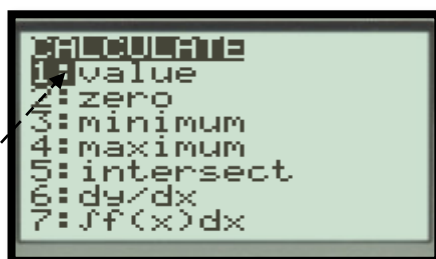


ثم نضغط على الأيقونة:  ، فنحصل على المنحنى كما بالشكل:



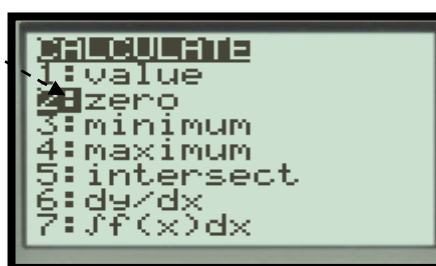
(B) تعيين قيمة مقربة للحل α :

نضغط على الأيقونة:  ، ثم الأيقونة:  فنحصل على:

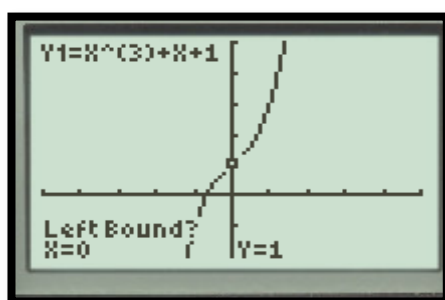


لاحظ التغير،

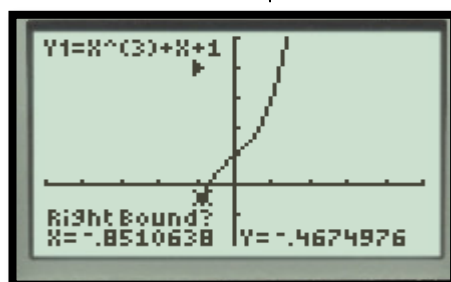
و نضغط على الأيقونة:  لنحصل على:



ثم نضغط على الأيقونة:  لنحصل على:

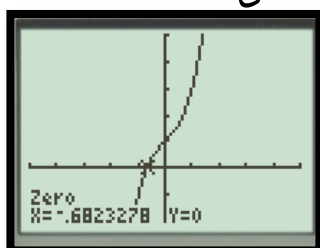


و باستعمال:  أو:  نعين فاصلة أصغر من α ، ثم نقر على:  فنحصل على:



و في نفس الشكل الأخير نعين فاصلة أكبر من α ، ثم نضغط على: 

أخيرا نضغط مرة أخرى على:  لنحصل على:



$$\alpha \approx -0.6823278$$

تمرين تطبيقي 01:

$f(x) = x + 1 + \frac{4}{(x+2)^2}$ دالة عددية حيث:

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ،

(1) احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف،

(2) احسب $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+1))$ ، ماذا تستنتج؟

(3) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل على الأقل في نقطة فاصلتها x_0 حيث: $-4 < x_0 < -3$.

حل:

لدينا:

$$D_f =]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$$

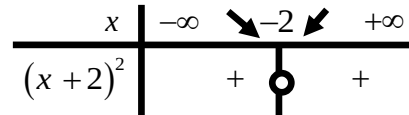
(1) حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + 1 + \frac{4}{(x+2)^2} \right) = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 + \frac{4}{(x+2)^2} \right) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(x + 1 + \frac{4}{(x+2)^2} \right) = -1 + \frac{4}{0^2} = +\infty$$

أو ندرس إشارة $(x+2)^2$:



(2) نعني بالكتابة $|x| \rightarrow +\infty$ إما $x \rightarrow +\infty$ أو $x \rightarrow -\infty$ ، لدينا:

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{(x+2)^2} \right) = 0$$

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل في جوار $-\infty$ أو $+\infty$ ،

(3) لنبين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل على الأقل في نقطة فاصلتها x_0 :

أي هل يوجد $x_0 \in]-4; -3[$ حيث: $f(x_0) = 0$ ؟

$$\text{لدينا: } f(-4) = -4 + 1 + \frac{4}{4} = -2 \text{ و } f(-3) = -3 + 1 + \frac{4}{1} = 2 \text{ إذن: } f(-3) \times f(-4) < 0$$

نلاحظ أن الدالة f مستمرة على المجال $]-4; -3[$ كونها مجموع و ضرب دوال مستمرة على المجال السابق،

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل $x_0 \in]-4; -3[$ حيث: $f(x_0) = 0$.

سؤال: هل الحل المذكور سابقا وحيد؟

تمرين تطبيقي 02:

1 * بين أن المعادلة: $x^3 + 2 = 0$ تقبل حلا وحيدا α حقيقيا،

2 * أ) عين حصرا له في مجال سعته 0.5،

ب) عين قيمة تقريبية للحل بدقة 10^{-1} .

حل:

1 * نضع: $f(x) = x^3 + 2$ ، f معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ و

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < 0$ هذا من جهة ومن جهة أخرى

ليكن: $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ، $x_1 < x_2$ أي: $x_1^3 < x_2^3$ (الدالة مكعب متزايدة تماما) و منه $x_1^3 + 2 < x_2^3 + 2$ ، الدالة f دالة متزايدة تماما، إذن حسب نظرية القيم المتوسطة يوجد و وحيد $\alpha \in \mathbb{R}$ حيث: $f(\alpha) = 0$ أي المعادلة تقبل حلا حقيقيا و وحيدا،

2 * ب) الحصر:

يمكن أن نلاحظ: $f(0) = 2 > 0$ أي $\alpha \in]-\infty; 0[$ (هذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة)،

وكذلك: $f(-1) = 1 > 0$ أي: $\alpha \in]-\infty; -1[$ (و هذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة)،

و $f(-2) = -8 + 2 = -6 < 0$ أي: $\alpha \in]-2; -1[$ طول هذا المجال $-1 - (-2) = 1$ ،

تذكر:

طول المجال: $[a; b]$ هو: $b - a$ ،
مركز المجال: $[a; b]$ هو: $\frac{a+b}{2}$ ،
طول نصف قطر المجال: $[a; b]$ هو: $\frac{b-a}{2}$ ،

مركز المجال: $]-2; -1[$ هو $-\frac{3}{2}$ ، و $f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} + \frac{16}{8} = -\frac{11}{8} < 0$ أي: $\alpha \in \left]-\frac{3}{2}; -1\right[$ و طول هذا المجال:

$\alpha \in \left]-\frac{3}{2}; -1\right[$ و منه المجال المطلوب: $-1 + \frac{3}{2} = 0.5$

ب) قيمة تقريبية للحل بدقة 10^{-1} :

نواصل الحصر السابق حتى نصل إلى مجال، طرفاه عددا حقيقيان يشتركان في رقم بعد الفاصلة طبعا في كتابتهما العشرية،

مركز المجال: $\left]-\frac{3}{2}; -1\right[$ هو $-\frac{5}{4}$ ، و $f\left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{125}{64} + \frac{128}{64} = \frac{3}{64} > 0$ أي: $\alpha \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{5}{4}\right]$
 $\approx -1.5 \quad \approx -1.25$

مركز المجال $\left[-\frac{3}{2}; -\frac{5}{4}\right]$ هو: $-\frac{11}{8}$ ، و $f\left(-\frac{11}{8}\right) = -\frac{1331}{512} + \frac{1024}{512} = -\frac{307}{512} < 0$ أي: $\alpha \in \left[-\frac{11}{8}; -\frac{5}{4}\right]$
 $\approx -1.375 \quad \approx -1.25$

$$\alpha \in \left[-\frac{21}{16}; -\frac{5}{4} \right] \approx \left[-1.31; -1.25 \right] \text{ مركز المجال } \left[-\frac{11}{8}; -\frac{5}{4} \right] \text{ هو: } -\frac{21}{16}, \text{ و } f\left(-\frac{21}{16}\right) = -\frac{9261}{4096} + \frac{8192}{4096} = -\frac{1069}{4096} < 0 \text{ أي: } \\ \alpha \in \left[-\frac{41}{32}; -\frac{5}{4} \right] \approx \left[-1.281; -1.25 \right] \text{ مركز المجال } \left[-\frac{21}{16}; -\frac{5}{4} \right] \text{ هو: } -\frac{41}{32}, \text{ و } f\left(-\frac{41}{32}\right) = -\frac{68921}{32768} + \frac{65536}{32768} = -\frac{3385}{32768} < 0 \text{ أي: } \\ \text{أي القيمة التقريبية المطلوبة هي: } \alpha \approx -1.2.$$

و باستعمال الحاسبة البيانية نجد: $x = -1.259921$.

يمكن أن نعين قima تقريبية للحل بالدقة التي تطلب منا، وهذا باستعمال الطريقة السابقة وتسمى "طريقة التنصيف".

إليك الطريقة بشكلها العام:

نفرض أننا بينا باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة أن الحل يحقق: $\alpha \in]a_0; b_0[$ ، نعلم أن $\frac{a_0+b_0}{2}$ مركز المجال السابق، وبملاحظة إشارة $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right)$ ، يمكن أن نضع $\alpha \in]a_1; b_1[$ مع العلم أن طول هذا المجال $\frac{b_0-a_0}{2}$ ، وبتكرار العملية السابقة n مرة نجد: $\alpha \in]a_n; b_n[$ مع العلم أن طول هذا المجال $\frac{b_0-a_0}{2^n}$ ، يمكن أن نستنتج من كل هذا، عدد المرات اللازمة للتقسيم حتى نحصل على دقة تقل أو تساوي عددا حقيقيا $\varepsilon > 0$ أي: $\frac{b_0-a_0}{2^n} \leq \varepsilon$ معناه: $2^n \geq \frac{b_0-a_0}{\varepsilon}$ ، مثلا في التمرين التطبيقي السابق بينا أن $\alpha \in]-2; -1[$ يمكن معرفة عدد المرات التي يجب القيام بها للإجابة على السؤال (أ - 2) أي: $\frac{-1+2}{2^n} = 0.5$ ومنه: $2^n = 2$ و بالتالي: $n = 1$.

تمرين تطبيقي 03:

f دالة مستمرة ومعرفة على المجال I حيث: $I = [0; 1]$ بحيث من أجل كل x من I : $f(x) \in]0; 1[$ ، بين أنه يوجد على الأقل عدد حقيقي α من I بحيث: $f(\alpha) = \alpha$.

حل:

f دالة مستمرة ومعرفة على المجال: I بحيث من أجل كل x من I : $f(x) \in]0; 1[$ ، نضع: $g(x) = f(x) - x$ ، g دالة مستمرة على المجال I كونها مجموع دالتين مستمرتين على نفس المجال، و $g(0) = f(0) \in]0; 1[$ أي: $g(0) > 0$ و $g(1) = f(1) - 1 < 0$ و لما كان: $f(1) \in]0; 1[$ معناه $0 < f(1) < 1$ أي $-1 < f(1) - 1 < 0$ و عليه $g(1) < 0$ ومنه أمكن كتابة: $g(0) \times g(1) < 0$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل $\alpha \in]0; 1[$ حيث: $g(\alpha) = 0$ و بالتالي: $f(\alpha) = \alpha$ و. ه. م.

تمارين حول:

* النهايات،

* المستقيمات المقاربة،

* الاستمرارية،

* مبرهنة القيم المتوسطة.

محاولاتك مهمة،

النهايات والمستقيمات المقاربة:

التمرين 01:

احسب النهايات التالية:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + \sqrt{x}}{x - 1}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{-3x^3 - 1} + x \sqrt[3]{3} \right)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{\sqrt[3]{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x + 2} - 2}{x + 1} \right)$$

حل:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + \sqrt{x}}{x - 1} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

حالة عدم التعيين،

إزالتها: باستعمال العامل المشترك نجد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + \sqrt{x}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 - \frac{1}{x}} = 4$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt[3]{-3x^3 - 1} + x \sqrt[3]{3} \right) = -\infty + \infty \longrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-1}{(-3x^3 - 1)^{\frac{2}{3}} + (\sqrt[3]{-3x^3 - 1}) \times (x \sqrt[3]{3}) + (x \sqrt[3]{3})^2} \right) = 0$$

حالة عدم التعيين،

تذكر أن:

لأن:

$$(a^3 + b^3) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$، a + b = \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2} \text{ ومنه:}$$

$$a = \sqrt[3]{-3x^3 - 1} ; b = x \sqrt[3]{3} \text{ نضع:}$$

$$\sqrt[3]{-3x^3 - 1} + x \sqrt[3]{3} = \frac{-3x^3 - 1 + 3x^3}{(-3x^3 - 1)^{\frac{2}{3}} + (\sqrt[3]{-3x^3 - 1}) \times (x \sqrt[3]{3}) + (x \sqrt[3]{3})^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{\sqrt[3]{x^2 - 1} + \sqrt[3]{x + 2} - 2}{x + 1} \right) = \frac{-1}{0} = +\infty$$

(3)

لأن $x < -1$ معناه: $x + 1 < 0$.

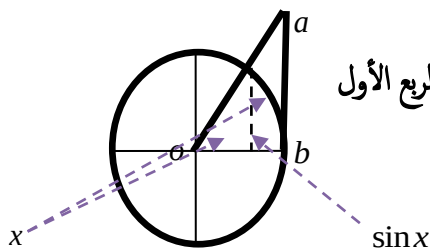
التمرين 02:

احسب النهايات التالية:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x) \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

حل:

حساب النهايات:



• من الدائرة المثلثية يمكن ملاحظة: $\sin x \leq x$ من أجل كل $x \neq 0$ (بالراديان) من الربع الأول أي: $\frac{\sin x}{x} \leq 1$ (1) ولدينا كذلك من المثلث الكبير oab : $\cos x = \frac{1}{oa}$

و $\sin x = \frac{ab}{oa} \geq x \frac{1}{oa} = x \cos x$ أي: $\frac{\sin x}{x} \geq \cos x$ (2)

من (1) و (2) نستنتج $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ عند المرور إلى النهاية يجعل $x \rightarrow 0$ نجد وباستعمال نظريات الحصر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

و بطريقة مماثلة "ترك للقارئ" نجد $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ أي: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

ملاحظة: يمكن حساب النهاية السابقة باستعمال مفهوم "الاشتقاق" لاحظ التمرين 02 صفحة 128،

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)} \right) = 0$$

حسب دساتير التحويل الباب الأول،

حسب النهاية الأولى و هذا بتغيير المتغير بوضع: $t = \frac{x}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

النهاية الأولى و هذا بتغيير المتغير بوضع: $t = \frac{x}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x)$$

نضع $x = 2n\pi$ حيث: n من $\mathbb{N}$ تكون عندئذ النهاية: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(2n\pi) = 1$

و من أجل: $x = (2n+1)\pi$ نجد النهاية -1 إذن النهاية تتعلق بمسار x إلى $+\infty$

أي $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x)$ لا تستقر عند قيمة و بالتالي النهاية غير موجودة عند $+\infty$

• كذلك يمكن أن نبين عدم وجود $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$ بنفس الطريقة باختيار زوايا مناسبة مثلا $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ مرة و $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$

مرة أخرى "ترك الحسابات للقارئ".

التمرين 03:

احسب نهايات الدوال التالية على حدود مجموعة التعريف:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{x+2}{(x-1)^2} \\
 f(x) &= \frac{2x^2}{(x-1)(2-x)} \\
 f(x) &= \sqrt{x} + \frac{5}{x} \\
 f(x) &= x + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x-2} \\
 f(x) &= x^2 + 1 - \frac{1}{(1-x)^2} \\
 f(x) &= \frac{x^3}{x^2+1} \\
 f(x) &= 7x^3 - 2x^2 + 3x - 1 \\
 f(x) &= \frac{x+1}{\sqrt{x}-1} \\
 f(x) &= \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}
 \end{aligned}$$

حل:

حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف:

$$f(x) = \frac{x+2}{(x-1)^2}$$

f معرفة معناه: $(x-1)^2 \neq 0$ أي: $x-1 \neq 0$ وبالتالي: $x \neq 1$ أي: $D_f = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

كثير حدود على كثير حدود والنهاية عند ∞

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{(x-1)^2} = \frac{3}{0^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$(x-1)^2$	$+$	0	$+$

أو ندرس إشارة المقام:

0^2 نقصد به أنه عندما يقترب x من 1 تقترب الكمية $(x-1)^2$ من قيم قريبة من الصفر وتزيد اقترابها من الصفر بإشارة موجبة،

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x-1)(2-x)}$$

f معرفة معناه: $(x-1) \times (2-x) \neq 0$ أي: $x \neq 1$ و $x \neq 2$ ومنه: $D_f = \mathbb{R} - \{1; 2\} =]-\infty; 1[\cup]1; 2[\cup]2; +\infty[$

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{(x-1)(2-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{-x^2} = -2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

يمكن إعطاء تفسير هندسي لهاته النهاية: المستقيم الذي معادلته $y = -2$ مقارب أفقي لمنحنى الدالة f في جوار $-\infty$ أو $+\infty$ ،

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2}{(x-1)(2-x)} = \frac{2}{0}$$

نقوم بدراسة إشارة المقام:

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & & -\infty & & 1 & & 2 & & +\infty \\ \hline (x-1)(2-x) & & - & & 0 & + & 0 & - & \end{array}$$

عند ملاحظة الجدول:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{8}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{8}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

نستنتج أن المستقيمين الذين معادلتها $x = 1$ و $x = 2$ مستقيمان مقاربان عموديان لبيان الدالة f .

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{5}{x} \quad \bullet$$

f معرفة معناه: أي: $x \geq 0$ و $x \neq 0$ أي: $x > 0$ ومنه: $D_f =]0; +\infty[$ ،

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{x} + \frac{5}{x} \right) = 0 + \frac{5}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} + \frac{5}{x} \right) = +\infty + 0 = +\infty$$

$$f(x) = x + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x-2} \quad \bullet$$

f معرفة معناه: أي: $x \neq 1$ و $x \neq 2$ أي: $D_f = \mathbb{R} - \{1; 2\} =]-\infty; 1[\cup]1; 2[\cup]2; +\infty[$ ،

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x-2} \right) = -\infty + 0 - 0 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x-2} \right) = +\infty + 0 - 0 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(x + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x-2} \right) = 1 + \frac{1}{0} - \frac{1}{-1}$$

إذن:

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & & -\infty & & 1 & & +\infty \\ \hline 1-x & & + & & 0 & & - \end{array}$$

بدراسة إشارة $1-x$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 + \frac{1}{0^+} - \frac{1}{-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + \frac{1}{0^-} - \frac{1}{-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(x + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{x-2} \right) = 1 - \frac{1}{0}$$

إذن:

$$\begin{array}{c|ccc} x & -\infty & \rightarrow 2 & \leftarrow +\infty \\ \hline x-2 & & - & 0 & + \end{array}$$

بدراسة إشارة $x-2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 - \frac{1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 - \frac{1}{0^+} = -\infty$$

$$f(x) = x^2 + 1 - \frac{1}{(1-x)^2}$$

f معرفة معناه: $(1-x)^2 \neq 0$ أي: $1-x \neq 0$ أي: $x \neq 1$ ومنه $D_f = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^2 + 1 - \frac{1}{(1-x)^2} \right) = +\infty + 1 - 0 = +\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(x^2 + 1 - \frac{1}{(1-x)^2} \right) = 2 - \frac{1}{0^2} = -\infty$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

f معرفة معناه: $x^2 + 1 \neq 0$ وهذا محقق من أجل كل عدد حقيقي x أي: $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$f(x) = 7x^3 - 2x^2 + 3x - 1$$

f معرفة من أجل كل عدد حقيقي أي: $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^3 - 2x^2 + 3x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (7x^3 - 2x^2 + 3x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (7x^3) = +\infty$$

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-1}$$

f معرفة معناه $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases}$ أي: $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$ ومنه: $D_f = [0; 1[\cup]1; +\infty[$

أي: $f(0) = -1$ ، و $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{2}{0}$ نقوم بدراسة إشارة المقام:

لدينا: $x \geq 1$ معناه $\sqrt{x} \geq 1$ أي: $\sqrt{x} - 1 \geq 0$ ، و $0 \leq x < 1$ معناه $\sqrt{x} \leq 1$ أي: $\sqrt{x} - 1 < 0$ ، أي أمكن إنشاء الجدول:

كون الدالة الجذرية متزايدة

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & +\infty \\ \hline \sqrt{x}-1 & - & 0 & + \end{array}$$

أو يمكن استعمال المرافق أي: $\sqrt{x}-1 = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ أي إشارة $\sqrt{x}-1$ من إشارة $x-1$ مع مراعات أن $x \geq 0$ ،

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}-1} \right) = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}-1} \right) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}-1} \right) = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ حالة عدم التعيين:}$$

نستعمل المرافق:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x}+1) = 1 \times (+\infty) = +\infty$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \bullet$$

$$D_f = [-1; 3[\cup]3; +\infty[\text{ أي: } \begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 3 \end{cases} \text{ معرفة معناه } f$$

النهايات:

$$f(-1) = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} \right) = \frac{0}{0} \text{ حالة عدم التعيين:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4} \text{ إلزالتها باستعمال المرافق:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ حالة عدم التعيين:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = 0 \text{ إلزالتها:}$$

التمرين 04:

f دالة عددية تحقق من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x > 1$:

$$\frac{3x + \cos x}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x + 7}{x-1}$$

ما هي نهاية f عند $+\infty$.

حل:

لما كانت الدالة f تحقق: $\frac{3x + \cos x}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x + 7}{x-1}$ من أجل كل x أكبر تماماً من 1، عند المرور إلى النهاية وهذا يجعل $x \rightarrow +\infty$ نجد:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \cos(x)}{x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 7}{x - 1}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \Downarrow & \downarrow \\ 3 & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 & 3 \end{array}$$

توضيح:

$$\text{(هذا لأن: من أجل كل } x > 1 > 0 \text{, } \frac{3x - 1}{x} \leq \frac{3x + \cos(x)}{x} \leq \frac{3x + 1}{x} \text{)}$$

التمرين 05:

احسب نهاية الدالة f عند حدود مجموعة التعريف، مع دراسة المستقيمات المقاربة في كل حالة من الحالات التالية:

$$\bullet \quad f(x) = 2x + 3 + \frac{10}{x+1} \quad \text{و} \quad \bullet \quad f(x) = -x + 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\bullet \quad f(x) = x + \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{و} \quad \bullet \quad f(x) = \frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 4}$$

$$\bullet \quad f(x) = \frac{x^3 - 3x - 5}{(x+1)^2}$$

حل:

$$\bullet \quad D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[, \quad f(x) = 2x + 3 + \frac{10}{x+1}$$

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{10}{x+1} = 0$ أي منحنى الدالة f يقبل المستقيم الذي معادلته $y = 2x + 3$ كقارب له في جوار $+\infty$ أو $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(2x + 3 + \frac{10}{x+1} \right) = 1 + \frac{10}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(2x + 3 + \frac{10}{x+1} \right) = 1 + \frac{10}{0^+} = +\infty$$

نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x = -1$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة f .

$$\bullet \quad D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[, \quad f(x) = -x + 1 - \frac{1}{x^2}$$

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + 1 - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + 1 - \frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-1}{x^2} \right) = 0$ أي منحنى الدالة f يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً في جوار $+\infty$ أو $-\infty$ معادلته من الشكل: $y = -x + 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-x + 1 - \frac{1}{x^2} \right) = 1 - \frac{1}{0^2} = 1 - \frac{1}{0^+} = -\infty$$

نستنتج من هاته النهاية أن المستقيم ذا المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة f ،

$$D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[, f(x) = x + \frac{\sin(x)}{x} \bullet$$

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{\sin x}{x} \right) = -\infty , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{\sin x}{x} \right) = +\infty , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ أي منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا في جوار $+\infty$ أو $-\infty$ معادلته من الشكل: $y = x$ ،

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 0 + 1 = 1$$

منحنى الدالة f ينطلق بالقرب من النقطة $(0;1)$ ،

$$D_f =]-\infty; 4[\cup]4; +\infty[, f(x) = \frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 4} \bullet$$

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

ونلاحظ أن: $\frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 4} = \frac{2(x - 4)^2 + 9x - 35}{x - 4} = 2x - 8 + \frac{9x - 36 + 1}{x - 4} = 2x + 1 + \frac{1}{x - 4}$ من أجل كل: $x \in \mathbb{R} - \{4\}$

و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x - 4} \right) = 0$ أي أمكن استنتاج أن: $y = 2x + 1$ مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة f في جوار $\pm\infty$ ،

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 4} = \frac{1}{0}$$

بدراسة إشارة المقام:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 4} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x^2 - 7x - 3}{x - 4} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{array} \right. \text{ أي:}$$

$x = 4$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f ،

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[, f(x) = \frac{x^3 - 3x - 5}{(x + 1)^2} \bullet$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x - 5}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x - 5}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x - 5 & x^2 + 2x + 1 \\ - (x^3 + 2x^2 + x) & x - 2 \\ \hline -2x^2 - 4x - 5 & \\ - (-2x^2 - 4x - 2) & \\ \hline -3 & \end{array}$$

ولدينا:

$$\text{أي: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3}{(x+1)^2} = 0 \text{ و } x \in \mathbb{R} - \{-1\} \text{ من أجل كل } \frac{x^3 - 3x - 5}{(x+1)^2} = x - 2 - \frac{3}{(x+1)^2}$$

و منه المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب لمنحنى الدالة f في $-\infty$ و $+\infty$ ،

و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 5}{(x+1)^2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$ و بالتالي المستقيم الذي معادلته $x = -1$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة f .

التمرين 06

f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي: $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{2x - 1}$

(1) عين مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها،

(2) أوجد الأعداد الحقيقية a ، b ، c حيث:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x - 1}$$

بين أن منحنى الدالة f يقبل مستقيمين مقاربين.

حل:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{2x - 1}$$

(1) مجموعة التعريف:

$$f \text{ معرفة معناه: } 2x - 1 \neq 0 \text{ أي: } x \neq \frac{1}{2} \text{ و منه } D_f =]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 3x}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 3x}{2x - 1} = \frac{2}{0} \rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{2x^2 + 3x}{2x - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2x^2 + 3x}{2x - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

(2) عند استعمال القسمة مثلاً:

$$\begin{array}{r|l}
 2x^2 + 3x & 2x - 1 \\
 -(2x^2 - x) & x + 2 \\
 \hline
 4x & \\
 -(4x - 2) & \\
 \hline
 2 &
 \end{array}$$

أي: $\frac{2x^2 + 3x}{2x - 1} = x + 2 + \frac{2}{2x - 1}$ من أجل كل x من $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ ،
و منه: $a=1$ ، $b=2$ ، $c=2$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2x - 1} = 0$ ، إذن: $y = x + 2$ معادلة مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة f في $+\infty$ ،
من النهايات المحسوبة سابقاً نستنتج أن $x = \frac{1}{2}$ هي معادلة مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f .

من علماء العرب:

ابن عراق:



هو الأمير أبو نصر منصور بن علي بن عراق، من أهل خوارزم، ولد لعائلة حاكمة في كيلان إيران عام (349هـ - 960م)، وتوفي عام (428هـ - 1036م) بأفغانستان قرب مدينة غزنة، وهو من العلماء المسلمين المختصين في الرياضيات والفلك، وقد جاءت شهرته بسبب اكتشافه حساب المثلثات.

كان ابن عراق معلماً للبيريوني وزمياً له، وقام وإياه بالعديد من الاكتشافات في علم الرياضيات، وبإهداء العديد من أعمالهما لبعضهما.

تركزت معظم أعمال ابن عراق على الرياضيات، في حين شملت بعض كتاباته الأخرى علم الفلك، وفي علم الرياضيات كانت له كتابات في علم المثلثات، والتي طوّرها عن كتابات بطليموس، كما صوّب ونقّح العديد من النظريات الإغريقية، ومن آثاره المعرفية التي خلفها (رسالة في إصلاح شكر من كتاب منلاوس في الكريات) التي طبعها كراوس في برلين عام 1936م، ومن مؤلفاته كذلك (المجسطي الشاهي)، و(الدوائر التي تحد الساعات الزمانية).

الاستمرارية:

التمرين 07:

لتكن f دالة عددية معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = 2x + b ; & x > 1, \\ f(x) = x^2 + x ; & x \leq 1. \end{cases}$$

عين قيمة b حتى تكون الدالة f مستمرة عند العدد $x_0 = 1$.

حل:

الدالة f مستمرة عند 1 معناه $2 = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 + b = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ فنحصل على المعادلة $2 + b = 2$ معناه: $b = 0$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; x > 1 \\ x^2 + x & ; x \leq 1 \end{cases} \text{ أي عبارة الدالة هي:}$$

التمرين 08:

$$\begin{cases} f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) , & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بالعلاقة:

(1) بين أن $|f(x)| < |x|$ من أجل كل x حيث: $x \neq 0$.(2) استنتج أن f مستمرة عند 0.

حل:

$$(1) \text{ ليكن } x \in \mathbb{R}^* : \text{ لدينا } |f(x)| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| = |x| \times \left| \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \leq |x| \times 1 = |x| \text{ وبالتالي } |f(x)| < |x| \text{ مع } x \neq 0$$

$$(2) \text{ لدينا } f(0) = 0, \text{ لنحسب النهاية: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

من المتباينة السابقة نستنتج $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| \leq \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ (حسب نظريات الحصر) أي: $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0$ ومنه: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ أي: الدالة f مستمرة عند 0.

التمرين 09:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{(1 - \cos x) \sin x}{x^2} , & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

نعتبر الدالة العددية المعرفة بالعلاقة:

(1) هل الدالة f مستمرة عند 0،(2) بين أن $|f(x)| \leq \frac{2}{x^2}$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ ، ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

حل:

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2 \times \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} \times \sin x \right] = \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \right)^2 \times \sin x \right] = \frac{1}{2} \times 1 \times 0 = 0 = f(0)$$

إذن f مستمرة عند 0،

(2) ليكن $x \in \mathbb{R}^*$

$$|a-b| \leq |a| + |b| \text{ أو يمكن الاعتماد على المتباينة } |f(x)| = \left| \frac{(1 - \cos x) \sin x}{x^2} \right| = \left| \frac{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \sin x}{x^2} \right| = 2 \frac{\left| \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \right| \times |\sin x|}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$$

عند المرور إلى النهاية و يجعل $x \rightarrow +\infty$ نجد: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ (حسب نظريات الحصر).

التمرين 10:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

بين أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

حل:

نميز الحالتين:

- $x \neq 0$: تكون $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$ ، عبارة عن جداء دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}^*$ ، فهي مستمرة على $\mathbb{R}^*$.
- $x = 0$:

عند تطبيق تعريف الاستمرار:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{المبراة}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1}+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0 = f(0)$$

ح، ع، ت

أي f مستمرة عند 0،خلاصة: f مستمرة على $\mathbb{R}$.

التمرين 11:

f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2 - a + 3}{x}, & x \leq 2 \\ f(x) = x^2 + 2x - a, & x > 2 \end{cases}$$

عين قيمة a حتى تكون الدالة f مستمرة عند $x_0 = 2$.

حل:

عند استعمال تعريف الاستمرار:

f مستمرة عند 2 **معناه:** $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = \frac{11-a}{2}$ وهذا يكافئ: $\frac{11-a}{2} = 8-a$ معناه $11-a = 16-2a$ و منه $a = 5$ ،
تصبح عبارة الدالة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 2}{x} & , x \leq 2 \\ x^2 + 2x - 5 & , x > 2 \end{cases}$$

التمرين 12:

تعريف:

• نسمي الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x العدد الصحيح n الذي يحقق: $n \leq x < n+1$ و نرمز له بـ $[x] = n$ أو $E(x)$ ،

مثال:

حساب: $[-2.3]$, $[-1]$, $[\sqrt{3}]$, $[11.01]$

لدينا: $E(-2.3) = [-2.3] = -3$ و عليه: $-3 \leq -2.3 < -2$

$E(-1) = [-1] = -1$ و عليه: $-1 \leq -1 < 0$

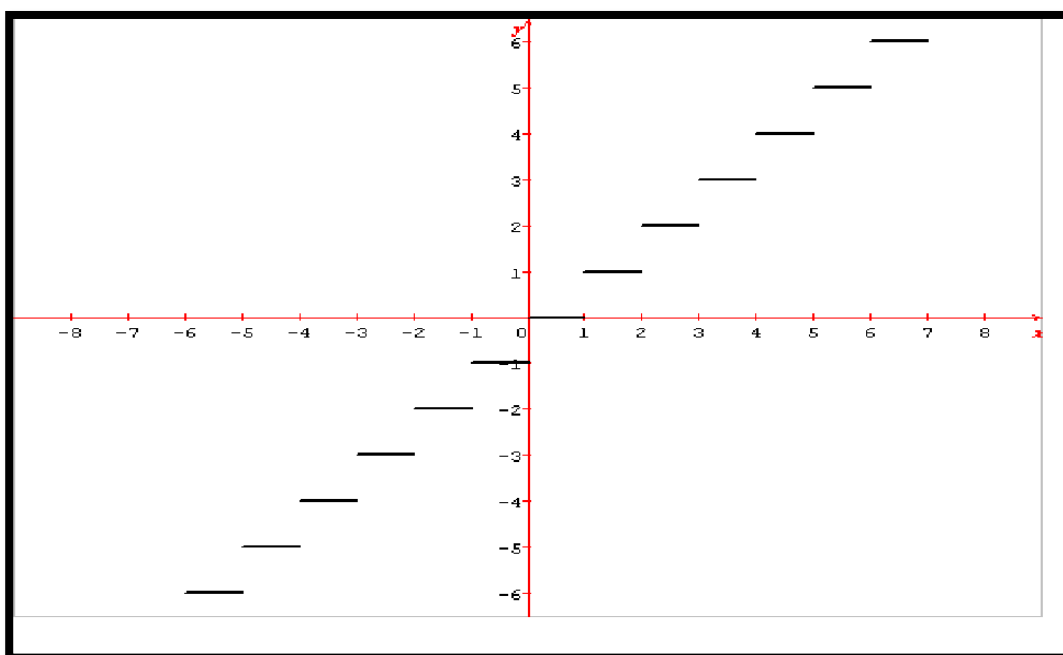
لاحظ من أجل كل عدد n من $\mathbb{Z}$ لدينا: $n \leq n < n+1$ أي يمكن استنتاج: $E(n) = [n] = n$

$E(\sqrt{3}) = [\sqrt{3}] = 1$ و عليه: $1 \leq \sqrt{3} < 2$

$E(11.01) = [11.01] = 11$ و عليه: $11 \leq 11.01 < 12$

• يمكن ملاحظة أن كل عدد حقيقي يملك جزء صحيحا واحدا، أي يمكن تعريف الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ والتي ترفق بكل عدد حقيقي بالجزء الصحيح له،

أي: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون: $f(x) = [x]$ ، و التمثيل البياني لهذه الدالة هو:



أدرس استمرارية الدوال التالية:

(1) $f(x) = [x]$ على $\mathbb{R}$ ،

(2) $f(x) = x([2x] - 2[x])$ على $\mathbb{R}$ ،

(3) $f(x) = [x] \sin(x)$ على $\mathbb{R}$ ،

(4) $g(x) = [x] \sin(\pi x)$ على $\mathbb{R}$ ،

(5) $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{Z} \\ x & , x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ على $\mathbb{R}$

حل:

دراسة استمرارية الدوال:

(1) $f(x) = [x]$ على $\mathbb{R}$

• ليكن $a \in \mathbb{Z}$ لدينا $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^-} [x] = a - 1 \\ \lim_{x \rightarrow a^+} [x] = a \end{cases}$ أي f غير مستمرة عند كل عدد صحيح،

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a^-} [x] = [a] \\ \lim_{x \rightarrow a^+} [x] = [a] \end{cases} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow a} [x] = \lim_{x \rightarrow a} [x] = [a] = f(a) \text{ لدينا } a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \bullet$$

أي f مستمرة عند $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ ،

والتمثيل البياني السابق يؤكد ذلك،

(2) $f(x) = x([2x] - 2[x])$ على $\mathbb{R}$ ،

نكتب الدالة f دون رمز الجزء الصحيح:

• ليكن: $x \in [n; n+1[$ حيث: $n \in \mathbb{Z}$ ، فإن: $[x] = n$

فيكون: $2n \leq 2x < 2n+2$ أي: $2n \leq 2x < 2n+2$ و بالتالي وجب تمييز الحالات:

(أ) $2x = 2n$ (أي: $x = n$) فإن: $[2x] = 2n$ و $[x] = n$

$f(x) = 0$ ، $x = n \in \mathbb{Z}$

(ب) $2x \in]2n; 2n+1[$ (أي: $x \in]n; \frac{2n+1}{2}[$) فإن: $[2x] = 2n$ و $[x] = n$

$f(x) = 0$ ، $x \in]n; \frac{2n+1}{2}[$ ، $n \in \mathbb{Z}$

(ج) $2x \in]2n+1; 2n+2[$ (أي: $x \in]\frac{2n+1}{2}; n+1[$) فإن: $[2x] = 2n+1$ و $[x] = n$

$f(x) = x$ ، $x \in]\frac{2n+1}{2}; n+1[$ ، $n \in \mathbb{Z}$

تذكر أن $\frac{2n+1}{2}$ منتصف القطعة $[n; n+1]$ ،

(د) $2x = 2n+1$ (أي: $x = \frac{2n+1}{2}$) فإن: $[2x] = 2n+1$ و $[x] = n$ ،

$f(x) = x$ ، $x = \frac{2n+1}{2}$ ، $n \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \left[n; \frac{2n+1}{2} \right[\\ x & , x \in \left[\frac{2n+1}{2}; n+1 \right[\end{cases} , \quad n \in \mathbb{Z}$$

والتالي أمكن كتابة:

من الواضح:

- استمرار الدالة f على كل مجال من الشكل: $\left[n; \frac{2n+1}{2} \right[$ لأنها عبارة على دالة ثابتة، حيث $n \in \mathbb{Z}$
- واستمرار الدالة f على كل مجال من الشكل: $\left[\frac{2n+1}{2}; n+1 \right[$ لأنها دالة خطية، حيث $n \in \mathbb{Z}$

لندرس الاستمرارية عند $n \in \mathbb{Z}$ و $\frac{2n+1}{2}$:

$n \in \mathbb{Z}$:

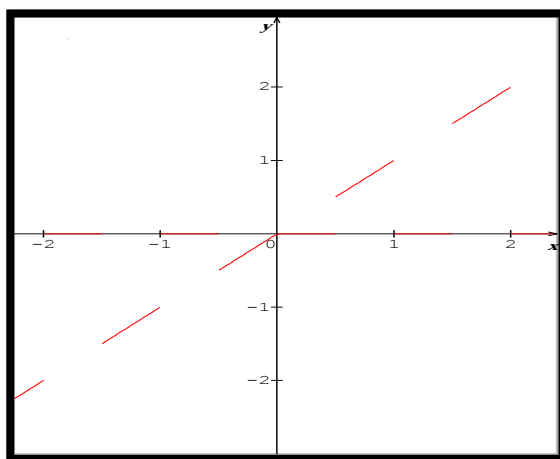
$f(n) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow n} f(x) = n \neq \lim_{x \rightarrow n} f(x) = 0$ إذن الدالة f غير مستمرة عند كل عدد صحيح غير معدوم، في حين نلاحظ استمرارها عند الصفر،

$\frac{2n+1}{2}$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2n+1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{2n+1}{2}} 0 = 0 \neq \lim_{x \rightarrow \frac{2n+1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{2n+1}{2}} x = \frac{2n+1}{2}$$

أي f غير مستمرة عند كل عدد ناطق من الشكل: $\frac{2n+1}{2}$ حيث n من

والشكل التالي يوضح هذا:



$$(3) f(x) = [x] \sin(x) \text{ على } \mathbb{R}$$

لدينا الحالتان:

$$f(x_0) = n \sin x_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) : n \in \mathbb{Z} \text{ مع } n < x_0 < n+1$$

أي f مستمرة عند x_0 ،

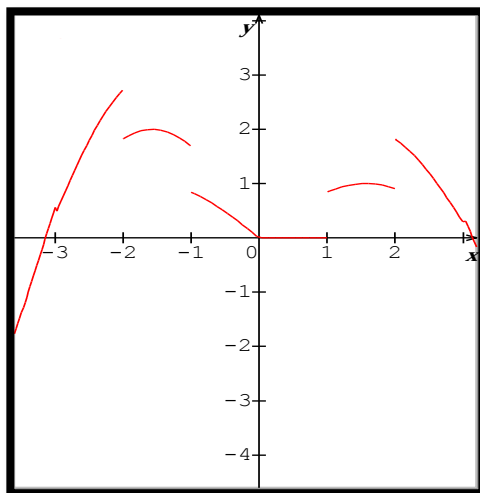
•• $x_0 = n \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = (n-1) \sin(n) \neq n \sin(n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ و } f(x_0) = n \sin(n)$$

إذن f غير مستمرة عند كل عدد صحيح غير معدوم،

أما عند الصفر فيكون: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = (-1)\sin 0 = 0 = 0\sin 0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ أي استمرار f عند 0،

لاحظ الشكل:



$$g(x) = [x] \sin(\pi x) \text{ على } \mathbb{R},$$

لدينا الحالتان:

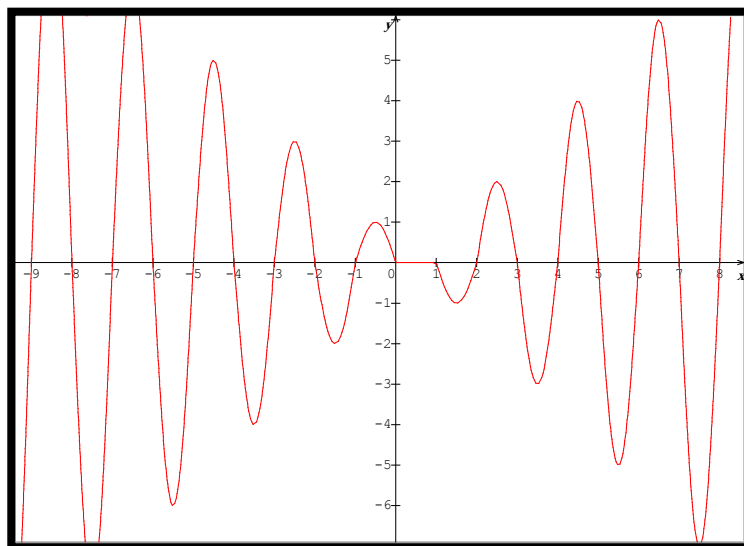
$$f(x_0) = n \sin(\pi x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) : n \in \mathbb{Z} \text{ مع } n < x_0 < n+1$$

أي f مستمرة عند x_0 ،

$$x_0 = n \in \mathbb{Z}$$

$$\lim_{x \rightarrow n} f(x) = (n-1)\sin(n\pi) = 0 = \lim_{x \rightarrow n} f(x) = f(n)$$

إذن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ،

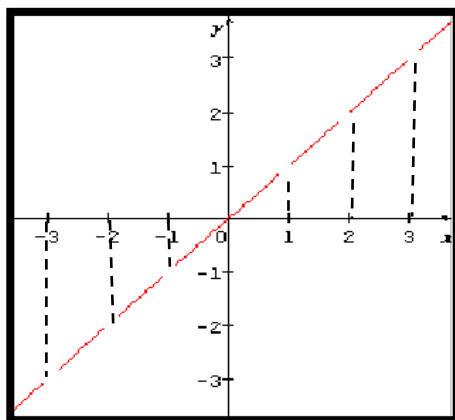


$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{Z} \\ x & , x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ على } \mathbb{R} \quad (5)$$

نميز الحالتين:

• $x \notin \mathbb{Z}$: الدالة f مستمرة لأنها خطية "كثير حدود"،

- $\lim_{x \rightarrow n \in \mathbb{Z}^*} f(x) = n \neq 0 = f(x) : x \in \mathbb{Z}^*$ أي f غير مستمرة عند كل عدد صحيح غير معدوم،
 ••• $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(x) : x = 0$ أي f مستمرة عند 0 ،



التمرين 13:

$$\begin{cases} f(x) = (x-1) \left[\frac{1}{x-1} \right] , & x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة:

(1) ادرس استمرارية الدالة f ،

(2) احسب: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x)$.

حل:

(1) دراسة استمرارية الدالة f :

كتابة الدالة f دون رمز الجزء الصحيح: ليكن $n \in \mathbb{Z}$ ، من أجل $n \leq \frac{1}{x-1} < n+1$ لنميز الحالات:

• $n=0$ يكون: $\left[\frac{1}{x-1} \right] = 0$ ، أي: $f(x) = 0$ ،

• $n=-1$ يكون: $0 < \frac{1}{x-1} \leq -1$ أي: $\left[\frac{1}{x-1} \right] = -1$ ومنه $f(x) = -(x-1)$ ،

• $n \neq 0$ و $n \neq -1$ يكون: $\frac{1}{n} \geq x-1 > \frac{1}{n+1}$ ومنه: $\frac{1}{n} + 1 < x \leq \frac{1}{n} + 1 + 1$ أي: $f(x) = (x-1) \left[\frac{1}{x-1} \right] = (x-1) \times n$ ،

$$f(x) = \begin{cases} 0 , & 0 \leq \frac{1}{x-1} < 1 \longrightarrow x > 2 \\ (x-1) \times n , & \frac{1}{n+1} + 1 < x \leq \frac{1}{n} + 1 , \quad n \in \mathbb{Z} - \{0; -1\} \\ -(x-1) , & x \leq 0 \\ 1 , & x = 1 \end{cases}$$

نلخص بـ:

نميز الحالات التالية:

- إذا كان $x > 2$: f دالة مستمرة على هذا المجال لأنها معدومة،
- إذا كان $x < 0$: f دالة مستمرة على هذا المجال لأنها دالة تـكـافـئية،

• إذا كان: $\frac{1}{n} + 1 < x < \frac{1}{n} + 1$ دالة مستمرة على هذا المجال لأنها دالة تألفية،

• إذا كان: $x = 1$:

ليكن العدد الحقيقي x قريبا بكفاية من العدد 1، لأجل هذا نميز الحالتين:

الحالة الأولى: $x < 1$

يوجد $n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$ حيث $\frac{1}{n} + 1 < x \leq \frac{1}{n} + 1$ (نلاحظ أن $n \rightarrow -\infty$ يكافئ $x \rightarrow 1$)

وبالتالي: $f(x) = n(x-1)$ وكون f متناقصة تماما على المجال السابق أمكن كتابة:

$$f\left(\frac{1}{n} + 1\right) \leq f(x) < \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n} + 1} f(x)$$

$$1 \leq f(x) < \frac{n}{n+1} \quad \text{أي:}$$

بجعل $n \rightarrow -\infty$ يكون $x \rightarrow 1$ نجد: $1 \leq \lim_{x \rightarrow 1} f(x) < \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ وحسب نظريات الحصر يكون:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

الحالة الثانية: $x > 1$

يوجد $n \in \mathbb{N}^*$ حيث $\frac{1}{n} + 1 < x \leq \frac{1}{n} + 1$ (نلاحظ أن $n \rightarrow +\infty$ معناه $x \rightarrow 1$)

وبالتالي: $f(x) = n(x-1)$ وكون f متزايدة تماما على المجال السابق نجد:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{n} + 1} f(x) < f(x) \leq f\left(\frac{1}{n} + 1\right)$$

$$\frac{n}{n+1} < f(x) \leq 1 \quad \text{أي:}$$

بجعل $n \rightarrow +\infty$ يكون $x \rightarrow 1$ نجد: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 < \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \leq 1$ وحسب نظريات الحصر يكون:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

أي: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 = f(1)$

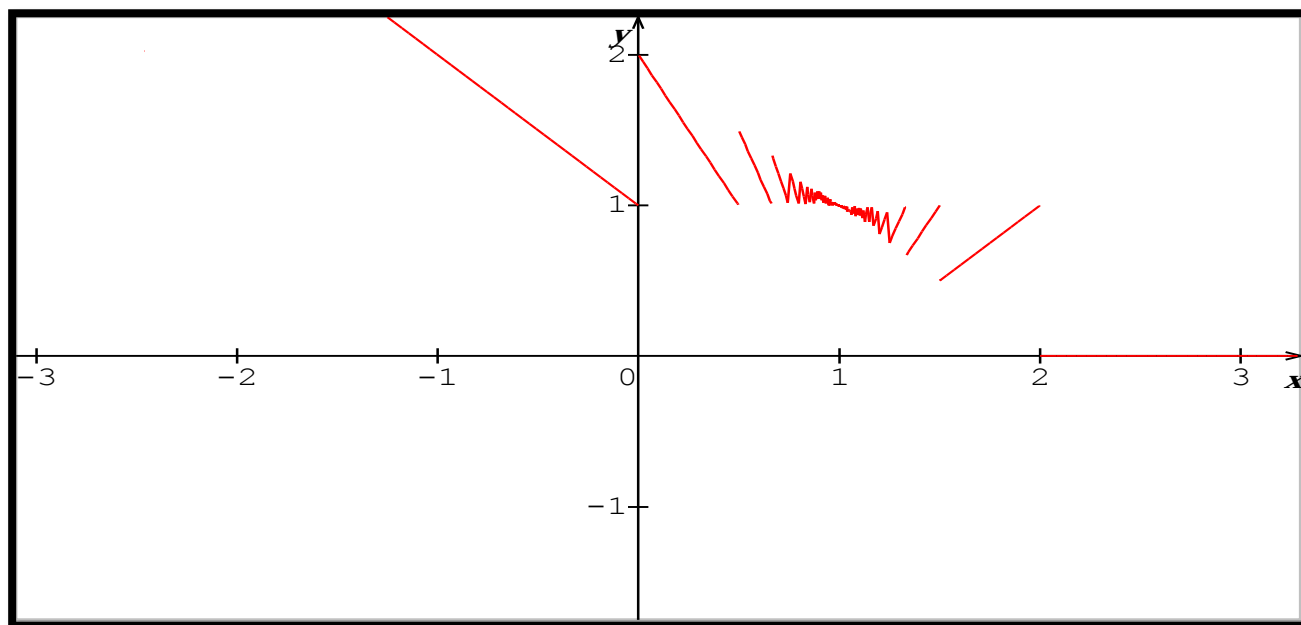
الخلاصة: f مستمرة عند 1،

• بقي أن ندرس الاستمرارية عند $x = 1 + \frac{1}{n}$ مع $n \in \mathbb{Z}^*$

$$f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{x \rightarrow 1 + \frac{1}{n}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1 + \frac{1}{n}} (n(x-1)) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 1 + \frac{1}{n}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1 + \frac{1}{n}} ((n-1)(x-1)) = \frac{n-1}{n}$$

أي f غير مستمرة عند كل قيمة $x = 1 + \frac{1}{n}$ مع $n \in \mathbb{Z}^*$

لاحظ الشكل:



(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-(x-1)] = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$ وهذا من العبارة السابقة.

التمرين 14

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|} & , x \neq 0 \\ -1 & ; x = 0 \end{cases} \quad \text{بـ: } \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

(1) أكتب f دون رمز القيمة المطلقة،

(2) هل f مستمرة عند $-1, 0, 1$ ؟

(3) ادرس استمرارية f على المجالين: $[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$, $[2; 5]$.

حل:

ليكن $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ لدينا

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} & , x > 0 \\ \frac{x^2 - x}{x^2 + x} & , x < 0 \\ -1 & , x \neq 0 \end{cases} \longrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & , x > 0 \\ \frac{x-1}{x+1} & , x < 0 \\ -1 & , x \neq 0 \end{cases}$$

(2) دراسة استمرارية الدالة عند $-1, 0, 1$:

f دالة غير معرفة عند القيمتين $-1, 1$ وهذا كاف للحكم على عدم استمرارها عندهما،

أما عند 0 : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x-1} = -1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x+1} = f(0)$ أي الدالة f مستمرة عند الصفر،

(3) نلاحظ انتماء العدد 1 إلى المجال $[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$ التي f غير مستمرة عنده، أي f غير مستمرة على المجال $[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$ ،

• $x \in [2; 5]$ أي: $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و بالتالي f مستمرة على المجال المفتوح $]2; 5[$ وعلى يمين 2 ويسار 5،

التمرين 15:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(3-x)^n - a}{x-2} & , x > 2 \\ \frac{b-x}{2} & , x \leq 2 \end{cases} \quad , n \in \mathbb{N}^* , a, b \in \mathbb{R}$$

(أ) أدرس استمرار الدالة f على المجالين: $]2; +\infty[$ و $]-\infty; 2[$ ،

(ب) عين قيمتي a, b حتى تكون الدالة مستمرة عند 2.

حل:

(أ) • ليكن: $x \in]2; +\infty[$ تكون $f(x) = \frac{(3-x)^n - a}{x-2}$ وهي عبارة عن ضرب دالتين مستمرتين على $]2; +\infty[$ إذن f مستمرة على $]2; +\infty[$ ،

• ليكن: $x \in]-\infty; 2[$ تكون $f(x) = \frac{b-x}{2}$ وهي دالة مستمرة على $]-\infty; 2[$ لأنها دالة تألفية مستمرة على $\mathbb{R}$ وبالأخص على $]-\infty; 2[$ ،

(ب) تعيين قيمتي a, b حتى تكون الدالة f مستمرة عند 2:

لدينا f مستمرة عند 2 معناه $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ لدينا $f(2) = \frac{b-2}{2} = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ و

$$(**) \dots \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(3-x)^n - a}{x-2} \right) = \frac{1-a}{0}$$

وجب تمييز الحالتين:

$$(1) a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(3-x)^n - 1}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{(3-x-1)((3-x)^0 + (3-x)^1 + \dots + (3-x)^{n-1})}{x-2} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(- \left((3-x)^0 + (3-x)^1 + \dots + (3-x)^{n-1} \right) \right) = - \left(1 + 1 + \dots + 1 \right) = -n$$

ومن (*) و بعد حساب النهاية: (**) نجد: $\frac{b-2}{2} = -n$ أي: $b = -2n + 2$.

$$(2) a \neq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3-x)^n - a}{x-2} = \frac{1-a}{0^+} = \begin{cases} +\infty, a < 1 \\ -\infty, a > 1 \end{cases}$$

وهذا كاف للحكم أن f غير مستمرة في هذه الحالة،

خلاصة: f مستمرة عند 2 معناه $a = 1$ و $b = -2n + 2$.

التمرين 16:

لتكن الدالة f المستمرة على المجال $[0;1]$ حيث: $f(1)=f(0)=0$ و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0;1[$: $f(x) > 0$ ،
بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ يوجد عدد حقيقي c من المجال $]0;1[$ حيث: $f(c) = f\left(c + \frac{1}{n}\right)$.

حل:

f دالة مستمرة على المجال $[0;1]$ حيث: $f(1)=f(0)=0$

ليكن $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ ، نضع: $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ لدينا: g مستمرة على المجال $]0;1 - \frac{1}{n}[$ لأنها تركيب دوال مستمرة على نفس المجال، و

$$g(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right) = 0 - f\left(\frac{1}{n}\right) = -f\left(\frac{1}{n}\right) < 0$$

لدينا $\frac{1}{n} \in]0;1[$ أي $f\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ حسب المعطيات،

$$g\left(1 - \frac{1}{n}\right) = f\left(1 - \frac{1}{n}\right) - f(1) = f\left(1 - \frac{1}{n}\right) > 0 \text{ و}$$

$$0 < \frac{1}{n} < 1, \quad n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$$

$$0 < \frac{1}{n} < 1 \longrightarrow 0 < 1 - \frac{1}{n} < 1 \longrightarrow f\left(1 - \frac{1}{n}\right) > 0$$

أي: $g(0) \times g\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد $c \in]0;1 - \frac{1}{n}[$ حيث $g(c) = 0$ أي:

$$f(c) = f\left(c + \frac{1}{n}\right)$$

و. ه. م

التمرين 17:

f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ بحيث: $f(a) < ab$ و $f(b) > b^2$
• بين أنه يوجد عدد حقيقي c من $]a;b[$ بحيث: $f(c) = bc$.

حل:

$$g(x) = f(x) - bx \text{ نضع:}$$

g دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ لأنها مجموع دوال مستمرة على المجال السابق و

$$g(a) = f(a) - ab < 0, \quad g(b) = f(b) - b^2 > 0$$

من المعطيات،

أي: $g(a) \times g(b) < 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل c من $]a;b[$ حيث: $g(c) = 0$ أي $f(c) = cb$

و. ه. م

التمرين 18:

f دالة مستمرة على المجال: $[0;1]$ بحيث: $f(0)=0$ و $f(1)=1$
 • بين أنه يوجد عدد حقيقي c من $]0;1[$ بحيث: $f(c) = \frac{1-c}{1+c}$.

حل:

$$\text{نضع } g(x) = f(x) - \frac{1-x}{1+x}$$

g دالة مستمرة على المجال $]0;1[$ لأنها مجموع دوال مستمرة على المجال السابق، و $g(0)=f(0)-1=-1$ و $g(1)=1-0=1$
 أي: $0 < g(0) \times g(1)$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل $c \in]0;1[$ حيث: $g(c)=0$ أي: $f(c) = \frac{1-c}{1+c}$.

و. ه. م

من علماء العرب:



أبو الريحاني البيروني:

هو أبو الريحان محمد بن أحمد البيروني، خوارزمي المولد (362-440 هـ)، كان رجلاً وفيلسوفاً وفلكياً وجغرافياً وجيولوجياً ورياضياتياً وصيدلياً ومؤرخاً ومترجماً لثقافات الهند، وقد وُصف بأنه من بين أعظم العقول التي عرفتتها الثقافتين العربية الإسلامية، وهو أول من قال (إن الأرض تدور حول محورها)، وصنف كتباً تزيد عن 120 كتاباً.

التحق بداية شبابه في بلاط السلطان أبو الحسن قابوس، وشمجير شمس المعالي، وهناك نشر أول كتبه (الآثار الباقية عن القرون الخالية)،

ثم عاد إلى موطنه والتحق بحاشية الأمير أبي العباس مأمون بن مأمون خوارزمشاه الذي عهد إليه ببعض المهام السياسية لطلاقة لسانه، وعندما سقطت الإمارة بيد محمود الغزنوي عام 407 هـ ألحقه مع طائفة من العلماء إلى بلاطه، حيث نشر مؤلفته الكبرى (تحقيق ما للهند من مقولة مقبولة في العقل أو مردولة)، و(الاستيعاب في تسطيح الكرة)، و(التعليل بإجالة الوهم في معاني النظم)، كما كتب مؤلفين آخرين كبيرين هما: (القانون المسعود)، و(التفهيم لأوائل صناعة التنجيم).

تعلّم البيروني اليونانية والسنسكريتية خلال رحلاته، وكتب بالغات العربية والفارسية والخوارزمية العديد من المؤلفات في مسائل علمية وتاريخية وفلكية، وله أيضاً مساهمات في حساب المثلثات والدائرة وخطوط الطول والعرض، ودوران الأرض، والفرق بين سرعة الضوء وسرعة الصوت، هذا بالإضافة إلى ما كتبه في تاريخ الهند، والصيدلة والأدوية، وربما كان البيروني أول من أشار إلى وجود الجاذبية حين قال: (إن الأجسام تسقط على الأرض بسبب قوى الجذب المتمركزة فيها)، و(كل جسم في الكون يؤثر بقوة جذب على جسم آخر ومقدار هذه القوة يتناسب طردياً مع حاصل ضرب الكتلتين وعكسياً مع مربع المسافة بينهما).

أهداف الدرس الخامس:

- مفهوم الاشتقاقية،
- الاشتقاق من اليمين و اليسار،
- الدالة المشتقة،
- الاشتقاق و الاستمرار،
- العمليات على الاشتقاق و مشتق مركب دالتين.

الدرس الخامس:

نشاط استكشافي:

- في السقوط الحر لجسم ما يكون لدينا: $S(t) = \frac{1}{2}gt^2$ حيث: $t \in [0; T]$ و S المسافة المقطوعة، t الزمن اللازم لقطع المسافة S ، g الجاذبية، و T زمن الوصول،
- عند الزمن $t_1 \in [0; T]$ يقطع الجسم مسافة $S(t_1)$ ، و يقطع مسافة $S(t_2)$ عند اللحظة $t_2 \in [0; T]$ ،
- (1) احسب السرعة المتوسطة $v_{[t_1; t_2]}$ بين اللحظتين t_1 و t_2 ،
- (2) هل السرعة المتوسطة تعطينا مقدار السرعة عند اللحظة t_1 ؟ هل يمكنك اقتراح حل تجده مناسباً؟
- (3) لأجل هذا نضع: $v(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} v_{[t_1; t_2]}$
- (أ) احسب $v(t_1)$ بدلالة t_1 ،
- (ب) لما كان t_1 كفي من الفترة $[0; T]$ أمكن نزع الدليل 1، قل لماذا $v(t)$ تعرف دالة على المجال $[0; T]$ ؟
- (ج) هل يمكن الحصول على عبارة $v(t)$ دون أن تعطى لنا عبارة $S(t)$ ؟ أعط اسماً لـ $v(t)$ تجده مناسباً.

حل النشاط:

تعليق:

نلاحظ أن المسافة دالة في الزمن،
يمكن الحصول على هذه المعادلة بتطبيق
قوانين إسحاق نيوتن المدروسة في الفيزياء.

لدينا: $S(t) = \frac{1}{2}gt^2$ مع $t \in [0; T]$

(1) حساب $v_{[t_1; t_2]}$:

$$v_{[t_1; t_2]} = \frac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{1}{2}gt_2^2 - \frac{1}{2}gt_1^2}{t_2 - t_1} = \frac{1}{2}g(t_2 + t_1)$$

(2) تمثل $v_{[t_1; t_2]}$ السرعة المتوسطة في الفترة $[t_1; t_2]$ وكون الحركة غير منتظمة، فهي لا تعطينا وصفا للسرعة في اللحظة t_1 .

يمكن اقتراح:

كلما كانت اللحظة t_2 قريبة من اللحظة t_1 ازداد وصف السرعة عند اللحظة t_1 دقة،

(3) حسب الاقتراح السابق فإن $\lim_{t_2 \rightarrow t_1} v_{[t_1; t_2]}$ تعطي السرعة عند اللحظة t_1 والتي سنسميها "السرعة اللحظية" ونرمز لها بـ $v(t_1)$ ،

(أ) حساب $v(t_1)$ بدلالة t_1 :

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} v_{[t_1; t_2]} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \left(\frac{1}{2}g(t_2 + t_1) \right) = gt_1$$

لدينا: $\lim_{t_2 \rightarrow t_1} v_{[t_1; t_2]} = gt_1$

(ب) لما كان t_1 كفي ولا يخضع لأي شروط من الفترة $[0; T]$ أمكن التخلي عن الدليل 1، و يمكن ملاحظة أن كل لحظة من الفترة السابقة تقابلها سرعة لحظية وحيدة وهذا يعرف دالة،

(ج) لن نتكهن من الحصول على الدالة $v(t)$ دون أن تعطى لنا عبارة $S(t)$ ، فهي تعتمد اعتماداً كلياً عليها كأنها تشتق منها،
ولهذا نسميها الدالة المشتقة،

* سوف نتطرق لمفهوم التفاضل
في الدرس الموالي،

مثل هذه المسائل كانت دافعا لظهور مفهومي الاشتقاق و التفاضل *
أي: • مسألة إيجاد السرعة مما كانت قانون الحركة،

وكذلك • مسألة إيجاد المماس لمنحنى ما "أي تقريب أي دالة باستعمال دالة تألفيئة"،

وقد قادت كلتا المسألتين إلى مسألة واحدة و جوهر هذه المسألة ** هو الإجابة على السؤال التالي:

سؤال: f دالة معطاة،

هل يمكن إيجاد دالة أخرى و التي نسميها "الدالة المشتقة" و التي تمثل سرعة تغير الدالة f بالنسبة لتغير المتغير x ؟

بناء المعارف:

جواب: للإجابة على السؤال السابق نعرف:

العدد المشتق:

f دالة معرفة على مجال مفتوح I ، و $a \in I$ ،

نقول أن f قابلة للاشتقاق عند a معناه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ موجودة في $\mathbb{R}$ ،

$$\left(\text{أو} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ كما يفضل البعض} \right)$$

و نرمز للعدد المحصل عليه بـ $f'(a)$ و يسمى العدد المشتق للدالة f عند a .

سؤال: كيف يمكننا مشاهدة العدد المشتق هندسياً، (لاحظ الدرس التالي)

ملاحظة:

- إذا كان التعريف السابق محققاً من أجل $x \rightarrow a$ أو $x \rightarrow a$ نقول أن f قابلة للاشتقاق من يمين أو يسار القيمة a على الترتيب،
- f قابلة للاشتقاق عند a معناه قابلة للاشتقاق من اليمين و اليسار و

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

القابلية للاشتقاق على مجال و الدالة المشتقة عليه:

نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح I إذا قبلت الاشتقاق عند كل نقطة منه، و بالتالي يمكن إرفاق كل عدد من المجال I بعدد مشتق وحيد،

$$\begin{aligned} f' : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

ملاحظة:

يُطرح كثير منا السؤال التالي: لماذا نضطر إلى فتح المجال المغلق مثلاً $[a; b]$ أثناء الاشتقاق؟

جواب:

يمكن ملاحظة أن الاشتقاق مفهوم يعتمد على النقاط التي تكون بالقرب من النقطة التي نشتق عندها، وعليه وجب فتح المجال $[a; b]$ لأن الصورة $f(x)$ ليس لها معنى إذا كان $x < a$ أو $x > b$ ،

من التاريخ:

يعد نيوتن (1642 – 1727) أول من وضع المسألة** السابقة، كما طرحها ليبنيتر (1646 – 1716)، بصورة مشابهة في سبعينيات و ثمانيات القرن السابع عشر، و لكن فيرما (1601 – 1655) و باسكال (1623 – 1662) و غيرهما من العلماء كانوا قد أوجدوا في أواسط القرن السابع عشر قوانين معينة لإيجاد مشتقات دوال كثيرة، و قد اختتم نيوتن و ليبنيتر هذا التطور فأدخلوا المفاهيم العامة للمشتقة و التفاضل. كما وضعوا الرموز التي تسهل العمليات الحسابية الكثيرة، و طوروا مفهوم و طرق حساب التفاضل حتى بلغ أعظم مراحل تطوره، و قد استخدموا حساب التفاضل في حل العديد من المسائل الهندسية، و الميكانيكية، و لقد زال النقص في السرد المنطقي الدقيق في القرن التاسع عشر فقط.

تابع للملاحظة:

- وهذا لا يمنع من حالات خاصة يمكن ترك المجال مغلقا:
- إذا كان محتوى تماما في مجال آخر تكون فيه الدالة f قابلة للاشتقاق،
 - أو إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق من أجل كل نقطة من المجال المفتوح $[a; b]$ وقابلة للاشتقاق على يمين a و على يسار b .

العلاقة بين الاستمرار والاشتقاقية:

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند القيمة a فهي مستمرة عندها،

لأن:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + O(x) \quad / \quad \lim_{x \rightarrow a} O(x) = 0 \quad \text{أي:} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R} \quad \text{معناه } a \text{ عند } f \text{ قابلة للاشتقاق}$$

معناه: $f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + O(x)(x - a)$ عند المرور إلى النهاية نجد: $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ وبالتالي الدالة f مستمرة عند a .

سؤال: هل يمكن حساب مشتقة مجموع و جداء و قسمة و مقلوب و تركيب دوال قابلة للاشتقاق؟

إليك المبرهنة:

مبرهنة (الاشتقاق والعمليات):

لتكن f و g دالتين قابلتين للاشتقاق عند a ، و h دالة قابلة للاشتقاق عند $f(a)$ ، عندئذ:

$$f + g \text{ قابلة للاشتقاق عند } a \text{ و } (f + g)'(a) = (f' + g')(a)$$

$$k \times f \text{ قابلة للاشتقاق عند } a \text{ و } (k \times f)'(a) = k \times f'(a)$$

تقول أن مؤثر الاشتقاق خطي

$$f \times g \text{ قابلة للاشتقاق عند } a \text{ و } (f \times g)'(a) = f'(a) \times g(a) + f(a) \times g'(a)$$

$$\frac{f}{g} \text{ قابلة للاشتقاق عند } a \text{ و } \left(\frac{f}{g} \right)'(a) = \frac{f'(a) \times g(a) - f(a) \times g'(a)}{(g(a))^2} \text{ حيث: } g(a) \neq 0$$

$$\frac{1}{f} \text{ قابلة للاشتقاق عند } a \text{ و } \left(\frac{1}{f} \right)'(a) = -\frac{f'(a)}{(f(a))^2} \text{ حيث: } f(a) \neq 0$$

$$h \circ f \text{ قابلة للاشتقاق عند } a \text{ و } (h \circ f)'(a) = f'(a) \times h'(f(a))$$

تمرين تطبيقي 01:

أثبت ما جيء به في المبرهنة السابقة.

حل:

f و g دالتان قابلتان للاشتقاق عند a ، و h قابلة للاشتقاق عند $f(a)$:

• عند تطبيق تعريف الاشتقاق على الدالة $f + g$ عند a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(a))}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} = f'(a) + g'(a) \in \mathbb{R}$$

كون أن الدالتين f و g قابلتان للاشتقاق عند a

أي: $f+g$ قابلة للاشتقاق عند a و $(f+g)'(a) = (f' + g')(a)$

• عند تطبيق تعريف الاشتقاق على الدالة $k \times f(x)$ عند a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{k \times f(x) - k \times f(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} k \times \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = k \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = k \times f'(a) \in \mathbb{R}$$

f قابلة للاشتقاق عند a

أي: $k \times f(x)$ قابلة للاشتقاق عند a و $(k \times f)'(a) = k \times f'(a)$

• عند تطبيق تعريف الاشتقاق على الدالة $f \times g$ عند a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \times g(x) - f(a) \times g(a)}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \times g(x) - f(x) \times g(a) + f(x) \times g(a) - f(a) \times g(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a))}{x-a} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \right) + g(a) \times \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right) =$$

$$= f(a) \times g'(a) + f'(a) \times g(a) \in \mathbb{R}$$

كون أن الدالتين f و g قابلتان للاشتقاق عند a

و f مستمر عند a

أي: $f \times g$ دالة قابلة للاشتقاق عند a و منه: $(f \times g)'(a) = f(a) \times g'(a) + f'(a) \times g(a)$

• عند تطبيق تعريف الاشتقاق على الدالة $\frac{f}{g}$ عند a ، حيث: $g(a) \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x) \times g(a) - g(x) \times f(a)}{g(x) \times g(a)}}{x-a} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) \times g(a) - f(a) \times g(a) + f(a) \times g(a) - g(x) \times f(a)}{(x-a) \times g(x) \times g(a)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(a)(f(x) - f(a)) - f(a)(g(x) - g(a))}{(x-a) \times g(a) \times g(x)} =$$

$$= \frac{1}{(g(a))^2} \left[g(a) \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - f(a) \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \right] =$$

كون أن الدالتين f, g قابلتان للاشتقاق عند a ، و g مستمرة عند a

$$= \frac{f'(a) \times g(a) - f(a) \times g'(a)}{(g(a))^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \times g(a) - f(a) \times g'(a)}{(g(a))^2} \text{ أي: } \frac{f}{g} \text{ قابلة للاشتقاق عند } a \text{ و}$$

• لدينا $f(a) \neq 0$ ، نطبق مشتق حاصل القسمة على الدالة $\frac{1}{f}$:

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = \frac{1 \times f(a) - f'(a) \times 1}{f^2(a)} = \frac{-f'(a)}{(f(a))^2}$$

• نطبع التعريف على الدالة $h \circ f$ عند a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(h \circ f)(x) - (h \circ f)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(f(x)) - h(f(a))}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{h(f(x)) - h(f(a))}{f(x) - f(a)} \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right) = \dots (*)$$

نعلم أنه إذا كان $x \rightarrow a$ فإن $f(x) \rightarrow f(a)$ كون f مستمرة عند a ، و لما كان f و h قابلتين للاشتقاق عند a و $f(a)$ على

$$\lim_{f(x) \rightarrow f(a)} \frac{h(f(x)) - h(f(a))}{f(x) - f(a)} \times \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \times h'(f(a))$$

وبالتالي تكون الدالة $h \circ f$ قابلة للاشتقاق عند a و $(h \circ f)'(a) = f'(a) \times h'(f(a))$.

ملاحظة:

تمنا في (*) بإظهار عناصر تساعدنا للوصول إلى المطلوب، إذ ضربنا في $\frac{f(x) - f(a)}{f(x) - f(a)} = 1$ و التي يجب أن يكون لها معنى، بسيطة يمكن أن نلاحظ أنه عندما تكون الدالة f ثابتة تجعل النسبة السابقة ليس لها معنى و بالتالي لا يمكننا توظيفها، في هاته الحالة إن الدالة $h \circ f$ تكون كذلك ثابتة، لاحظ المخطط التالي:

السابقة، "لاحظ أن هاته الحالة لا تمس بعمومية القانون المذكور".
أي: $x \in \mathbb{R} \xrightarrow{f} f(x) = a \xrightarrow{h} (h \circ f)(x) = h(a)$ (لاحظ التطبيق الثاني) دون المرور بحالة اللبس

تمرين تطبيقي 02:

باستعمال التعريف، أحسب الدالة المشتقة للدوال التالية محددًا مجال الاشتقاقية:

$$f(x) = a \text{ حيث: } a \text{ ثابت حقيقي، } D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^n \text{ حيث: } n \geq 1 \text{ عدد طبيعي، } D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ } D_f = [0; +\infty[$$

$$f(x) = \cos(x) \text{ } D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sin(x) \text{ } D_f = \mathbb{R}$$

حل:

حساب باستعمال التعريف، الدوال المشتقة مع تحديد مجال الاشتقاق:

$$f(x) = a \text{ ، ليكن } x_0 \in \mathbb{R} \text{ عند تطبيق تعريف الاشتقاق نجد: } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a - a}{x - x_0} = 0$$

و عليه مشتق أي كمية ثابتة تساوي الصفر، و يبدو واضحاً فيزيائياً، حيث أن كل جسم ثابت ليست له سرعة، مجال الاشتقاق $\mathbb{R}$

• $f(x) = x^n$ ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$ و منه :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x_0 \times x^{n-2} + \dots + x_0^{n-1})}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x_0 \times x^{n-2} + \dots + x_0^{n-1}) = x_0^{n-1} + \dots + x_0^{n-1} = nx_0^{n-1}\end{aligned}$$

أي مجال الاشتقاق هو $\mathbb{R}$ ، و $f'(x) = nx^{n-1}$ مع $n \geq 1$

تذكر العلاقة المهمة التي نحتاج إليها في بعض التمارين: $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + b \times a^{n-2} + \dots + b^{n-1})$ مع $n \in \mathbb{N}^*$

• $f(x) = \sqrt{x}$

بداية ليكن $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$: لدينا تعريفاً:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

بقي أن ندرس قابلية الاشتقاق على 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \notin \mathbb{R}$$

و بالتالي f غير قابلة للاشتقاق على 0 ، أي مجال الاشتقاق $[0; +\infty[$ ، و $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

• $f(x) = \cos(x)$ ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos(x) - \cos(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-2 \left(\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \times \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right)}{x - x_0} =$$

راجع دساتير التحويل في الباب الأول،

$$= - \lim_{x \rightarrow x_0} \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} = -\sin(x_0)$$

أي مجال الاشتقاق $\mathbb{R}$ ، و $f'(x) = -\sin(x)$

• $f(x) = \sin(x)$ ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \left(\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \times \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} = \cos(x_0)$$

أي مجال الاشتقاق $\mathbb{R}$ و $f'(x) = \cos(x)$

ملاحظة:

لن نستعمل تعريف الاشتقاق في كل مرة، لكن سنعمد على المبرهنة و مشتق بعض الدوال المألوفة، مثل ما ورد في التمرين التطبيقي 2 لدراسة إشكالية رياضية "من دراسة دوال ... الخ".

التمرين التطبيقي 03:

ادرس قابلية اشتقاق الدالة $f(x) = |x|$ على $\mathbb{R}$.

حل:

كتابة الدالة f دون رمز القيمة المطلقة: $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$ لنميز الحالات التالية:* $x > 0$ تكون: $f(x) = x$ الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$ و $f'(x) = 1$.** $x < 0$ تكون $f(x) = -x$ الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]-\infty; 0[$ و $f'(x) = -1$.

*** لنستعمل التعريف لاختبار قابلية الاشتقاق عند 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{cases}$$

أي: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

و منه الدالة f ليست قابلة للاشتقاق عند 0.

خلاصة:

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$.

اصنع النجاح من الإخفاقات، خيبة الأمل و الفشل هما من الدرجات التي ترتقي عليها للنجاح.



ديل كارمجي

أهداف الدرس السادس:

- التفسير الهندسي للاشتقاق،
- معادلة المماس،
- طريقة أولر،
- حالات عدم قبول دالة الاشتقاق عند قيمة حقيقية و التفسير الهندسي لها،
- الاشتقاق و اتجاه التغير،
- التفاضل و الرؤية الهندسية،
- نقطة الانعطاف،
- خطوات رسم منحنى دالة.

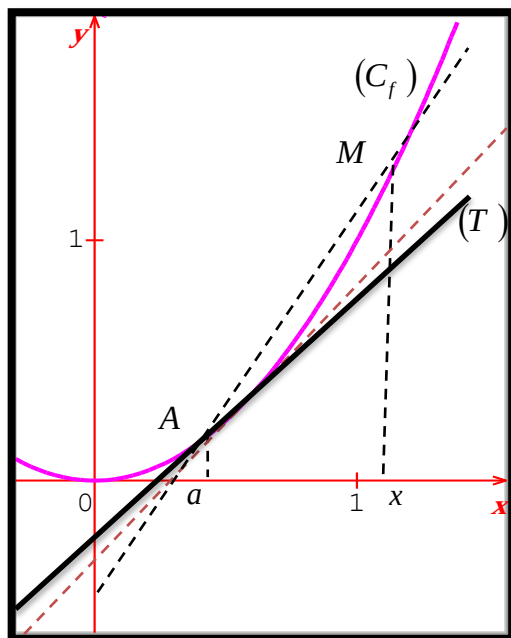
الدرس السادس:

هذا الدرس امتداد للدرس السابق إذ سنجيب على أسئلة طرحت فيه، و أخرى يتبادر طرحها في الأذهان.

• السؤال الأول: ما التفسير الهندسي للاشتقاق؟

جواب:

لتكن الدالة f المعرفة على المجال المفتوح I ، و $a \in I$ ، المنحنى الممثل لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس،



(T) مماس المنحنى عند A غير مواز لمحور الترتيب

M نقطة متحركة من (C_f) فاصلتها x تختلف عن a لاحظ البيان:

ميل القاطع (AM) للمنحنى يعطى بالعلاقة: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

- كلما قربنا النقطة M من A وهذا من جهة اليمين أو اليسار
بجعل x قريباً من a نلاحظ أن ميل كل قاطع يقترب من ميل

المماس (T) أي: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \rho \in \mathbb{R}$ حيث:

رمزنا بـ ρ لميل المستقيم (T)،

هذا من جهة و من جهة أخرى لدينا: $\rho = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$

وهذا حسب التعريف الموضوع في الدرس السابق
أي العدد المشتق ما هو إلا ميل المماس للدالة عند النقطة المشتق عندها.

السؤال الثاني: هل يمكن تعيين المعادلة الديكارية للمماس (T)؟

جواب:

رأينا في التفسير الهندسي أن ميل المماس (T) مساو لـ $f'(a)$ أي أمكن كتابة: $y = f'(a)x + b$ ، و نعلم انتماء النقطة $A(a; f(a))$ أي أمكن تعيين الثابت b ، $b = f(a) - f'(a) \times a$ عند التعويض نجد المعادلة النهائية للمماس عند a التي تطلب في تمارين مختلفة:

$$(T): y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

تمرين تطبيقي:

أوجد في كل حالة من الحالات التالية معادلة المماس للدالة f عند النقطة a :

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2+1} \text{ عند } a=0$$

$$f(x) = \sin(x-1) \text{ عند } a=\pi+1$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} \text{ عند } a=-1$$

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2(x)+1} \text{ عند } a=\frac{\pi}{2}$$

حل:

إيجاد معادلة المماس في كل حالة من الحالات التالية: نعلم مما سبق: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

• f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و منه $f'(x) = (-x^2 + 4x + 1) / (x^2 + 1)^2$ ، $x \in \mathbb{R}$ ،

و بالتعويض نجد: $(\Delta): y = x - 2$

• f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و منه $f'(x) = \cos(x - 1)$ ، $x \in \mathbb{R}$ ،

و بالتعويض نجد: $(\Delta): y = -x + \pi + 1$

• f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و منه $f'(x) = x / \sqrt{x^2 + 1}$ ، $x \in \mathbb{R}$:

و بالتعويض نجد: $(\Delta): y = -(1/\sqrt{2})x + (1/\sqrt{2})$

• f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و منه $f'(x) = -(2 \cos x \sin x) / (\sin^2(x) + 1)^2$ ، $x \in \mathbb{R}$:

و بالتعويض نجد: $(\Delta): y = \frac{1}{2}$

ملاحظة هامة:

يعد المماس أحسن تقريب للدالة f في جوار a أي: $f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$ حيث: x قريب من a ،

يسمى تقريبا تاليفيا.

توحي لنا هذه المساواة التقريبية فكرة رسم بيان تقريبي لمنحنى الدالة f دون معرفة عبارة f صراحة في حين أعطيت لنا مشتقتها و صورة نقطة بواسطتها ،

تسمى هذه الطريقة بـ "طريقة أولير"

إليك هذا التوضيح: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ و دالتها المشتقة $f'(x) = \frac{1}{x}$ حيث: $x \in \mathbb{R}_+^*$ ،

المطلوب إنشاء رسم تقريبي لمنحنائها على المجال $[1; 8]$ حيث: $f(1) = 0$ ،

تتبع الخطوات التالية:

- نقوم بتقسيم المجال $[1; 8]$ إلى مجالات جزئية طول كل منها 0.5 مثلا ، و نسمي هذه القيمة "خطوة"
- نعلم بداية النقطة $\Omega_0(1; 0)$

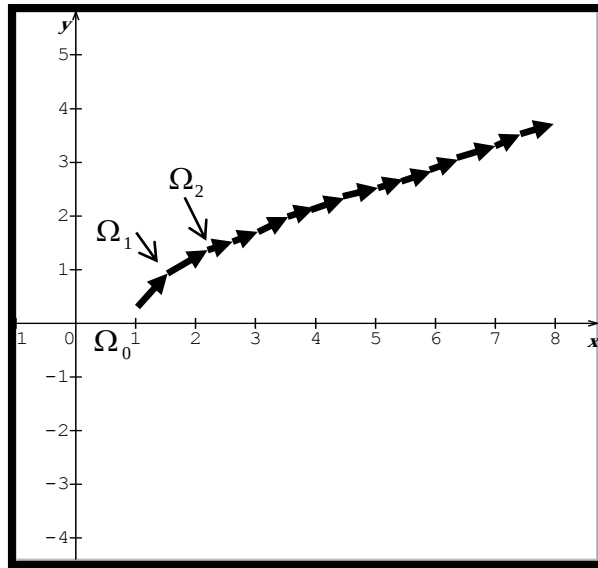
• نرسم المماس عند النقطة المعلمة من الواضح أن ميله $f'(1) = \frac{1}{1} = 1$ و سوف نعبر على المماس بسهم بدايته النقطة $(1; 0)$ و نهايته نقطة تقاطع المستقيم الذي معادلته $x = 1.5$ و المماس المرسوم و التي نرمز لها بـ Ω_1 (لاحظ الشكل)

• يمكن ملاحظة قرب النقطة Ω_1 من النقطة $(1.5; f(1.5))$ المنتمية إلى منحنى الدالة ، وهذا اعتمادا على المساواة التقريبية المذكورة في الملاحظة السابقة $f(1.5) \approx f'(1)(1.5 - 1) + f(1) = 0.5$ (لأن 1.5 في جوار 1) و نكون بهذا كأننا عينا نقطة أخرى لمنحنى الدالة f ،

• ثم نعيد نفس العمل و هذا برسم المستقيم الموازي للمماس عند النقطة Ω_1 أي ميله $f'(1.5) = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$ ، و نعين نقطة تقاطع هذا الأخير مع المستقيم الذي معادلته $x = 2$ لتكن النقطة Ω_2 و التي تمثل نقطة أخرى لرسم المنحنى التقريبي مع العلم أن:

$$f(2) \approx f'(1.5)(2-1.5) + f(1.5) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

هكذا حتى نصل إلى آخر نقطة $(8; f(8))$ حيث: $f(8) \approx f'(7.5)(8-7.5) + f(7.5)$ حيث $f(7.5)$ محسوبة سابقا، لاحظ الشكل التالي (نفضل الرسم مباشرة دون المرور بالحسابات السابقة):



و بالربط بين النقط بخط سلس نحصل على المنحنى التقريبي المطلوب، كلما كانت الخطوة صغيرة كلما كان الرسم أدق.

من علماء العرب:

عمر الخيام:

هو غياث الدين أبو الفتوح عمر بن إبراهيم الخيام، والخيام هو لقب والده لأنه كان يعمل في صنع الخيام.

ولد عمر الخيام في مدينة نيسابور في إيران عام (408هـ)، وتوفي سنة (512هـ)، وهو فيلسوف وشاعر من أصل عربي، تخصص في الرياضيات والفلك واللغة والفقه والتاريخ، وهو أول من اخترع طريقة حساب المثلثات ومعادلات جبرية من الدرجة الثالثة بواسطة قطع المخروط، وهو صاحب رباعيات الخيام.

عاش الخيام معظم حياته في نيسابور وسمرقند، وكان يتنقل بين مراكز العلم الكبرى مثل بخارى وبلخ وأصفهان رغبة منه في التزود من العلم وتبادل الأفكار مع العلماء.

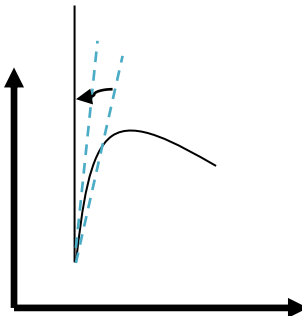
• السؤال الثالث: هل يمكن أن نذكر الحالات التي تكون فيها الدوال غير قابلة للاشتقاق، وما التفسير الهندسي في كل حالة؟

جواب:

• النهاية غير منتهية $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+a)-f(a)}{h} = \infty$ نقول إن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند هذه القيمة،

التفسير الهندسي:

منحنى الدالة f يقبل مماسا موازيا لمحور الترتيب عند النقطة ذات الإحداثيات (a,b) التي تسمى **نقطة توقف**، كما يظهر في الشكل:



$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h+a)-f(a)}{h} = b_1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h+a)-f(a)}{h} = b_2$$

• عند حساب النهاية $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ فنضطر إلى تميز الحالتين: $b_1 \neq b_2$

نقول الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند هذه القيمة،

التفسير الهندسي:

المنحنى يقبل نصفين مماسين عند النقطة (a,b) ، و تعطى معادلتها الديكارتية على النحو:

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_1): y = b_1(x-a)+b, \quad x > 0 \\ (D_2): y = b_2(x-a)+b, \quad x < 0 \end{array} \right. \text{ وتسمى النقطة } (a,b) \text{ "نقطة زاوية"}$$

• النهاية $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ غير موجودة:

أي لا تستقر عند قيمة حقيقية، كذلك في هذه الحالة نقول أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند هذه القيمة،
ويمكن تفسير هذا هندسياً: منحنى الدالة لا تملك اتجاهًا في جوار هذه النقطة.

ملاحظة:

يمكن أن نستنتج من عملنا السابق أن مفهوم الاشتقاق مفهوم هام جداً، إذ بفضلله نحدد الاتجاه الذي يرتبط بالمنحنى ارتباط وثيقاً، باختصار لا يمكن رسم أو حتى تخيل منحنى دالة غير قابلة للاشتقاق عند كل نقطة، لاحظ المثال التالي الذي يقرب الفكرة:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & / x \neq 0 \\ 0 & / x = 0 \end{cases}$$

الدالة f المستمرة لا تقبل الاشتقاق عند القيمة 0 لأن النهاية: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ غير موجودة كما بينا سابقاً و بالتالي لا يمكننا الانتقال من النقطة 0 إلى نقطة أخرى لأننا لا نعرف الاتجاه الذي يجب أن نتبعه، و لحسن الحظ عند الابتعاد قليلاً عن النقطة 0 يمكن تحديد الاتجاه و بالتالي رسم المنحنى الممثل للدالة f .

السؤال الرابع: بما أن الاشتقاق مرتبط بالاتجاه، فهل يمكن الاعتماد عليه لدراسة تغيرات دالة ما؟

جواب:

إليك هذه المبرهنة التي تجيب عن هذا السؤال:

مبرهنة:

 f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I :

- نقول أن f متزايدة تماما على مجال J من I معناه $f'(x) > 0$ من أجل كل x من J ،
- نقول أن f متناقصة تماما على المجال K من I معناه $f'(x) < 0$ من أجل كل $x \in K$ ،
- نقول أن f ثابتة على المجال L من I معناه $f'(x) = 0$ من أجل كل $x \in L$.

لمحة عن البرهان:

لنفرض أن الدالة f متزايدة تماما على مجال J من I :أي من أجل كل x_1, x_2 من J لدينا: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ لاحظ الباب الأول، معناه $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ من أجل كل x_2 قريب من x_1 المثبت،أي: $f'(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ وهذا من أجل كل عدد حقيقي x_1 من J ، وهو المطلوب، تترك البقية للقارئ.

السؤال الخامس: ما هو التفاضل؟

جواب:

التفاضل لغة هو التغير،

سوف نشاهد التفاضل رياضيا، لتكن الدالة f القابلة للاشتقاق عند a أي:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R}, \text{ يمكن كتابة: } \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + o(x) \text{ حيث: } \lim_{x \rightarrow a} o(x) = 0, \text{ ومنه:}$$

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + (x - a)O(x) \quad \dots(1)$$

نضع: $\Delta x = x - a$ ويمثل مقدار التغير، ويقابل هذا التغير تغير آخر للصورة هو $\Delta y = f(x) - f(a)$ تصبح العلاقة (1) على الشكل: $\Delta y = f'(a) \Delta x + \Delta x o(x)$ نلاحظ أنه كلما كان التغير Δx صغيرا كلما كان المقدار $\Delta x o(x)$ أصغر منه، ونقصد بالصغر الاقتراب إلى الصفر، أي يمكن التخلي على الكمية $\Delta x o(x)$:و بالتالي يمكن كتابة المساواة التقريبية: $\Delta y \approx f'(a) \Delta x$ وهذا من أجل Δx صغير.تعريف: نسمي الكمية $\Delta x f'(x)$ بتفاضل الدالة y عند x ونرمز لها بـ: $df = dy = f'(x) \Delta x$ ملاحظة: إذن التفاضل قيمة تقريبية للتغير Δf ,

أمثلة:

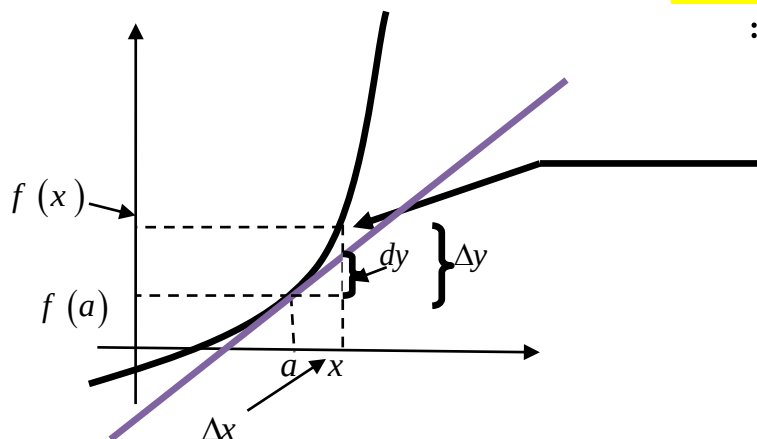
$$\bullet dx = \Delta x, \text{ أي: } dx = (x)' \Delta x = \Delta x$$

$$\bullet d(x^2) = 2x \Delta x = 2x dx$$

و بالتالي نضع الخلاصة: $df(x) = f'(x) dx$ أي: $\frac{df}{dx}(x) = \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$ (هذا الترميز مستعمل في الفيزياء بكثرة).

إليك الرؤية الهندسية:

لاحظ الشكل:

لاحظ أن ميل المماس للدالة f عند a مساوي لـ $f'(a)$ ،وكون هذه الكمية أسرع في الاقتراب من الصفر من Δx ، الكمية المتبقية تمثل التفاضل، ومنه: $df = f'(a)dx$.

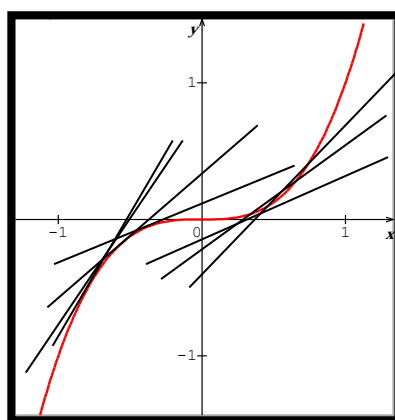
العلاقة بين المشتقة الأولى والثانية:

نقول أن النقطة M ذات الفاصلة x_0 أنها نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f إذا المشتقة الثانية تنعدم مغيرة إشارتها عند x_0

يمكن ملاحظة هذا بيانياً:

نقول أن منحنى دالة ينعطف عند نقطة إذا كانت أميال المماسات أو f' في جوار هذه النقطة تزايد ثم تناقص أو العكس،

لاحظ الشكل:

و هذا معناه أن الدالة f'' سالبة تارة و موجبة تارة أخرى أو العكس -لاحظ المبرهنة في الصفحة السابقة-.

ملاحظة هامة:

أ/ إذا وجدنا $f'(x_0) = 0$ و f' لم تغير إشارتها عند "في جوار" x_0 فإن النقطة ذات الفاصلة x_0 نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f ، لاحظ أن أ/ استلزام فقط،

ب/ المماس عند نقطة الانعطاف يكون مخرقا للمنحنى بعد هذا إثبات آخر لوجود نقطة انعطاف.

خطوات رسم منحنى ممثل لدالة:

- في نهاية كل دراسة دالة يطلب عادة رسم بيانها، لهذا تتبع المراحل التالية:
- (1) التقيّد بالسلم المعطى، أو اختيار السلم المناسب في حالة عدم وضع قيود،
 - (2) تحديد - رسم- النقاط الخاصة:
القيم القصوى، مركز التناظر، محور التناظر، نقطة الانعطاف، نقطة الزاوية، نقطة توقف...
 - (3) رسم المستقيمات المقاربة، و المماسات،
 - (4) مراقبة جدول التغيرات و الوضع النسبي.

ملاحظة:

كما قد ذكرنا بعض الخواص التي يمكن أن تصف بها دالة ما في الباب الأول، و التي تستعمل غالبا لتبسيط دراستها، نذكر مثلاً:

$a > 0$ ، لتكن الدالة f معرفة على المجال $(-a; a)$ ، و نقصد بالرمز $(.;.)$: إمكانية أن يكون المجال مغلقاً أو مفتوحاً،
أ/ إذا كانت الدالة f زوجية: يمكن أن تقتصر في الدراسة على مجال $[0; a]$ ، و بعد إنشاء المنحنى الممثل للدالة على هذا المجال، نكمل البقية بالتناظر بالنسبة لمحور الترتيب،

ب/ إذا كانت الدالة f فردية: يمكن أن تقتصر في الدراسة على مجال $[0; a]$ ، و بعد إنشاء المنحنى الممثل للدالة على هذا المجال، نكمل البقية بالتناظر بالنسبة للمبدأ $(0; 0)$ ،

ج/ إذا كانت الدالة f دورية و دورها $q > 0$: يمكن أن تقتصر في الدراسة على مجال طوله q ، و بعد إنشاء المنحنى الممثل للدالة على هذا المجال، نكمل البقية بدورات مشابهة للرسم السابق طول كل منها q ،

د/ يمكن أن تكون الدالة (زوجية أو فردية) و دورية لتبسيط الدراسة نستعمل (أ/ أو ب/ و ج/،
(لاحظ التمارين 17 - 18 - 19 - 20 صفحة 188 - 200).

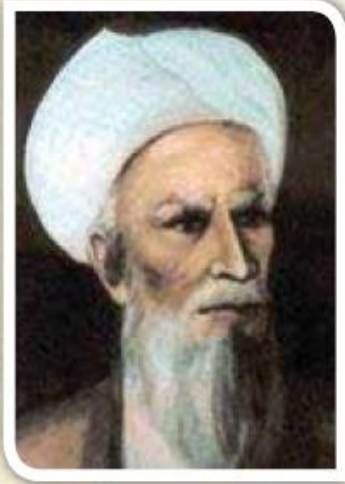
النجاح هو حصيلة مجهودات صغيرة نكررها كل يوم.

قائلها:



د. بيل كارنيجي

من علماء العرب:



السَّجْزِي:

هو أبو سعيد أحمد بن محمد بن عبد الجليل السَّجْزِي، لقب السَّجْزِي نسبة إلى بلده سجستان شرقي إيران، كانت ولادته حسب بعض المصادر عام (340 هـ - 951م)، ووفاته بين عامي (415 / 416 هـ - 1025 / 1204 م)، وهو من علماء الرياضيات والفلك الشهيرين في تاريخ الحضارة الإسلامية، تحدث عن دوران الأرض قبل كوبرنيكوس بـ 4 قرون.

يعد الباحثون السَّجْزِي أنه أول مَنْ تحدث عن حركة الأرض عندما أبدع الإسطرلاب الزورقي المبني على أن الأرض متحركة تدور حول محور لها، وأن الفلك سبع سيارة، وما تبقى منه ثابت، وقد وصف في إحدى مؤلفاته آلة تُعرف بها الأبعاد، وشرح تركيبها وطرق عملها.

درس السَّجْزِي قطوع المخروط وتقاطعها مع الدائرة، واهتم بشكل خاص بالهندسة، وخصوصاً في شكلها التعليمي، فكانت بعض كتبه تأخذ هيئة إجابات عن أسئلة مطروحة، ومن أهمها (رسالة في جواب مسائل هندسية)، و(أجوبة على مسائل هندسية).

للسَّجْزِي ما يزيد عن 40 كتاباً ورسالة ناقش فيها عدة مسائل علمية، ومنها: (خواص الأعمدة في المثلث)، (رسالة في خواص الدائرة)، (رسالة في كيفية تصور الخططين الذين يقربان ولا يلتقيان)، (رسالة في خواص الأعمدة الواقعة في النقطة المعطاة إلى المثلث المتساوي الأضلاع)، (الجامع الشاهي) وهو عبارة عن 15 رسالة في علم الفلك، و(صد الباب، أو مائة باب) الذي يشتمل على فروع الحساب.

كان السَّجْزِي يحرص على مناقشة الأمور الهندسية والرياضية مع العلماء الآخرين، وقد ناقش كثيراً من آراء إقليدس في كتبه ومن أهمها (رسالة في الشكل الـ 23)، ثبت براهين بعض الأشكال في كتاب (الأصول)، كما ناقش أرخميدس في كتابه (المأخوذات)، وقد سجل المستشرق الألماني كارل بروكلمان أكثر من 30 رسالة وكتاب له، وأحصاها وذكر أماكن تواجدها، وأرقامها المسجلة في مكتبات العالم.

تمارين حول الاشتقاقية:

محاولاتك مهمة،

التمرين 01:

احسب الدوال المشتقة للدوال التالية :

$$f(x) = 5x^4 - x^3 + x + 1$$

$$f(x) = \frac{1}{(3x-4)^4}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{3x-4} + (2x-1)^7$$

$$f(x) = \sin^3 x - \cos^3 x + 2 \tan x$$

حل:

حساب الدوال المشتقة:

$$f'(x) = (5x^4 - x^3 + x + 1)' = (5x^4)' - (x^3)' + (x)' + (1)' = 20x^3 - 3x^2 + 1 \text{ و } \mathbb{R} \text{ دالة قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} \text{ مع: } x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{(3x-4)^4} \right)' = \frac{-((3x-4)^4)'}{(3x-4)^8} = \frac{-12(3x-4)^3}{(3x-4)^8} = \frac{-12}{(3x-4)^5} \text{ و } \mathbb{R} - \left\{ \frac{4}{3} \right\} \text{ دالة قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} - \left\{ \frac{4}{3} \right\} \text{ مع: } x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{4}{3} \right\}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{3x-4} + (2x-1)^7 \right)' = \left(\frac{x+1}{3x-4} \right)' + ((2x-1)^7)' = \frac{1 \times (3x-4) - 3 \times (x+1)}{(3x-4)^2} + 14(2x-1)^6 = \frac{-7}{(3x-4)^2} + 14(2x-1)^6 \text{ و } \mathbb{R} - \left\{ \frac{4}{3} \right\} \text{ دالة قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R} - \left\{ \frac{4}{3} \right\} \text{ مع: } x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{4}{3} \right\}$$

$$f'(x) = (\sin^3 x - \cos^3 x + 2 \tan x)' = (\sin^3 x)' - (\cos^3 x)' + 2(\tan x)' = 3 \cos x \times \sin^2 x + 3 \sin x \times \cos^2 x + 2(1 + \tan^2 x)$$

مع: $x \in \mathbb{R}$

التمرين 02:

باستعمال تعريف الاشتقاق احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-3)^2 - 4}{x-1} *$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} *$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} *$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2} *$$

حل:

$$* \text{ لدينا: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-3)^2 - 4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-3)^2 - (1-3)^2}{x-1} = [2(x-3)]_{x=1} = -4$$

مشتقة الدالة $x \mapsto (x-3)^2$ عند 1

$$\left(\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-3)^2 - 4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-3-2)(x-3+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-5) = -4 \right) \text{ (أو يمكن استعمال الطريقة: } \lim_{x \rightarrow 1} (x-5) = -4)$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = [\cos x]_{x=0} = 1$$

مشتقة الدالة $x \mapsto \sin x$ عند 0

كما قد وجدنا هاته النهاية في درس النهايات،

$$* \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} \right) = [-\sin x]_{x=\frac{\pi}{2}} = -1$$

مشتقة الدالة $x \mapsto \cos x$ عند $\pi/2$

$$* \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2-1}}{x-2} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right)_{x=2} = \frac{1}{2}$$

مشتقة الدالة $x \mapsto \sqrt{x-1}$ عند 2

$$\left(\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{1}{2} \right) \text{ (أو نستعمل المرافق: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{1}{2})$$

التمرين 03:

نعتبر الدالة f المعرفة بـ:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x}; x \in \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[\cup \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\\ f(0) = 0 \end{cases}$$

• ادرس استمرار الدالة f عند 0،• هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند 0 ؟

حل:

• دراسة الاستمرارية عند الصفر:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{0}{0} \text{ حالة عدم التعيين:}$$

ولدينا حسب العلاقات المثلثية المدروسة سابقة:

$$\cos x = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \text{ أي: } 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \cos x \text{ و } \sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \text{ من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R},$$

أي تصبح النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \times \cos \left(\frac{x}{2} \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\cos \left(\frac{x}{2} \right)} = 0$$

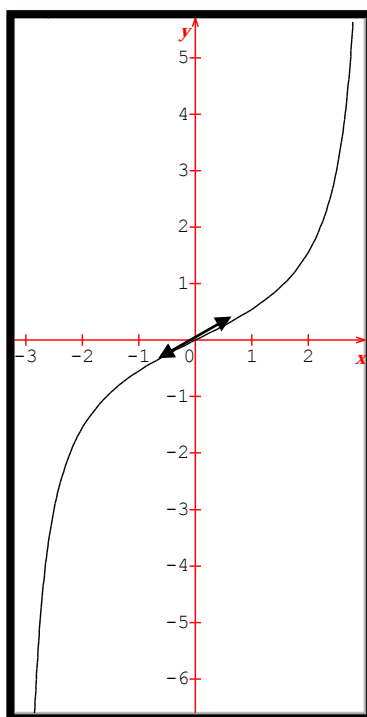
و بالتالي الدالة f مستمرة عند 0،

• دراسة القابلية للاشتقاق عند الصفر: بتطبيق التعريف

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \times \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \times \frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\cos \left(\frac{x}{2} \right)} \right) = \frac{1}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{x}{2} \right)}{\cos \left(\frac{x}{2} \right)} = \frac{1}{2}$$

أي الدالة f قابلة للاشتقاق عند 0.

لاحظ التمثيل البياني:



التمرين 04:

نعتبر الدالة العددية المعرفة من أجل كل عدد حقيقي: $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ ،
حدد العددين a و b علما أن المستقيم الذي معادلته $y = x - 2$ هو مماس لمنحنى الدالة f في النقطة ذات الفاصلة 1.

حل:

تعيين العددين a و b :

من معادلة المماس أمكن استنتاج: $f(1) = -1$ و $f'(1) = 1$ أي: $a = -1$ ،

و من (*) نجد $b = -1$ في الختام الدالة المطلوبة: $f(x) = x^3 - x^2 - 1$.

التمرين 05:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي:

$$f(x) = 3x - 1 - \frac{x-1}{(x+1)^2}$$

(C_f) التمثيل البياني لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس،

• احسب النهايات عند حدود أطراف مجموعة التعريف،

• ادرس المستقيمات المقاربة،

• احسب f' و ادرس إشارتها مشكلا جدول تغيرات الدالة f ،

• بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا محصورا بين -1.6 و -1.7،

• ارسم المستقيمات المقاربة و (C_f)،

حل:

$$f(x) = 3x - 1 - \frac{x-1}{(x+1)^2}, \quad D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

• النهايات عند الأطراف المفتوحة:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3x - 1 - \frac{x-1}{(x+1)^2} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3x - 1 - \frac{x-1}{(x+1)^2} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(3x - 1 - \frac{x-1}{(x+1)^2} \right) = -4 + \frac{2}{0^2} = -4 + \frac{2}{0^+} = +\infty$$

• المستقيمات المقاربة:

من النهايات السابقة أمكن كتابة:

$x = -1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f ،

$$y = 3x - 1 \text{ معادلة مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة } f \text{ في جوار } -\infty \text{ و } +\infty, \text{ لأن: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

• ليكن $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \left(3x - 1 - \frac{x-1}{(x+1)^2} \right)' = 3 - \frac{1 \times (x+1)^2 - 2(x+1)(x-1)}{(x+1)^4} = 3 - \frac{x+1-2x+2}{(x+1)^3} = 3 + \frac{x-3}{(x+1)^3} = \frac{3(x^3+3x^2+3x+1)+x-3}{(x+1)^3} = \frac{3x^3+9x^2+9x+3+x-3}{(x+1)^3} = \frac{x(3x^2+9x+10)}{(x+1)^3} = \frac{x(x+1)(3x^2+9x+10)}{(x+1)^4}$$

دراسة إشارة $f'(x)$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة الجداء $x(x+1)(3x^2+9x+10)$

عند حساب مميز كثير الحدود من الدرجة الثانية: $\Delta = 81 - 120 = -39 < 0$ أي: $3x^2 + 9x + 10 > 0$ من أجل كل عدد حقيقي

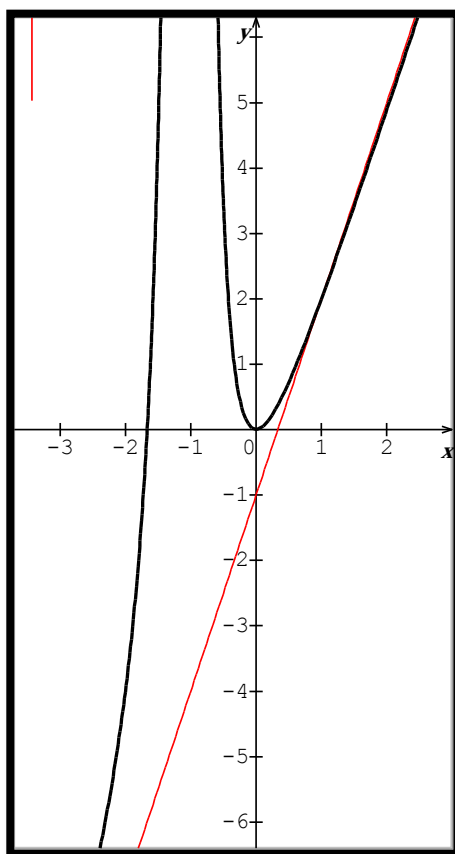
و منه جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
f'		+	-	+
f	$-\infty$	$+\infty$	$f(0)$	$+\infty$

و $f(0)=0$ ،• نلاحظ أن $-1.7 < -1.6 < -1$ من جدول التغيرات يمكن أن نستنتج f دالة مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-1.7; -1.6[$

$$f(-1.6) = -5.8 + \frac{2.6}{0.36} = -5.8 + 7.22 = 1.42 \quad \text{و} \quad f(-1.7) = -6.1 + \frac{2.7}{0.49} \approx -6.1 + 5.51 \approx -0.59$$

$$\text{أي: } f(-1.7) \times f(-1.6) < 0$$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-1.6; -1.7[$ ،• رسم المستقيم المقاربة و المنحنى (C_f) :

التمرين 06:

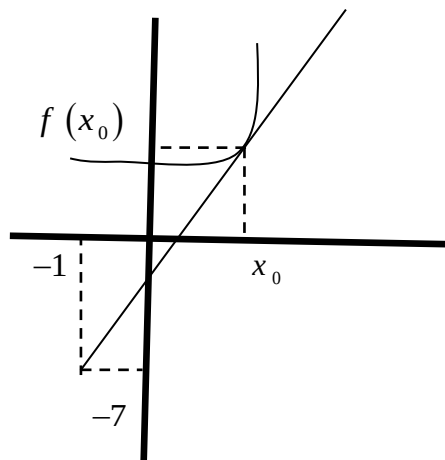
f دالة عددية معرفة على: $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$ ،

(Δ) مماس لمنحنى الدالة f يشمل النقطة $(-1; -7)$ ،

أوجد معادلة المماس.

حل:

طريقة أولى:



(Δ) مماس لمنحنى الدالة f عند النقطة $(x_0; f(x_0))$ يشمل النقطة $(-1; -7)$ ،

$$\frac{f(x_0) + 7}{x_0 + 1} = f'(x_0) \text{ المساواة التالية واضحة:}$$

عند حساب المشتقة:

$$f'(x) = \frac{3x + 3 - 3x + 2}{(x + 1)^2} = \frac{5}{(x + 1)^2} : x \neq -1 \text{ حيث } x \text{ عدد حقيقي}$$

$$\frac{\frac{3x_0 - 2}{x_0 + 1} + 7}{x_0 + 1} = \frac{5}{(x_0 + 1)^2} \rightarrow \frac{3x_0 - 2 + 7x_0 + 7}{(x_0 + 1)^2} = \frac{5}{(x_0 + 1)^2}$$

$$10x_0 = 0 \rightarrow x_0 = 0$$

تعيين معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$(\Delta): y = 5x - 2 \text{ أي:}$$

طريقة ثانية:

ليكن $(\Delta): y = ax + b$ معادلة المماس لمنحنى f و $(-1; -7) \in (\Delta)$ أي: $a \cdot (-1) + b = -7$ (*)

تعيين فاصلة النقطة التي يكون فيها (Δ) مماساً لمنحنى الدالة f ، أي لنبحث عن $x_0 \in \mathbb{R} - \{-1\}$ حيث:

$$(**) \dots f'(x_0) = a$$

$$(**) \text{ تكافئ } \frac{5}{(x + 1)^2} = a \text{ أي } (x + 1)^2 = \frac{5}{a} \text{ من الواضح أن } a \neq 0 \text{ أي: } x_0 = \sqrt{\frac{5}{a}} - 1 \text{ أو } x_0 = -\sqrt{\frac{5}{a}} - 1$$

لدينا: $(x_0; f(x_0)) \in (\Delta)$ نميز الحالتين:

$$\bullet \quad x_0 = \sqrt{\frac{5}{a}} - 1 \text{ و } f(x_0) = ax_0 + b \text{ عند التعويض: } \frac{3\sqrt{\frac{5}{a}} - 5}{\sqrt{\frac{5}{a}}} = \sqrt{5a} - a + b \text{ ومن (*) نجد } \sqrt{5a} - 7 \text{ أي:}$$

$$3\sqrt{\frac{5}{a}} - 5 = 5 - 7\sqrt{\frac{5}{a}} \text{ ومنه: } 10\sqrt{\frac{5}{a}} = 10 \rightarrow a = 5 \text{ ومن (*) نجد } b = -2$$

أي معادلة المماس في هذه الحالة: $(\Delta): y = 5x - 2$ و نقطة التماس هي: $(0; -2)$ ،

$$\bullet \quad x_0 = -\sqrt{\frac{5}{a}} - 1 \text{ و } f(x_0) = ax_0 + b \text{ عند التعويض: } \frac{-3\sqrt{\frac{5}{a}} - 5}{-\sqrt{\frac{5}{a}}} = -\sqrt{5a} - a + b \text{ ومن (*) نجد } -\sqrt{5a} - 7$$

$$-3\sqrt{\frac{5}{a}} - 5 = -\sqrt{\frac{5}{a}}(-\sqrt{5a} - 7)$$

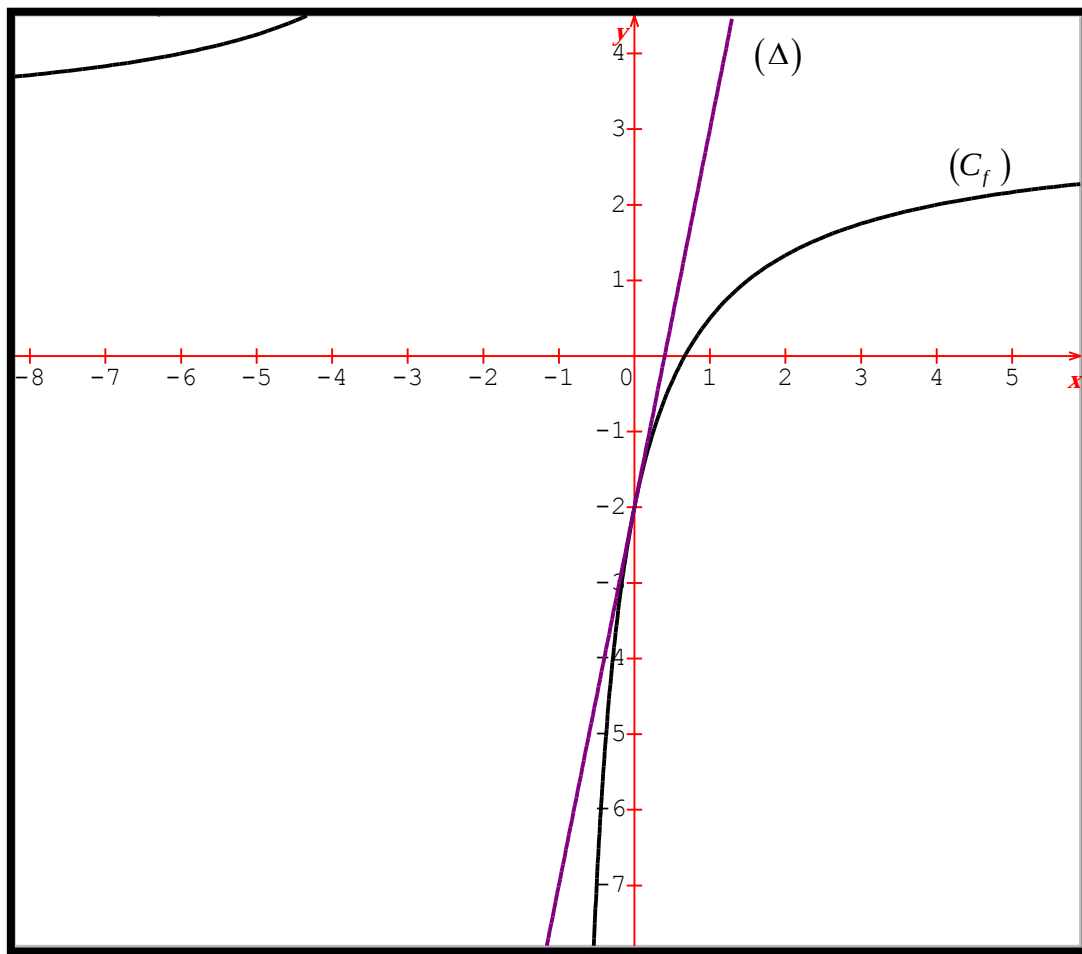
$$-3\sqrt{\frac{5}{a}} - 5 = 5 + 7\sqrt{\frac{5}{a}}$$

$$10\sqrt{\frac{5}{a}} = -10$$

$$\sqrt{\frac{5}{a}} = -1$$

و هذه المعادلة لا تقبل حولا.

لاحظ الشكل:



علي بن أبي طالب كرم الله وجهه:

أَلَا لَنْ تَنَالَ الْعِلْمَ إِلَّا بِسِتَّةٍ سَأُنَبِّكَ عَنْ مَجْمُوعِهَا بِبَيَانٍ
ذِكَاءٍ وَحِرْصٍ وَاضْطِبَّارٍ وَبُلْغَةٍ وَإِرْشَادٍ أَسْتَاذٍ وَطَوَّلُ زَمَانٍ

دراسة دوال مختلفة:

محاولاتك مهمة

من علماء المغرب:



ابن البنا المراكشي:

هو أبو أحمد بن محمد بن عثمان الأزدي المعروف بابن البنا المراكشي، ولد في مراكش بالمغرب (654 هـ - 721 م)، وقد عرف بابن البنا نسبة إلى جده الذي احترف مهنة البناء.

برز ابن البنا المراكشي برز في الرياضيات والفلك والطب، كما كان مبدعاً في العديد من العلوم، مثل التنجيم والعلوم الخفية، وهو الذي أسس مدرسة علمية مهمة في المغرب عملت على مدى قرون على تدريس مؤلفاته وشرحها وتداولها في مختلف جامعات العالم.

درس هذا العالم في مراكش النحو والحديث والفقه، ثم ذهب إلى فاس ودرس الطب والفلك والرياضيات، وكان من معلميه ابن مخلوف السجلماسي الفلكي، وابن حجلة الرياضي، وقد حظي بتقدير ملوك الدولة المرينية في المغرب الذين استقدموه إلى فاس مقرهم مراراً.

تلقى ابن البنا علوم العصر، وفي الرياضيات تحديداً تلقى علوم الرياضيات على يد معلمه ابن حجلة، فمئذ أن ظهر نبوغه في عمر مبكر كرس حياته لتعلم علوم الرياضيات من حساب وجبر وهندسة، وقد أكسبه اشتغاله بالرياضيات شهرة عظيمة بين معاصريه، فنال حظوة في بلاط دولة بني مرين الذين كانوا يستدعونه لإلقاء دروس الحساب والهندسة والجبر، كما اشتهر بالاعتماد على الأرقام الهندية التي كانت معروفة بالأرقام الغبارية، والأرقام الأندلسية المعروفة بالعربية، واشتهر كذلك بالجوانب التطبيقية في علم الحساب والموسيقى.

أوضح ابن البنا في الحساب النظريات الصعبة والقواعد المستعصية، وقام ببحوث مستفيضة عن الكسور، ووضع قواعد لجمع مربعات الأعداد ومكعباتها، وقاعدة الخطأين لحل معادلات الدرجة الأولى، والأعمال الحسابية، كما أدخل بعض التعديل على الطريقة المعروفة بـ (طريقة الخطأ الواحد) ووضع ذلك بشكل قانون، وقد جاء في دائرة المعارف الإسلامية أن ابن البنا تفوق على من سبقه من علماء الإسلام في الشرق في علوم الرياضيات، وخصوصاً في حساب الكسور.

ترك ابن البنا 82 مؤلفاً أكثرها في علم الحساب والرياضيات والهندسة والجبر والفلك والتنجيم، لكن أغلبيتها ضاع، ولم يعثر منها حتى الآن إلا على: (تلخيص أعمال الحساب) الذي يقول عنه العالمين سميث وسارتون إنه من أحسن الكتب التي ظهرت في الحساب، حيث ظل الغربيون يعملون به حتى نهاية القرن الـ16 للميلاد، كما كتب كثير من علماء الإسلام شروحاً له، واقتبس منه علماء الغرب، إلى جانب اهتمام علماء القرنين الـ19 والـ20 به.

ومما تركته من المؤلفات (مقالات في الحساب) وهو بحث في الأعداد الصحيحة والكسور والجدور والتناسب، (الأصول والمقدمات في الجبر والمقابلة)، (الفصول في الفرائض)، (رسالة في المساحات)،

(الإسطرلاب واستعماله)، (أحكام النجوم)، (رسالة في الجدور الصم وجمعها وطرحها)، (قياس السطوح)، (مدخل إلى إقليدس)، (منهاج الطالب في تعديل الكواكب) الذي حقق المستشرق الإسباني فيرنه خينس مقدمته وبعض فصوله وترجمها إلى الإسبانية سنة 1952.

التمرين 01:

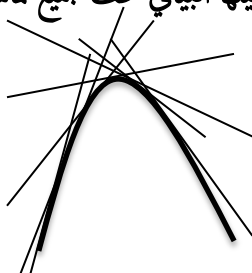
- لتكن a, b, c أعدادا حقيقية حيث: $a > 0$ وليكن (C) القطع المكافئ الذي معادلته: $y = ax^2 + bx + c$ ،
 (1) ليكن x_0 عددا حقيقيا، و M_0 نقطة من (C) فاصلتها x_0 ،
 عين معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) عند النقطة M_0 ،
 (2) برهن أن (C) يقع فوق جميع كل مماساته.

حل:

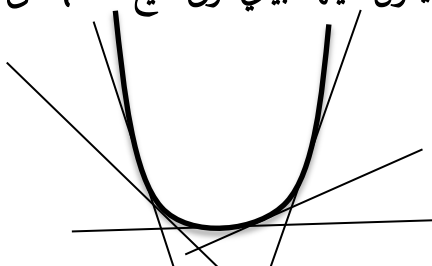
- (1) $x_0 \in \mathbb{R}$ ، لنعين معادلة المماس (T) عند النقطة $M_0(x_0, y_0)$ ،
 من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = 2ax + b$ ونعلم أن: $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ،
 بالتعويض نجد: $(T): y = (2ax_0 + b)(x - x_0) + (ax_0^2 + bx_0 + c)$ ،
 (2) **طريقة أولى:** قبل الشروع في هاته الطريقة إليك هذا التعريف:

الدالة المقعرة و الدالة المحدبة:

* **الدالة المقعرة على مجال I :** هي تلك الدالة التي يكون تمثيلها البياني تحت جميع مماساتها على المجال I ، كما يبدو في الشكل:



* **الدالة المحدبة على مجال J :** هي تلك الدالة التي يكون تمثيلها البياني فوق جميع مماساتها على المجال J ، كما يبدو في الشكل:



و هو ما يمكن أن نعبّر عنه رياضيا بـ:

- ** إذا كان $f''(x) \leq 0$ من أجل كل $x \in I$ (تكون عندها أميالات المماسات في حالة تناقص) **معناه** منحنى الدالة f مقعر على I ،
 ** إذا كان $f''(x) \geq 0$ من أجل كل $x \in J$ (تكون عندها أميالات المماسات في حالة تزايد) **معناه** منحنى الدالة f محدب على J ،
 حيث: f'' هي المشتقة الثانية للدالة f .

نعود إلى التمرين، لدينا من أجل كل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = 2a > 0$ ، كون $a > 0$ ، أي المنحنى (C) محدب وبالتالي كل مماساته تقع تحت المنحنى (C) .

طريقة ثانية:

$$\begin{aligned} f(x) - y &= ax^2 + bx + c - (2ax_0 + b)(x - x_0) - ax_0^2 - bx_0 - c = \\ &= a(x^2 - x_0^2) + b(x - x_0) - (2ax_0 + b)(x - x_0) = \\ &= (x - x_0)(a(x + x_0) + b - 2ax_0 - b) = a(x - x_0)^2 \geq 0 / a > 0 \end{aligned}$$

لدينا الفرق:

وبالتالي (C) يقع فوق كل مماس له.

التمرين 02:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس،

(1) أ) عين النهايات عند أطراف مجموعة التعريف،

(ب) أدرس تغيرات f ثم شكل جدول تغيراتها،

(2) أ) عين الأعداد الحقيقية a, b, c و d بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 1$: $f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x-1)^2}$

(ب) ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) والمستقيم $y = x - 2$: (d) ؟ برر،

(ج) حدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (d) ،

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty; 1[$ ، ثم استنتج قيمة مقربة له إلى 10^{-1} ،

(4) عين معادلة المماس الموازي للمقارب (d) ،

(5) أرسم (C_f) و (d) و المماس (وحدة الرسم 2 cm)،

(6) استنتج حلول المعادلة $f(x) = x + m$ حيث: m وسيط حقيقي،

(7) نريد التأكد من (6) حسابيا،

بين أن فواصل تقاطع (C_f) مع المستقيم $y = x + m$ هي حلول المعادلة: $(m+2)x^2 - (2m+7)x + m + 4 = 0$ ،

• جد حلول المعادلة السابقة حسب قيم الوسيط m .

حل:

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[\text{ و } f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$$

(1) أ) تعيين النهايات عند أطراف مجموعة التعريف:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2} = \frac{1}{0^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

(ب) دراسة تغيرات الدالة f :

من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{1\}$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1} \right)' = \frac{(3x^2 - 8x + 8) \times (x - 1)^2 - 2(x - 1) \times (x^3 - 4x^2 + 8x - 4)}{(x - 1)^4} = \\
 &= \frac{(x - 1) \times [(x - 1) \times (3x^2 - 8x + 8) - 2x^3 + 8x^2 - 16x + 8]}{(x - 1)^4} \\
 &= \frac{(x - 1) \times (3x^3 - 8x^2 + 8x - 3x^2 + 8x - 8 - 2x^3 + 8x^2 - 16x + 8)}{(x - 1)^4} \\
 &= \frac{x^2(x - 1)(x - 3)}{(x - 1)^4}
 \end{aligned}$$

من العبارة السابقة نستنتج أن إشارة المشتق من إشارة الجداء $(x - 1)(x - 3)$ أي:

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$	
f' إشارة:	+	○	+	-	○	+

من هذا الجدول نكتب:

- دالة f متناقصة تماما على المجال $]1; 3]$ ،
 - دالة f متزايدة تماما على المجال $]3; +\infty[\cup]-\infty; 1[$ ،
- أي جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$ إشارة:	+	○	+	-	○	+
$f(x)$		$+\infty$		$+\infty$		$+\infty$
		$-\infty$		$f(3)$		

نلاحظ أن النقطة $(0; -4)$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f

$$f(3) = \frac{27 - 36 + 24 - 4}{4} = \frac{11}{4} \text{ ولدينا:}$$

(2) أ) تعيين a, b, c, d :

نستعمل القسمة مثلا:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 4x^2 + 8x - 4 & x^2 - 2x + 1 \\
 \underline{-(x^3 - 2x^2 + x)} & \\
 -2x^2 + 7x - 4 & \\
 \underline{-(-2x^2 + 4x - 2)} & \\
 3x - 2 &
 \end{array}$$

أي من أجل كل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R} - \{1\}$:

$$f(x) = x - 2 + \frac{3x - 2}{(x - 1)^2}$$

و منه: $a = 1, b = -2, c = 3, d = -2$

ب) المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل في جوار $\pm\infty$ أو $(-\infty, +\infty)$ ،
التبرير:

من العبارة $f(x) = x - 2 + \frac{3x - 2}{(x - 1)^2}$ لدينا: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x - 2}{(x - 1)^2} = 0$ ،

ج) تحديد الوضع النسبي لـ (C_f) و (d) :

نقوم بدراسة إشارة الفرق: $f(x) - y$

$$f(x) - y = f(x) - (x - 2) = \frac{3x - 2}{(x - 1)^2}$$

و منه أمكن كتابة الجدول:

x	$-\infty$	$2/3$	1	$+\infty$
إشارة $f(x) - y$	-	0	+	+
الوضع النسبي:	تحت (C_f)	فوق (C_f)	فوق (C_f)	فوق (C_f)
	(d)	قاطع (C_f)	(d)	(d)

3) من جدول التغيرات f دالة معرفة و مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 1[$

و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \times (+\infty) = -\infty$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد حل وحيد $\alpha \in]-\infty; 1[$ يحقق:
 $f(\alpha) = 0$

استنتاج قيمة مقربة له إلى 10^{-1} :

عند حساب $f(0) = -4 < 0$ أي: $\alpha \in]0; 1[$ ، من الواضح أن مركز هذا المجال هو $\frac{1}{2}$ ، ولدينا:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{4}{2} + \frac{\frac{3}{2} - \frac{4}{2}}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \frac{-3}{2} - 2 < 0$$

أي: $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ / مركز هذا المجال: $\frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{3}{4}$ ولدينا:

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} - \frac{4}{4} + \frac{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}}{\left(\frac{3}{4} - 1\right)^2} = -\frac{5}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{16}} = -\frac{5}{4} + 4 > 0$$

أي: $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right]$ / مركز هذا المجال: $\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{5}{8}$ ولدينا:

$$f\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{5}{8} - \frac{16}{8} + \frac{\frac{15}{8} - \frac{16}{8}}{\left(\frac{5}{8} - 1\right)^2} = \frac{-11}{8} + \frac{\frac{-1}{8}}{\frac{9}{64}} = \frac{-11}{8} - \frac{8}{9} < 0$$

$$\text{أي: } \alpha \in \left[\frac{5}{8} ; \frac{3}{4} \right]_{=0.625 \quad =0.75} / \alpha \text{ مركز هذا المجال: } \frac{\frac{5}{8} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{11}{16} \text{ ولدينا:}$$

$$f\left(\frac{11}{16}\right) = \frac{11}{16} - \frac{32}{16} + \frac{\frac{33}{16} - \frac{32}{16}}{\left(\frac{11}{16} - \frac{16}{16}\right)^2} = \frac{-21}{16} + \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16^2}} = \frac{-21}{16} + \frac{16}{25} = \frac{-21}{16} + \frac{16}{25} = \frac{-269}{400} < 0$$

$$\text{أي: } \alpha \in \left[\frac{11}{16} ; \frac{3}{4} \right]_{=0.6875 \quad =0.75} / \alpha \text{ مركز هذا المجال: } \frac{\frac{11}{16} + \frac{12}{16}}{2} = \frac{23}{32} \text{ ولدينا:}$$

$$f\left(\frac{23}{32}\right) = \frac{23}{32} - \frac{64}{32} + \frac{\frac{69}{32} - \frac{64}{32}}{\left(\frac{23}{32} - \frac{32}{32}\right)^2} = -\frac{41}{32} + \frac{\frac{5}{32}}{\frac{81}{32^2}} = -\frac{41}{32} + \frac{160}{81} = \frac{-3321 + 5120}{2592} = \frac{1799}{2592} > 0$$

$$\text{أي: } \alpha \in \left[\frac{11}{16} ; \frac{23}{32} \right]_{=0.6875 \quad =0.71875} / \alpha \text{ مركز هذا المجال: } \frac{\frac{22}{32} + \frac{23}{32}}{2} = \frac{45}{64} \text{ ولدينا:}$$

$$f\left(\frac{45}{64}\right) = \frac{45}{64} - \frac{90}{64} + \frac{\frac{135}{64} - \frac{128}{64}}{\left(\frac{45}{64} - \frac{64}{64}\right)^2} = -\frac{45}{64} + \frac{\frac{7}{64}}{\frac{361}{64^2}} = -\frac{45}{64} + \frac{448}{23104} = \frac{-1039680 + 28672}{1478656} = \frac{-1011008}{1478656} < 0$$

$$\text{أي: } \alpha \in \left[\frac{45}{64} ; \frac{23}{32} \right]_{=0.703 \quad =0.71875} ، \alpha \approx 0.7$$

وباستعمال الحاسبة البيانية نجد: $x = 0.70440226$

(4) ليكن (Δ) المماس الموازي لـ (d) :

أي نبحث عن x_0 من $\mathbb{R} - \{1\}$ حيث: $f'(x_0) = 1$ (لأن ميل المقارب المائل 1) معناه: $\frac{x_0^2(x_0-1)(x_0-3)}{(x_0-1)^4} = 1$ معناه:

$$(x_0^3 - 3x_0^2 - (x_0^3 - 3x_0^2 + 3x_0 - 1)) = 0 \quad , \quad x_0 \neq 1 \quad \text{تكافئ:} \quad x_0^2(x_0-1)(x_0-3) - (x_0-1)^4 = 0 \quad / \quad x_0 \neq 1$$

$$، \quad x_0 = \frac{1}{3} \quad \text{ومنه:} \quad (x_0^3 - 3x_0^2 - x_0^3 + 3x_0^2 - 3x_0 + 1) = 0 \quad , \quad x_0 \neq 1$$

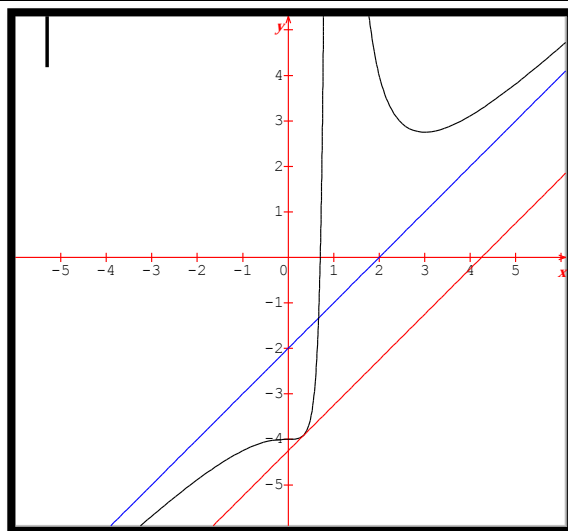
لنعين عندئذ معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = \frac{1}{3}$:

$$\text{لدينا: } (\Delta): y = f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) \text{ أي: } (\Delta): y = x - \frac{1}{3} + f\left(\frac{1}{3}\right) \text{ و:}$$

$$(\Delta): y = x - \frac{4}{12} + \frac{-47}{12} \text{ أي: } f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{6}{3} + \frac{1-2}{\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{3}\right)^2} = \frac{-5}{3} + \frac{-1}{\frac{4}{9}} = \frac{-5}{3} - \frac{9}{4} = \frac{-20-27}{12} = \frac{-47}{12}$$

$$\text{ومنه: } (\Delta): y = x - \frac{17}{4}$$

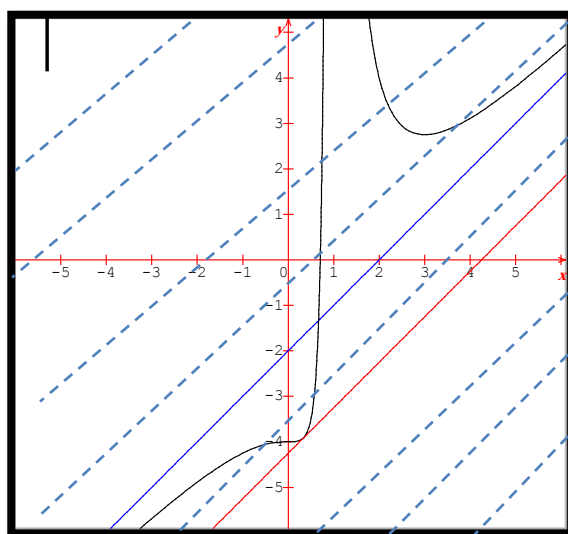
(5) رسم (C_f) و (d) والمماس (Δ) : بمراعات الوحدة المطلوبة يكون:



(6) حلول المعادلة $f(x) = x + m$ حيث: m وسيط حقيقي، يانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y = x + m$ ، لأجل هذا نراقب المنحنى (C_f) وملاحظة أن $y = x + m$ مواز للمماس والمقارب ونشكل الجدول:

المناقشة البيانية:	
m	
$-\infty$	لا توجد حلول
$-\frac{17}{4}$	حل مضاعف
$\frac{4}{4}$	حلان
-2	حل وحيد
$+\infty$	حلان

لاحظ:



(7) التأكد بالحساب:

ليكن $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ حيث: $f(x) = x + m$ أي: $x - 2 + \frac{3x - 2}{(x - 1)^2} = x + m$ معناه $\frac{-2x^2 + 4x - 2 + 3x - 2}{(x - 1)^2} = m$

كافي: $-2x^2 + 7x - 4 = mx^2 - 2mx + m$ أي: $(m + 2)x^2 - (2m + 7)x + m + 4 = 0$ أي: $(1) \dots$ أي فواصل نقط تقاطع المستقيم $y = x + m$ والمنحنى (C_f) هي حلول المعادلة (1)، و بالتالي لنبحث عن حلول المعادلة (1): من الواضح تميز الحالات التالية:

- $m = -2$ تصبح المعادلة (1) من الدرجة الأولى و بالتالي تقبل حلا وحيدا لاحظ أن $-(2(-2) + 7) = -3 \neq 0$
- $m \neq -2$ نحصل على معادلة من الدرجة الثانية، لأجل هذا نحسب المميز:

$$\Delta = (2m + 7)^2 - 4(m + 2)(m + 4) = 4m^2 + 28m + 49 - 4m^2 - 24m - 32 = 4m + 17$$

كذلك لدينا:

$$\Delta > 0 \rightarrow m > \frac{-17}{4} \quad \bullet \bullet \quad (\text{مع: } m \neq -2) \text{ المعادلة تقبل حلين مختلفين،}$$

$$\Delta = 0 \rightarrow m = -\frac{17}{4} \quad \bullet \bullet \quad \text{المعادلة تقبل حلا مضاعفا،}$$

$$\Delta < 0 \rightarrow m < \frac{-17}{4} \quad \bullet \bullet \quad \text{المعادلة لا تقبل حلا.}$$

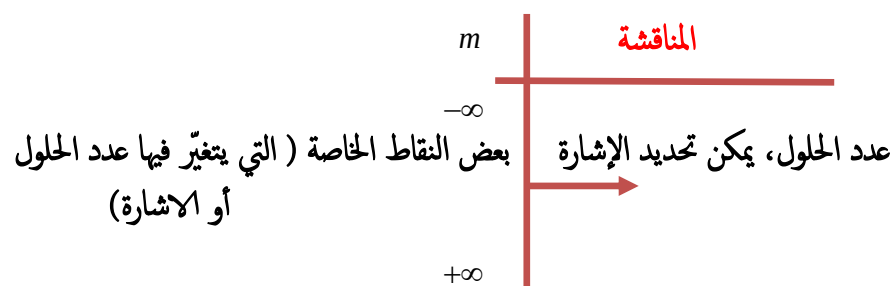
هام جدا:

بعد رسم منحنى دالة ما يطرح في كثير من المواضيع المطلوب الآتي: ناقش بيانيا حلول معادلة E ذات مجهول x معطاة بدلالة الوسيط الحقيقي m .

إجابة:

عندما يطرح إشكال من هذا النوع يجب فهم أن الإجابة عنه تعتمد على الدالة f الممثلة في الموضوع، لهذا يجب عليك إظهار عبارة الدالة f صراحة في طرف، و يظهر في الطرف الآخر علاقة تضم الوسيط m ، و تميز الحالات التالية عموما:

(1) $f(x) = m$ نقول عندئذ حلول هذه المعادلة E هي فواصل نقط تقاطع المنحنى الممثل للدالة f مع المستقيم ذي المعادلة $y = m$ و نلخص كل هذا في الجدول:



(2) $f(x) = ax + m$ ، حيث: a ثابت، حلول المعادلة E في هذه الحالة هي فواصل نقط تقاطع منحنى الدالة f مع المستقيمت $y = ax + m$ ، لاحظ أن أميال المستقيمت متساوية، يمكن الاستعانة أثناء المناقشة بمستقيم مقارب أو مماسات أو الاثنتين معا كما شاهدنا في التمرين السابق لتحديد عدد الحلول،

(3) $f(x) = mx + b$ ، حيث: b ثابت معطى، حلول المعادلة E هي فواصل نقط تقاطع منحنى الدالة مع المستقيمت $y = mx + b$ - لاحظ أن هاتئ المستقيمت تشمل نقطة ثابتة $(0; b)$ أي هي مستقيمت تدور حول هذه النقطة الثابتة - تم المناقشة كما ورد في الحالة (2)، و نلخص هذا في جدول كما في الحالة (1).

التمرين 03:

$f(x) = |x+1| + \frac{x}{x^2-1}$ بدراسة معرفتها على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$:

- (1) أ) ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty, +\infty$ ،
- ب) احسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسياً ،
- (2) أ) احسب f' و ادرس إشارتها ،
- ب) مثل جدول تغيرات الدالة f ،
- (3) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل بجوار $+\infty$ ،
- ب) احسب $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + x + 1)$ ، فسر هندسياً النتيجة ،
- ج) ادرس الوضعية النسبية لمنحنى الدالة f و المستقيم المقارب (Δ) على المجال $]1; +\infty[$ ،
- (4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على المجال $]1; 1[$ ، وأعط حصر α سعة 10^{-1} ،
- (5) ارسم المستقيمتين المقاربتين و منحنى الدالة f في معلم متعامد و متجانس .

حل:

$$f(x) = |x+1| + \frac{x}{x^2-1} \quad \text{و} \quad D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$$

(1) أ) النهايات عند $-\infty$ و $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x+1| + \frac{x}{x^2-1} \right) = |-\infty| + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(|x+1| + \frac{x}{x^2-1} \right) = |+\infty| + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(|x+1| + \frac{x}{x^2-1} \right) = 2 + \frac{1}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases} \quad \text{(ب)}$$

عند دراسة إشارة المقام $x^2 - 1$:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	-	-	+

و بنفس الطريقة السابقة نجد:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(|x+1| + \frac{x}{x^2-1} \right) = \frac{-1}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{-1}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{cases}$$

التفسير الهندسي:

 $x = 1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f ، $x = -1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f ،(2) أ) لحساب المشتقة: نكتب بداية الدالة f دون رمز القيمة المطلقة:

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1}, & x > -1, x \neq 1 \\ f(x) = -x - 1 + \frac{x}{x^2 - 1}, & x < -1 \end{cases}$$

الحالة الأولى: ليكن $x > -1$ و $x \neq 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = 1 - \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 2x^2 + 1 - x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

و منه جدول الإشارة:

x	$-\infty$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	$+$	

يمكن أن نستنتج من هذا الجدول أن النقطة $(0;1)$ هي نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f ،

الحالة الثانية: ليكن $x < -1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 + \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = -1 - \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^4 + 2x^2 - 1 - x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{-x^4 + x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

نضع $t = x^2$ و $t \geq 0$ و منه نحصل على معادلة من الدرجة الثانية في البسط، نحسب مميزها: $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$ ،

إذن الإشارة من إشارة المعامل المرافق لوحيد الحد الأعلى درجة أي: $f'(x) < 0$ من أجل كل $x < -1$ ، إليك جدول إشارة $f'(x)$ الذي يلخص الحالة الأولى والثانية:

x	$-\infty$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	

(ب) جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$f(\sqrt{3})$	$+\infty$

(3) لدينا من عبارة الدالة $f: \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ لما كما قد حسبنا هذه النهاية في جوار $+\infty$ ، أي $x > -1$

يكون:

بذلك نستنتج أن المستقيم ذا المعادلة $y = x + 1$ (Δ) مقارب مائل لمنحنى الدالة f في جوار $+\infty$ ،
(ب)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x - 1)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x + 1| + \frac{x}{x^2 - 1} - (x - 1) \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x - 1 + \frac{x}{x^2 - 1} + x + 1 \right) \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x^2 - 1} \right) = 0$$

لأننا حسبنا النهاية في جوار $-\infty$ أي: $x < -1$ ،

ويمكن تفسير هذا هندسياً: منحنى الدالة f يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً في جوار $-\infty$ معادلته $y = -x - 1$ ،
(ج) الوضعية النسبية لمنحنى الدالة f والمستقيم (Δ) على المجال $]1; +\infty[$:

و منه منحنى الدالة f يقع فوق المستقيم المقارب (Δ) على المجال المطلوب،
 $f(x) - (x + 1) = \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x}{(x - 1)(x + 1)} > 0$

(4) من جدول التغيرات الموضوع سابقاً يمكن أن نستنتج: f مستمرة ومتناقصة تماماً على المجال $]1; 1]$ ومن النهايات أمكن كتابة:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty \times -\infty = -\infty < 0$$

• إعطاء حصر له، لنستعمل طريقة التنصيف (يمكن اللجوء إلى الحاسبة البيانية)

لدينا: $f(0) = 1 > 0$ أي: $\alpha \in]0; 1]$ ومنتصف هذا المجال هو $\frac{1}{2}$ ،

$$\text{ولدينا: } 0 < f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{4}} = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} > 0$$

$$\text{ولدينا: } 0 < f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{7}{4} + \frac{\frac{3}{4}}{\frac{9}{16} - \frac{16}{16}} = \frac{7}{4} - \frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{16}} = \frac{7}{4} - \frac{12}{7} = \frac{1}{28} > 0$$

$$\text{ولدينا: } 0 < f\left(\frac{7}{8}\right) = \frac{15}{8} + \frac{\frac{7}{8}}{\frac{49}{64} - \frac{64}{64}} = \frac{15}{8} - \frac{\frac{7}{8}}{\frac{15}{64}} = \frac{15}{8} - \frac{56}{15} = \frac{225 - 448}{120} = \frac{-223}{120} < 0$$

$$\alpha \in \left[\frac{3}{4}; \frac{7}{8} \right] \quad \text{و منتصف هذا المجال: } \frac{13}{16}$$

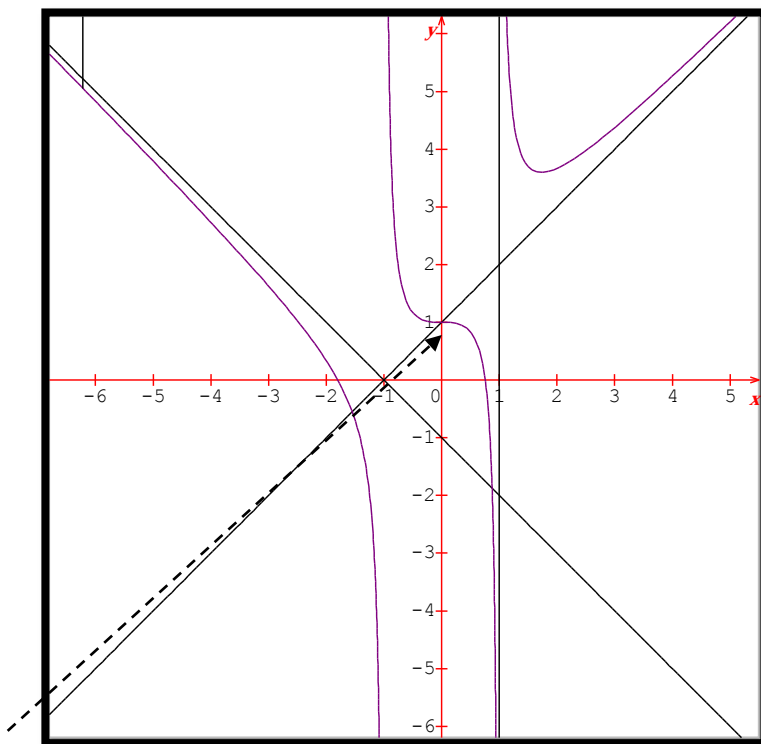
$$\text{ولدينا: } 0 < f\left(\frac{13}{16}\right) = \frac{29}{16} + \frac{\frac{13}{16}}{\frac{169}{256} - \frac{256}{256}} = \frac{29}{16} - \frac{13}{\frac{87}{16}} = \frac{29}{16} - \frac{208}{78} = \frac{2262 - 3328}{1248} = \frac{-1066}{1248} < 0$$

$$\alpha \in \left[\frac{3}{4}; \frac{13}{16} \right] \quad \text{و منتصف هذا المجال: } \frac{25}{32}$$

$$\text{ولدينا: } 0 < f\left(\frac{25}{32}\right) = \frac{57}{32} + \frac{\frac{25}{32}}{\frac{625}{1024} - \frac{1024}{1024}} = \frac{57}{32} - \frac{25}{\frac{399}{32}} = \frac{57}{32} - \frac{800}{399} = \frac{22743 - 25600}{12768} = \frac{-2857}{12768} < 0$$

و منه: $\alpha \in \left[\frac{3}{4} ; \frac{25}{32} \right]_{=0.75}^{=0.78125}$ من الواضح أن القيمة التقريبية لطول المجال السابق هو $0.1 > 0.78125 - 0.75 = 0.03125$ ، أي المجال الأخير يفي بالفرض.

(5) رسم المستقيمات المقاربة و منحنى الدالة f (لاحظنا سابقا وجود نقطة انعطاف):



نقطة الانعطاف.

التمرين 04:

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R} - \{2\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$

(1) ادرس تغيرات الدالة f ،

(2) عين الأعداد الحقيقية a, b و c بحيث يكون: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$ ،

(3) استنتج أن منحنى الدالة يقبل مستقيمين مقارين يطلب تعيين معادلتيهما ،

(4) احسب إحداثي ω نقطة تقاطع المستقيمين المقارين ، ثم بين أنها مركز تناظر لمنحنى الدالة f ،

(5) ارسم المنحنى (C_f) و مستقيماته المقاربة ،

(6) ناقش بياناً عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2 - (5 + m)x + 7 + 2m = 0$ ، حيث: m وسيط حقيقي ،

(7) هل المنحنى (C_f) يقبل مماسات توازي مستقيمه المقارب ،

(8) g, h دالتان معرفتان كما يلي: $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(x + 1) - 2$ ،

اعتماداً على المنحنى (C_f) اشرح كيف يتم إنشاء كل من (C_g) و (C_h) .

حل:

$$D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[\text{ و } f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$$

(1) دراسة التغيرات:

النهايات: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$

، $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

المشتقة: من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{2\}$:

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 5x + 7)'(x - 2) - (x - 2)'(x^2 - 5x + 7)}{(x - 2)^2} = \frac{(2x - 5)(x - 2) - x^2 + 5x - 7}{(x - 2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 5x + 10 - x^2 + 5x - 7}{(x - 2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$$

من الواضح أن جذور كثير الحدود في البسط هي: 1, 3 ،
أي يمكن وضع جدول التغيرات:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(1)$	$+\infty$	$f(3)$	$+\infty$

حيث: $f(1) = \frac{1-5+7}{-1} = -3$ ، $f(3) = \frac{9-15+7}{1} = 1$

(2) لتعيين a, b, c نستعمل مثلاً القسمة الاقليدية:

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 5x + 7 & x - 2 \\ \hline -(x^2 - 2x) & x - 3 \\ \hline -3x + 7 & \\ -(-3x + 6) & \\ \hline 1 & \end{array}$$

عندئذ من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{2\}$: $f(x) = x - 3 + \frac{1}{x - 2}$ أي: $a = 1$ و $b = -3$ ، $c = 1$

(3) من العبارة الأخيرة المحصل عليها $y = x - 3$ مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة f في جوار $-\infty$ أو $+\infty$ و من النهايات نستنتج أن: $x = 2$ مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f ،

(4) نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين: $\omega(2; 2-3)$ أي: $\omega(2; -1)$ ،
من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ يكون $2(2) - x \in \mathbb{R} - \{2\}$ و

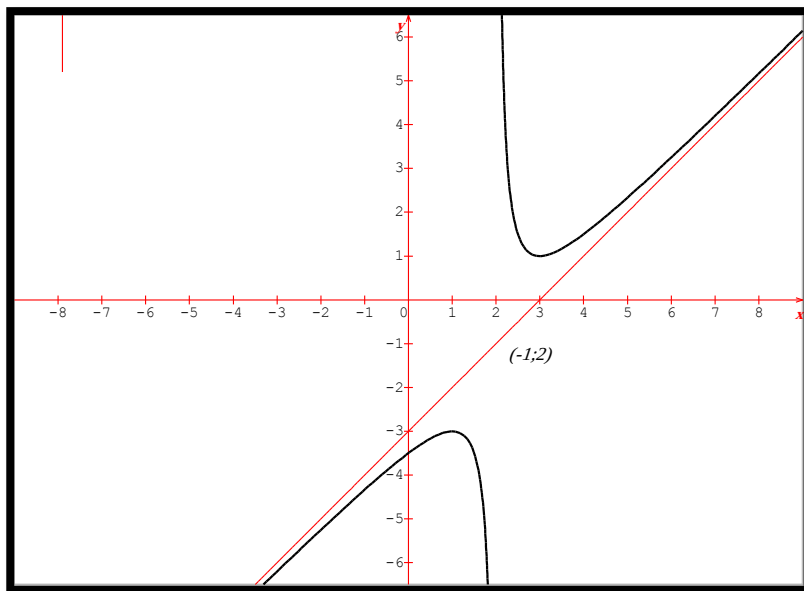
$$f(4-x) + f(x) = \frac{(4-x)^2 - 5(4-x) + 7}{4-x-2} + \frac{x^2 - 5x + 7}{x-2} =$$

$$= \frac{-16 + 8x - x^2 + 20 - 5x - 7 + x^2 - 5x + 7}{x-2}$$

$$= \frac{-2x + 4}{x-2} = -2 = 2(-1)$$

و منه $\omega(2; -1)$ مركز تناظر لمنحنى الدالة f ،

(5) رسم المستقيمات المقاربة و منحنى الدالة f : عند مراقبة جدول التغيرات نجد:



(6) المناقشة الوسيطة:

المعادلة $x^2 - (5+m)x + 7 + 2m = 0$ تكافئ: $x^2 - 5x + 7 = mx - 2m$ معناه $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2} = m$ حيث: $x \neq 2$
 إذن حلول المعادلة يبينها هي فواصل نقاط تقاطع المستقيم $y = m$ الموازي لمحور الفواصل و منحنى الدالة f ،
 إليك الجدول التالي الذي يلخص المطلوب:

m	المناقشة:
$-\infty$	حلان مختلفان أحدهما موجب و الآخر سالب
$-\frac{7}{2}$	حلان مختلفان أحدهما معدوم و الآخر ذو إشارة موجبة
$\frac{1}{2}$	حلان مختلفان و موجبان
-3	حل مضاعف موجب الإشارة لا توجد حلول
1	حل مضاعف موجب
$+\infty$	حلان مختلفان موجبان

(7) لنفرض مثلاً أن (Δ) مماس موازي للمستقيم المقارب لمنحنى الدالة f ، أي توجد $x_0 \in \mathbb{R} - \{2\}$ حيث: $f'(x_0) = 1$ معناه $\frac{x_0^2 - 4x_0 + 3}{(x_0 - 2)^2} = 1$ أي: $(x_0 - 2)^2 - 1 = (x_0 - 2)^2$ ومنه $-1 = 0$ وهذا تناقض رياضي، أي الفرض الموضوع خاطئ،

(8) h, g دالتان معرفتان كما يلي: $g(x) = |f(x)|$ و $h(x) = f(x+1) - 2$

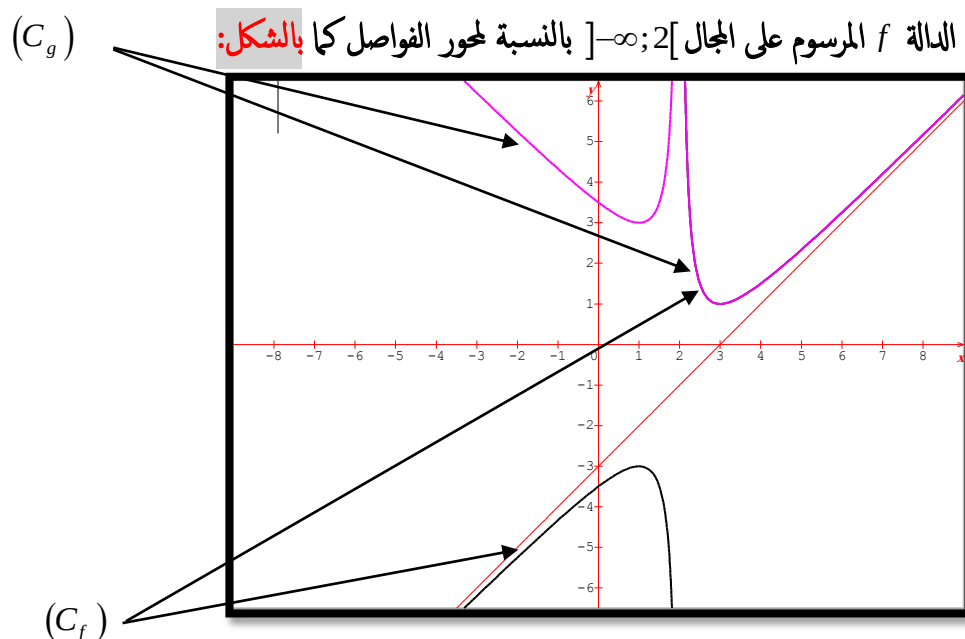
رسم منحنى الدالة g :

بداية نكتب عبارة الدالة g دون رمز القيمة المطلقة، من الشكل يمكن كتابة:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in]2; +\infty[\\ -f(x) & , x \in]-\infty; 2[\end{cases}$$

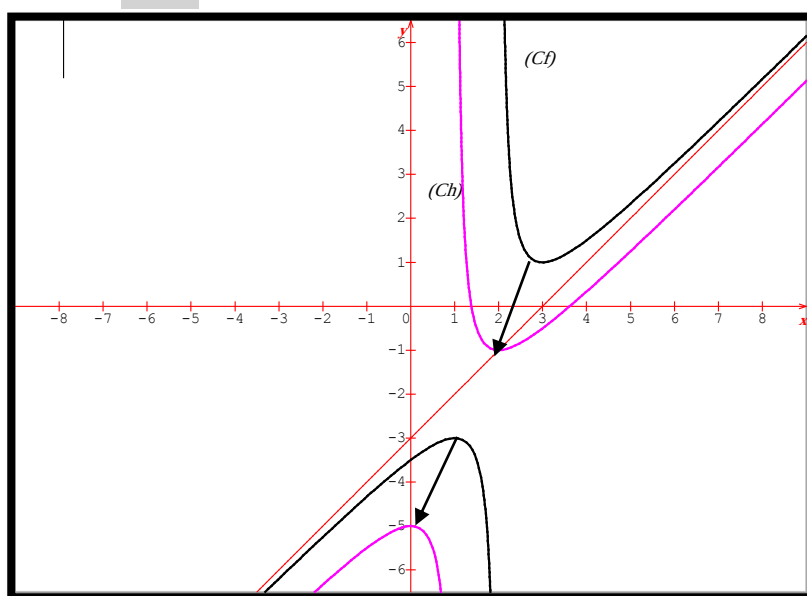
• منحنى الدالة g ينطبق على منحنى الدالة f على المجال $]2; +\infty[$ ،

• منحنى الدالة g يناظر منحنى الدالة f المرسوم على المجال $]-\infty; 2[$ بالنسبة لمحور الفواصل كما بالشكل:



رسم منحنى الدالة h :

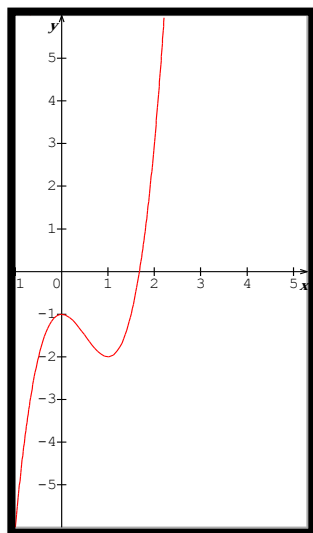
يمكن الحصول على المنحنى (C_h) بانسحاب لمنحنى الدالة f شعاعه $(-1; -2)$ ، لاحظ الشكل:



التمرين 05:

الجزء الأول:

g دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ وليكن (C_g) تمثيلها البياني كما في الرسم:



- (1) أكتب جدول تغيرات الدالة g ،
- (2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1.6 < \alpha < 1.7$ ،
- (3) استنتج إشارة g على المجال $]-1; +\infty[$ ،

الجزء الثاني:

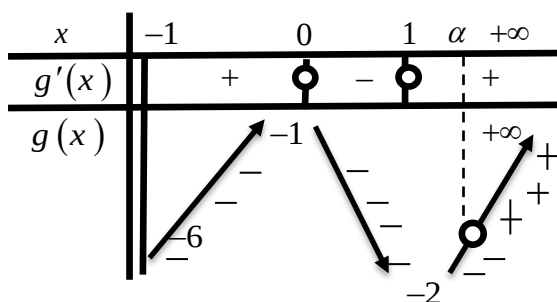
- f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}$
- وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- (1) احسب نهاية الدالة f عند -1 بقيم أكبر و $+\infty$ ،
 - (2) بين أنه من أجل كل x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$ ،
 - (3) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها،
 - (4) عين معادلة (Δ) مماس (C_f) عند النقطة $(0; 1)$ ،
 - (5) تحقق أنه من أجل كل x من $]-1; +\infty[$: $f(x) - (-x + 1) = \frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$ ،
 - استنتج وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) ،
 - ماذا تلاحظ؟
 - (6) ارسم (Δ) و (C_f) .

حل:

الجزء الأول:

g دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

- (1) كتابة جدول التغيرات: اعتمادا على الرسم من جهة، و عبارة الدالة g من جهة أخرى لتحديد القيم الخاصة:

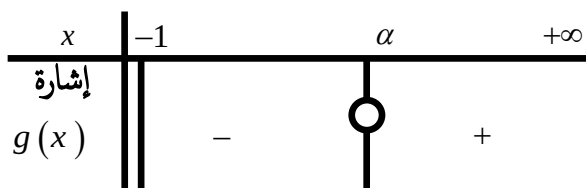


(2) من جدول التغيرات نستنتج أن الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1,6;1,7[$

$$g(1.7) = 2(1.7)^3 - 3(1.7)^2 - 1 = 9.826 - 8.67 - 1 = 0.156 \text{ و } g(1.6) = 2(1.6)^3 - 3(1.6)^2 - 1 = 8.192 - 7.68 - 1 = -0.488$$

و منه $g(1,6) \times g(1,7) < 0$ وبالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد وحيد $\alpha \in]1,6;1,7[$ حيث $g(\alpha) = 0$.

(3) من جدول التغيرات و الجواب 2 نستنتج:



الجزء الثاني:

$$D_f =]-1; +\infty[\text{ و } f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}$$

(1) النهايات عند أطراف مجموعة التعريف:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{x^3+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x}{x^3+1} = \frac{2}{0}$$

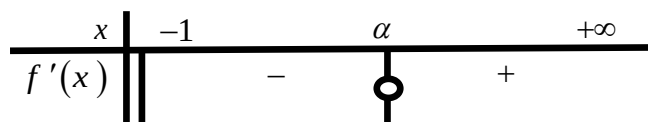
نعلم أن $x^3+1 = (x+1)(x^2-x+1)$ إذن إشارة x^3+1 من إشارة $x+1$ لأن كثير الحدود الظاهر في المساواة السابقة، ذو مميز

سالِب و هذا كاف لضمان أنه موجب تماما من أجل كل عدد حقيقي x ، تصبح عندئذ النهاية: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$

(2) ليكن $x \in]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = \left(\frac{1-x}{x^3+1} \right)' = \frac{-x^3-1-3x^2(1-x)}{(x^3+1)^2} = \frac{-x^3-1-3x^2+3x^3}{(x^3+1)^2} = \frac{2x^3-3x^2-1}{(x^3+1)^2} = \frac{g(x)}{(x^3+1)^2}$$

(3) من عبارة المشتق الموجود منذ حين، نستنتج أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ و اعتمادا على الجزء الأول نستنتج الجدول:



إذن f متناقصة تماما على المجال $]-1;\alpha[$ و متزايدة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$,

و منه جدول التغيرات:

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f(x)$		$+\infty$	$+\infty$

(4) تعيين معادلة المماس:

$$(\Delta): y = f'(0)x + 1$$

ولدينا: $-1 = \frac{g(0)}{(1)^2} = f'(0)$ أي: $(\Delta): y = -x + 1$

(5) ليكن $x \in]-1; +\infty[$:

$$f(x) - (-x + 1) = \frac{1-x}{x^3+1} - (-x + 1) = (1-x) \left(\frac{1}{x^3+1} - 1 \right) = (1-x) \left(\frac{1-x^3-1}{x^3+1} \right) = \frac{(x-1)x^3}{x^3+1}$$

و.ه.م

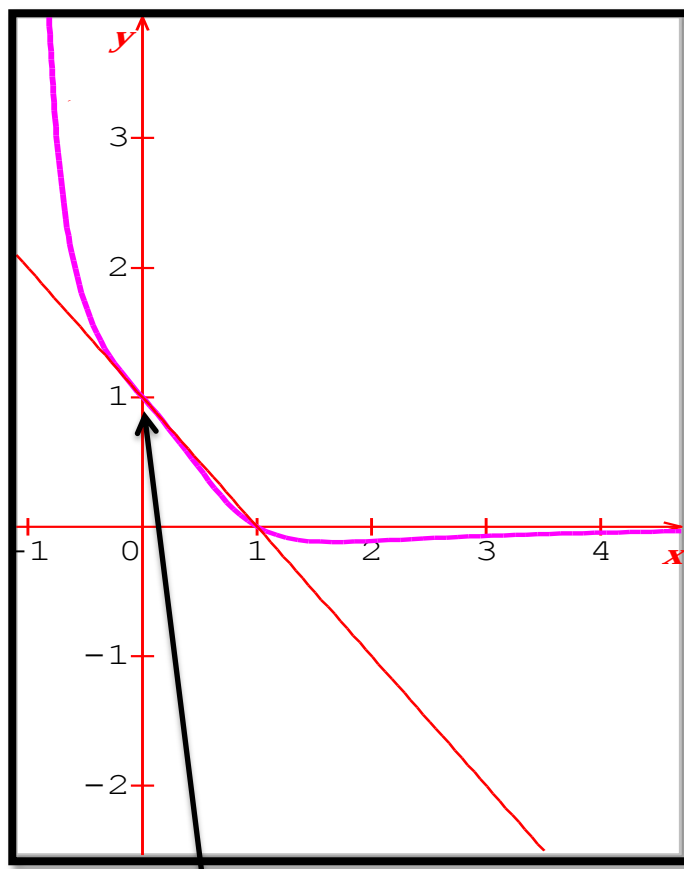
• استنتاج الوضع النسبي لـ (Δ) و (C_f) :

من الفرق السابق نستنتج: $f(x) - y = f(x) - (-x + 1) = \frac{(x-1)x^3}{x^3+1} = \frac{x^3(x-1)(x+1)}{(x+1)^2(x^2-x+1)}$

x	-1	0	1	$+\infty$
x^3		$-$	$+$	$+$
$(x-1)(x+1)$		$-$	$+$	$+$
إشارة:		$+$	$-$	$+$
$f(x) - (-x + 1)$		$+$	$-$	$+$
الوضع النسبي		(Δ) فوق (C_f)	(C_f) تحت (Δ)	(Δ) فوق (C_f)

• نلاحظ أن المماس قاطع للمنحنى عند نقطة التماس، أي النقطة $(0;1)$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f ،

(6) إنشاء المماس والمنحنى:



نقطة انعطاف،

التمرين 06:

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$ ،
- (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس ($O; \vec{i}, \vec{j}$)
- (1) أ) احسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$ ،
 - ب) احسب نهايات الدالة f عند 1 و -1، ثم فسر النتائج المحصل عليها بيانيا،
 - (2) أثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ فإن: $f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$
 - (3) ادرس إشارة f' ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f مشكلا جدول التغيرات،
 - (4) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ فإنه توجد ثلاثة أعداد حقيقية a, b و c يطلب تعيينها بحيث:

$$f(x) = ax + b + \frac{cx}{x^2 - 1}$$

- (5) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $\pm\infty$ ،
- (6) عين الوضع النسبي للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ)،
- (7) احسب $f(-x) + f(x)$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا،
- (8) هل المنحنى (C_f) يقبل مماسا موازيا لمستقيمه المقارب المائل (Δ)؟
- (9) اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{2}$ ، $x = \sqrt{2}$ ،
- (10) انشئ (C_f) و مستقيمه المقاربة و المماس (T) (الوحدة 2 cm).

حل:

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} \quad \text{و} \quad D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$$

(1) أ) حساب النهاية للدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

(ب) حساب النهايات عند $-1, 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{0}$$

عند دراسة إشارة المقام:

x	$-\infty$	-1	1	$-\infty$
$x^2 - 1$	+	-	+	+

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

من هذا الجدول يمكن أن نكتب ببساطة:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{-1}{0} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \end{cases} \quad \text{و}$$

التفسير الهندسي:

المستقيمان اللذين معادتهما $x = 1$ و $x = -1$ مقاربان عموديان لمنحنى الدالة f ,(2) ليكن $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} \right)' = \frac{(x^3 + x^2 - 1)' \times (x^2 - 1) - (x^2 - 1)' (x^3 + x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{(3x^2 + 2x)(x^2 - 1) - 2x(x^3 + x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x(3x^3 - 3x + 2x^2 - 2 - 2x^3 - 2x^2 + 2)}{(x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{x(x^3 - 3x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

(3) من العبارة المحصل عليها يمكن تشكيل جدول الإشارة:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	-	-	-	+	+

أي:

- الدالة f متزايدة تماماً على هذا المجال، $x \in]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[$
- الدالة f متناقصة تماماً على هذا المجال، $x \in]-\sqrt{3}; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; \sqrt{3}[$

أي جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(-\sqrt{3})$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$f(\sqrt{3})$	$+\infty$

النقطة ذات الفاصلة 0 هي نقطة انعطاف،

(4) لتعيين الثوابت نقوم مثلاً بالقسمة أو المقارنة:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 - 1 & x^2 - 1 \\ -(x^3 - x) & x + 1 \\ \hline x^2 + x - 1 & \\ -(x^2 - 1) & \\ \hline x & \end{array}$$

إذن من أجل كل $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1}$$

أي: $a=1, b=1, c=1$

(5) نلاحظ أن المعادلة المعطاة في نص التمرين هي جزء ظاهر في العلاقة المحصل عليها سابقاً، مع $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$

وبالتالي $y = x + 1$: مستقيم مقارب مائل في جوار $\pm\infty$ (أو $-\infty$ أو $+\infty$)

(6) تعيين الوضع النسبي:

$$f(x) - y = x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1} - (x + 1) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
$x^2 - 1$	+	0	-	-	+
$f(x) - y$	-	+	0	-	+
الوضع النسبي:	تحت (C_f) (Δ)	فوق (C_f) (Δ)	يقطع (C_f) (Δ)	تحت (C_f) (Δ)	فوق (C_f) (Δ)

(7) ليكن $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$ و بالتالي: $-x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$$f(-x) + f(x) = \frac{-x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} + \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{2(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = 2 = 2(1)$$

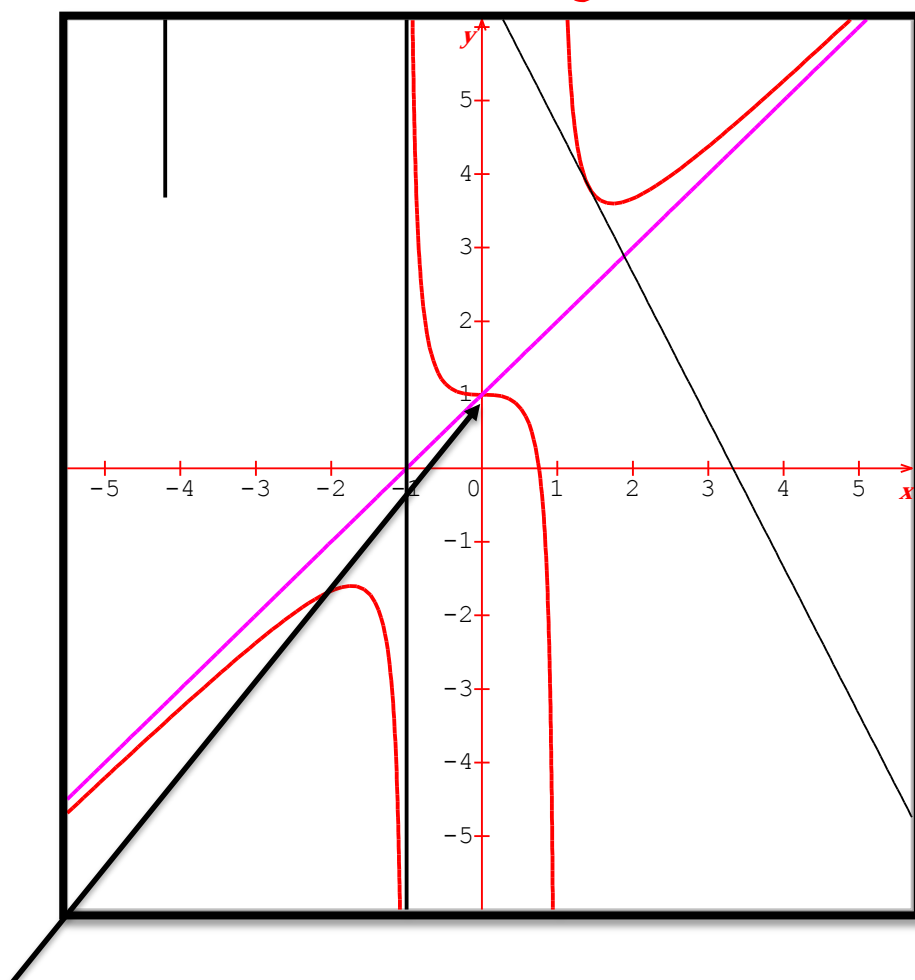
و منه $(0; 1)$ مركز تناظر لمنحنى الدالة f

(8) هل توجد نقطة فاصلتها x من $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ حيث: $f'(x_0) = 1$ معناه $x^4 - 3x^2 = x^4 - 2x^2 + 1$ أي: $x^2 + 1 = 0$ وهاته المعادلة لا تقبل حلولا في $\mathbb{R}$ و منه لا توجد أي نقطة يكون عندها المماس موازيا للمستقيم المقارب،
(9) كتابة معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة f :

$$f'(\sqrt{2}) = \frac{2(2-3)}{(2-1)^2} = -2 \text{ و } f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2} + 1 \text{ لدينا: } (T): y = f'(\sqrt{2})(x - \sqrt{2}) + f(\sqrt{2})$$

$$\text{و بالتالي: } (T): y = -2(x - \sqrt{2}) + 2\sqrt{2} + 1 \text{ أي: } (T): y = -2x + 4\sqrt{2} + 1$$

(10) عند ملاحظة جدول التغيرات و وحدة الرسم و الوضع النسبي يكون:



نقطة انعطاف

التمرين 07:

لدينا: $x + x + \dots + x = x^2$ عند اشتقاق الطرفين نجد: $1 + 1 + \dots + 1 = 2x$ أي: $x = 2x$ ، إذا كان: $x \neq 0$ نجد في الأخير: $1 = 2$ ، ما سبب التناقض.

حل:

بداية يبدو واضحا أن العبارة $x + x + \dots + x = x^2$ لها معنى إذا كان العدد x عنصرا من $\mathbb{N}^*$ ،
ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ، لنبحث عن مشتق الدالة: $f(x) = x + x + \dots + x = x^2$ عند كل عدد طبيعي، بتطبيق التعريف:
أي النهاية $\lim_{x \rightarrow n} \frac{f(x) - f(n)}{x - n}$ نصادف المشكل التالي: العبارة $f(x)$ ليس لها معنى، و بالتالي يسقط مفهوم الاشتقاق.

التمرين 08:

أولاً:

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4$ ،

$$(1) \text{ أ/ احسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) ،$$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها،

$$(2) \text{ أ/ بين أن المعادلة } g(x) = 0 \text{ تقبل حلا وحيدا } \alpha \text{ حيث: } 0,7 < \alpha < 0,8 ،$$

ب/ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ ،

ثانياً:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ،

$$(1) \text{ احسب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) ،$$

$$(2) \text{ أ/ بين أنه من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$$

ب/ استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً مائلاً (Δ) يطلب تعيين معادلته له،ج/ ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Δ) ،

$$(3) \text{ أ/ بين أنه من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} : f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2} \text{ حيث: } f' \text{ مشتقة الدالة } f ،$$

ب/ استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم x ثم شكل جدول تغيرات الدالة f ، (نأخذ $f(\alpha) \approx -0,1$)

$$(4) \text{ احسب } f(1) \text{ ثم حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة } f(x) = 0 ،$$

$$(5) \text{ أنشئ المستقيم } (\Delta) \text{ و المنحنى } (C_f) ،$$

$$(6) \text{ لتكن } h \text{ الدالة العددية المعرفة على } \mathbb{R} \text{ كما يلي: } h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$$

و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق،

$$\text{ أ/ تحقق أنه من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R} : h(x) = f(x) - 2 ،$$

ب/ استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم أنشئ (C_h) .

حل:

أولاً:

$$\text{ لدينا: } g(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 4 \text{ و } D_g = \mathbb{R}$$

$$1/ \text{ أ/ حساب النهايات:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 - 4x^2 + 7x - 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^3 - 4x^2 + 7x - 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة g :

المشتقة: من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = (2x^3 - 4x^2 + 7x - 4)' = 6x^2 - 8x + 7$ ، المميز: $\Delta = 64 - 168 = -104 < 0$ ، إذن الإشارة من إشارة معامل وحيد الحد الأعلى درجة، أي من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) > 0$ و بالتالي الدالة g متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ ، و منه جدول الإشارة:

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2/ أ/ من جدول التغيرات الدالة g مستمرة و متزايدة تماماً على $]0.7; 0.8[$ و

$$g(0.7) = 2(0.7)^3 - 4(0.7)^2 + 7(0.7) - 4 = 0.686 - 1.96 + 4.9 - 4 = -0.374$$

$$g(0.8) = 2(0.8)^3 - 4(0.8)^2 + 7(0.8) - 4 = 1.024 - 2.56 + 5.6 - 4 = 0.064$$

و منه: $g(0.7) \times g(0.8) < 0$ و حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد و وحيد $\alpha \in]0.7; 0.8[$ حيث: $g(\alpha) = 0$.

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$:

من جدول التغيرات و الجواب السابق نجد:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		-	+

ثانياً:

لدينا: $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1}$ و $D_f = \mathbb{R}$

1/ حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x = +\infty$$

2/ أ/ ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{2x^3 - 4x + 2}{2x^2 - 2x + 1} \right)$$

عند اجراء القسمة الاقليدية لكثير الحدود $2x^3 - 4x + 2$ على $2x^2 - 2x + 1$ نجد:

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 - 4x + 2 & 2x^2 - 2x + 1 \\
 -(2x^3 - 2x^2 + x) & x + 1 \\
 \hline
 2x^2 - 5x + 2 & \\
 -(2x^2 - 2x + 1) & \\
 \hline
 -3x + 1 &
 \end{array}$$

و منه

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{2x^3 - 4x + 2}{2x^2 - 2x + 1} \right) = \frac{1}{2} \left(x + 1 + \frac{1 - 3x}{2x^2 - 2x + 1} \right) = \frac{1}{2}(x + 1) + \frac{1 - 3x}{2(2x^2 - 2x + 1)}$$

و. ه. م

ب/ لدينا من العلاقة المحصل عليها أخيرا: $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - 3x}{2(2x^2 - 2x + 1)} \right) = 0$ و منه نستنتج أن المستقيم $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ مقارب

مائل في جوار $\pm\infty$ (أو $+\infty$)

ج/ دراسة الوضع النسبي:

لندرس إشارة الفرق: $f(x) - y = f(x) - \frac{1}{2}(x + 1) = \frac{1 - 3x}{2(2x^2 - 2x + 1)}$ إشارة البسط لأن المقام موجب تماما (ميزه $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$) و منه جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	$1/3$	$+\infty$
إشارة $f(x) - y$	+	0	-
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) قاطع لـ (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

3/ أ/ من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{x^3 - 2x + 1}{2x^2 - 2x + 1} \right)' = \frac{(3x^2 - 2)(2x^2 - 2x + 1) - (4x - 2)(x^3 - 2x + 1)}{(2x^2 - 2x + 1)^2} = \\
 &= \frac{6x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 4x^2 + 4x - 2 - (4x^4 - 8x^2 + 4x - 2x^3 + 4x - 2)}{(2x^2 - 2x + 1)^2} = \\
 &= \frac{6x^4 - 6x^3 + 3x^2 - 4x^2 + 4x - 2 - 4x^4 + 8x^2 - 4x + 2x^3 - 4x + 2}{(2x^2 - 2x + 1)^2} = \\
 &= \frac{2x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 4x}{(2x^2 - 2x + 1)^2} = \frac{x(2x^3 - 4x^2 + 7x - 4)}{(2x^2 - 2x + 1)^2} = \frac{x g(x)}{(2x^2 - 2x + 1)^2}
 \end{aligned}$$

ب/ عبارة المشتقة تبين أن إشارتها من إشارة الجداء $x g(x)$ ، من الجزء الأول نستنتج أن:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$
$g(x)$	$-$	0	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	0	$+$

و بالتالي جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-0.1	$+\infty$

4/ لدينا $f(1)=0$ و منه $f(x)=0$ يكافئ $x^3-2x+1=0$ بالقسمة الاقليدية يمكن كتابة:

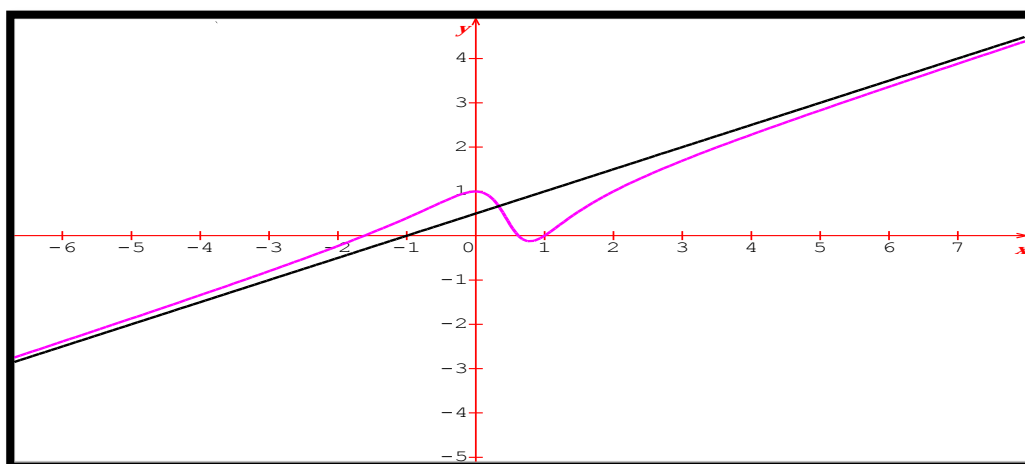
$$\begin{array}{r|l}
 x^3-2x+1 & x-1 \\
 \underline{-(x^3-x^2)} & x^2+x-1 \\
 x^2-2x+1 & \\
 \underline{-(x^2-2x+1)} & 00
 \end{array}$$

و منه $x^3-2x+1=0$ معناه $\begin{cases} x=1 \\ x^2+x-1=0 \end{cases}$ ، حل المعادلة الثانية $\Delta=1+4=5$ أي: $x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ و $x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

$$\text{أي: } S = \left\{ 1; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right\}$$

و هذه الحلول تمثل فواصل تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل،

5/ إنشاء (Δ) ، ثم (C_f) :

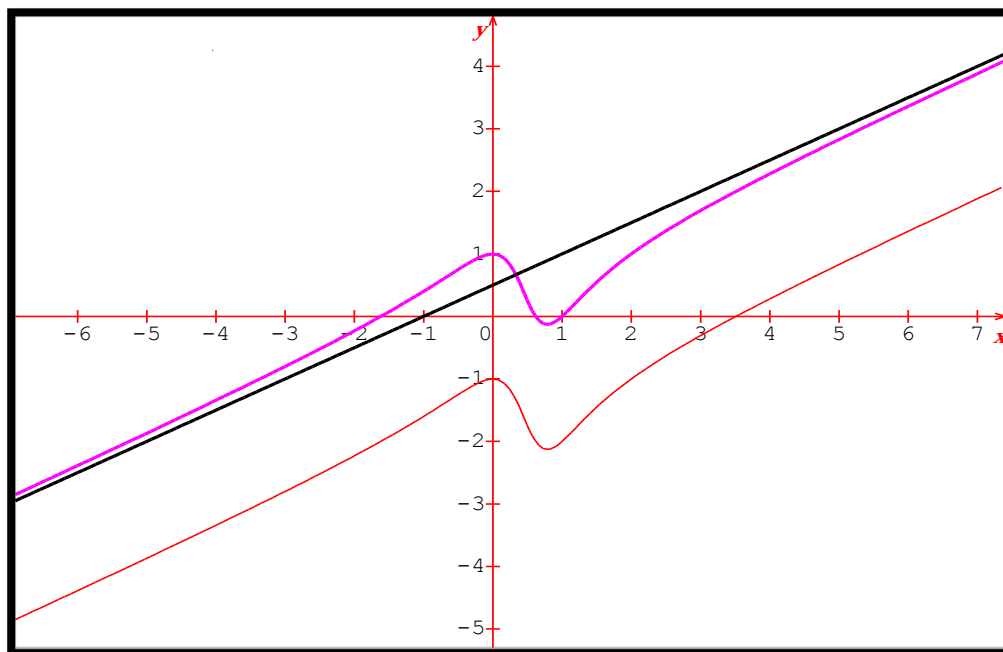


6/ لدينا: $h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1}$ و $D_f = \mathbb{R}$

أ/ من أجل كل عدد حقيقي x :

$$h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 2x + 1} = \frac{x^3 - 2x + 1 - 4x^2 + 4x - 2}{2x^2 - 2x + 1} = f(x) - 2$$

ب/ (C_h) صورة (C_f) بانسحاب شعاعه $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ لاحظ الشكل:



الشخص الناجح يركز أكثر على فعل الشيء الصحيح، لا على فعل الشيء بشكل صحيح.

قائلها:



بيتر دراكر

التمرين 09:

الجزء الأول:

لتكن f الدالة العددية المعرفة من أجل كل عدد حقيقي بـ $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

- (1) أثبت أن الدالة f فردية، ثم ادرس تغيراتها،
- (2) اكتب معادلة المماس (Δ) لـ (C_f) في النقطة ذات الترتيب 0،
- (3) ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ) و استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف،
- * أثبت أنه من أجل كل α عدد حقيقي $|f'(\alpha)| \leq 2$ ،

* إليك هاته النظرية:

نظرية التزايد المتهية (لاكرانج) "لست مجبرا للتعمق في هاته المبرهنة لأنها خارج البرنامج":

لتكن h دالة عددية قابلة للاشتقاق على المجال I ، و $[a; b] \subset I$ و منه يوجد على الأقل عدد حقيقي $\xi \in]a; b[$ حيث:

$$h(b) - h(a) = h'(\xi)(b - a)$$

أثبت باستعمال المبرهنة السابقة أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $|f'(x)| \leq 2|x|$

استنتج عندئذ الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f) مرة أخرى،

(4) أنشئ (C_f) في المعلم السابق،

الجزء الثاني:

لتكن الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x) = \frac{2|x|}{x^2+1}$

(1) أدرس استقرار و اشتقاق الدالة g عند 0،

(2) أنشئ على نفس المعلم منحنى الدالة g .

حل:

الجزء الأول:

لدينا $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ و $D_f = \mathbb{R}$

(1) من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ يكون $-x \in \mathbb{R}$ و $f(-x) = \frac{-2x}{(-x)^2+1} = -\frac{2x}{x^2+1} = -f(x)$

و منه الدالة f فردية و يكون البيان (C_f) متناظر بالنسبة لمحور الترتيب، لأجل هذا سوف تقتصر في دراسة التغيرات على المجال

$[0; +\infty[$ لدينا: $f(0) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0$ نستنتج أن $y=0$ مستقيم مقارب أفقي لمنحنى الدالة f في جوار $+\infty$

من أجل كل $x \in [0; +\infty[$: $f'(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1} \right)' = \frac{2(x^2+1-2x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ و منه جدول التغيرات:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$f(1)=1$	0

(2) كتابة معادلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الترتيب 0 للمنحنى (C_f):

لنبحث عن فاصلة هـاته النقطة أي: $\frac{2x}{x^2+1} = 0$ معناه $x = 0$ ، ولدينا:

$$f(0) = 0 \text{ و } f'(0) = \frac{2(1-0^2)}{(0^2+1)^2} = 2 \text{ وبالتعويض: } (\Delta): y = f'(0)x + f(0)$$

$$، (\Delta): y = 2x$$

(3)

* لدينا: $f(x) - 2x = \frac{2x}{x^2+1} - 2x = 2x \left(\frac{1-x^2-1}{x^2+1} \right) = -2x \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)$ و منه جدول الوضع النسبي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x		0	
$f(x) - 2x$	+	0	-
	(Δ) فوق (C_f)		(Δ) تحت (C_f)
الوضع النسبي:			
			(C_f) قاطع لـ (Δ)

نلاحظ من الجدول أن المماس (Δ) يخترق المنحنى، وبالتالي نستنتج أن النقطة $(0;0)$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f

$$* \text{ ليكن } \alpha \in \mathbb{R} : |f'(\alpha)| = 2 \left| \frac{1-\alpha^2}{(\alpha^2+1)^2} \right| = 2 \frac{|1-\alpha^2|}{(\alpha^2+1)^2} \leq \frac{2}{\alpha^2+1} \leq 2$$

لأن: $\alpha^2 \geq 0$ و منه $\alpha^2 + 1 \geq 1$ أي: $\frac{1}{\alpha^2+1} \leq 1$

ليكن العدد الحقيقي x ، الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بالأخص على كل مجال طرفاه 0 و x ،
وبالتالي حسب المبرهنة السابقة يوجد على الأقل ξ محصور بين 0 و x حيث: $f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0)$ و منه:

$$f(x) = f'(\xi)x \text{ أي يمكن كتابة } |f(x)| = |f'(\xi)||x| \leq 2|x| \text{ و هو المطلوب،}$$

لنميز الحالتين:

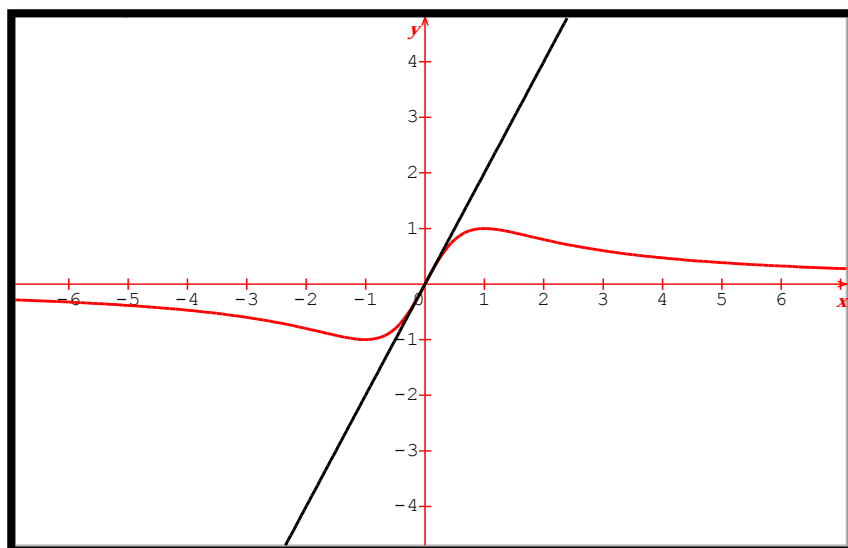
* $x \geq 0$ هذا يستلزم أن $f(x) \geq 0$ و منه: $f(x) \leq 2x$ وبالتالي منحنى الدالة f يقع تحت المماس على المجال $[0; +\infty[$ ،

* $x \leq 0$ هذا يستلزم أن $f(x) \leq 0$ و منه: $-f(x) \leq -2x$ معناه $f(x) \geq 2x$ وبالتالي منحنى الدالة f يقع فوق المماس على

المجال $]-\infty; 0]$ ، و هـ، م،

(4) إنشاء الشكل:

من جدول التغيرات يمكن رسم الجزء المبين فيه، و اعتمادا على فردية الدالة يمكن إتمام الجزء المتبقي بالتناظر بالنسبة للمبدأ،



الجزء الثاني:

لدينا: $g(x) = \frac{2|x|}{x^2 + 1}$

(1) دراسة استمرارية الدالة g عند الصفر:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2|x|}{x^2 + 1} \right) = 0 = g(0)$$

أي g مستمرة عند 0،

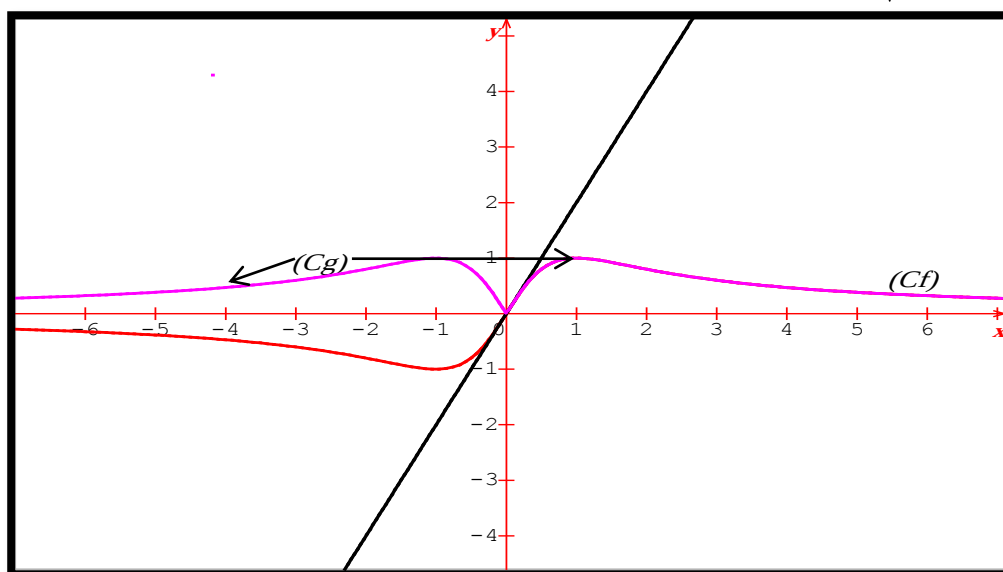
دراسة القابلية للاشتقاق عند الصفر:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2x}{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x^2 + 1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{-2x}{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{x^2 + 1} = -2$$

وبالتالي الدالة g غير قابلة للاشتقاق عند 0، و نقطة المبدأ هي نقطة زاوية لمنحنى الدالة g ،

(2) إنشاء الرسم في نفس المعلم:



التمرين 10:

لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{x^2-1} & \text{من أجل كل } x \text{ من }]0;1[\cup]1;+\infty[\\ f(x) &= \frac{2x}{x^2+1} & \text{من أجل كل } x \text{ من }]-\infty;0] \end{aligned} \right\}$$

(1) عيّن D_f مجموعة تعريف الدالة f ،(2) هل نهاية الدالة f عند الصفر موجود ،(3) ادرس السلوك التقاربي للدالة f (لاحظ: $f(x) = x + \frac{x}{x^2-1}$ من أجل كل x من $]0;1[\cup]1;+\infty[$) ،(4) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و مقاربه المائل في المجال $]1;+\infty[$ ،(5) احسب النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}$ ، ثم أعط تفسيراً هندسياً لهذه النتيجة ،

(7) أعط جدول التغيرات ،

(8) ارسم (C_f) في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

حل:

(1) مجموعة تعريف الدالة f هي: $] -\infty; 1[\cup] 1; +\infty [$ ،

$$(2) \text{ لدينا: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^3}{x^2-1} \right) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{x^2+1} \right)$$

إذن النهاية عند الصفر موجودة و مساوية للصفر ،

(3) بحساب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف نجد:

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{x^2+1} \right) = 0 \text{ و عليه أمكن كتابة: } y=0 \text{ معادلة مستقيم مقارب أفقي لمنحنى الدالة } f \text{ في جوار } -\infty ،$$

$$* \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x^3}{x^2-1} \right) = \frac{1}{0^-} = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^3}{x^2-1} \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

 $x=1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f ،

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} \right) = +\infty$$

عند استعمال الملاحظة المرفقة نجد أن: $y=x$ معادلة مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2-1} \right) = 0$$

(4) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم المقارب المائل:

دراسة إشارة الفرق:

$$\text{كون } x \in]1;+\infty[\text{ نستعمل العبارة الأولى للدالة } f \text{ أي: } f(x) - x = x + \frac{x}{x^2-1} - x = \frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x-1)(x+1)} > 0$$

أي المنحنى (C_f) فوق المستقيم المقارب له على المجال المفروض ،

(5) حساب النهاية:

نقطة زاوية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{x^2 + 1} = 2 \end{cases}$$

عند النقطة ذات الفاصلة 0، أي الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند القيمة 0،(7) دراسة تغيرات الدالة f :

نميز الحالتين:

الأولى:

من أجل $x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x \times x^3}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(3x^2 - 3 - 2x^2)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} \quad \text{لدينا:}$$

الثانية:

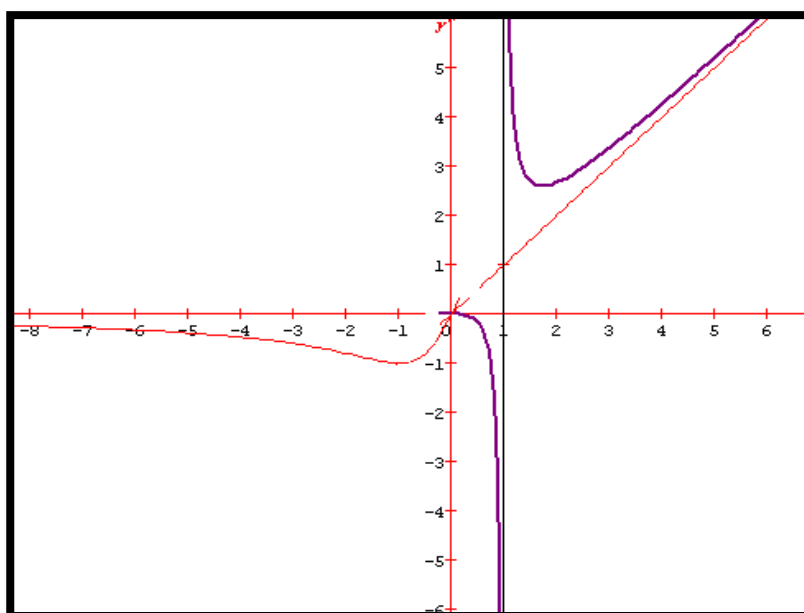
و من أجل $x \in]-\infty; 0[$:

$$f'(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(-x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{لدينا:}$$

أي جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\circ$	$+$	$-$	$\circ$	$+$
$f(x)$	0	$f(-1) = -1$	$f(0) = 0$	$-\infty$	$f(\sqrt{3})$	$+\infty$

(8) الرسم البياني:



التمرين 11:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ،

أولاً:

لتكن الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$ ، و (C_f) التمثيل البياني لهاته الدالة في المستوى السابق،

1/ ادرس تغيرات الدالة f ،2/ اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0،3/ حدد الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) ، ثم ارسم (Δ) و (C_f) ،4/ عين بيانياً حلول المعادلة $f(x) = mx$ حيث: $m \leq 1$ ،

ثانياً:

لتكن الدالة العددية g المعرفة من أجل كل عدد حقيقي موجب بـ $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$ و (C_g) تمثيلها البياني،

1) أوجد علاقة تربط الدالتين: g و f ،2) استنتج الدالة المشتقة للدالة g ثم حدد اشارتها، ثم شكل جدول التغيرات،3) أثبت أن مبدأ المعلم نقطة توقف للمنحنى (C_g) ، ثم ارسم في نفس المعلم (C_g) ،

ثالثاً:

لتكن المتتالية العددية $(u_n)_n$ المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بالعلاقة التراجعية:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

1/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}^*$: $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq f(n)$ ،2/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}^*$: $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$ ،3/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ ،4/ استنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة نحو العدد 0.

حل:

أولاً:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$$

1/ دراسة تغيرات الدالة f :* مجموعة تعريف الدالة هي: $\mathbb{R}$ ،

* النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 + x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x^2 + x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

* المشتقة:

من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 + x + 1} \right)' = \frac{x^2 + x + 1 - x(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{x^2 + x + 1 - 2x^2 - x}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + x + 1)^2}$$

من دراسة إشارة المشتقة يمكن تشكيل جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	○	-
$f(x)$	0	$f(-1)$	$f(1)$	0

مع: $f(1) = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$ و $f(-1) = \frac{-1}{1-1+1} = -1$

2/ كتابة معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 0:

$$(\Delta): y = x \quad \text{و} \quad (\Delta): y = f'(0)x + f(0)$$

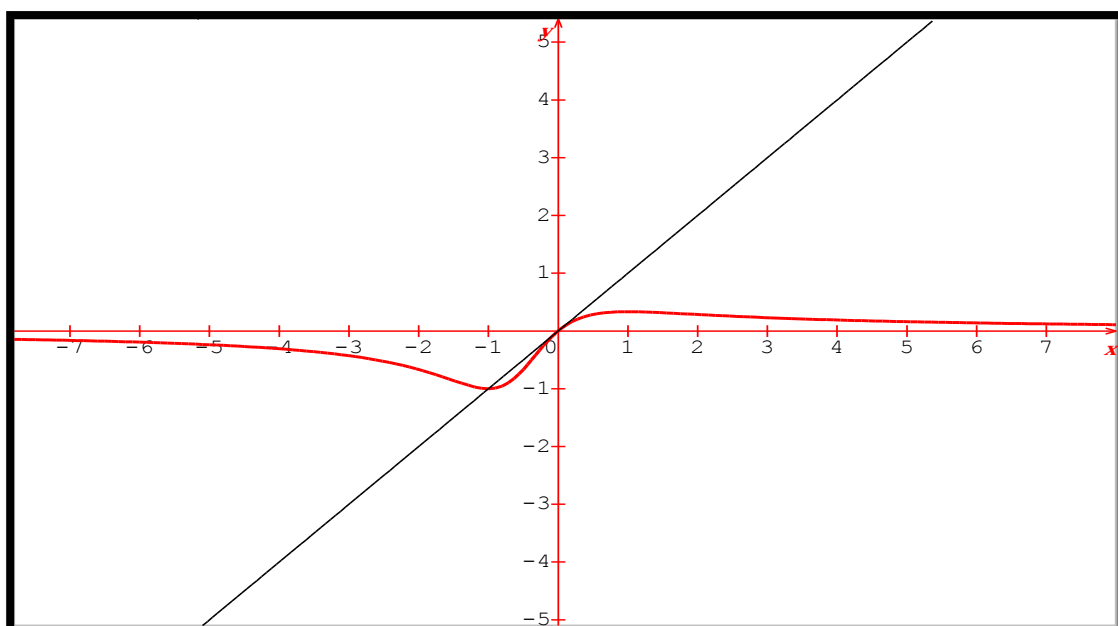
3/ تحديد الوضع النسبي لمنحنى الدالة f والمستقيم (Δ) :

لدينا: $f(x) - x = \frac{x}{x^2 + x + 1} - x = x \left(\frac{1 - x^2 - x - 1}{x^2 + x + 1} \right) = x^2 \left(\frac{-x - 1}{x^2 + x + 1} \right)$

النسبي:

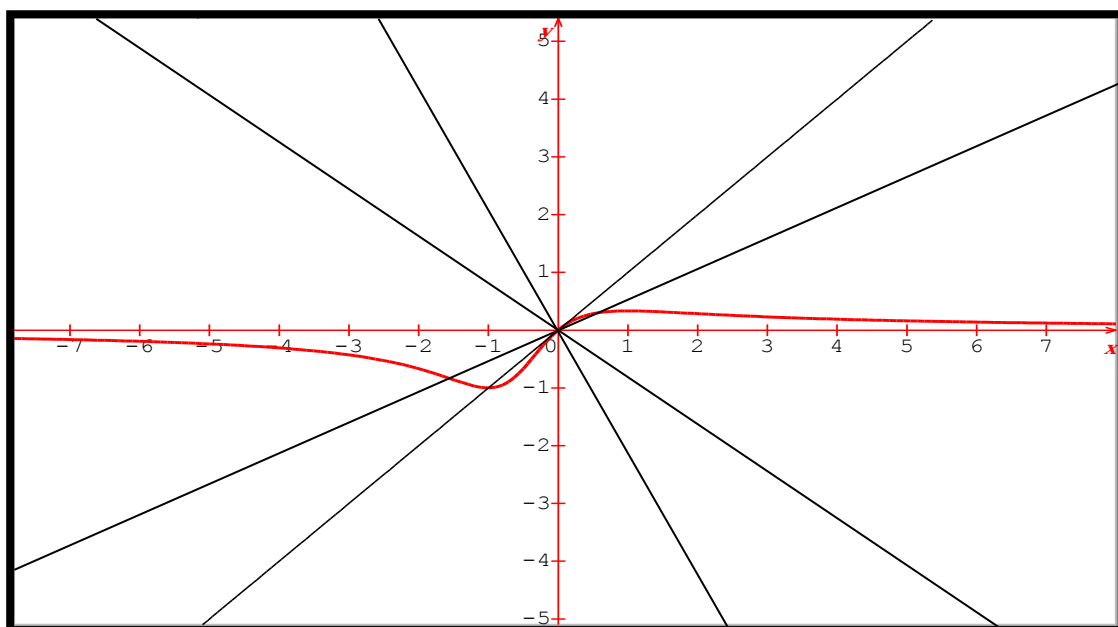
x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f(x) - y$ إشارة	+	○	○	-
الوضع النسبي:	فوق (C_f)	تحت (C_f)	تحت (C_f)	تحت (C_f)
	(Δ)	(C_f)	(Δ)	(C_f)
	قاطع لـ (Δ)	قاطع (ماسي) لـ (Δ)	قاطع (ماسي) لـ (Δ)	قاطع لـ (Δ)

رسم التمثيل البياني (C_f) و (Δ) :



4/ حل المعادلة $f(x) = mx$ هي فواصل تقاطع المستقيمات $y = mx$ ،
(التي تشترك جميعها في نقطة المبدأ وأميلها تصغر العدد 1) والمنحنى (C_f) و بالتالي الجدول:

المناقشة	
m	
$-\infty$	حل وحيد
0	حل وحيد
	ثلاثة حلول
1	حلان مختلفان



ثانياً:

لدينا: $D_g = \mathbb{R}_+$ و $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$

(1) ليكن $x \in \mathbb{R}_+$

لدينا $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2 + \sqrt{x} + 1} = f(\sqrt{x})$

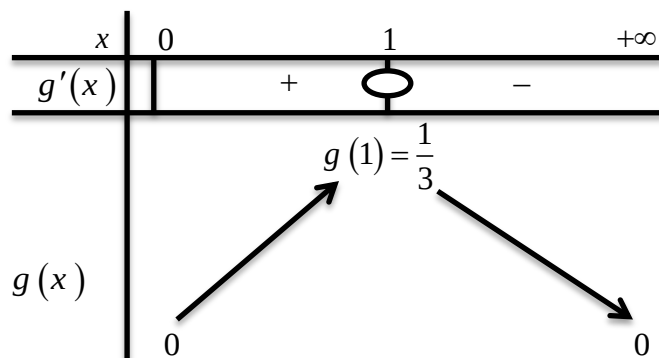
(2) ليكن $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$g'(x) = (f(\sqrt{x}))' = (\sqrt{x})' \times f'(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1-x}{(x + \sqrt{x} + 1)^2}$$

الدالة g غير قابلة للاشتقاق على 0 (لأن الدالة الجذرية غير قابلة للاشتقاق على 0 لأن:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x + x\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

و منه جدول التغيرات:



$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} \right) = 0$$

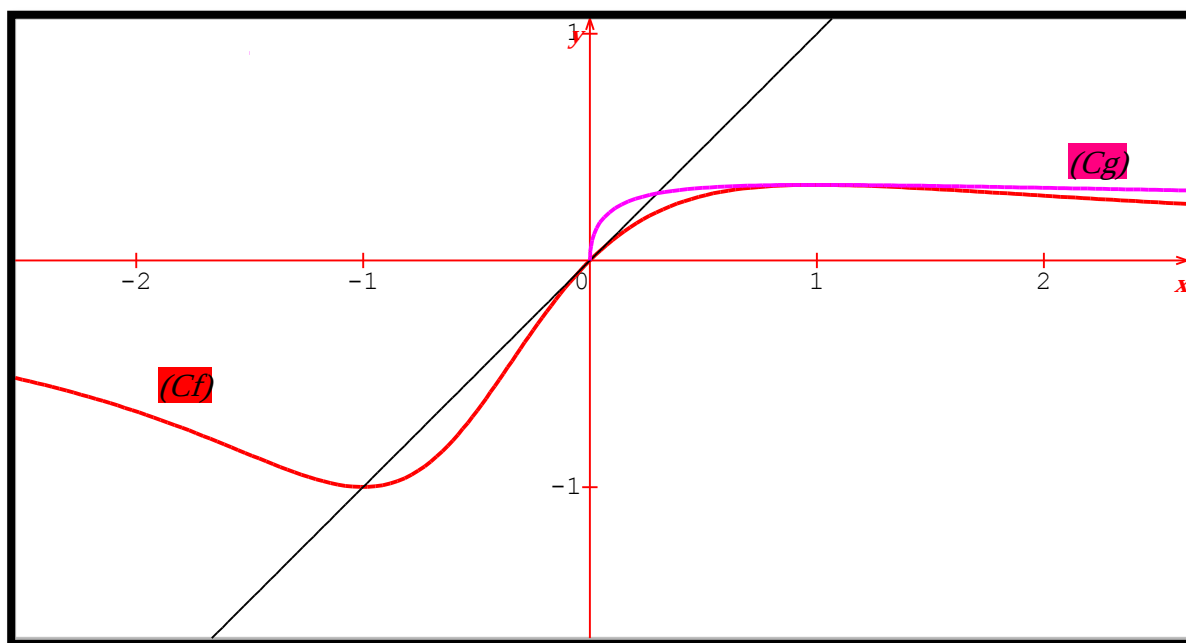
هام:

إذا كان منحنى دالة ما يقبل مماساً موازياً لمحور الترتيب عند نقطة، فإن هاته النقطة تسمى بـ "نقطة توقف"،

/3

و من الواضح أن منحنى الدالة g يقبل نصف مماس مواز لمحور الترتيب، إذن النقطة $(0; 0)$ نقطة توقف للمنحنى (C_g) ،

الرسم البياني:



ثالثا:

لدينا المتتالية:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

1/ ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا: $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{n}{n^2} + \frac{n^2}{n^2}} = \frac{n}{n^2 + n + 1} = f(n) \leq f(n)$ و.ه.م

2/ ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ، $f\left(\frac{1}{n}\right) = f(n) = \frac{n}{n^2 + n + 1} \leq \frac{n}{n^2 + 2n + 1} \leq \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1}$

لأن: $n^2 + 2n + 1 \geq n^2 + n + 1, n \in \mathbb{N}^*$

3/ لنستعمل البرهان بالتراجع " الذي سنتعرف عليه في فصل "المتتاليات" لاحظ الجزء الثاني:

الخطوة الأولى:

من أجل $n=1: u_1 = 1 \in [0;1]$ (الخاصية محققة)

الخطوة الثانية:

لنفرض صحة الخاصية في المرتبة $m \in \mathbb{N}^*$ أي: $0 \leq u_m \leq \frac{1}{m}$ (فرض التراجع) ولنبرهن صحة الخاصية في الرتبة $m+1$

أي هل: $0 \leq u_{m+1} \leq \frac{1}{m+1}$ ؟

و من فرض التراجع لدينا $0 \leq u_m \leq \frac{1}{m}$ وكون الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;1]$ (لاحظ أنه من أجل كل عدد طبيعي m غير

معدوم $[0; \frac{1}{m}] \subset [0;1]$ يكون:

$$0 = f(0) \leq f(u_m) \leq f\left(\frac{1}{m}\right) \leq \frac{1}{m+1}$$

حسب السؤال السابق،

ومنه $0 \leq u_{m+1} \leq \frac{1}{m+1}$ أي الخاصية محققة في الرتبة $m+1$ ،

الخلاصة: الخاصية محققة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم،

4/

لدينا حسب نظريات الحصر:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ ومنه: } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \\ 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

التمرين 12

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$

(C_f) منحنى ممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس،

1/ ادرس تغيرات الدالة f ،

2/ أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقارين أحدهما (D) معادلته: $y = x$ ،

ب/ ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (D) ،

3/ أ/ بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 حيث: $1,3 < x_0 < 1,4$ ،

ب- عين معادلة (Δ) مماس للمنحنى (C_f) في نقطة تقاطعه مع محور الترتيب،

ج- ارسم (Δ) و (C_f) في نفس المعلم،

4/ g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $g(x) = |f(x)|$ ،

(C_g) المنحنى الممثل للدالة g في المعلم السابق،

* بين كيف يمكن إنشاء (C_g) انطلاقا من (C_f) ، ثم ارسمه في معلم آخر،

5/ ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة ذات المجهول x : $g(x) = m^2$.

حل:

لدينا: $f(x) = x - \frac{2}{\sqrt{x+1}}$ و $D_f =]-1; +\infty[$

1/ دراسة تغيرات الدالة f :

النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{2}{\sqrt{x+1}} \right) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(x - \frac{2}{\sqrt{x+1}} \right) = -1 - \frac{2}{0^+} = -\infty$

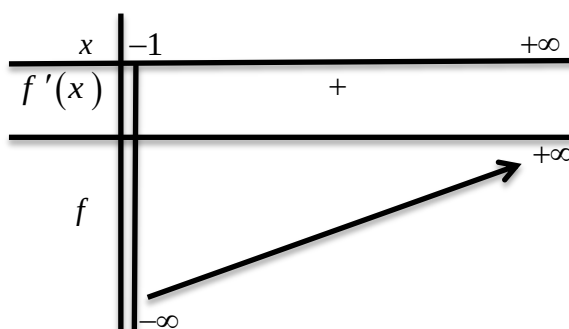
المشتق:

من أجل كل $x \in]-1; +\infty[$:

$$f'(x) = \left(x - \frac{2}{\sqrt{x+1}} \right)' = 1 + 2 \left(\frac{(\sqrt{x+1})'}{x+1} \right) = 1 + \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}} > 0$$

و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ،

أي جدول التغيرات:



2/ أ- من النهايات السابقة المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة f ،

ولدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{\sqrt{x+1}} \right) = 0$ ومن عبارة الدالة نستنتج أن $y = x$ هي معادلة المستقيم المقارب في جوار $+\infty$ ،

ب- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (D) :

لنحسب الفرق: $0 < -\frac{2}{\sqrt{x+1}} = f(x) - y = f(x) - x$ من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$ ،

ومن منحنى الدالة f يقع تحت المقارب المائل (D) دوماً على المجال $]-1; +\infty[$ ،

3/ أ- (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 معناه $f(x_0) = 0$ حيث: $1,3 < x_0 < 1,4$ ،

أي تثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]1,3; 1,4[$:

من جدول التغيرات نستنتج أن الدالة f مستمرة و متزايدة تماماً على المجال $]1,3; 1,4[$ و

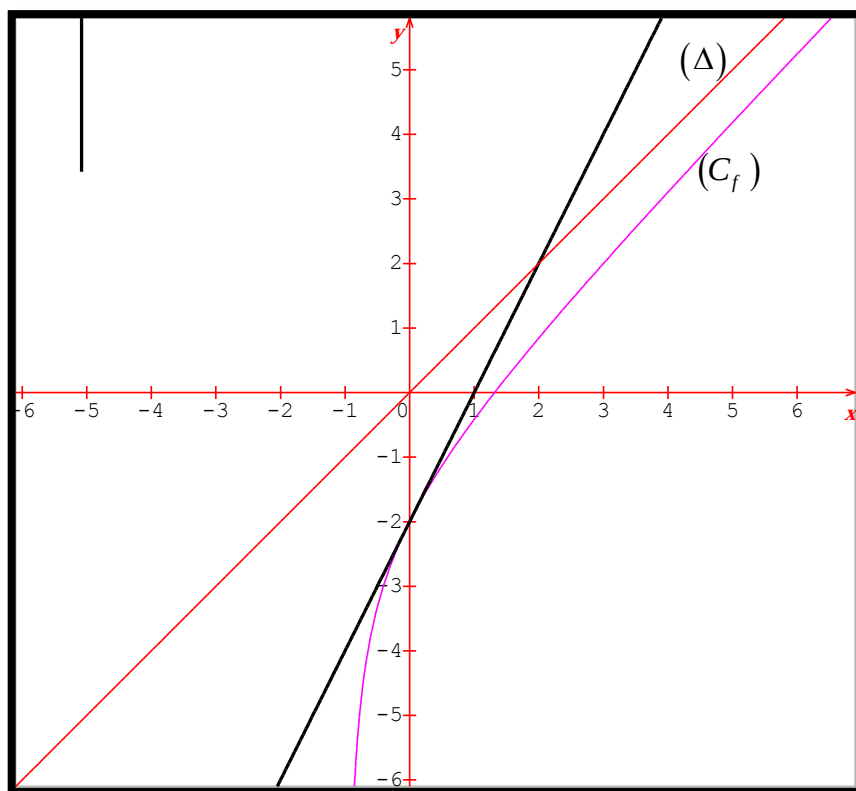
$$f(1,4) = 1,4 - \frac{2}{\sqrt{2,4}} \approx 1,4 - \frac{2}{1,55} \approx 1,3 - 1,29 = 0,01 \quad \text{و} \quad f(1,3) = 1,3 - \frac{2}{\sqrt{2,3}} \approx 1,3 - \frac{2}{1,52} \approx 1,3 - 1,32 = -0,02$$

أي $0 < f(1,4) \times f(1,3)$ و حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد حل وحيد x_0 من $]1,3; 1,4[$ حيث: $f(x_0) = 0$ ،

ب- نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الترتيب هي $(0; -2)$ ، ومنه معادلة المماس (Δ) عند هاته النقطة للمنحنى (C_f) هي:

$$y = f'(0)x + f(0) \quad \text{بالتعويض نجد:} \quad y = 2x - 2 \quad (\Delta).$$

ج- رسم (Δ) و (C_f) :



4/ أ- لدينا: $x \in]-1; +\infty[$ ، $g(x) = |f(x)|$ ،

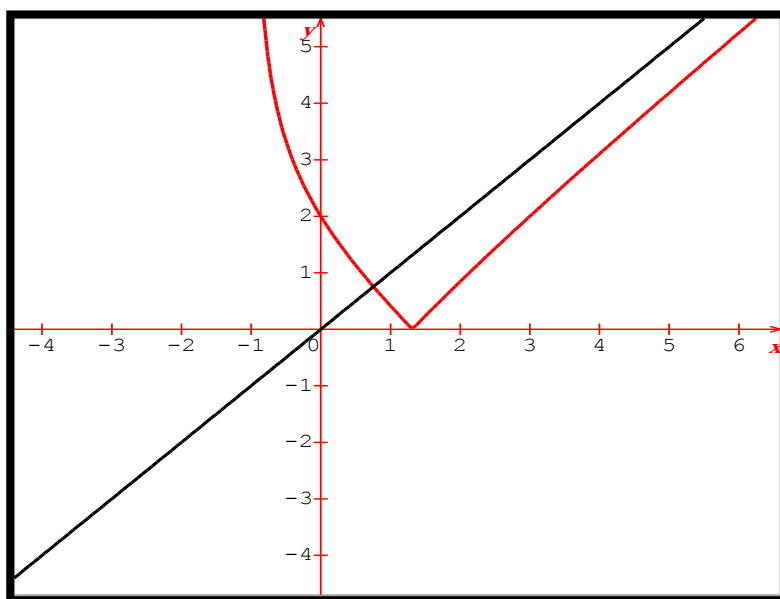
من جدول تغيرات الدالة f أو الشكل السابق يمكن كتابة الدالة g دون رمز القيمة المطلقة:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in [\alpha; +\infty[\\ -f(x) & , x \in]-1; \alpha] \end{cases}$$

ومن منه يمكن إنشاء (C_g) انطلاقاً من منحنى (C_f) :

- * (C_g) ينطبق على (C_f) في المجال $[\alpha; +\infty[$ ،
 * (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل على المجال $]-1; \alpha]$.

الرسم:



15/ حلول المعادلة $g(x) = m^2 = \alpha > 0$ هي فواصل تقاطع المستقيم $y = \alpha$ مع المنحنى (C_g) و منه الجدول الذي يلخص المطلوب:

m	المناقشة الوسيطة
$-\infty$	حلان أحدهما سالب تماما و الآخر موجب تماما
$-\sqrt{2}$	حلان أحدهما موجب تماما و الآخر معدوم حلان موجبان تماما
0	حل وحيد ذو اشارة موجبة حلان موجبان تماما
$\sqrt{2}$	حلان أحدهما موجب تماما و الآخر معدوم حلان أحدهما سالب تماما و الآخر موجب تماما
$+\infty$	

إن الثلوج المتراكمة يمكنها أن تثقل كاهل البذور الحية النائمة تحت الثرى، و لكنها لا تميتها.

جبران خليل جبران

التمرين 13:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ،

لتكن الدالة العددية f المعرفة من أجل كل عدد حقيقي x بـ:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3\sqrt[3]{-x-1} & , x \leq -1 \\ x - 2 + \sqrt{x^2+3} & , x \geq -1 \end{cases}$$

1/ ادرس اشتقاق f عند النقطة ذات الفاصلة -1 ، و أعط تفسيراً هندسياً لهاته النتيجة،

2/ أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ،

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x - 2))$ ماذا تستنتج؟

3/ احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، ثم استنتج الفرع اللانهائي في جوار $-\infty$ ،

يمكن الاعتماد على جدول لبعض قيم الدالة f لتجنب المرور بمصطلح "الفرع اللانهائي"،

4/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x < -1$: $f'(x) = \frac{(\sqrt[3]{-x-1}-1)(\sqrt[3]{-x-1}+1)}{(\sqrt[3]{-x-1})^2}$

5/ ادرس تغيرات الدالة f وضع جدول تغيراتها،

6/ أنشئ المنحنى الممثل للدالة (C_f) .

حل:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3\sqrt[3]{-x-1} & , x \leq -1 \\ x - 2 + \sqrt{x^2+3} & , x \geq -1 \end{cases} \quad \text{لدينا:}$$

1/ لنطبق تعريف الاشتقاق عند القيمة -1 :

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 1 + \sqrt{x^2+3}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 - 3}{(x+1)(x-1-\sqrt{x^2+3})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2}{x-1-\sqrt{x^2+3}} = \frac{-2}{-2-2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1 + 3\sqrt[3]{-x-1}}{x + 1} = \frac{0}{0}$$

حالة عدم التحديد

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1 + 3\sqrt[3]{-x-1}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \left(1 + \frac{3}{(\sqrt[3]{x+1})^2} \right) = -\infty$$

و بالتالي الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند -1 ،

التفسير الهندسي:

منحنى الدالة f يقبل نصفي مماسين عند النقطة ذات الفاصلة -1 ، الأول معادلته $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ مع $x > -1$ ، و الآخر مواز

لمحور الترتيب (نقطة زاوية)،

$$2/ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 + \sqrt{x^2+3}) = +\infty$$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (2x - 2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2 + \sqrt{x^2 + 3} - 2x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + \sqrt{x^2 + 3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - 3}{-x - \sqrt{x^2 + 3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x + \sqrt{x^2 + 3}} = 0$$

نستنتج أن منحنى الدالة f يقبل المستقيم $y = 2x - 2$ كمقارب له في جوار $+\infty$ ،

$$\text{3/ لدينا } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 3\sqrt[3]{-x - 1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + 3\sqrt[3]{-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} \right) = -\infty$$

ملاحظة:

إذا وجدنا أثناء حساب النهايات: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ، نقول أنه يوجد فرع لانهاضي نود دراسة منحاه أو اتجاهه، (أو كما يقول البعض يحتمل وجود مستقيم مقارب مائل)، لأجل هذا نميز الحالات التالية:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty \text{ نقول أن الفرع اللانهاضي باتجاه محور الترتيب ونسميه فرع قطع مكافئ،}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ نقول أن الفرع اللانهاضي باتجاه محور الفواصل،}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0 \text{ نحسب كذلك النهاية: } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) \text{ ونميز الحالتين:}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \infty \text{ الفرع اللانهاضي منحاه المستقيم } y = ax$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b \text{ منحنى الدالة } f \text{ يقبل مستقيما مقاربا مائل معادلته } y = ax + b \text{ في جوار } \infty.$$

لأجل هذا نقوم بحساب النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 3\sqrt[3]{-x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + 3\sqrt[3]{-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} \right) = 1$$

$$\text{ولدينا: } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3\sqrt[3]{-x - 1}) = +\infty$$

و حسب الملاحظة السابقة منحنى الدالة f يقبل فرعاً لانهاظياً باتجاه المستقيم $y = x$ في جوار $-\infty$ ،

/4

ليكن $x < -1$:

$$f'(x) = (x + 3\sqrt[3]{-x - 1})' = 1 + 3 \left((-x - 1)^{-\frac{1}{3}} \right)' =$$

$$1 - 3 \left(\frac{1}{3} \left((-x - 1)^{-\frac{2}{3}} \right) \right) = 1 - \left((-x - 1)^{-\frac{1}{3}} \right)^2 = \left(1 - (-x - 1)^{-\frac{1}{3}} \right) \left(1 + (-x - 1)^{-\frac{1}{3}} \right) =$$

$$\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{-x - 1}} \right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{-x - 1}} \right) = \frac{(\sqrt[3]{-x - 1} - 1)(\sqrt[3]{-x - 1} + 1)}{(\sqrt[3]{-x - 1})^2}$$

5/ جدول تغيرات الدالة f ، لتمييز الحالتين:

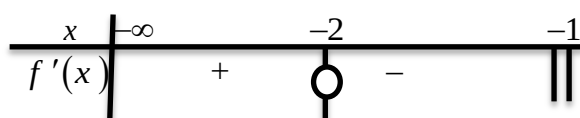
الأولى:

إذا كان $x < -1$ عينا مشتق هاته الدالة على هذا المجال في السؤال السابق، لندرس إشارته:إشارة $f'(x)$ من إشارة $(\sqrt[3]{-x-1}-1)$ لأن:

$$x < -1 \text{ معناه } -x-1 > 0 \text{ أي } \sqrt[3]{-x-1}+1 > 0 \text{ و } (\sqrt[3]{-x-1})^2 > 0$$

$$\text{ولدينا: } \sqrt[3]{-x-1}-1 = \frac{-x-2}{(\sqrt[3]{-x-1})^2 + \sqrt[3]{-x-1}+1}$$

$$\text{مع: } a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \text{ و بوضع: } a=\sqrt[3]{-x-1}, b=1 \text{ نجد: } \sqrt[3]{-x-1}-1 = \frac{-x-1-1}{(\sqrt[3]{-x-1})^2 + \sqrt[3]{-x-1}+1}$$

و من كل هذا يمكن وضع جدول يلخص إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty; -1[$:

الثانية:

$$x > -1$$

$$\text{لنحسب المشتقة: } f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{\sqrt{x^2+3}+x}{\sqrt{x^2+3}}$$

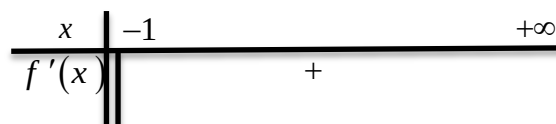
من الواضح أنه إذا كان $x \geq 0$ يكون: $f'(x) > 0$

$$\text{أما إذا كان } -1 < x < 0 \text{ نكتب: } f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}+x}{\sqrt{x^2+3}} = x \left(\frac{-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1}{\sqrt{x^2+3}} \right)$$

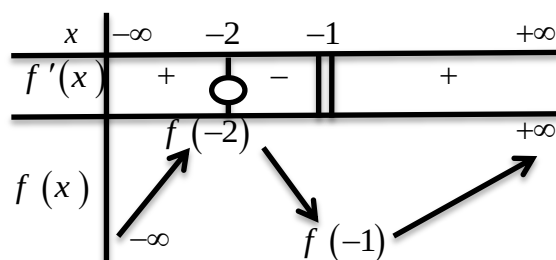
$$\text{نحاول حصر الكمية } -\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1$$

$$-\sqrt{\frac{3}{x^2}}+1+1 < -1 < 0 \text{ معناه } -\sqrt{\frac{3}{x^2}}+1 < -2 \text{ أي: } \sqrt{\frac{3}{x^2}}+1 > 2 \text{ معناه } \frac{3}{x^2}+1 > 4 \text{ أي: } x^2 < 1 \text{ معناه } 0 < x < -1$$

و منه جدول الإشارة في هاته الحالة:



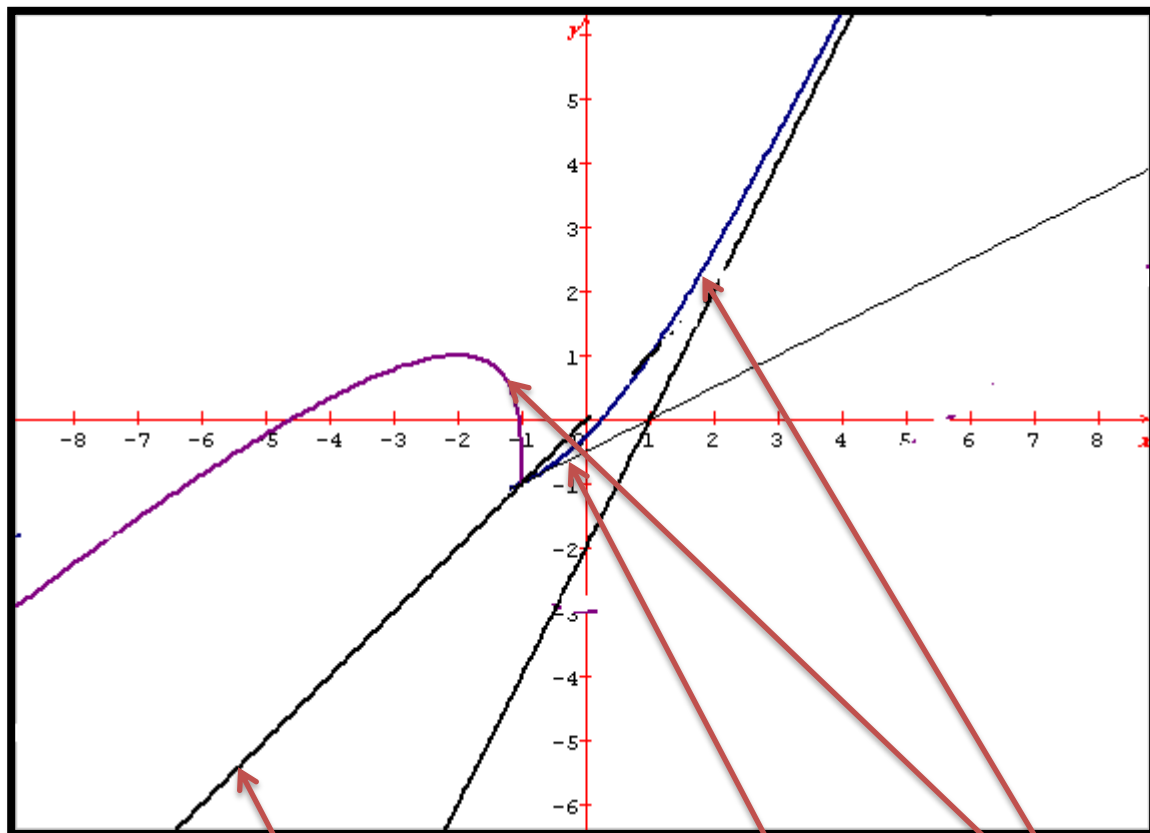
يمكن كتابة جدول التغيرات:



$$f(-1) = -1 \text{ و } f(-2) = -2 + 3\sqrt[3]{2-1} = -2 + 3 = 1$$

6/ رسم منحنى الدالة f :

اعتمادا على كل ما درس سابقا يمكن رسم المنحنى ببساطة:



$y = x$

نصف المماس

(C_f)

من علماء العرب:

محمود حمو الحمزة:

عالم سوري من مواليد مدينة الحسكة عام 1954، أستاذ دكتور في الرياضيات، ومختص بتاريخ العلوم العربية، وهو كبير باحثين علميين في معهد تاريخ العلوم والتقانة (معهد فافيلوف) التابع للأكاديمية الروسية للعلوم.

له العديد من المؤلفات في الرياضيات ومنها (التحليل الرياضي)، (مقدمة في التحليل الحقيقي)، (مدخل إلى التفاضل والتكامل المتقدم)، (حساب التفاضل)، (موجز في تاريخ الرياضيات وتطورها الفكري والفلسفي قاموس في الرياضيات) باللغتين الروسية والعربية، و(معجم مصطلحات الرياضيات إنجليزي - عربي).

التمرين 14

$f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)$ كما يلي: الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) أ/ أثبت أن الدالة f فردية،

ب/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

ج/ ادرس تغيرات الدالة f ،

(2) أ/ اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0،

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) واستنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها،

ج/ بين أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$ ، ثم استنتج معادلة (d') المستقيم المقارب الآخر،

د/ ارسم (d) و (d') و (C_f) في المعلم السابق،

(3) $g(x) = |x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)$ كما يلي: الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$

أ/ بين أن الدالة g زوجية،

ب/ انطلاقا من (C_f) ارسم منحنى الدالة g في نفس المعلم السابق.

حل:

لدينا: $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)$

(1) أ/ ليكن $x \in \mathbb{R}$ يكون $-x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = -x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{(-x)^2+1}} \right) = - \left(x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) \right) = -f(x)$$

و منه الدالة f فردية،

ب/ ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right)' = 1 + \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = 1 + \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = 1 + \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$$

ج/ نستنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ، و منه جدول التغيرات:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$			$+\infty$

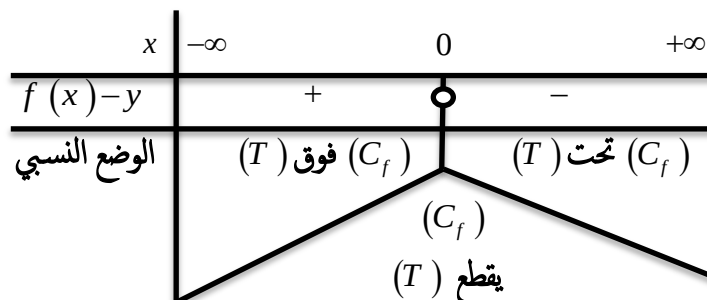
مع العلم أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \right) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) \right) = -\infty$

(2) / معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0:

(T): $y = f'(0)x + f(0)$ ولدينا بالتعويض: $f'(0) = 2$ و $f(0) = 0$ ومنه المعادلة النهائية هي: (T): $y = 2x$

ب/ دراسة الوضع النسبي:

لدينا: $f(x) - 2x = -x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = x \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = x \left(\frac{1 - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = -x \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1} \times (1 + \sqrt{x^2 + 1})} \right)$



المماس (T) يخترق المنحنى عند نقطة التماس ذات الفاصلة 0، وهذا كاف للحكم أنها نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - x - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} - 1 \right) = 0$$

ج/ لدينا

ومن $y = x + 1$ (d) معادلة مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة f في جوار $+\infty$ ،

* استنتاج معادلة المستقيم المقارب الآخر:

طريقة 01:

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+1)) = 0$ معناه $\lim_{t \rightarrow -\infty} (f(-t) - (-t+1)) = 0$ أي $\lim_{t \rightarrow -\infty} (f(t) - (t-1)) = 0$ وبالتالي نستنتج أن:

$(d'): y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة f في جوار $-\infty$.

طريقة 02:

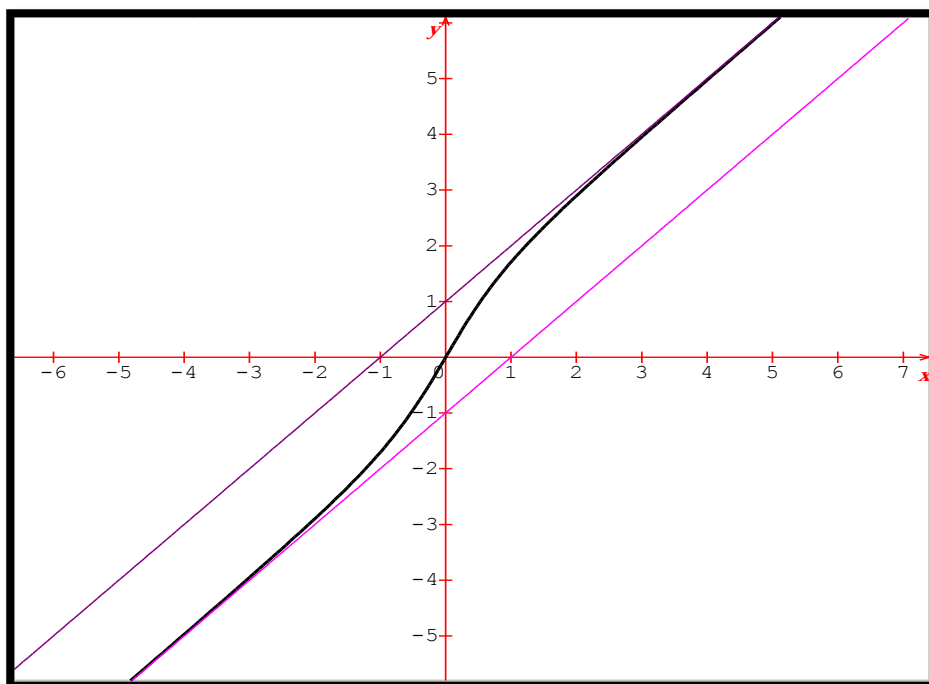
لما كانت الدالة f فردية فإن منحناها متناظر بالنسبة للمبدأ، أي المقارب لمنحنى الدالة f في جوار $-\infty$ يناظر المقارب في جوار $+\infty$ بالنسبة للمبدأ، لكن هما متوازيان ومنه $(d'): y = x + b$ ، وكون $(0; 1) \in (d)$ فإن $(0; -1) \in (d')$ وعليه $(d'): y = x - 1$.

طريقة 03:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} \right) = -1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = 1$$

إذن $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة f في جوار $-\infty$ ،

د/ رسم (d) و (d') و (C_f):



(3) لدينا $g(x) = |x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$

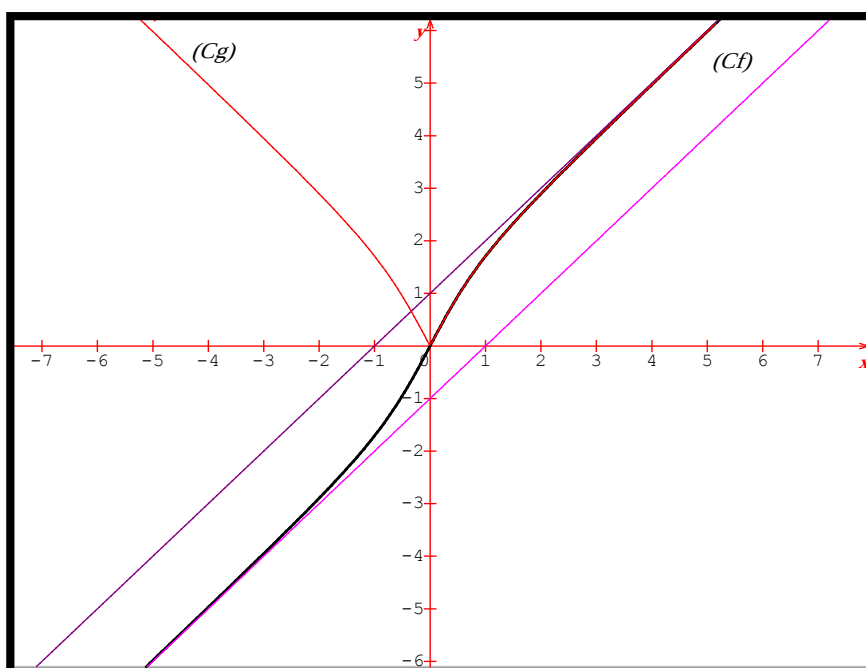
أ/ من أجل $x \in \mathbb{R}$ يكون: $-x \in \mathbb{R}$

لدينا: $g(-x) = |-x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{(-x)^2 + 1}} \right) = |x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = g(x)$

لمحور الترتيب،

ب/ إذا كان $x \geq 0$ ينطبق منحنى الدالة g على منحنى الدالة f ،

وكون الدالة g زوجية يمكن رسم بقية المنحنى على المجال $]-\infty; 0]$ بالتناظر بالنسبة لمحور الترتيب، لاحظ **الشكل:**



التمرين 15:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ،

لنعتبر f الدالة العددية المعرفة بالعلاقة: $f(x) = 1 - x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المعلم السابق،

1/ عين مجموعة تعريف الدالة f ، ثم احسب النهايات عند أطرافها،

2/ احسب $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x من مجموعة التعريف،

3/ برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من مجموعة التعريف: $1 - (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} \leq 0$ ،

4/ شكّل جدول التغيرات،

5/ برهن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α بحيث: $1 < \alpha < 2$ ،

6/ ادرس الفرعين النهائيين لـ (C_f) ، "يمكن الاستغناء على هذا السؤال لحذفه من البرنامج"

7/ ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و المستقيم $y = -x + 2$ (Δ): من أجل $x > 0$ ،

8/ بين أن النقطة $I(0;1)$ مركز تناظر لمنحنى الدالة f ،

9/ عين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الترتيب،

10/ أنشئ (C_f) ،

11/ عين حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة: $(x+m)\sqrt{x^2+1} - x = \sqrt{x^2+1}$.

حل:

1/ f معرفة معناه $1+x^2 > 0$ أي: $D_f =]-\infty; +\infty[$ ،

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - x - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - x + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \right) = -\infty$$

2/ من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(1 - x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)' = -1 + \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} = -1 + \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1 - (1+x^2)\sqrt{1+x^2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

3/ ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$1 - (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} \leq 0 \text{ معناه } 1 \leq (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} \text{ يكافئ } \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \leq x^2 + 1 \text{ معناه } \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + 1} \leq x^2 + 1 \text{ يكافئ}$$

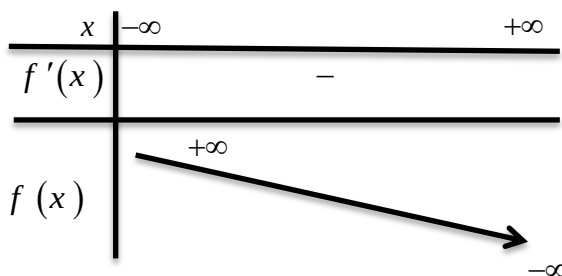
$$\sqrt{x^2+1} \leq (x^2+1)^2 \text{ معناه } x^2+1 \leq (x^2+1)^4 \text{ يكافئ } 1 \leq (x^2+1)^3 \text{ معناه } 1 \leq x^2+1 \text{ أي } x^2 \geq 0$$

ولما كانت العلاقة الأخيرة صحيحة من أجل كل حقيقي x واعتمادا على التكافؤات نستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$1 - (x^2+1)\sqrt{x^2+1} \leq 0$$

ولما كانت إشارة المشتقة من إشارة $1 - (x^2+1)\sqrt{x^2+1}$ يمكن:

4/ تشكيل جدول التغيرات:



5/ من جدول التغيرات نستنتج أن الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $[1; 2]$ و

$$f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ و } f(2) = -1 + \frac{2}{\sqrt{5}} \approx -1 + \frac{2}{2.24} \approx -0.11 \text{ و منه } f(1) \times f(2) < 0 \text{ و حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد}$$

و وحيد $\alpha \in]1; 2[$ حيث: $f(\alpha) = 0$

6/ و من النهايات المحسوبة سابقا، **هناك فرعان لانهايان**، ولدينا كذلك:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1^* \text{ أي: } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-x+2)] = 0 \text{ و بالتالي نستنتج أن } y = -x + 2$$

مستقيم مقارب مائل في جوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1^* \text{ أي: } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x)] = 0 \text{ و بالتالي نستنتج أن } y = -x \text{ مستقيم}$$

مقارب مائل في جوار $-\infty$

7/ لندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$

$$f(x) - (-x+2) = 1 - x + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + x - 2 = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{x^2 - x^2 - 1}{(x + \sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{(x + \sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} < 0, \quad x > 0$$

لدينا:

نشكل الجدول التالي:

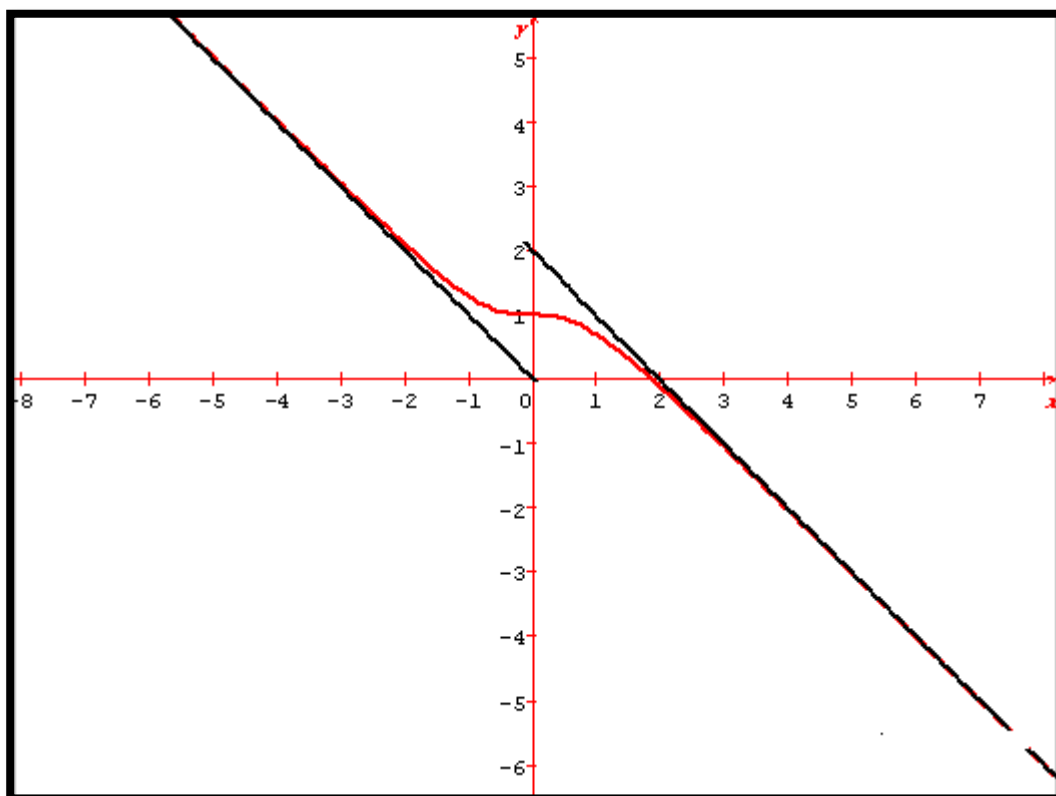
x	0	$+\infty$
$f(x) - y$		-
الوضع النسبي		(C_f) تحت (Δ)

8/ ليكن $x \in \mathbb{R}$ يكون $-x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) + f(x) = 1 + x - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + 1 - x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 2 = 2(1)$$

أي: $I(0;1)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) ،9/ من أجل $x = 0$ نجد $f(0) = 1$ أي توجد نقطة وحيدة I تمثل تقاطع المنحنى (C_f) و محور الترتيب،

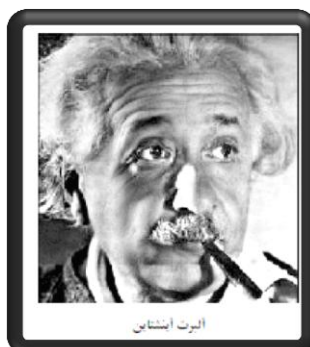
10/ يمكن تلخيص كل ما قيل في هذا الشكل:

11/ المعادلة $(x + m)\sqrt{x^2 + 1} - x = \sqrt{x^2 + 1}$ تكافئ $m\sqrt{x^2 + 1} = x + \sqrt{x^2 + 1}(-x + 1)$ معناه

$$y = m \text{ مع المستقيمات } (C_f) \text{ و بالتالي حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى } (C_f) \text{ مع المستقيمات } y = m$$

و من الشكل فالمعادلة تقبل حلا وحيدا من أجل كل $m \in \mathbb{R}$.

إذا لم تستطع شرحها ببساطة لطفل في السابعة، فأنت لا تفهمها بما يكفي.



ألبرت أينشتاين

التمرين 16:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بالعلاقة: $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$

يرمز (C) إلى منحنى f في المستوي المزدوج بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، (الوحدة على المحورين $2cm$)

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ ، فسر النتيجة هندسياً،

* ادرس تغيرات الدالة f ،

* باستعمال منحنى الدالة "الجذر التربيعي"، أنشئ المنحنى (C) ،

* ارسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته: $y = x$ ،

(2) نعرف المتتالية $(u_n)_n$ على المجموعة $\mathbb{N}$ كالآتي:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

أ- باستعمال (D) و (C) ، مثل الحدود u_0, u_1, u_2 على محور الفواصل،

ب - ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها،

(3) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $2 \leq u_n \leq 5$ و $u_{n+1} > u_n$ ،

ب) استنتج أن (u_n) متقاربة. احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 + \sqrt{x-1} - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad (1)$$

الدالة لا تقبل الاشتقاق عند 1،

التفسير الهندسي: منحنى الدالة f يقبل نصف مماس موازيا لمحور الترتيب عند النقطة ذات الفاصلة 1 "نقطة زاوية"،

- دراسة التغيرات:

$$D_f = [1; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + \sqrt{x-1}) = +\infty \quad \text{و} \quad f(1) = 3$$

$$f'(x) = (3 + \sqrt{x-1})' = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} > 0 \quad \text{من} \quad x \in [1; +\infty[$$

و منه الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[1; +\infty[$ ، بالتالي جدول التغيرات:

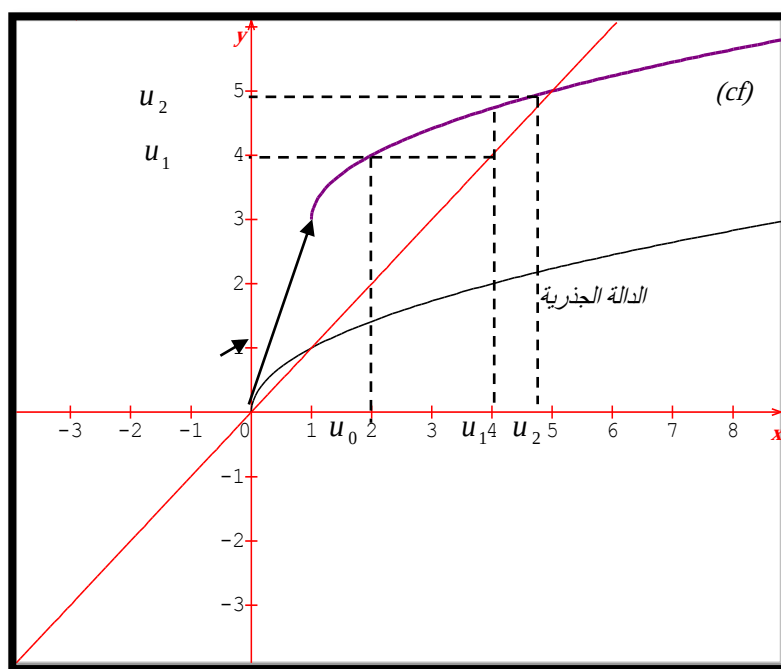
x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	3	$+\infty$

- إنشاء المنحنى (C) انطلاقاً من الدالة الجذرية:

لتكن $g(x) = \sqrt{x}$ ، عندئذ: $f(x) = 3 + g(x-1)$ أي (و هذا حسب الباب الأول) (C) انسحاب لمنحنى الدالة الجذرية

شعاعه $(1; 3)$ ،

(2) أ- تمثيل الحدود المطلوبة على محور الفواصل لاحظ الشكل:



ب- التخمين:

من التمثيل البياني نلاحظ أن المتتالية متزايدة تمامًا، ومتقاربة،

(3) أ) سوف نتعرف على هذا النوع من البراهين في درس "المتتاليات" الجزء الثاني:

* لنبرهن بالتراجع أن $2 \leq u_n \leq 5$ و هذا من أجل كل عدد طبيعي n الخطوة الأولى: لنفرض صحة الخاصية $2 \leq u_0 = 2 \leq 5$ ،الخطوة الثانية: لنفرض صحة الخاصية في رتبة m أي: $2 \leq u_m \leq 5$ (فرض التراجع)، ولنبرهن صحة الخاصية في الرتبة $m+1$ أي:هل $2 \leq u_{m+1} \leq 5$ ؟لدينا $2 \leq u_m \leq 5$ حسب فرض التراجع، وكون الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$ نجد $f(2) \leq f(u_m) \leq f(5)$ ومنه $4 \leq u_{m+1} \leq 5$ أي: $2 \leq u_{m+1} \leq 5$ ، وبالتالي فالخاصية محققة في الرتبة $m+1$.

الخلاصة: الخاصية محققة من أجل كل عدد طبيعي،

* لنبرهن كذلك $u_{n+1} > u_n$:الخطوة الأولى: $u_1 = 4 > u_0 = 2$ الخاصية محققة،الخطوة الثانية: لنفرض صحة الخاصية في رتبة m أي: $u_{m+1} > u_m$ ، ولنبرهن صحة الخاصية في الرتبة $m+1$ أي:هل $u_{m+2} > u_{m+1}$ ؟من فرض التراجع لدينا $u_{m+1} > u_m$ وكون الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$ يكون: $f(u_{m+1}) > f(u_m)$ أي: $u_{m+2} > u_{m+1}$ الجذر له معنى لأننا بينا $2 \leq u_n \leq 5$ من أجل $n \in \mathbb{N}$ ،

الخلاصة: الخاصية محققة من أجل كل عدد طبيعي،

ب- من (3) أ) المتتالية $(u_n)_n$ متزايدة تمامًا ومحدودة فهي متقاربة نحو نهاية لتكن l حيث: $2 \leq l \leq 5$ ،أي: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$ ومن العبارة التراجعية للمتتالية نجد:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (3 + \sqrt{u_n - 1}) = 3 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n - 1} = 3 + \sqrt{l - 1}$$

من استمرار الدالة الجذرية على المجال $[1; +\infty[$ ،

أي: $l^2 - 6l + 9 - l + 1 = 0$ أي: $l^2 - 7l + 10 = 0$ باستعمال المميز نجد $\Delta = 9$ أي: $l = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$ هذه القيمة مرفوضة

لأن المتتالية متزايدة تماما و حدها الأول 2 و منه القيمة المطلوبة هي: $l = \frac{7+3}{2} = 5$.

التمرين 17:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

ادرس تغيرات، ثم ارسم منحى كل من الدوال التالية:

$$f_1(x) = \cos(x) *$$

$$f_2(x) = \sin(x) *$$

$$f_3(x) = \tan(x) *$$

$$f_4(x) = \cot(x) *$$

حل:

دراسة الدوال الجيبية:

$$f_1(x) = \cos(x) *$$

$$D_{f_1} = \mathbb{R} \text{ لدينا } **$$

** كما نعلم أن $f_1(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ أي الدالة $\cos$ دورية ودورها 2π و عليه نكتفي بالدراسة في $[-\pi; \pi]$

** و اعتمادا على الدائرة المثلثية، الدالة f_1 زوجية أي تقتصر في دراستنا على المجال $[0; \pi]$

"يمكن ملاحظة أننا نستطيع في دراستنا الاقتصار على مجالات أخرى"

$$\text{لدينا } f_1(0) = \cos(0) = 1 \text{ و } f_1(\pi) = \cos(\pi) = -1$$

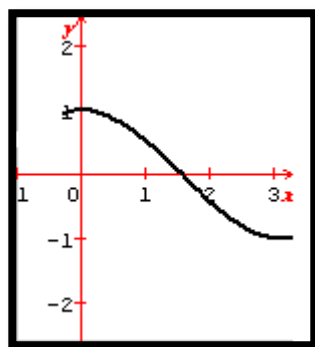
$$f_1'(x) = (\cos(x))' = -\sin(x) \leq 0 \quad ** \text{ و من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من المجال } [0; \pi]:$$

$$\text{من أجل كل } x \in [0; \pi]: \sin(x) \geq 0$$

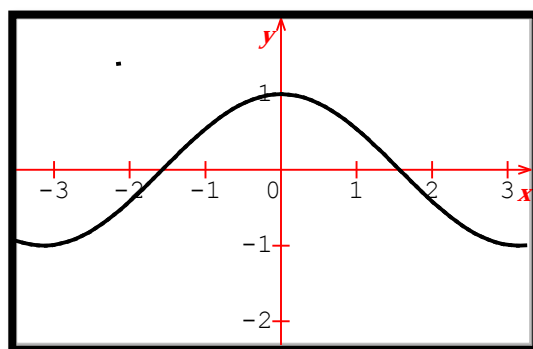
أي الدالة f_1 متناقصة تماما على المجال $[0; \pi]$ ، و منه جدول التغيرات:

x	0	π
$f_1'(x)$	0	0
		-
$f_1(x)$	1	-1

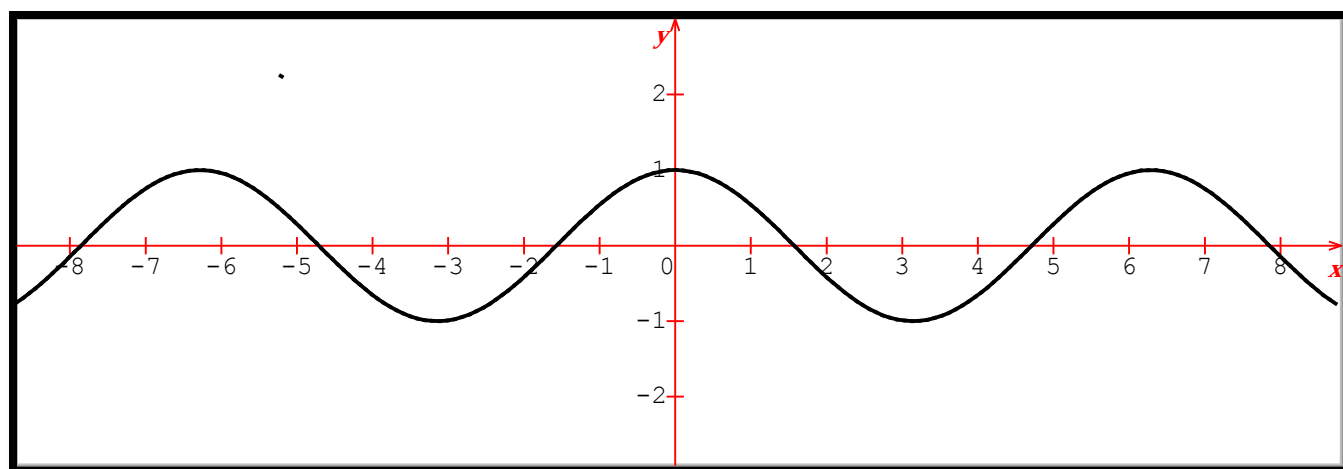
** الرسم البياني في هذا المجال:



** و بالتناظر بالنسبة لمحور الترتيب:



** و باستعمال الدور نحصل على الشكل المطلوب:



$$f_2(x) = \sin(x) \quad *$$

** لدينا: $D_{f_2} = \mathbb{R}$

** و $f_2(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ أي الدالة $\sin$ دورية ودورها 2π أي نكتفي بالدراسة في المجال $[-\pi; \pi]$ ،

** و اعتمادا على الدائرة المثلثية الدالة f_2 فردية أي تقتصر في دراستنا على المجال $[0; \pi]$

"يمكن ملاحظة أننا نستطيع في دراستنا الاقتصار على مجالات أخرى"

لدينا $f_2(0) = \sin(0) = 0$ و $f_2(\pi) = \sin(\pi) = 0$ ،

** و من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0; \pi]$: $f_2'(x) = (\sin(x))' = \cos(x)$

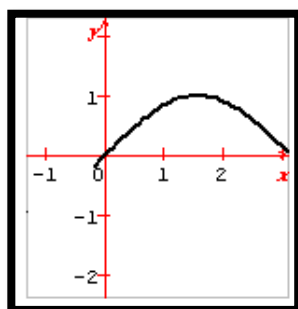
من أجل $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: $\cos(x) \geq 0$ و من أجل $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$: $\cos(x) \leq 0$ ،

أي الدالة f_2 متزايدة تماماً على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ، و متناقصة تماماً على المجال $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ ،

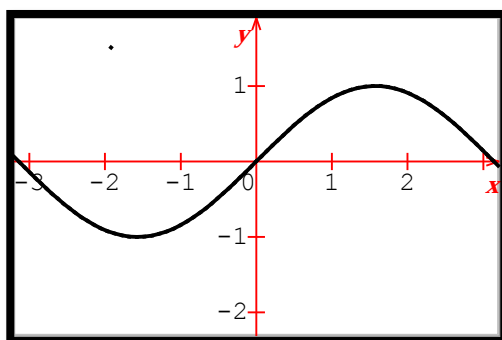
و منه جدول التغيرات:

x	0	$\pi/2$	π
$f_2'(x)$	+	0	-
$f_2(x)$	0	$f_2(\pi/2)=1$	0

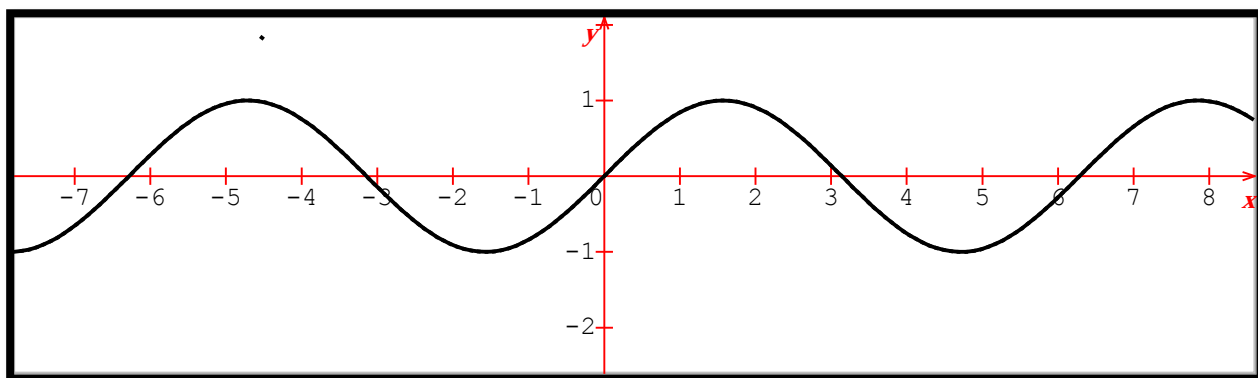
** الرسم البياني في هذا المجال:



* و بالتناظر بالنسبة لمحور للمبدئي:



* و باستعمال الدور نحصل على الشكل المطلوب:



$$f_3(x) = \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$D_{f_3} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ لدينا } **$$

** هل الدالة f_3 دورية؟

لأجل هذا نبحث عن أصغر عدد حقيقي موجب تماما q يحقق: $\operatorname{tg}(x+q) = \operatorname{tg}(x)$ معناه $x = x + q + k\pi$ أي: $q = -k\pi, k \in \mathbb{Z}$ وبالتالي كل من الأعداد $q = -k\pi, k \in \mathbb{Z}$ هي دورة للدالة tg ، ومن الواضح أن أصغرها وذا الإشارة الموجبة تماما هو العدد π ،

لأجل هذا سنقتصر في الدراسة على المجال $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ ،

** دراسة الشفعية:

$$\text{من أجل كل } x \in D_{f_3} \text{ يكون } -x \in D_{f_3} \text{ و } f_3(-x) = \operatorname{tg}(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg}(x)$$

أي الدالة f_3 فردية لهذا تقتصر على الدراسة في المجال $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$:

$$** \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f_3(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f_3(0) = 0$$

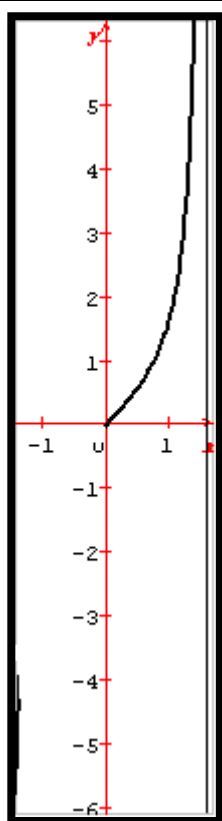
لدينا من أجل كل $x \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$

$$f_3'(x) = (\operatorname{tg}(x))' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \operatorname{tg}^2(x) > 0$$

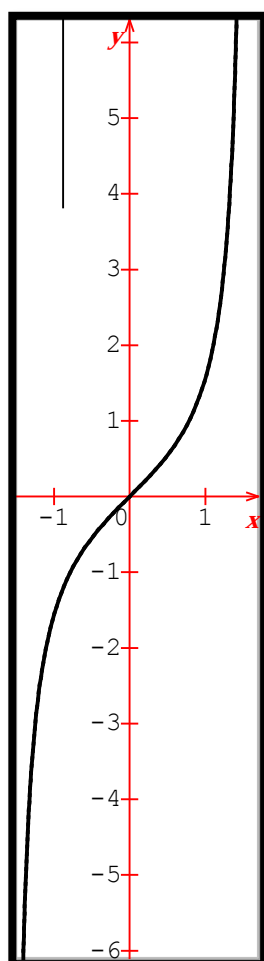
أي الدالة f_3 متزايدة تماما على المجال $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$ ، وبالتالي جدول التغيرات:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f_3'(x)$		+
$f_3(x)$	0	$+\infty$

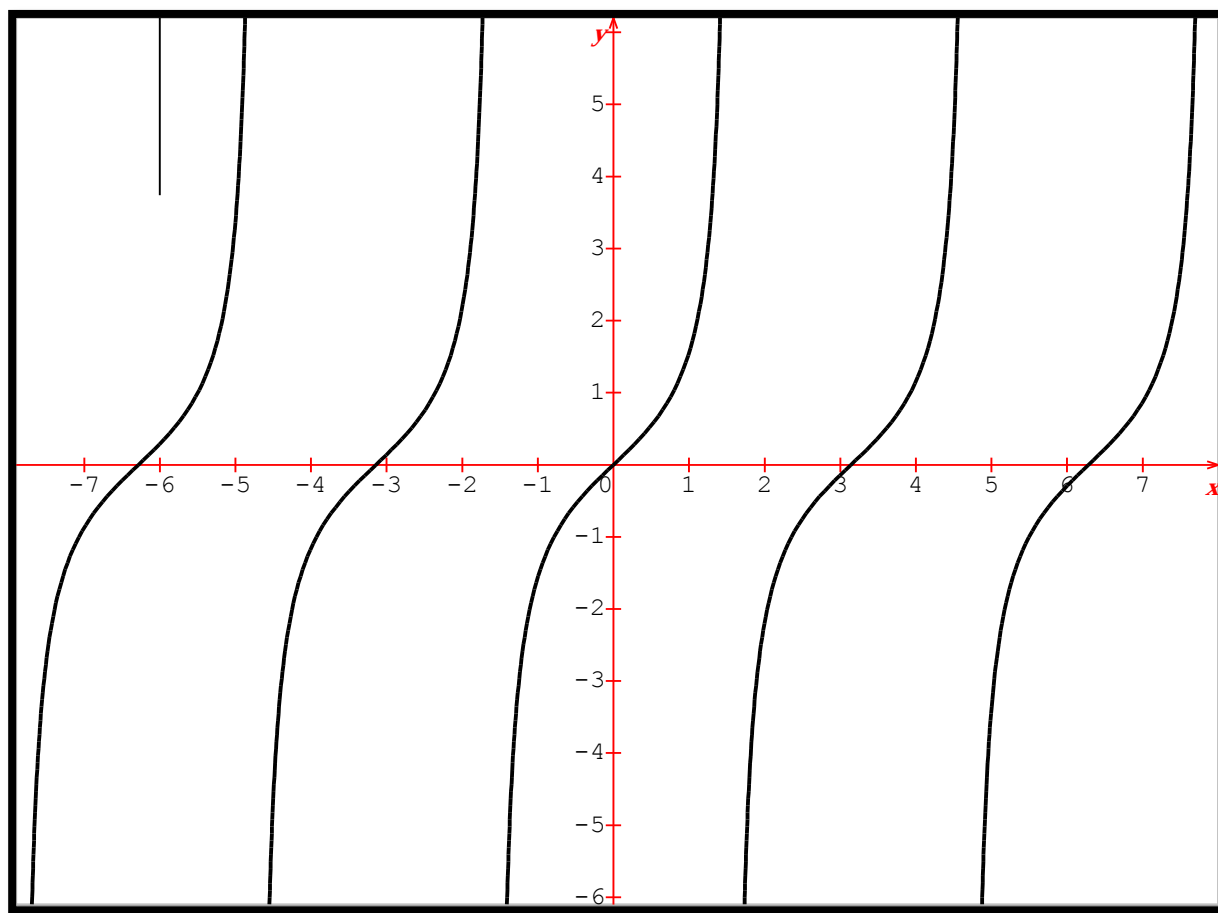
** الرسم البياني في هذا المجال:



** و بالتناظر بالنسبة للمبدأ:



** وباستعمال الدور نحصل على الشكل المطلوب:



$$f_4(x) = \cot g(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

** لدينا: $D_{f_4} = \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ ** هل الدالة f_4 دورية؟

لأجل هذا نبحث عن أصغر عدد حقيقي موجب تماماً q يحقق: $\cot g(x+q) = \cot g(x)$ معناه $x = x+q+k\pi$ أي: $q = -k\pi, k \in \mathbb{Z}$ وبالتالي فكل من الأعداد $q = -k\pi, k \in \mathbb{Z}$ هي دورة للدالة $\cot g$ ، ومن الواضح أن أصغرها وذا الإشارة الموجبة تماماً هو العدد π ، لأجل هذا سنقتصر في الدراسة على المجال $]0; \pi[$ ،

لدينا من أجل كل x من $]0; \pi[$:

$$f_4'(x) = (\cot g(x))' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{-(\cos^2(x) + \sin^2(x))}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)} < 0$$

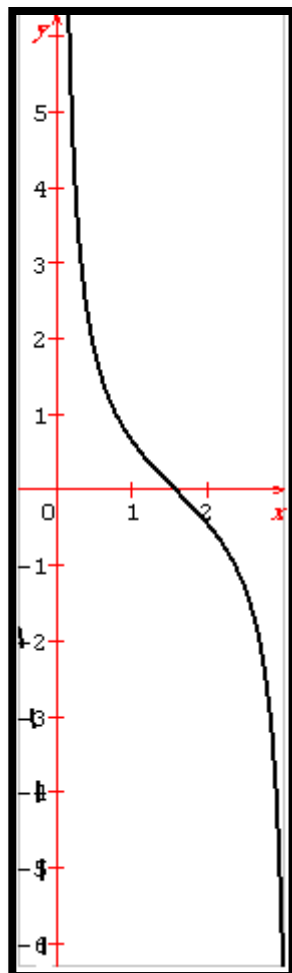
أي الدالة f_4 متناقصة تماماً على المجال $]0; \pi[$ ، و بالتالي جدول التغيرات:

x	0	π
$f_4'(x)$		-
$f_4(x)$	$+\infty$	$-\infty$

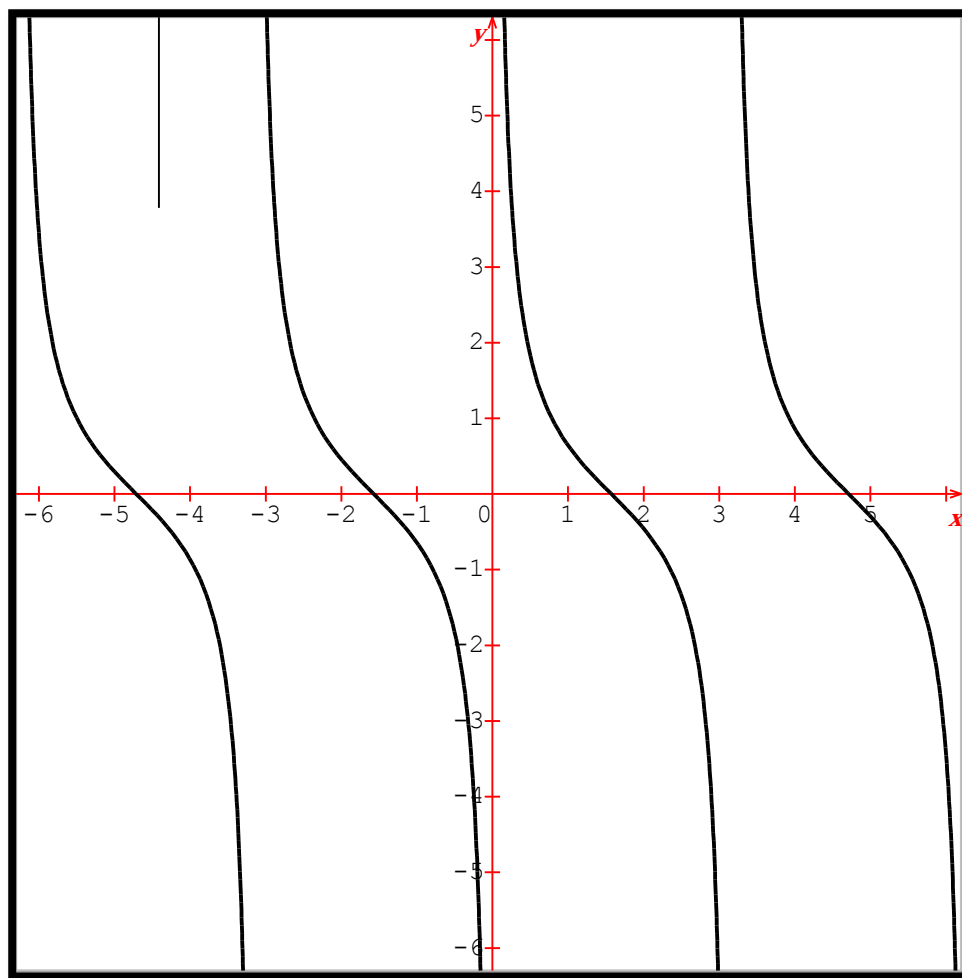
**لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} f_4(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$ ، نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة f_4 ،

و $\lim_{x \rightarrow \pi} f_4(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ ، نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x = \pi$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة f_4 ،

الرسم البياني في هذا المجال:



** و باستعمال الدور نحصل على الشكل المطلوب:



التمرين 18:

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \sin^2 x$ ،
 وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ،
 أ/ برهن أن الدالة f دورية ذات الدور π ،
 ب/ برهن أن محور الترتيب هو محور للمنحنى (C_f) ،
 ج/ ادرس تغيرات الدالة f على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ،
 د/ ارسم المنحنى الممثل للدالة f على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ثم على المجال $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

حل:

لدينا: $f(x) = \sin^2 x$ و $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x + \pi) = (\sin(x + \pi))^2 = \frac{1 - \cos(2x + 2\pi)}{2} = \frac{1 - \cos(2x)}{2} = \sin^2 x \quad \text{أ/}$$

كون الدالة $\cos$ دورية و دورها 2π ،

ب/ ليكن $x \in \mathbb{R}$ نجد: $-x \in \mathbb{R}$ و $f(-x) = (\sin(-x))^2 = (-\sin(x))^2 = \sin^2(x) = f(x)$ و منه f زوجية،

ج/ دراسة تغيرات الدالة f على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

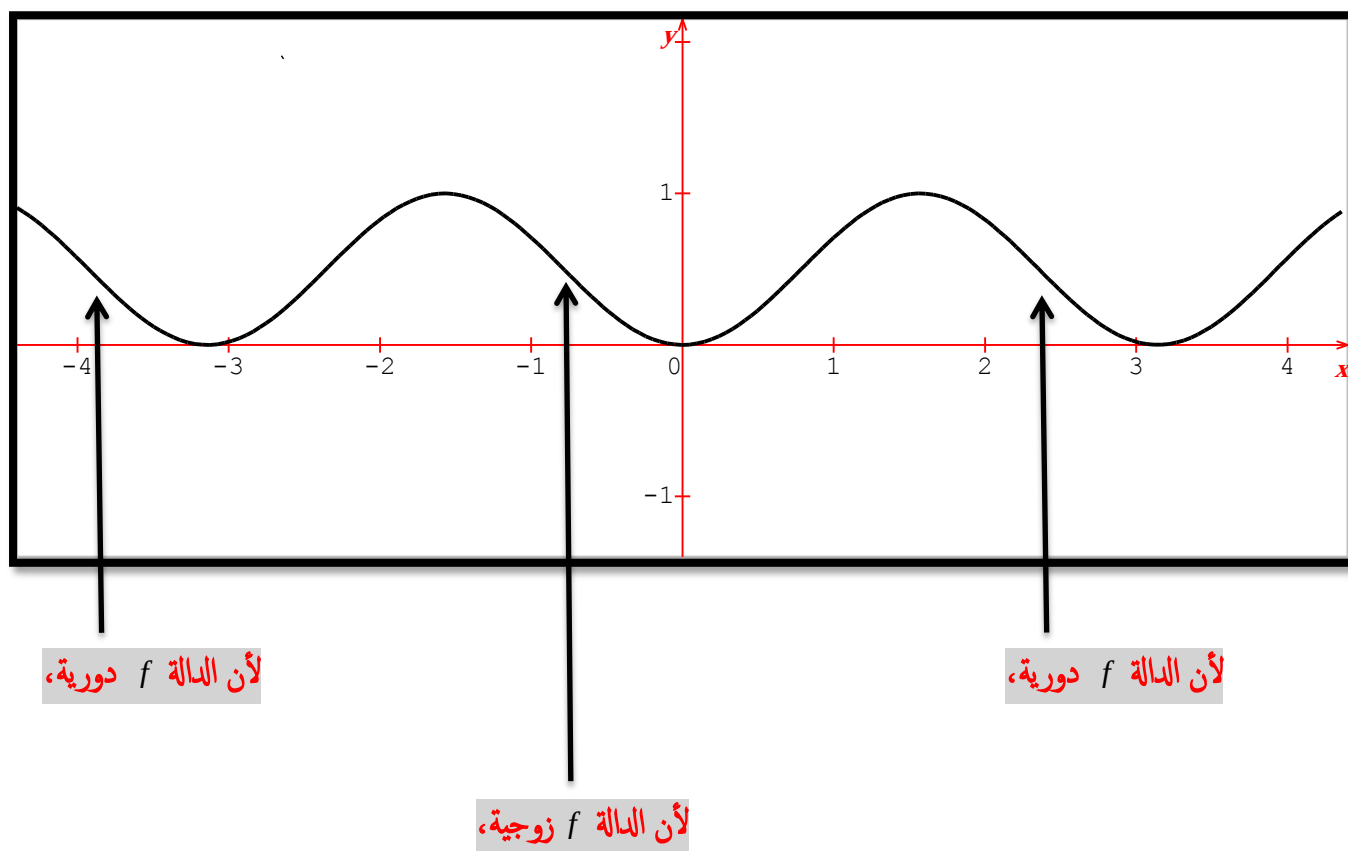
$$f'(x) = 2 \cos x \sin x = \sin(2x) \geq 0 : x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \text{ من أجل كل}$$

لأن $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ معناه $0 \leq 2x \leq \pi$ ،

و بالتالي جدول التغيرات:

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$	0		1

د/ رسم المنحنى (C_f) على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ وفي المجال $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$:



التمرين 19:

f هي الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \sin 3x - 3\sin x$

(1) قارن بين $f(x)$ و $f(x + 2\pi)$ ، $f(-x)$ و $f(\pi - x)$ ،

استنتج أنه يكفي دراسة الدالة f على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ،

(2) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = -6\sin x \sin 2x$ ،

(3) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ،

(4) ارسم منحنى الدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

حل:

لدينا: $f(x) = \sin 3x - 3\sin x$ و $D_f = \mathbb{R}$

(1) من أجل $x \in \mathbb{R}$ يكون $x + 2\pi \in \mathbb{R}$

$$f(x + 2\pi) = \sin(3x + 6\pi) - 3\sin(x + 2\pi) = \sin(3x) - 3\sin(x) = f(x) \text{ و}$$

$$\text{و بالتالي } f(x + 2\pi) = f(x) \text{ ، (*)}$$

و من أجل $x \in \mathbb{R}$ يكون $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \sin(-3x) - 3\sin(-x) = -(\sin(3x) - 3\sin(x)) = -f(x) \text{ و}$$

$$\text{و بالتالي } f(-x) = -f(x) \text{ ، (**)}$$

و من أجل $x \in \mathbb{R}$ يكون $\pi - x \in \mathbb{R}$

$$f(\pi - x) = \sin(3\pi - 3x) - 3\sin(\pi - x) = \sin(\pi - 3x) - 3\sin(x) = \sin(3x) - 3\sin(x) = f(x) \text{ و}$$

$$\text{و بالتالي: } f\left(2\left(\frac{\pi}{2}\right) - x\right) = f(x) \text{ ، (***)}$$

من (*) نستنتج أن الدالة f دورية و يمكن إثبات أن دورها 2π أي يمكن الاختصار في الدراسة على المجال $[-\pi; \pi]$ ،

و من (**) نستنتج أن الدالة f فردية أي يمكن الاختصار في الدراسة على المجال $[0; \pi]$ و نكمل التمثيل بالتناظر بالنسبة للمبدأ،

و من (***) نستنتج أن المستقيم $x = \frac{\pi}{2}$ محور تناظر أي تقتصر في الدراسة على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ و نكمل المنحنى بالتناظر بالنسبة للمحور،

(2) دراسة تغيرات الدالة f على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\text{من أجل } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] : f'(x) = (\sin(3x) - 3\sin(x))' = 3\cos(3x) - 3\cos(x)$$

عند الرجوع إلى العلاقات المثلثية الواردة في الباب الأول نجد: $\cos \alpha - \sin \beta = -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \times \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$ ،

أي تصبح المشتقة على الشكل: $f'(x) = 3[-2\sin(2x)\sin x] = -6\sin(2x)\sin(x) \leq 0$

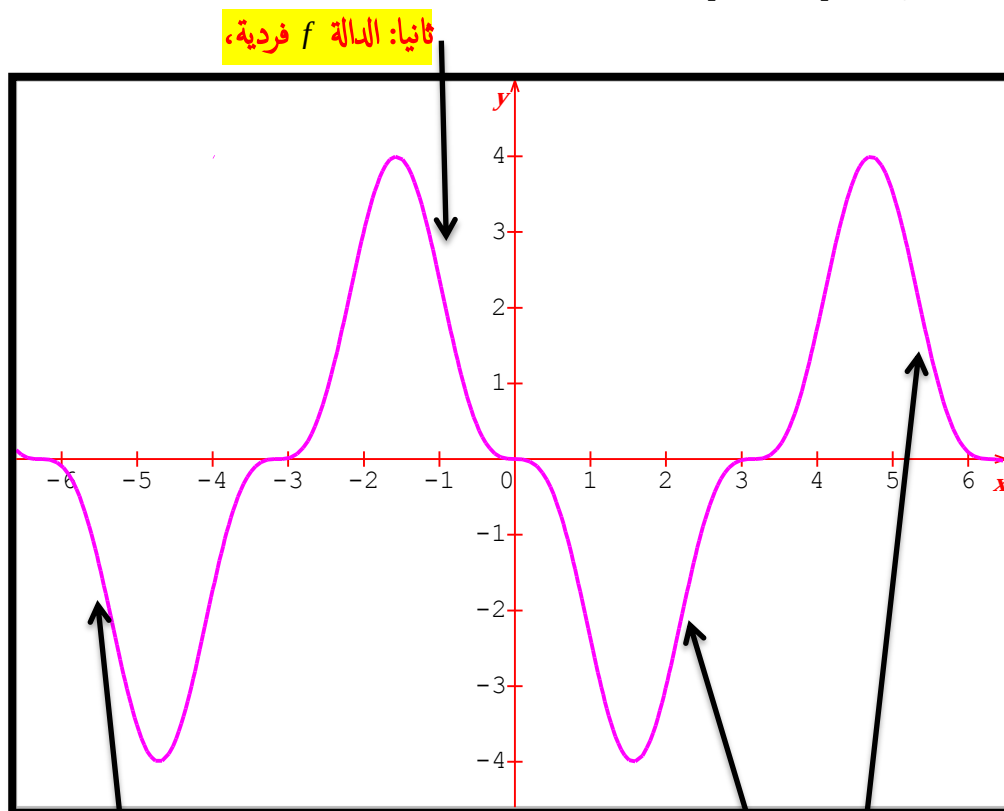
من أجل $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ يكون $2x \in [0; \pi]$ أي: $\sin(2x) \geq 0$ و $\sin(x) \geq 0$

و بالتالي الدالة f متناقصة تماما على المجال $[0; \frac{\pi}{2}]$ ومنه جدول التغيرات:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	0
		-
$f(x)$	0	-4

لأن: $f(0) = 0$ و $f(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{3\pi}{2}) - 3\sin(\frac{\pi}{2}) = -1 - 3 = -4$

4/ رسم منحنى الدالة f على المجال $[-2\pi; 2\pi]$:



أولاً: الدالة متناظرة بالنسبة للمحور $x = \frac{\pi}{2}$ ،

ثالثاً: الدالة دورية و دورها 2π

التمرين 20:

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x - \cos x$ ،
 ولتكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ،
 1/ أ/ برهن أن الدالة f دورية ذات الدور 2π ،
 ب/ برهن أن محور الترتيب هو محور تناظر للمنحنى (C_f) ،
 2/ أ/ عيّن f' الدالة المشتقة للدالة f ،
 ب/ برر أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \sin(x)[1 - 2\cos(x)]$ ،
 ج/ ادرس إشارة $f'(x)$ من أجل $x \in [0; \pi]$ ،
 3/ أ/ أنجز جدول تغيرات للدالة f على المجال $[0; \pi]$ ،
 ب/ ارسم المنحنى الذي يمثل الدالة f على المجال $[-\pi; \pi]$ ،
 ج/ كيف يمكن استنتاج المنحنى (C_f) .

حل:

لدينا: $f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x - \cos x$ و $D_f = \mathbb{R}$

$$f(x + 2\pi) = \frac{1}{2} \cos(2x + 4\pi) - \cos(x + 2\pi) = \frac{1}{2} \cos(2x) - \cos(x) = f(x) \quad \text{أ/ 1/}$$

أي الدالة f دورية ويمكن أن نبين أن أصغر دورة هي 2π ،

ب/ لنبين أن (C_f) متناظر بالنسبة لمحور الترتيب، أي الدالة f زوجية:
 من أجل $x \in \mathbb{R}$ يكون $-x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = \frac{1}{2} \cos(-2x) - \cos(-x) = \frac{1}{2} \cos(2x) - \cos(x) = f(x) \quad \text{أي: } f \text{ دالة زوجية،}$$

$$f'(x) = -\sin(2x) + \sin(x) \quad \text{أ/ 2/ من أجل كل عدد حقيقي } x:$$

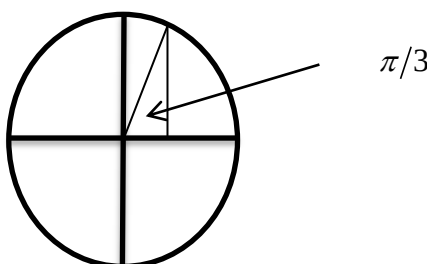
ب/ من أجل كل حقيقي x :

$$f'(x) = -\sin(2x) + \sin(x) = -2\sin(x)\cos(x) + \sin(x) = \sin(1 - 2\cos(x))$$

ج/ دراسة إشارة المشتقة على المجال $[0; \pi]$:

** لدينا $0 \leq x \leq \pi$ يكون $\sin x \geq 0$ ،

$$1 - 2\cos(x) = 2\left(\frac{1}{2} - \cos(x)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos(x)\right) \quad **$$



أو نستعمل تناقص الدالة $\cos$ على المجال $[0; \pi]$ يمكن أن نستنتج أن:

f دالة متزايدة تماماً على المجال $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$ ، و متناقصة تماماً على المجال $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ ،
3 / أ و بالتالي جدول التغيرات:

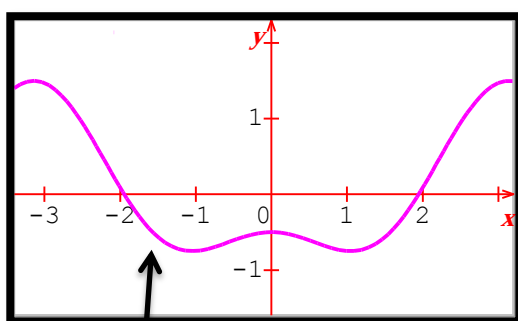
x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$	0	-	0
f	$-\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{3}{2}$

لدينا $f(\pi) = \frac{1}{2} \cos(2\pi) - \cos(\pi) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

و $f(0) = \frac{1}{2} \cos(0) - \cos(0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

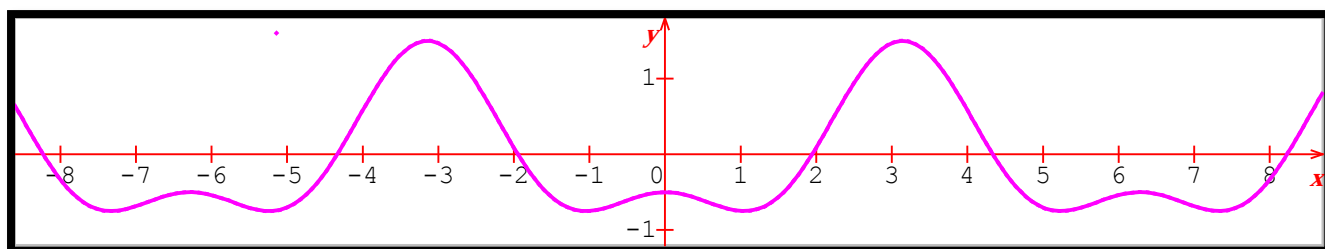
و $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{4} - \frac{2}{4} = -\frac{3}{4}$

ب / رسم منحنى الدالة f على المجال $[0; \pi]$:



لأن الدالة f زوجية،

ج / لما كانت الدالة f دورية و دورها 2π ، أمكن اتمام بقية منحنى الدالة بتكرار الشكل المرسوم كل 2π :



أهداف الدرس السابع:

- الدوال التي تحول المجموع إلى جداء (الدالة الأسية)،
- إعطاء ترميز للدالة الأسية،
- المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى.

الدرس السابع:

نشاط استكشافي:

الهدف من هذا النشاط هو: تعيين كل الدوال العددية القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ والتي تحقق من أجل كل x, y من $\mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

الجزء الأول:

لتكن دالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق من أجل كل x, y من $\mathbb{R}$: $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ (1)

(1) بين أن الدالة المدعومة تحقق العلاقة (1)،

(2) برهن أنه إذا كانت f دالة لا تنعدم عند قيمة $x_0 \in \mathbb{R}$ ، فهي لا تنعدم من أجل كل عدد حقيقي (استعمل البرهان بالخلف)،

(3) من أجل $y \in \mathbb{R}$ مثبت و $f(y) \neq 0$ بين أن $f(0) = 1$. وفي هذه الحالة:

$$(أ) \text{ بين أن العلاقة (1) تكافئ العلاقة } \begin{cases} f'(x) = k f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}; k \in \mathbb{R} \text{ (إرشاد:)}$$

* يمكن استعمال مشتق الدالة $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ حيث x مثبت من $\mathbb{R}$ والمقارنة مع العلاقة (1) للحصول على استلزام،

* واشتقاق الدالة $x \mapsto \varphi(x) = \frac{f(x+y)}{f(x)}$ للحصول على الاستلزام الآخر)،

$$(ب) \text{ بين أنه يمكن تعيين الدوال } f \text{ التي تحقق العلاقة (1) بمجرد تعيين الدالة } g \text{ التي تحقق: } \begin{cases} g(x) = g'(x) \\ g(0) = 1 \end{cases}, x \in \mathbb{R} \text{، (2) ...}$$

الجزء الثاني:

(1)

قبل أنه توجد دالة وحيدة تحقق العلاقة (2) تدعى الدالة الأسية، ونرمز لها بـ $x \mapsto g(x) = \exp(x)$

(و هذا اختصارا للكلمة الفرنسية *exponentielle* والتي تعني أسية) ونرمز بـ e للعدد $\exp(1)$ حيث: $e \approx 2,718281828$

بين أن $g(n) = e^n$ وهذا من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم،

(2) استنتج الدوال التي تحقق العلاقة (1).

حل النشاط:

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و تحقق من أجل كل عددين حقيقيين x, y : $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ (1)

الجزء الأول:

(1) لتكن $f(x) = 0$ من أجل كل عدد حقيقي x ، لدينا: $f(x+y) = 0 = 0 \times 0 = f(x) \times f(y)$ إذن الدالة المدعومة تحقق العلاقة (1)، مع ملاحظة أن الدالة المدعومة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ،

(2) لنفرض أنه يوجد عدد حقيقي x_0 حيث $f(x_0) \neq 0$ ، ولننف أن الدالة f لا تنعدم عند كل عدد حقيقي أي يوجد على الأقل $x_1 \in \mathbb{R}$ حيث: $f(x_1) = 0$ ، يمكن ملاحظة الكتابة $f(x_0) = f(x_1 + (x_0 - x_1))$ حسب العلاقة (1) نكتب:

$$f(x_0) = f(x_1) \times f(x_0 - x_1) = 0 \times f(x_0 - x_1) = 0$$

و بالتالي لا يوجد أي عدد حقيقي تنعدم عنده f ،

(3) ليكن $y \in \mathbb{R}$ حيث: $f(y) \neq 0$ ومنه الدالة لا تنعدم أبدا بالأخص عند 0،

يمكن ملاحظة $f(y) = f(0+y)$ و لما كانت الدالة f تحقق العلاقة (1) يكون: $f(y) = f(0) \times f(y)$ أي: $f(0) = 1$ ،
 (أ) لكي نبين التكافؤ وجب تبيان استلزامين:

• الاستلزام من اليمين إلى اليسار:

لنفرض أن الدالة f تحقق العلاقة (1)، لنشتق الدالة $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ (لاحظ أن المتغير y و x مثبت)،
 عند قسمة العلاقة المحصل عليها على العلاقة (1) أي: $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ يكون:

$$\frac{f'(x+y)}{f(x+y)} = \frac{f(x) \times f'(y)}{f(x) \times f(y)} = \frac{f'(y)}{f(y)}$$

و بأخذ $y = 0$ نجد بوضع $k = \frac{f'(0)}{f(0)}$ ما يأتي: $f'(x) = k \times f(x)$ و $f(0) = 1$ مع $k \in \mathbb{R}$ و.ه.م،

• الاستلزام من اليسار إلى اليمين:

لنفرض أن الدالة f تحقق $k \in \mathbb{R}$ و لنشتق الدالة $\varphi(x) = \frac{f(x+y)}{f(x)}$ و لنشتق الدالة $\begin{cases} f'(x) = k f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$

$$f'(x+y) = k \times f(x+y) \text{ و } \varphi'(x) = \frac{f'(x+y) \times f(x) - f(x+y) \times f'(x)}{(f(x))^2}$$

و $f'(x) = k \times f(x)$ و بالتعويض يكون $\varphi'(x) = 0$ من أجل كل عدد حقيقي x أي الدالة φ ثابتة على $\mathbb{R}$ (بمجال واحد)،

و منه $x \in \mathbb{R}$ ، $\varphi(x) = \varphi(0)$ أي: $\frac{f(x+y)}{f(x)} = \frac{f(y)}{f(0)} = f(y)$ أي: $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ ،

و.ه.م،

و بالتالي أرجعنا مسألة إيجاد الدوال التي تحقق العلاقة (1) إلى مسألة البحث عن الدوال التي تحقق:

$$\begin{cases} f'(x) = k f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases} ; k \in \mathbb{R}$$

(ب) لنفرض أننا عينا الدالة g التي تحقق: $x \in \mathbb{R}$ ، $\begin{cases} g(x) = g'(x) \\ g(0) = 1 \end{cases}$... (2) تكون الدوال f التي تحقق العلاقة (1) على الشكل:

$$f(x) = g(k \times x) \text{ مع: } k \in \mathbb{R}$$

لأن: $f'(x) = [g(k \times x)]' = k \times g'(k \times x) = k \times g(k \times x) = k f(x)$ و $f(0) = g(k \times 0) = g(0) = 1$

الجزء الثاني:

(1)

سؤال 1: ماذا يقصد بـ "تقبل وجود دالة"؟

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ لدينا: $\exp(n) = \exp\left(\underbrace{1+1+\dots+1}_n\right) = \exp(1) \times \exp(1) \times \dots \times \exp(1) = (\exp(1))^n = e^n$

حسب الخاصية (1)

سؤال 2: هل يمكن تحقيق المساواة $\exp(x) = e^x$ من أجل كل عدد حقيقي x ؟

(2) استنتاج الدوال f :

فرض أن العبارة السابقة صحيحة أي: $g(x) = e^x$ من أجل $x \in \mathbb{R}$ و حسب (3) يكون: $f(x) = g(kx) = e^{kx}$ ، $k \in \mathbb{R}$

بناء المعارف:

تسمية:

تسمى الجملة: $k \in \mathbb{R}; \begin{cases} f'(x) = k f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$ **معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى** ذات المجهول f و ذات القيود $f(0) = 1$

"الملاحظة(*)"

جواب 1:

نقصد بـ "قبل وجود دالة" أنه يمكن إثبات وجود الدالة، ولكن المعلومات في هذا المستوى لا تكفي للإثبات، إذن و من النشاط يمكن وضع:

قبل أنه توجد دالة وحيدة تحقق المعادلة التفاضلية ذات المجهول $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: $\begin{cases} g(x) = g'(x) \\ g(0) = 1 \end{cases}$ (2) ... تدعى الدالة الأسية، و نرمز لها بـ $x \mapsto g(x) = \exp(x)$ (و هذا اختصارا لـ الكلمة الفرنسية *exponentielle* و التي تعني أسية)، و نرمز بـ e للعدد $\exp(1)$ حيث: $e \approx 2,718281828$ ، (لاحظ أن الدالة الأسية مستمرة على $\mathbb{R}$).

جواب 2:

قبل أنه من أجل كل عدد حقيقي $x: \exp(x) = e^x$.

ملاحظة هامة (*):

يتساءل البعض عن معنى **المعادلات التفاضلية**:

إليك هذا التعريف:

كل معادلة تحوي دالة و مشتقاتها تسمى معادلة تفاضلية، أي المجهول هنا هو دالة، و نقصد بالرتبة رتبة الاشتقاق الظاهرة. و تجدر الإشارة أن المعادلات التفاضلية لها شأن كبير في الرياضيات إذ تعتبر تريضا لعدد من المسائل التي نجدها في واقعنا، بل إن بعض المعادلات التفاضلية يصعب حلها و يلجأ الرياضياتيون إلى طرق عددية باستعمال برامج و متتاليات عددية،

لن نتوسع أكثر من هذا و سنعالج في هذا المقام نوعين هما:

• لتكن الدالة $x \mapsto y = f(x)$ حلول المعادلة التفاضلية:

$y' = ay$ مع $a \in \mathbb{R}$ معطى (المجهول y) هي: $y = Ce^{ax}$

مع C ثابت حقيقي يتعين بشرط مرفق بالتمرين **يسمى قيذا**،

•• حلول المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ مع $a, b \in \mathbb{R}$

هي: $y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ مع C ثابت حقيقي يتعين بشرط

مرفق بالتمرين . "مع العلم أن f قابلة للاشتقاق"

من التاريخ:

يبدو أن الأسكتلندي جون نابي (1550 - 1617) هو أول من شعر بوجود العدد الأس e ، و كان الرياضي السويسري ليونهارد أولر: (1707 - 1783) قد سمى e بالاسم المعروف الآن خلال القرن الثامن عشر. و قد ثبت أن هذا الثابت لا يستخدم في الرياضيات فحسب بل ولج عددا من المجالات منها الاقتصاد و قياس تكاثر الخلايا الحية في جسم ما كما يدخل في توزيع الأعداد الأولية ضمن قائمة الأعداد الطبيعية. و من المعلوم أن العدد e مثل العدد π عدد أصم "أي غير ناطق" و متسام "أي أنه ليس حلا لمعادلة جبرية ذات معاملات ناطقة". و لذا لا يمكن تحديد هذا العدد بدقة مع العلم أن الأرقام العشرية غير منتهية و ليست دورية. و من ثمة انكب بعض الرياضياتيون على تعيين الأرقام العشرية و قد توصلوا الآن إلى أكثر من مليار و ربع المليار رقم بعد الفاصلة و لا شك أنهم سيجدون المزيد و المزيد من هذه الأرقام مستقبلا.

خلاصة هامة:

جميع الدوال العددية التي تحقق: $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ من أجل كل x, y من $\mathbb{R}$ و $f(0) = 1$ هي:

$$f(x) = e^{kx}, k \in \mathbb{R}$$

تمرين تطبيقي 1:

بين أنه من أجل كل عددين حقيقيين x, y :

$$e^x > 0, \quad e^{x+y} = e^x \times e^y, \quad e^{nx} = (e^x)^n, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad \text{و} \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.$$

حل:

ليكن $x, y \in \mathbb{R}$

$$\bullet \text{ لدينا } e^x = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 > 0 \text{ أي } e^x > 0,$$

$$\bullet e^{x+y} = \exp(x+y) \stackrel{(1)}{=} \exp(x) \times \exp(y) = e^x \times e^y,$$

حسب العلاقة (1) التي تحققها الدالة الأسية،

لدينا:

$$e^{nx} = \exp(nx) = \exp\left(\underbrace{x + x + \dots + x}_n\right) = \exp(x) \times \exp(x) \times \dots \times \exp(x) = (\exp(x))^n = (e^x)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

حسب العلاقة (1) التي تحققها الدالة الأسية،

$$\bullet \text{ لدينا: } e^{-x} = \frac{1}{e^x} \text{ أي } 1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp\left(x + \underbrace{(-x)}_{(1)}\right) \stackrel{(1)}{=} \exp(x) \times \exp(-x) = e^x \times e^{-x}$$

حسب العلاقة (1) التي تحققها الدالة الأسية،

$$\bullet e^{x-y} = e^{x+(-y)} \stackrel{(1)}{=} e^x \times e^{-y} = e^x \times \frac{1}{e^y} = \frac{e^x}{e^y}$$

حسب العلاقة (1) التي تحققها الدالة الأسية،

ملاحظة:

سنعتمد على الخواص المذكورة في التطبيق لتسهيل الحساب أثناء دراستنا لدوال أسية.

تمرين تطبيقي 2:

حل المعادلات التفاضلية التالية:

$$\bullet y' = 3y$$

$$\bullet y(0) = 1, \text{ مع } y' + 2y = 3$$

$$\bullet df(x) = 2f(x)dx - dx$$

حل:

حل المعادلات التفاضلية:

$$\bullet y(x) = Ce^{3x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \text{ لدينا: } y' = -2y + 3 \text{ أي } y(x) = Ce^{-2x} + \frac{3}{2} \text{ و حسب القيد الموضوع: } y(0) = 1 \text{ معناه } C + \frac{3}{2} = 1 \text{ معناه } C = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet \text{ أي الحل المطلوب هو: } y(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{3}{2}$$

$$\bullet df(x) = (2f(x) - 1)dx \text{ أي: } \frac{df}{dx}(x) = 2f(x) - 1 \text{ أي: } f'(x) = 2f(x) - 1 \text{ ومنه: } f(x) = Ce^{2x} + \frac{1}{2}$$

أهداف الدرس الثامن:

- دراسة اتجاه تغير الدالة الأسية،
- "حل معادلات و متراجحات يظهر فيها رمز الدالة الأسية"،
- نهاية الدالة الأسية عند $+\infty$ و $-\infty$ ،
- منحنى الدالة الأسية.

الدرس الثامن:

نشاط استكشافي:

- لتكن الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^x$ (الدالة الأسية) و (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$ ،
- (1) ادرس اتجاه تغير الدالة f ،
 - (2) أ) بين أن $e^x \geq x + 1$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}_+$ ،
ب) باستعمال نظريات الحصر احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ما التفسير الهندسي لهذه النهاية،
 - (3) شكل جدول تغيرات للدالة f ،
 - (4) ارسم المنحنى (C_f) .

حل النشاط:

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

من أجل كل عدد حقيقي $x: f'(x) = e^x > 0$ ، أي الدالة f متزايدة تماماً على المجال $\mathbb{R}$.
(2)

أ) لنعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بـ $g(x) = e^x - x$

لدينا: $g'(x) = e^x - 1$ لاحظ أنه يمكن كتابة: $g'(x) = e^x - e^0$ وكون $x \geq 0$ ومن تزايد الدالة الأسية (لاحظ 1) يكون $e^x - 1 \geq 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماماً أي نكتب $g(x) \geq g(0)$ وهذا من أجل $x \geq 0$ ، عند التعويض: $e^x \geq x + 1$ ،

ب) لدينا: $\begin{cases} e^x \geq x + 1, & x \geq 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty \end{cases}$ وحسب نظريات الحصر يكون $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

هذا من جهة ومن جهة أخرى نعلم أن: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^t} \right) = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t} = \frac{1}{+\infty} = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{t = -x} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^t} \right) = 0$

تغير المتغير بوضع: $t = -x$ ، ولما $x \rightarrow -\infty$ يكون: $t \rightarrow +\infty$.

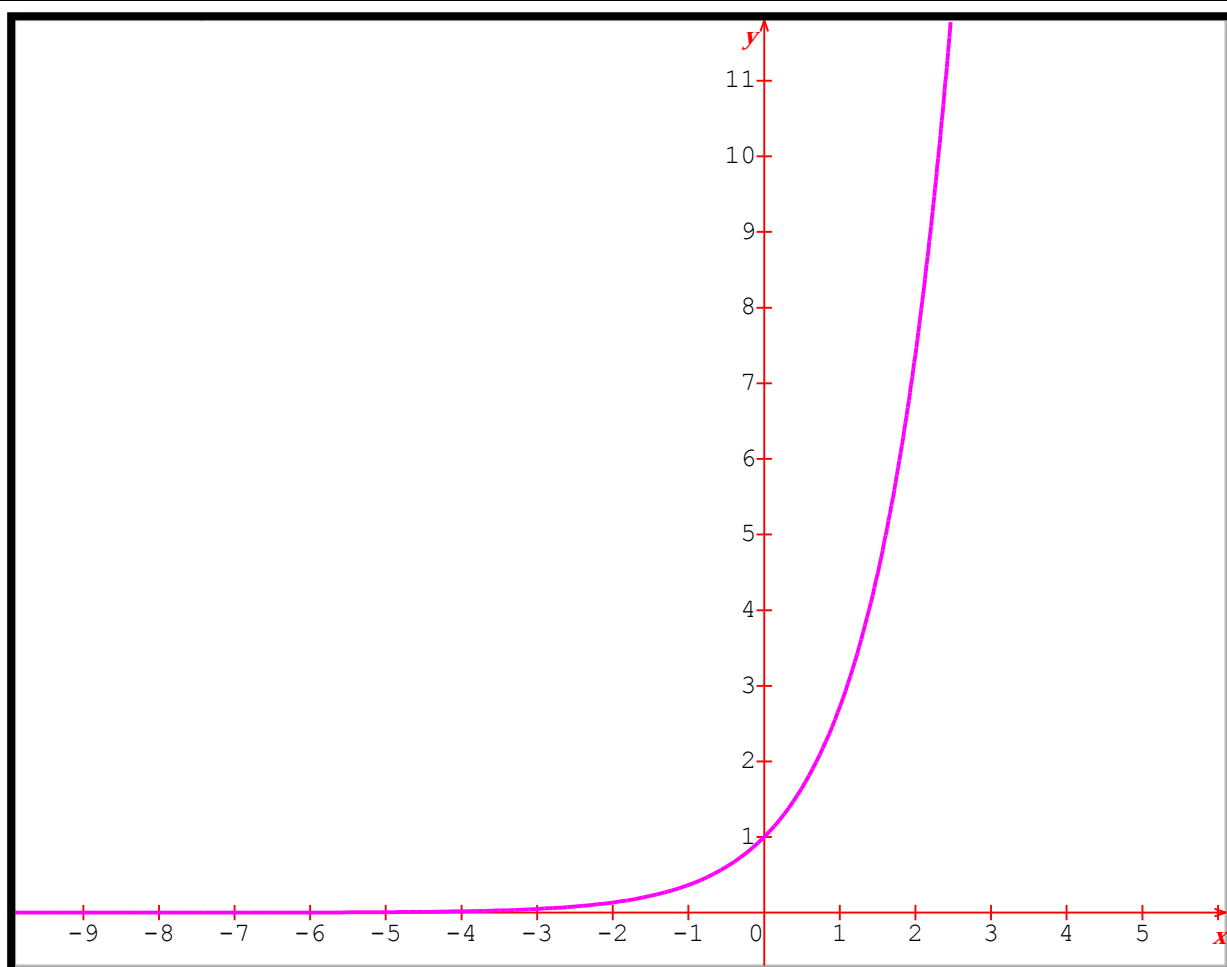
التفسير الهندسي: $y = 0$ معادلة مستقيم مقارب أفقي لمنحنى الدالة f في جوار $-\infty$ ،

(3) جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

(4) رسم البيان (C_f) :

برسم المستقيم المقارب الأفقي في جوار $-\infty$ ، وملاحظة جدول التغيرات و $f(0) = 1$ نجد:



بناء المعارف:

- رأينا في هذا النشاط كيفية رسم بيان الدالة الأسية، وكذلك بينا أن:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

يبدو أن هناك فرع لانهائي في جوار $+\infty$ ، الرسم بـ "استعمال الحاسبة البيانية" يبين أنه باتجاه محور الترتيب أي وجب تحقق:

من الطبيعي طرح السؤال التالي: هل هذه النهاية صحيحة؟ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

جواب:

سوف نثبت هاته النهاية و نهايات أخرى في درس عنوانه "التزايد المقارن".

- و من تزايد الدالة الأسية أمكن كتابة الـ

نتيجة:

• $a = b$ معناه $e^a = e^b$

•• $a > b$ معناه $e^a > e^b$

••• $a < b$ معناه $e^a < e^b$

فائدة هذه النتيجة تكمن في حل المعادلات و المتراجحات التي تظهر فيها رمز الدالة الأسية لاحظ التمارين التطبيقية.

ملاحظة هامة:

يجب أن يكون واضحاً و هذا اعتماداً على مركب دوال، استنتاج مشتقة الدالة $g(x) = e^{f(x)}$ لأي $x \in D_f$:

$$g'(x) = (e^{f(x)})' = f'(x) e^{f(x)}, x \in D$$

لاحظ أن اتجاه تغير الدالة g من نفس اتجاه الدالة f . حيث: D هو مجال قابلية الدالة f الاشتقاق.

تمرين تطبيقي 01:

أوجد مشتقة الدالة f على المجال I ، في كل حالة من الحالات التالية:

$$f(x) = e^{x^2+2x-3} \quad \text{و} \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad \text{و} \quad I = \mathbb{R}^*$$

$$f(x) = e^{\sqrt{x^2-2x+4}} \quad \text{و} \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = e^{\sin x} \quad \text{و} \quad I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = e^{\cos x} \quad \text{و} \quad I = \mathbb{R}$$

حل:

من الواضح أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I في كل حالة، و حسب الملاحظة السابقة:
* من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = (e^{x^2+2x-3})' = (x^2+2x-3)' \times e^{x^2+2x-3} = 2(x+1)e^{x^2+2x-3}$$

* من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' \times e^{\frac{1}{x}} = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

* من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = (e^{\sqrt{x^2-2x+4}})' = (\sqrt{x^2-2x+4})' \times e^{\sqrt{x^2-2x+4}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}} \times e^{\sqrt{x^2-2x+4}}$$

* من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = (e^{\sin x})' = (\sin x)' \times e^{\sin x} = \cos x \times e^{\sin x}$$

* من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = (e^{\cos x})' = (\cos x)' \times e^{\cos x} = -\sin x \times e^{\cos x}$$

تمرين تطبيقي 02:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات ذات المجهول x التالية:

$$e^{4x} - e^{2x} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 \quad \text{و} \quad e^x + 1 = \frac{2}{e^x} \quad \text{و} \quad e^{5x-1} = e^{x^2+5} \quad \text{و} \quad e^{x^2} = e^{25} \quad \text{و} \quad e^x = 1$$

$$e^{2x} + 5e^x - 6 = 0 \quad \text{و} \quad e^{2x} + 2e^x - 3 = 0 \quad \text{و} \quad e^x + e^{-x} = 2$$

حل:

حل المعادلات في $\mathbb{R}$:

$$e^x = 1 \text{ معناه } e^x = e^0 \text{ أي: } x = 0 \text{ ومنه: } S = \{0\},$$

$$e^{x^2} = e^{25} \text{ معناه } x^2 = 25 \text{ أي: } |x| = 5 \text{ ومنه: } S = \{-5; 5\},$$

$$e^{5x-1} = e^{x^2+5} \text{ معناه: } 5x-1 = x^2+5 \text{ يكافئ } x^2-5x+6=0 \text{ عند حساب المميز: } \Delta = 25-24=1 \text{ نجد:}$$

$$x_1 = \frac{5-1}{2} = 2, x_2 = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$S = \{2; 3\} \text{ أي:}$$

$$e^x + 1 = \frac{2}{e^x} \text{ معناه } e^x + 1 = \frac{2}{e^x} \text{ نضع: } \begin{cases} t = e^x \\ t > 0 \end{cases} (*)$$

$$\text{ومن (*) تكافئ } \begin{cases} t^2 + t - 2 = 0 \\ t > 0 \end{cases} \text{ نلاحظ أن مجموع المعاملات مساوية للصفر أي } t_1 = 1 \text{ وهذا الحل مقبول و بالتالي نجد } e^x = 1$$

$$\text{(و منه } x = 0), \text{ و } t_2 = -2 \text{ وهذا الأخير مرفوض لأنه سالب تماما،}$$

$$S = \{0\} \text{ أي:}$$

$$e^x - e^{-x} = 1 \text{ بداية المعادلة معرفة من أجل كل عدد حقيقي } x, \text{ وهي تكافئ } e^x - e^{-x} = e^x + e^{-x} \text{ معناه } -e^{-x} = e^{-x}$$

$$\text{أي: } 2e^{-x} = 0 \text{ وهذه المعادلة لا تقبل حلولاً في } \mathbb{R},$$

$$S = \emptyset \text{ أي:}$$

$$e^{4x} - e^{2x} = 0 \text{ معناه } e^{2x}(e^{2x} - 1) = 0 \text{ تكافئ } e^{2x} - 1 = 0 \text{ أي } e^{2x} = e^0$$

$$\text{ومن } S = \{0\}$$

$$e^x + e^{-x} = 2 \text{ معناه: } e^x + \frac{1}{e^x} = 2 \text{ وهي تكافئ } e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \text{ نضع: } \begin{cases} t = e^x \\ t > 0 \end{cases} \text{ أي: } \begin{cases} t^2 - 2t + 1 = 0 \\ t > 0 \end{cases}$$

$$\text{لدينا } (t-1)^2 = 0 \text{ أي } t = 1 = e^0$$

$$\text{ومن } S = \{0\}$$

$$e^{2x} + 2e^x - 3 = 0 \text{ هذه المعادلة تكافئ } \begin{cases} t^2 + 2t - 3 = 0 \\ t > 0 \end{cases} \text{ يبدو أن العدد 1 حل واضح للمعادلة أي الحل الآخر هو -3 وهو}$$

مرفوض لإشارته السالبة،

$$S = \{0\} \text{ أي:}$$

$$e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$$

$$\text{نجد كذلك } S = \{0\}.$$

تمرين تطبيقي 03:

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

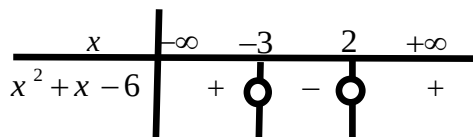
$$e^x \geq \sqrt{e} \text{ و } e^{x^2-2} \leq e^{4-x} \text{ و } e^{2x} - e^x < 0 \text{ و } e^{2x} + 2e^x - 3 \geq 0 \text{ و } e^{4x} + 5e^{2x} - 6 \leq 0.$$

حل:

$$\bullet e^x \geq \sqrt{e} \text{ أي } e^x \geq e^{\frac{1}{2}} \text{ معناه } x \geq \frac{1}{2} \text{ أي: } S = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$\bullet e^{x^2-2} \leq e^{4-x} \text{ معناه } x^2-2 \leq 4-x \text{ وهي تكافئ } x^2+x-6 \leq 0 \text{ نحتاج لحساب المميز لدراسة الإشارة } \Delta = 1+24=25 \text{ أي:}$$

$$x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \text{ و } x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3 \text{ ومنه الجدول التالي:}$$



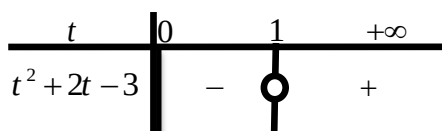
$$\text{ومنه } S = [-3; 2]$$

$$\bullet e^{2x} - e^x < 0 \text{ وهذا يكافئ: } e^{2x} < e^x \text{ أي } 2x < x \text{ معناه } x < 0$$

$$\bullet \text{ أو ملاحظة أن المتراجحة تكافئ: } e^x (e^x - 1) < 0 \text{ وكون الدالة الأسية موجبة تماما دوماً أمكن مكافئة المتراجحة الأخيرة}$$

$$\text{بـ } e^x - 1 < 0 \text{ معناه } x < 0$$

$$\bullet e^{2x} + 2e^x - 3 \geq 0 \text{ وهي تكافئ } \begin{cases} t^2 + 2t - 3 \geq 0 \\ t > 0 \end{cases} \text{ عند دراسة إشارة كثير الحدود } t^2 + 2t - 3 \text{، نشكل الجدول:}$$

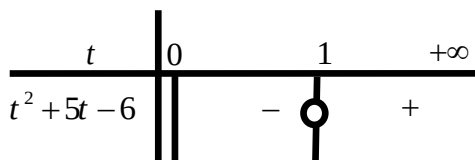


$$\text{أي: } e^x = t \geq 1 = e^0$$

$$\text{ومنه } S = [0; +\infty[$$

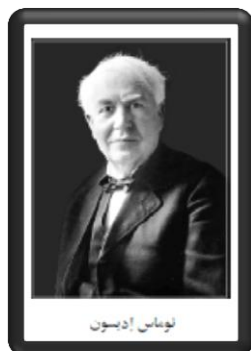
$$\bullet e^{4x} + 5e^{2x} - 6 \leq 0 \text{ نضع } \begin{cases} t = e^{2x} \\ t > 0 \end{cases} \text{ ومنه نجد المتراجحة الثانية: } \begin{cases} t^2 + 5t - 6 \leq 0 \\ t > 0 \end{cases} \text{ المكافئة للمتراجحة السابقة،}$$

$$\text{لندرس إشارة كثير الحدود } t^2 + 5t - 6 \text{، لدينا الجدول:}$$



$$\text{حل المتراجحة الثانية هي: } 0 < e^{2x} = t \leq 1 = e^0 \text{، وبالتالي الحلول المطلوبة هي: } S =]-\infty; 0]$$

أقوى نقطة ضعف لدينا هي يأسنا من إعادة المحاولة، الطريقة الأكيدة للنجاح هي المحاولة مرة تلو المرة.



أهداف الدرس التاسع:

- اللوغاريتم النيبيري،
- الدالة اللوغاريتمية النيبيرية،
- خواص الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

الدرس التاسع:

تمهيد:

التأمل في حل التطبيقين بالدرس السابق يلاحظ أننا كنا محظوظين لأننا وجدنا مثل هذه المعادلات $e^x = 1$ ، والسبب يعود إلى وجود العدد 1 في الطرف الأيمن من المعادلة، و معرفتنا لـ $e^0 = 1$ ، وبالتالي يمكن حل المعادلة بكل بساطة، ومن الطبيعي طرح السؤال التالي: ماذا لو وجدنا $e^x = 2$ ؟

جواب:

سنجيب على السؤال السابق بشكل عام، أي البحث عن حلول المعادلة ذات المجهول $x: e^x = y$ حيث: $y \in \mathbb{R}$ ، لأجل هذا نميز الحالتين التاليتين:

الأولى: $y \leq 0$

المعادلة لا تقبل حلولاً في مجموعة الأعداد الحقيقية وهذا لأن الدالة الأسية ذات قيم موجبة تماماً،

الثانية: $y > 0$

من التاريخ:

الأسكتلندي جـون نايب له الفضل في ابتكار اللوغاريتم النيبيري (نسبة إلى اسمه). بل و عرف $\log_n n^x = x$ و حدث ذلك تعميماً لتعريف اللوغاريتم ذي الأساس n بـ اللوغاريتم ذي الأساس 2.

نعلم أن الدالة f المعرف بـ $f(x) = e^x$ مستمرة و متزايدة تماماً على المجال $\mathbb{R}$ ولدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 < y < \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد حل وحيد $\alpha \in \mathbb{R}$ حيث $e^\alpha = y$ ،

تسمية:

نسمي الحل α الموجود سابقاً بـ "اللوغاريتم النيبيري" و نرمز له بـ $\alpha = \ln y$ لتعلقه بالعدد y ،
"يمكن استعمال الآلات الحاسبة لإيجاد قيمة اللوغاريتم عند أي عدد موجب تماماً"

و كون كل عدد حقيقي موجب تماماً يملك لوغاريتماً واحداً أمكن وضعه:

تعريف:

الدالة اللوغاريتمية النيبيرية (أو ذات الأساس النيبيري) و التي نرمز لها بـ $\ln$ هي تلك الدالة المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ في $\mathbb{R}$ ،

$$\text{و تحقق: } \begin{cases} \ln(x) = y \\ x > 0 \end{cases} \text{ معناه } e^y = x.$$

من التعريف يمكن استنتاج:

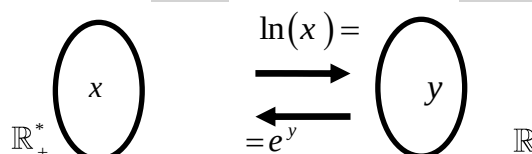
$$\bullet e^{\ln(x)} = x \text{ من أجل كل } x > 0$$

$$\bullet \ln e^y = y \text{ من أجل } y \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \bullet \bullet \text{ إذا كان } y = 1 \text{ يكون } e^0 = 1 \text{ أي } \ln(1) = 0$$

$$\bullet \bullet \bullet \bullet \text{ إذا كان } y = e \text{ يكون } e^1 = e \text{ أي } \ln(e) = 1$$

نقول أن عمل الدالة اللوغاريتمية النيبيرية معاكس لعمل الدالة الأسية، لاحظ الشكل:



لأجل هذا نقول الدالة اللوغاريتمية "دالة عكسية" للدالة الأسية أو العكس الدالة الأسية "دالة عكسية" للدالة اللوغاريتمية.

انطلاقاً من الدالة الأسية نستخلص الـ

خواص الجبرية:

$$1 \bullet \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b) \text{ حيث: } a, b \in \mathbb{R}_+^*$$

$$2 \bullet \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \text{ حيث: } a > 0$$

$$3 \bullet \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \text{ حيث: } a, b \in \mathbb{R}_+^*$$

$$4 \bullet \ln(x^n) = n \ln(x) \text{ حيث: } x > 0, n \in \mathbb{N}^*$$

$$5 \bullet \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a \text{ حيث: } a > 0$$

$$6 \bullet \ln a^2 = 2 \ln |a| \text{ حيث: } a \neq 0$$

$$7 \bullet \text{الدالة } \ln \text{ متزايدة تماماً على } \mathbb{R}_+^* .$$

إثبات الخواص:

$$1 \bullet \ln(a \times b) = \ln(e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)}) = \ln(e^{\ln(a) + \ln(b)}) = \ln(a) + \ln(b) \text{ حيث: } a, b \in \mathbb{R}_+^*$$

$$2 \bullet \ln\left(\frac{1}{a}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{\ln(a)}}\right) = \ln(e^{-\ln(a)}) = -\ln(a) \text{ حيث: } a > 0$$

$$3 \bullet \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \text{ حيث: } a, b \in \mathbb{R}_+^*$$

$$4 \bullet \ln(x \times x \times \dots \times x) = \ln(x) + \ln(x) + \dots + \ln(x) = n \ln(x) \text{ حيث: } x > 0, n \in \mathbb{N}^* \text{ مرة } n$$

$$5 \bullet \ln a = \ln a^{\frac{2}{2}} = \ln\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2 \ln \sqrt{a}$$

$$6 \bullet \ln a^2 = \ln(|a| \times |a|) = \ln |a| + \ln |a| = 2 \ln |a| \text{ حيث: } a \neq 0$$

$$7 \bullet \text{ليكن } a, b \in \mathbb{R}_+^* \text{ حيث: } a > b \text{ معناه } e^{\ln a} > e^{\ln b} \text{ يكفي } \ln a > \ln b, \text{ (لأن الدالة الأسية متزايدة تماماً).}$$

ملاحظة:

تفيدنا الخواص السابقة في تبسيط الحساب في بعض التمارين.

تمرين تطبيقي:

أ- برهن صحة المتباينة التالية: $x + \frac{1}{x} > 2$ من أجل كل عدد حقيقي x حيث: $x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ ب- إذا فرضنا أن صحة: $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln \frac{3}{2}} + \frac{1}{\ln \frac{4}{3}} + \dots + \frac{1}{\ln \frac{n_0}{n_0-1}} > 2(n_0 - 1) - \ln n_0$ من أجل: $n_0 \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ مثبت

استنتج أن:

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln \frac{3}{2}} + \frac{1}{\ln \frac{4}{3}} + \dots + \frac{1}{\ln \frac{n_0+1}{n_0}} > 2n_0 - \ln(n_0 + 1)$$

حل:

أ- لدينا: $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} > 0$ أي: $x + \frac{1}{x} > 2$ و.ه.م،

لأن: $x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

ب- لدينا وهذا حسب الفرض: $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln \frac{3}{2}} + \frac{1}{\ln \frac{4}{3}} + \dots + \frac{1}{\ln \frac{n_0}{n_0-1}} > 2(n_0-1) - \ln n_0$ ، $n_0 \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

ولدينا من جهة أخرى: $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln \frac{3}{2}} + \frac{1}{\ln \frac{4}{3}} + \dots + \frac{1}{\ln \frac{n_0}{n_0-1}} + \frac{1}{\ln \frac{n_0+1}{n_0}} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln \frac{3}{2}} + \frac{1}{\ln \frac{4}{3}} + \dots + \frac{1}{\ln \frac{n_0}{n_0-1}} + \frac{1}{\ln \frac{n_0+1}{n_0}}$

وحسب الفرض يمكن كتابة المتباينة:

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln \frac{3}{2}} + \frac{1}{\ln \frac{4}{3}} + \dots + \frac{1}{\ln \frac{n_0+1}{n_0}} > 2(n_0-1) - \ln n_0 + \frac{1}{\ln \frac{n_0+1}{n_0}}$$

كذلك يمكن كتابة:

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln \frac{3}{2}} + \frac{1}{\ln \frac{4}{3}} + \dots + \frac{1}{\ln \frac{n_0+1}{n_0}} > 2(n_0-1) - \ln(n_0+1) + \ln(n_0+1) - \ln n_0 + \frac{1}{\ln \left(\frac{n_0+1}{n_0} \right)} =$$

$$= 2(n_0-1) - \ln(n_0+1) + \ln \left(\frac{n_0+1}{n_0} \right) + \frac{1}{\ln \left(\frac{n_0+1}{n_0} \right)}$$

حسب الخاصية 3

نضع $x = \ln \left(\frac{n_0+1}{n_0} \right)$ في الطرف الأيمن للمتباينة السابقة فنجد:

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln \frac{3}{2}} + \frac{1}{\ln \frac{4}{3}} + \dots + \frac{1}{\ln \frac{n_0+1}{n_0}} > 2(n_0-1) - \ln(n_0+1) + x + \frac{1}{x}$$

من أ- نستنتج المطلوب ببساطة، (تجدر الإشارة أن:

$x > 0^*$ لأن: $x = \ln \left(\frac{n_0+1}{n_0} \right) = \ln \left(1 + \frac{1}{n_0} \right) > \ln 1 = 0$ وهذا كون: $1 + \frac{1}{n_0} > 1$ من أجل كل $n_0 \in \mathbb{N}^*$

حسب 7

* لأن $x \neq 1$

لنفرض جدلا $x = 1$ معناه $\ln \left(1 + \frac{1}{n_0} \right) = 1 = \ln e$ و $1 + \frac{1}{n_0} = e$ أي: $n_0 = \frac{1}{e-1} \notin \mathbb{N}$ وهذا هو التناقض المنتظر أي:

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln \frac{3}{2}} + \frac{1}{\ln \frac{4}{3}} + \dots + \frac{1}{\ln \frac{n_0+1}{n_0}} > 2(n_0-1) - \ln(n_0+1) + 2 = 2n_0 - \ln(n_0+1)$$

أهداف الدرس العاشر:

- دراسة الدالة اللوغاريتمية النيبيرية،
- حل معادلات و متراجحات يظهر فيها رمز اللوغاريتم.

الدرس العاشر:

رأينا في الدرس السابق أن الدالة اللوغاريتمية النيبيرية تعتمد في إنشائها على الدالة الأسية، لهذا نطرح:

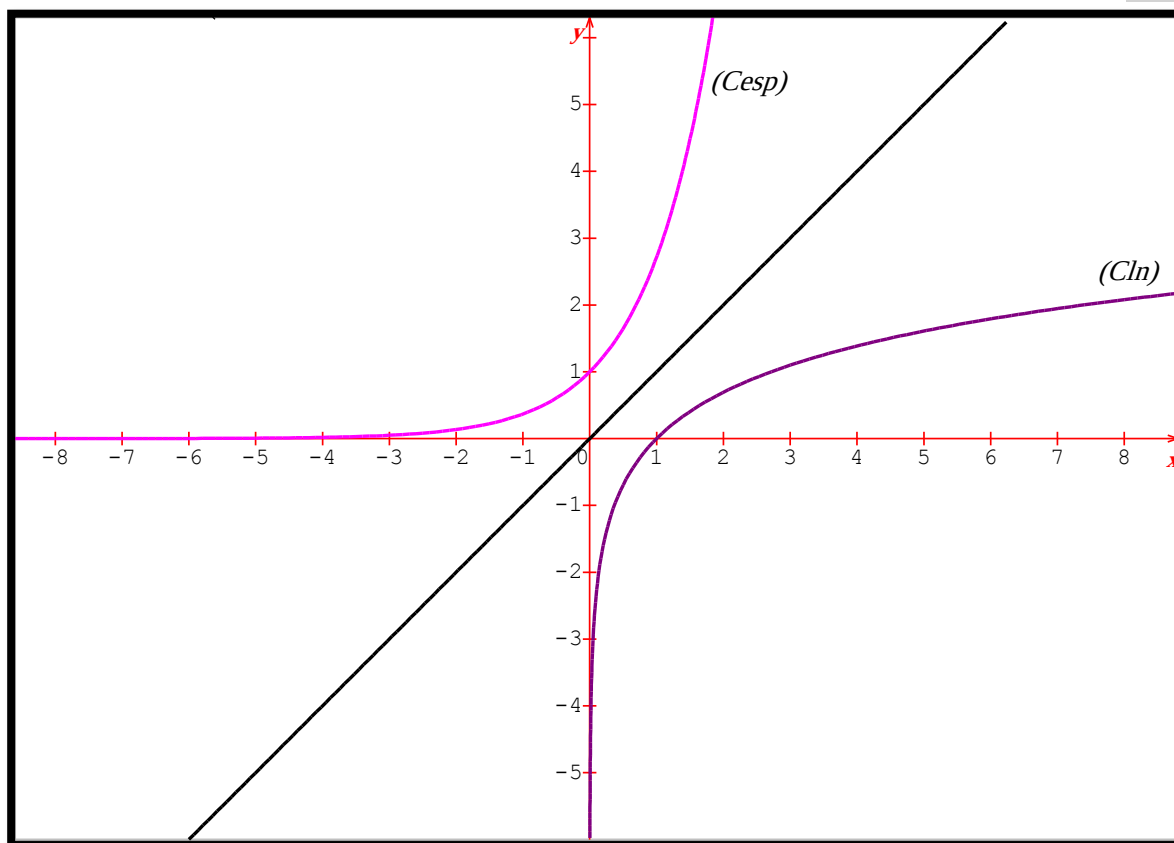
السؤال: هل يمكن دراسة تغيرات الدالة اللوغاريتمية اعتمادا على الدالة الأسية؟

جواب:

- مجموعة تعريف الدالة $\ln$ هي: $]0; +\infty[$ لأن الدالة الأسية تأخذ قيما موجبة تماما،
- بيان الدالة اللوغاريتمية مناظر لبيان الدالة الأسية بالنسبة لمنصف الأول، لأن:
النقطة $M(x, y) \in (C_{\ln})$ معناه $y = \ln(x)$ أي $e^y = x$ و منه النقطة $(y; x) \in (C_{\exp})$ ، وبالتالي كل نقطة من $(C_{\ln})$ نظيرة نقطة من $(C_{\exp})$ بالنسبة للمنصف الأول،

و بالتالي يمكن إنشاء المنحنى الممثل للدالة اللوغاريتمية،

لاحظ الشكل:



من الشكل السابق:

- نستنتج أنه يمكن رسم بيان الدالة اللوغاريتمية دون رفع القلم على المجال $]0; +\infty[$ ، أي الدالة اللوغاريتمية **مستمرة** على $]0; +\infty[$.



و من التزايد نستنتج:

النتيجة 1:

- $a, b > 0, a > b$ معناه $\ln(a) > \ln(b)$
- $a, b > 0, a < b$ معناه $\ln(a) < \ln(b)$
- $a, b > 0, a = b$ معناه $\ln(a) = \ln(b)$

تفيدنا هذه النتيجة في حل معادلات و متراجحات لاحظ التطبيقين.

• كذلك يمكن ملاحظة أنه إذا كان: $\ln(x) \in]-\infty; 0]$ معناه: $1 \geq x > 0$ • $\ln(x) \geq 0$ معناه: $x \geq 1$ نستعمل التكافؤين السابقين **مثلا** لدراسة الوضع النسبي لمستقيم و منحنى بحيث يظهر في الفرق لوغاريتم كمية.

مهم

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x) = -\infty$$

• يمكن من الشكل وضع التخمين:

اثبات التخمين:

نضع $x = e^t$ ، فمن أجل:* $x \rightarrow +\infty$ معناه $t \rightarrow +\infty$ (هذا التكافؤ كاف لاستنتاج النهاية الثانية) أو:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = \lim_{e^t \rightarrow +\infty} t = \lim_{t \rightarrow +\infty} t = +\infty$$

* $x \rightarrow 0^+$ معناه $t \rightarrow -\infty$ نجد: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{t \rightarrow -\infty} t = -\infty$

الاشتقاق:

لتكن الدالة: $x \in \mathbb{R}_+^* \rightarrow \ln x$ ، لحساب مشتقة هاته الدالة نستعمل التعريف:ليكن $x_0 \in]0; +\infty[$ نشكل النهاية: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(x) - \ln(x_0)}{x - x_0}$ لحساب هذه النهاية نغير المتغير بوضع:

$$y = \ln(x) \text{ و } y_0 = \ln(x_0) \text{ معناه } x = e^y \text{ و } x_0 = e^{y_0}$$

وكون $x \rightarrow x_0$ فإن $y \rightarrow \ln(x_0)$ (الدالة اللوغاريتمية مستمرة) وبالتالي تصبح النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(x) - \ln(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - y_0}{e^y - e^{y_0}} = \lim_{y \rightarrow y_0 = \ln(x_0)} \frac{1}{e^y - e^{y_0}} = \frac{1}{e^{y_0}} = \frac{1}{x_0}$$

أي الدالة اللوغاريتمية قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ،

$$\text{خلاصة: } (\ln(x))' = \frac{1}{x} \text{ من أجل كل } x \text{ من }]0; +\infty[.$$

هام:

يجب أن يكون واضحاً و هذا اعتماداً على مركب دالتين، استنتاج مشتقة الدالة:

$$g'(x) = (\ln(f(x)))' = \frac{f'(x)}{f(x)}, x \in D_g \text{ أي: } x \in D_g = \{x \in \mathbb{R}, f(x) > 0\} \longrightarrow g(x) = \ln(f(x))$$

أي مشتق ما داخل اللوغاريتم على ما داخله.

التمرين التطبيقي 01:

أوجد مشتقة الدالة f على المجال I ، في كل حالة من الحالات التالية:

$$I = \mathbb{R}^* \text{ حيث: } f(x) = \ln|x|$$

$$I = \mathbb{R} \text{ حيث: } f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

$$I =]0; +\infty[\text{ حيث: } f(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$I = \mathbb{R} \text{ حيث: } f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 4})$$

حل:

الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I في كل حالة من الحالات المذكورة:

$$f(x) = \ln|x| = \begin{cases} \ln(x) & , x > 0 \\ \ln(-x) & , x < 0 \end{cases} \text{ كتابة الدالة دون رمز القيمة المطلقة:}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0 \text{ أي: } f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , x > 0 \\ -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x} & , x < 0 \end{cases} \text{ وبالتالي من أجل كل } x \in \mathbb{R}^*$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + 1} : x \in \mathbb{R} \text{ من أجل كل}$$

$$f'(x) = \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{\frac{1}{x}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x} : x > 0 \text{ من أجل كل}$$

$$f'(x) = \left(\ln(\sqrt{x^2 + 4})\right)' = \frac{(\sqrt{x^2 + 4})'}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}}{\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{x^2 + 4} : x \in \mathbb{R} \text{ من أجل كل}$$

$$\text{أو: } f'(x) = \left(\ln(\sqrt{x^2 + 4})\right)' = \frac{1}{2}(\ln(x^2 + 4))' = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2 + 4} = \frac{x}{x^2 + 4}$$

تمرين تطبيقي 02:

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات التالية:

(1) $\ln(4x - 1) = 0$

(2) $\ln(4x - 1) = \ln 3$

(3) $\ln(x + 1) + \ln(x + 5) = \ln 96$

(4) $\ln((x + 1)(x + 5)) = \ln 96$

(5) $\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = \ln(4x^2 + 3x - 7)$

(6) $\ln 3x > \ln 2$

(7) $\ln(x^2 + 6x + 5) \leq \ln(x + 11)$



حل معادلة (أو متراجحة) يظهر فيها رمز اللوغاريتم تتبع الخطوات:

* تعيين مجموعة تعريف هاته المعادلة (أو المتراجحة) ذات المجهول x ، لتكن I ،* اعتمادا على النتيجة 01 الصفحة 218، المعادلة (أو المتراجحة) تكافئ معادلة (متراجحة) يسهل حلها حيث: $x \in I$.

حل:

(1) $\ln(4x - 1) = 0$

* هذه المعادلة معرفة من أجل $4x - 1 > 0$ أي $x > \frac{1}{4}$ ،

$$\text{المعادلة تكافئ } \ln(4x - 1) = \ln(1) \text{ معناه: } \begin{cases} 4x - 1 = 1 \\ x > \frac{1}{4} \end{cases} \text{ أي: } x = \frac{1}{2} \text{ وهذا الحل مقبول لانتمائه لمجموعة التعريف} \\ \text{و منه } J = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

(2) $\ln(4x - 1) = \ln 3$

* هذه المعادلة معرفة من أجل $4x - 1 > 0$ أي $x > \frac{1}{4}$ ،

$$\text{المعادلة تكافئ } \ln(4x - 1) = \ln 3 \text{ معناه: } \begin{cases} 4x - 1 = 3 \\ x > \frac{1}{4} \end{cases} \text{ أي: } x = 1 \text{ وهذا الحل مقبول لانتمائه لمجموعة التعريف} \\ \text{أي: } S = \{1\}$$

$$\ln(x+1) + \ln(x+5) = \ln 96 \quad (3)$$

* المعادلة معرفة من أجل أي $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x+5 > 0 \end{cases}$ و $\begin{cases} x > -1 \\ x > -5 \end{cases}$ ومنه: $x > -1$

يمكن الاستعانة بالخطوط:

* المعادلة تكافئ $\ln((x+1)(x+5)) = \ln(96)$ معناه: أي $\begin{cases} (x+1)(x+5) = 96 \\ x > -1 \end{cases}$ و $\begin{cases} x^2 + 6x - 91 = 0 \\ x > -1 \end{cases}$

و بحساب مميز المعادلة الظاهرة $\Delta = 36 - 4(-91) = 400 = (20)^2$

$$x_1 = \frac{-6-20}{2} = -13 \notin D \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-6+20}{2} = 7 \in D$$

ومنه: $S = \{7\}$

$$\ln((x+1)(x+5)) = \ln 96 \quad (4)$$

* المعادلة معرفة إذا $(x+1)(x+5) > 0$ و منه جدول الإشارة:

x	$-\infty$	-5	-1	$+\infty$
$(x+1)(x+5)$	+	-	-	+

و بالتالي مجموعة التعريف المعادلة هي: $]-\infty; -5[\cup]-1; +\infty[$

و حسب دراسة سابقة: $S = \{-13; 7\}$

ملاحظة:

لاحظ أن تعيين مجموعة تعريف المعادلة أو المتراجحة في البداية أمر مهم.

$$\ln(x-1) + \ln(x+2) = \ln(4x^2 + 3x - 7) \quad (5)$$

* المعادلة معرفة معناه: $\begin{cases} x-1 > 0 \\ x+2 > 0 \\ 4x^2 + 3x - 7 > 0 \end{cases}$ ، لنبحث عن حلول المتراجحة الأخيرة، نلاحظ أن مجموع المعاملات مساو للصفر،

أي:

x	$-\infty$	-7/4	1	$+\infty$
$4x^2 + 3x - 7$	+	-	-	+

من الواضح أن: $]-1; +\infty[$ ، $\begin{cases} x > 1 \\ x > -2 \end{cases} \rightarrow x > 1 \rightarrow x \in]1; +\infty[$

نعود إلى البداية، المعادلة معرفة معناه

$$x \in \left[-\infty; -\frac{7}{4}\right[\cup]1; +\infty[$$

* المعادلة تكافئ $\begin{cases} (x-1)(x+2) = 4x^2 + 3x - 7 \\ x \in]1; +\infty[\end{cases}$ ، بعد نشر و تبسيط المعادلة الأولى نجد: $3x^2 + 2x - 5 = 0$

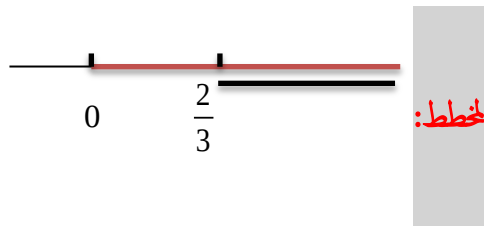
و بالتالي حلاته المعادلة $\left\{-\frac{5}{3}; 1\right\}$ ، وهما لا ينتميان إلى $]1; +\infty[$ ،

و منه: $S = \emptyset$ ،

$$\ln 3x > \ln 2 \quad (6)$$

* المتراجحة لها معنى $x > 0$

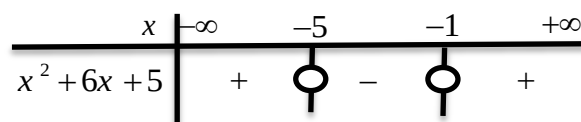
$$S = \left[\frac{2}{3}; +\infty\right[\text{ أي: }$$



* المتراجحة تكافئ $\begin{cases} 3x > 2 \\ x > 0 \end{cases}$ و منه $\begin{cases} x > \frac{2}{3} \\ x > 0 \end{cases}$ ومن الخطأ:

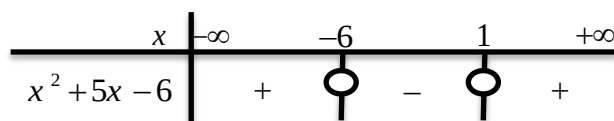
$$\ln(x^2 + 6x + 5) \leq \ln(x + 11) \quad (7)$$

* المتراجحة معرفة معناه $\begin{cases} x + 11 > 0 \\ x^2 + 6x + 5 > 0 \end{cases}$ لندرس إشارة كثير الحدود $x^2 + 6x + 5$:



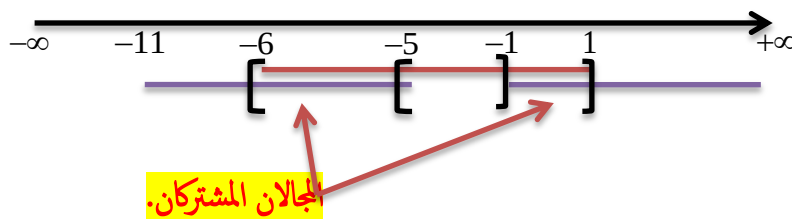
إذن المتراجحة معرفة إذا $\begin{cases} x > -11 \\ x \in]-\infty; -5[\cup]-1; +\infty[\end{cases}$ معناه $]-11; -5[\cup]-1; +\infty[$ ،

* المتراجحة تكافئ $\begin{cases} x^2 + 6x + 5 \leq x + 11 \\ x \in]-11; -5[\cup]-1; +\infty[\end{cases}$ ، لنبحث عن حلول المتراجحة $x^2 + 5x - 6 \leq 0$ ،



$$S = ([-6; 1]) \cap (]-11; -5[\cup]-1; +\infty[) = [-6; -5[\cup]-1; 1]$$

لاحظ الشكل:



أهداف الدرس الحادي عشر:

- القوى الحقيقية،
- الدالة الأسية ذات الأساس a حيث: $a > 0$ ،
- دالة القوة،
- تعريف $\sqrt[n]{a}$ حيث: $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ و $a > 0$.

الدرس الحادي عشر:

في هذا الدرس سنتعرف على بعض النتائج التي يمكن الحصول عليها بعد أن عرفنا الدالة الأسية و الدالة اللوغاريتمية:

سؤال:

من السنوات الماضية علمنا أن: $a^n = a \times a \times \dots \times a$, $n \in \mathbb{N}^*$ و هذا من أجل كل عدد حقيقي a مع العلم أن $a^0 = 1$ ،
و تسمى قوى طبيعي، و قد مددنا مفهوم القوى الطبيعية إلى القوى الصحيحة: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}^*$ ،
و نحن نؤي تمديد هذا المفهوم إلى الأعداد الحقيقية أي هل يمكن إعطاء معنى لـ: a^x , $a > 0, x \in \mathbb{R}$ ؟

جواب:

من خواص الدالة اللوغاريتمية أمكن كتابة: $\ln(a^n) = n \ln(a)$ أي: $e^{\ln(a^n)} = e^{n \ln(a)}$ و منه: $a^n = e^{n \ln(a)}$, $n \in \mathbb{N}$ ، و منه الـ

تعريف:

نضع تعريفا $a^x = e^{x \ln(a)}$, $a > 0, x \in \mathbb{R}$ و نكون بهذا قد عرفنا القوى الحقيقية لعدد حقيقي باستعمال الدالة الأسية و اللوغاريتمية.

لما كما قد عرفنا القوى الحقيقية من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $a > 0$ ، و بتثبيت x تارة ثم a مرة أخرى يمكن تعريف دالتين مهمتين:

تعريف الدالة الأسية ذات الأساس a حيث: $a > 0$:

يمكن إرفاق كل عدد حقيقي x بالعدد a^x مع $a > 0$ مثبت أي يمكن أن نعرف الدالة:

$$x \mapsto a^x = e^{x \ln(a)}, a > 0, x \in \mathbb{R}$$

التي تسمى "الدالة الأسية ذات الأساس a "

لدينا الخواص التالية التي يمكن إثباتها انطلاقا من التعريف السابق:

ليكن $a, b > 0$ و $x, y \in \mathbb{R}$

$$a^x \times a^y = a^{x+y} \quad * \quad (a^x)^y = a^{x \times y} \quad * \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \quad * \quad (a \times b)^x = a^x \times b^x \quad * \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \quad * \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad *$$

لأن:

$$* a^x \times a^y = e^{x \ln a} \times e^{y \ln a} = e^{x \ln a + y \ln a} = e^{(x+y) \ln a} = a^{x+y}$$

$$* (a^x)^y = (e^{x \ln a})^y = e^{y \times \ln(e^{x \ln a})} = e^{xy \ln a} = a^{xy}$$

$$* \frac{a^x}{a^y} = \frac{e^{x \ln a}}{e^{y \ln a}} = e^{(x \ln a) - (y \ln a)} = e^{(x-y) \ln a} = a^{x-y}$$

$$* (a \times b)^x = e^{x \ln(a \times b)} = e^{x \ln a + x \ln b} = e^{x \ln a} \times e^{x \ln b} = a^x \times b^x$$

حالة خاصة:

من أجل $a = e$ نحصل على الدالة الأسية.

تعريف دالة القوة:

يمكن إرفاق كل عدد حقيقي $x > 0$ ، بالعدد الوحيد x^k حيث: $k \in \mathbb{R}$ أي نعرف الدالة:
 $x > 0 \mapsto x^k, k \in \mathbb{R}$ والتي تسمى دالة القوة.

ملاحظة:

إذا كان $k = \frac{1}{n}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ نسمي العدد $x^{\frac{1}{n}}$ الجذر النوني للعدد الموجب x و نرمز له بـ $\sqrt[n]{x}$ ، و نصطلح أن: $\sqrt[n]{0} = 0$ ،
 مثال: $n = 2$ نحصل على الجذر التربيعي للعدد x و نرمز له اختصارا $\sqrt{x}$
 يمكن استخلاص ما يلي:

$$\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}, a, b \geq 0$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, a \geq 0, b > 0$$

تمرين تطبيقي 01:

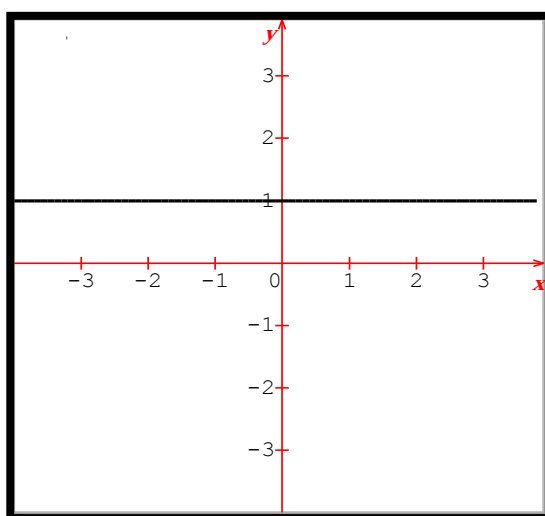
- 1/ لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{x \ln(a)}, a > 0$ ، و (C_a) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس،
 أ) ادرس تغيرات الدالة f ،
 ب) مـثـلـ (C_a) ،
 2/ لتكن الدالة g المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ $g(x) = \sqrt[n]{x}, n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ ، و (C_n) المنحنى الممثل للدالة g ،
 أ) ادرس تغيرات الدالة g ،
 ب) مـثـلـ (C_n) .

حل:

$$1/ \text{ و } D_f =]-\infty; +\infty[\text{ بـ } f(x) = e^{x \ln(a)}, a > 0$$

نميز الحالات التالية:

- $a = 1$ و تصبح الدالة f ثابتة عند القيمة 1، أي: $f(x) = 1, x \in \mathbb{R}$ ،
 و منه الرسم البياني لـ $(C_{a=1})$:



• $a > 1$ و منه $\ln a > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(a)} = +\infty$$

النهايات:

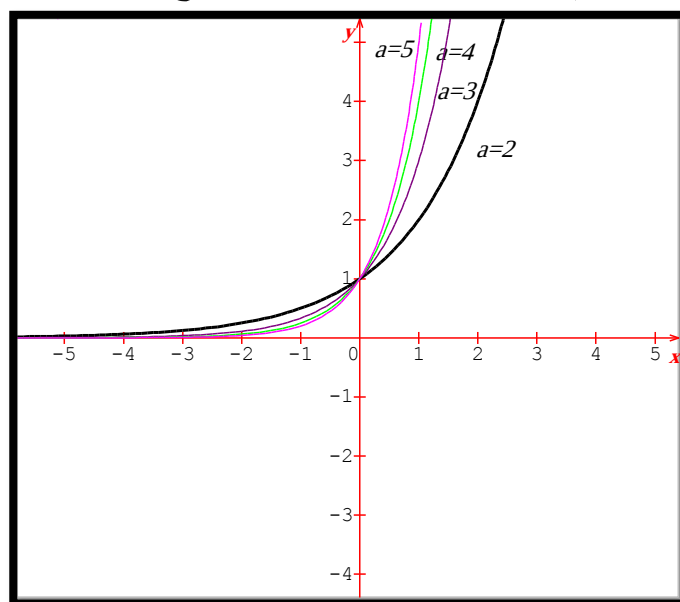
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln(a)} = 0$$

المشتقة:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = (e^{x \ln a})' = \ln a \times e^{x \ln a} > 0$ أي الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ،
و منه جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
f'		+
f	0	$+\infty$

يمكن رسم المنحنى في هذه الحالة من أجل قيم كما يبينه الشكل (يمكن استعمال برنامج أو حاسبة بيانية)

• $0 < a < 1$ معناه $\ln(a) < 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(a)} = 0$$

النهايات:

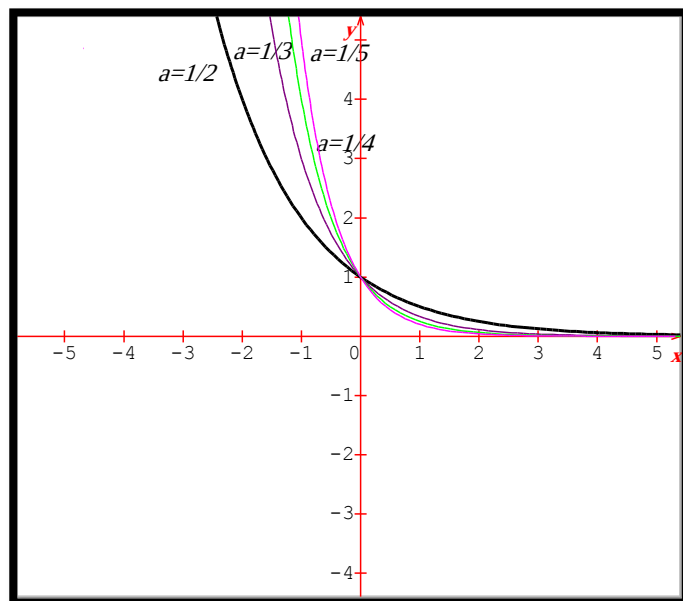
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln(a)} = +\infty$$

المشتقة:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = (e^{x \ln a})' = \ln a \times e^{x \ln a} < 0$ أي الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$ ،
و منه جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	0

يمكن رسم المنحنى في هذه الحالة من أجل قيم كما يبينه الشكل:



2 / على المجال $[0; +\infty[$ نعرف: $g(x) = \sqrt[n]{x}$

لدينا: $g(0) = \sqrt[n]{0} = 0$ حسب الاصطلاح،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{n}} = +\infty$$

المشتقة:

من أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا: $g'(x) = \left(e^{\frac{\ln x}{n}} \right)' = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx} > 0$ أي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$ ،

بقي أن ندرس الاشتقاق على يمين الصفر لـ g :

نطبق التعريف:

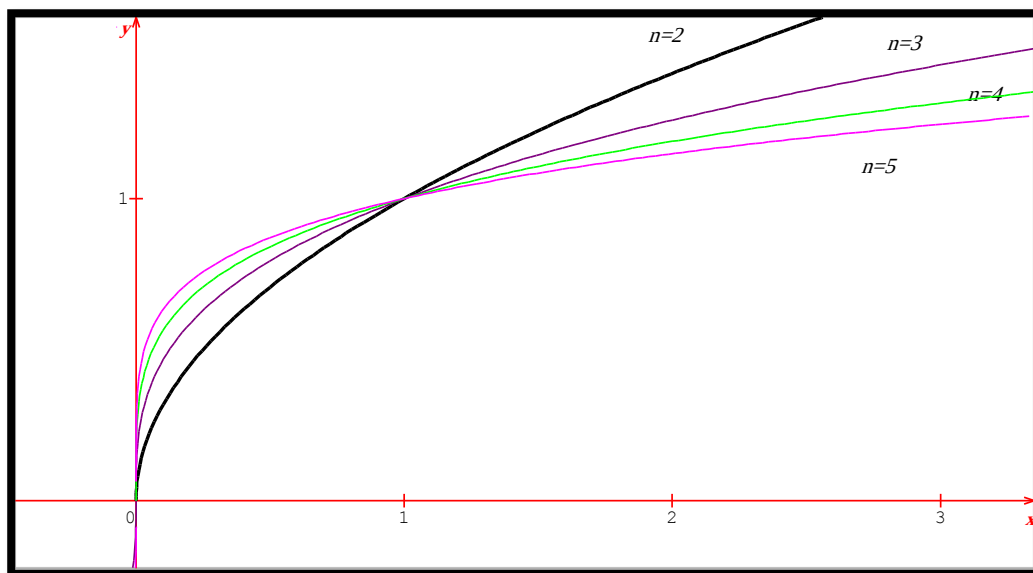
$$\text{وهذا ، } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[n]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{n}-1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1-n}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^{n-1}} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{0^+} = +\infty , n \geq 2$$

كاف للحكم أن الدالة g غير قابلة للاشتقاق على يمين الصفر، والتفسير الهندسي هو أن منحنى الدالة g يقبل محور الترتيب كمماس له عند النقطة $(0; 0)$ (نقطة توقف):

و منه جدول التغيرات:

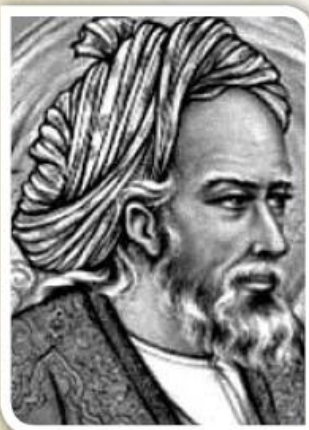
x	0	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	0	$+\infty$

يمكن رسم المنحنى في هذه الحالة من أجل قيم كما يبينه الشكل:



من علماء العرب:

أبو سهل الكوهي:



هو أبو سهل ويجن بن رستم القوهي، أما اسمه الحقيقي فهو أبو سهل بيزن كوهي، وقد ولد في جبال طبرستان عام (405 هـ - 1014 م)، وهو عالم فلكي ورياضي، اشتهر في القرن الـ14 الهجري، عاش الكوهي في بغداد، ولما تولى شرف الدولة البويهية الحكم، قرب منه رئيساً للمرصد الذي أسسه في بغداد، وطلب منه أن يقدم له دراسة عن رصده للكواكب السبعة من حيث مساراتها وتنقلها في بروجها.

اهتم القوهي في الرياضيات بمسائل أرشميدس أبولونيوس التي تؤدي إلى معادلات ذات درجة أعلى من معادلات الدرجة الثانية، ووجد حلاً

لبعضها، كما ناقش شروط إمكانية ذلك، وتعتبر دراساته هذه من أحسن ما كتب عن الهندسة عند المسلمين، ومن جهة ثانية أسهم القوهي في دراسة الأثقال، وكان له السبق في هذا المجال، حيث استخدم البراهين الهندسية لحل كثير من المسائل التي لها علاقة بإيجاد الثقل، وهو الذي ترك

بحوثاً قيّمة في المبادئ التي تقوم عليها الروافع.

ومن المؤلفات التي تركها القوهي (مراكز الأكر)، (الأصول على تحريكات إقليدس)، (صناعة الإسطرلاب بالبراهين)، (الزيادات على أرشميدس في المقالة الثانية)، (إخراج الخطين من نقطة على زاوية معلومة)، (تثليث الزاوية وعمل المسبع المتساوي الأضلاع في الدائرة)، غير أن معظم مؤلفات هذا العالم لم يعرف عنها إلا القليل من بعض الإشارات في المراجع اللاتينية.

أهداف الدرس الثاني عشر:

- الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس a حيث: $a > 0$ و $a \neq 1$
"حالة خاصة: الدالة اللوغاريتمية العشرية"

الدرس الثاني عشر:

تمهيد:

بنفس الطريقة التي عينا بها اللوغاريتم النييري إذ كنا مجبرين لمعرفة حلول المعادلة ذات المجهول x : $e^x = y$, $y > 0$ ، سنعرف لوغاريتمات أخرى و هذا بطرح

السؤال: هل المعادلة ذات المجهول x : $a^x = y$ مع $a > 0$ و $a \neq 1$ و $y > 0$ تقبل حولا في $\mathbb{R}$ ؟

لاحظ أنه من أجل $a = 1$ لا وجود لمعادلة،

جواب:

يمكن و هذا باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة إثبات أن المعادلة تقبل حلا وحيدا في مجموعة الأعداد الحقيقية "يترك الإثبات للقارئ"

تسمية:

الحل السابق يسمى لوغاريتم ذو الأساس a حيث: $a > 0$ و $a \neq 1$ و نرمز له بـ $\log_a(y)$ ، لتعلقه بالعددين الحقيقيين الموجبين تماما y و a

علاقة اللوغاريتم ذو الأساس a باللوغاريتم النييري:

ليكن: $a > 0$ و $a \neq 1$ و $y > 0$ ، نعلم أن المعادلة $a^x = y$ تقبل حلا وحيدا $x_0 = \log_a(y)$ أي: $a^{x_0} = y$ و هاته المعادلة تكافئ:

$$\ln(a^{x_0}) = \ln(y) \quad \text{أي:} \quad x_0 = \log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$$

أي من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما y :

$$\log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}$$

و بهذه العلاقة يمكن وضع الـ

تعريف:

الدالة التي ترفق كل عدد حقيقي x موجب تماما بعدد حقيقي $\frac{\ln x}{\ln a}$ تسمى الدالة اللوغاريتمية ذات الأساس: $a > 0$ و $a \neq 1$ و نرمز لها بـ: $x \mapsto \log_a x$

ملاحظة:

مهم

يمكن استخراج خواص مشابهة لتلك المذكورة في الدالة $\ln$ نذكر مثلا:

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{مع:} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad a > 0 \quad \text{و} \quad a \neq 1$$

لأن:

$$\log_a(a^x) = \frac{\ln a^x}{\ln a} = \frac{\ln e^{x \ln a}}{\ln a} = \frac{x \ln a}{\ln a} = x$$

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{مع:} \quad x > 0 \quad \text{و} \quad a > 0 \quad \text{و} \quad a \neq 1$$

لأن:

$$a^{\log_a x} = a^{\frac{\ln x}{\ln a}} = e^{\ln a \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)} = x$$

$$\log_a a = 1 \quad \text{مع:} \quad a > 0 \quad \text{و} \quad a \neq 1$$

لأن:

$$\log_a a = \ln a / \ln a = 1$$

مهم

حالة خاصة:

* يستعمل اللوغاريتم العشري
في الكيمياء بكثرة،

من أجل $a = 10$ نحصل على الدالة اللوغاريتمية العشرية المعرفة بـ

$$\log_{10} : x > 0 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \log_{10}(x)$$

و يرمز للوغاريتم العشري عادة بـ $\log$ لكثرة استعماله،

خواص:

لا بأس أن نذكر بالخواص الواضحة:

$$x > 0 \text{ مع } 10^{\log(x)} = \left(e^{\ln 10}\right)^{\frac{\ln x}{\ln 10}} = e^{\frac{\ln 10 \times \ln x}{\ln 10}} = e^{\ln x} = x$$

$$x \in \mathbb{R} \text{ و } \log 10^x = \frac{\ln(10^x)}{\ln 10} = \frac{\ln(e^{x \ln 10})}{\ln 10} = \frac{x \ln 10}{\ln 10} = x$$

تمرين تطبيقي 01:

عين عدد أرقام الأعداد الطبيعية التالية:

$$n_1 = 3^{10235} *$$

$$n_2 = 5^{258005} *$$

$$n_3 = 7^{251789} *$$

حل:

* لدينا: $\log_{10}(3^{10235}) = \frac{10235 \ln 3}{\ln 10} \approx 4883,3$ و منه المتباينة الواضحة: $4883 < \log_{10}(3^{10235}) < 4884$ معناه حسب

خواص اللوغاريتم العشري: $10^{4883} < 3^{10235} < 10^{4884}$ و منه عدد أرقام العدد 3^{10235} هو 4884،

* ولدينا كذلك: $\log_{10}(5^{258005}) = 258005 \times \log_{10} 5 \approx 180337,8$ و منه المتباينة الواضحة:

$180337 < \log_{10}(5^{258005}) < 180338$ معناه حسب خواص اللوغاريتم العشري: $10^{180337} < 5^{258005} < 10^{180338}$ و منه عدد أرقام العدد 5^{258005} هو 180338،

* ولدينا كذلك: $\log_{10}(7^{251789}) = 251789 \times \log_{10}(7) \approx 212786,4$ و منه المتباينة الواضحة:

$212786 < \log_{10}(7^{251789}) < 212787$ معناه حسب خواص اللوغاريتم العشري: $10^{212786} < 7^{251789} < 10^{212787}$ و منه عدد أرقام العدد 7^{251789} هو 212787.

تمرين تطبيقي 02:

في عام 1998 اكتشف فريق من باحثين أمريكيين كلاركسون - وولتمان - كيروفسكي $p = 2^{3021377} - 1$ أكبر عدد أولي عرف آنذاك عين عدد أرقام هذا العدد.

حل:

سنعين بداية عدد أرقام $2^{3021377}$:

لدينا: $\log_{10}(2^{3021377}) = 3021377 \times \log_{10}(2) \approx 909525,1$ و منه المتباينة $909525 < \log_{10}(2^{3021377}) < 909526$

و منه: $10^{909525} < 2^{3021377} < 10^{909526}$ أي عدد أرقام $2^{3021377}$ هو: 909526،

للملاحظة فقط لا يمكن أن يكون رقم آحاد العدد $2^{3021377}$ صفراً لأن — آحاده هي: 2 أو 4 أو 8 أو 6،
و بالتالي عدد أرقام $2^{3021377} - 1$ تساوي عدد أرقام $2^{3021377}$ أي: 909526.

من علماء العرب:

أثير الدين الأبهري:

هو الشيخ الإمام أثير الدين المفضل بن عمر بن المفضل الأبهري السمرقندي الذي توفي عام 663هـ، يعود نسبه إلى مدينة أبهر الواقعة بالقرب من قزوین، والأبهري عالم فلك ورياضي ومنطقي وحكيم، وفيلسوف، عاش في الموصل، ومنها انتقل إلى ربيع، وقد كان تلميذاً للعالم كمال الدين موسى بن يونس بن منعة، كما كان من خاصة الأمير محيي الدين بن صاحب شمس الدين الجزري بدمشق.

كان الأبهري عالماً فاضلاً متمكناً من علوم المنطق والفلسفة والفلك والرياضة، واشتهر باهتمامه بالأزياج الفلكية، واهتم كذلك بحساب الحركات الفلكية رابطاً بينها وبين الرياضيات، ومهتماً بآلات الرصد الفلكية وخصوصاً الإسطرلاب، وللأبهري مؤلفات في الرياضيات، وعدة رسائل في المنطق والجدل، وفي الهندسة له مقالة في البرهان على صحة حل كمال الدين بإنشاء مربع يكافئ قطعة دائرة، ومقالة هندسية وجدت في مكتبة بلمبتون بجامعة كولومبيا، وتشير إلى أن الأبهري حاول إثبات موضوعه التوازي لإقليدس، ويمتاز البرهان الذي قدّمه الأبهري بالإبداع الأصيل والتفكير العميق، إذ لم يسبق لأحد قبله أن لاحظ الفكرة المبدعة التي استخدمها في البرهان، وهي أن العمود المقام على منصف زاوية يلاقي ضلعيها، وقد أضافت تلك الملاحظة مكافئاً جديداً لموضوعه إقليدس.

ترك الأبهري عدة مؤلفات مهمة، مثل (هداية الحكمة في الطبيعة والحكمة والمنطق)، و(تنزيل الأفكار في تعديل الأفكار في تعديل الأسرار في المنطق)، (متن إيساغوجي في المنطق)، مخطوط (تهذيب النكت)، (درايات الأفلاك)، (الزيج الشامل)، (المجسطي في الهيئة)، (القول في حساب الحركات الفلكية)، (غاية الإدراك في دراية الأفلاك)، (رسالة في علم الإسطرلاب)، (الاحتساب في علم الحساب)، (رسالة في بركار المقطوع)، (إصلاح كتاب الاسطقسات في الهندسة لإقليدس)، (كشف الحقائق في تحرير الدقائق في المنطق)، (تلخيص الحقائق)، (الإشارات).

أهداف الدرس الثالث عشر:

- المقارنة بين تزايد الدالة الأسية (اللوغاريتمية) و دالة القوى أو ما يفضل أن يسميه البعض: "التزايد المقارن"،

الدرس الثالث عشر:

نشاط استكشافي:

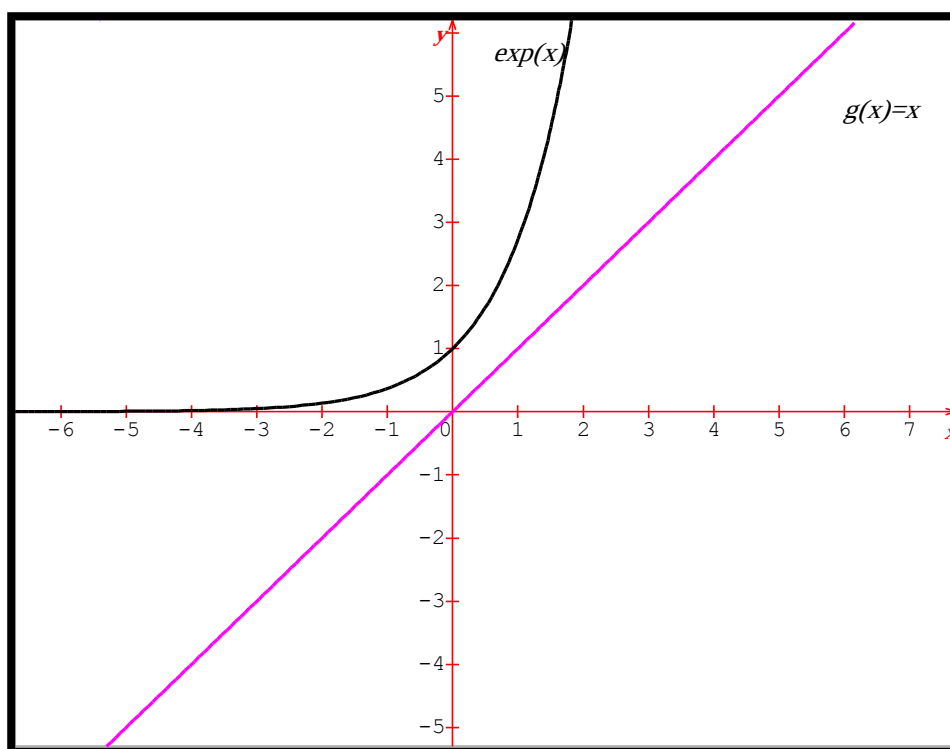
- لتكن الدالتان f, g المعرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^x$ و $g(x) = x$
- (1) باستعمال الحاسبة البيانية أو برنامج ارسـم كل من (C_f) و (C_g) ،
 (2) قارن بين تزايد الدالة f و g من أجل قيم x كبيرة،

(3) استنتج النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$ ثم $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x$ ،

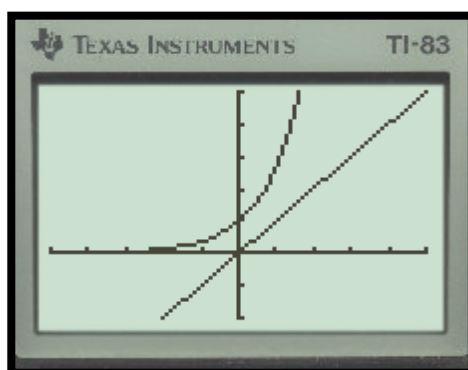
(4) هل يمكن استنتاج $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x)$ ؟

حل النشاط:

- (1) باستعمال برنامج نحصل على المنحنيين الممثلين لـ f, g :



أو استعمال الحاسبة البيانية TI 83:



(2) نلاحظ من الرسم السابق أنه كلما كانت قيمة x كبيرة كانت سرعة اقتراب الدالة الأسية من $+\infty$ أكبر من سرعة الدالة g بمعنى

يصبح الفرق بينهما كبيرا، و منه نستنتج: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (*)

* لكن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \text{????????}$

سنعتمد على النهاية السابقة، بوضع $y = -x$ لدينا: $x \rightarrow -\infty$ معناه: $y \rightarrow +\infty$ فتكون النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} (-y e^{-y}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\left(\frac{e^y}{y}\right)^{(*)}} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

حسب (*)

و منه: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ (**)

* يمكن الاعتماد على الشكل البياني لتعيين هاته النهاية،

سؤال 01: هل يمكن حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$ ؟

(4) نلجأ لتغيير المتغير و هذا بوضع: $x = e^t \leftrightarrow t = \ln x$ لدينا $x \rightarrow +\infty$ معناه $t \rightarrow +\infty$ و منه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{و منه} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{e^t}{t}\right)^{(*)}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

حسب (*)

من أجل النهاية المتبقية بطريقة مشابهة للنهاية السابقة نحصل على المطلوب، مع: $x \xrightarrow{+} 0$ يكون $t \rightarrow -\infty$ و منه:

$$\lim_{x \xrightarrow{+} 0} x \ln(x) = 0 \quad \text{و منه} \quad \lim_{x \xrightarrow{+} 0} x \ln x = \lim_{t \rightarrow -\infty} t e^t = 0 \quad (**)$$

حسب (**)

سؤال 02: هل يمكن حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n}$ و $\lim_{x \xrightarrow{+} 0} x^n \ln x$ مع: $n \in \mathbb{N}^*$ ؟

بناء المعارف:

خلاصة النشاط "النهايات الشهيرة":

$$\lim_{x \xrightarrow{+} 0} x \ln x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

نتيجة:

(يمكن مشاهدة هذا بيانيا)

$$n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$$

لأن:

يكفي إثبات النهاية الأولى حتى نجد النهايات المتبقية:

نلاحظ أنه إذا كان: $n=1$ نحصل على النهاية الأولى في خلاصة النشاط،

$$\text{إذا كان } n \geq 2: \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^{n \ln x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(1 - \frac{n \ln x}{x})} = +\infty$$

طريقة ثانية: نضع: $g(x) = e^x - \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}$ عند اشتقاق الدالة السابقة n مرة نجد: $g^{(n)}(x) = e^x - x$ من أجل كل عدد

حقيقي موجب، و نعلم مما سبق أن $e^x > x$ حيث: $x \geq 0$ و منه نستنتج في كل مرة أن $g^{(n)}(x) \geq 0$ من أجل كل

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \text{ من أجل } x \geq 0 \text{ وكبير و حسب نظرية الحصر يكون } \frac{e^x}{x^n} \geq \frac{1}{(n+1)!} x \leftarrow e^x \geq \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

ملاحظة:

تستعمل النهايات المذكورة في الخلاصة و النتيجة لتعيين النهايات أثناء دراسة دوال، دون إثبات و يجب أن يكون معلوماً أن اظهار النهايات الشهيرة السابقة صراحة - إما بتغيير المتغير أو طرق أخرى- و هذا أمر مهم لحساب النهايات. لاحظ التطبيق:

من علماء العرب:

أبو بكر الحَصَّار:

هو محمد بن عبد الله بن عياش الحَصَّار المعروف بأبو بكر الحَصَّار ، وهو من الرياضيين البارزين في المغرب العربي، لم يصل إلينا سوى بعض الاستشهادات العلمية التي وردت في مؤلفات اللاحقين له، حيث أغفلت كتب التراجم سيرة حياته وعصره، وقد ذكر المؤرخون والرياضيون الحَصَّار بأنه أسهم في تسهيل الأعمال الحسابية وسرعتها، وخصوصاً الفلكية منها، وللحَصَّار عدة مؤلفات منها (الكتاب الصغير)، ولأن أعمال الحَصَّار كانت محط اهتمام الباحثين في فترة مبكرة، فقد ترجم موسى بن تيبون سنة 1271م الكتاب إلى اللغة العبرية، كما اهتم بأعماله كبار الباحثين في تاريخ العلوم، أمثال: شتينسنايدر M.Steinschneider، سوتر H.Suter، رينو H.P.J.Renaud، وغيرهم، ويكشف هذا الاهتمام المتميز من الشرق والغرب بأعمال الحَصَّار عن الأصالة والإبداع في مؤلفاته، والتي من بينها (البيان والتذكار)، و(الكامل في صناعة العدد)، وهما من المؤلفات المغربية المبكرة في الرياضيات العربية التي لم يوضح دورها الحقيقي في تطور الرياضيات.

تمرين تطبيقي:

أحسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^3 - x} / 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 - \frac{1}{x}} / 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x) / 4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{x+1}-1} / 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} / 6$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} e^{-x}) / 5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) / 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin x} - 1}{x} / 7$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^3 + 5) / 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2 + e^{-x}}{x} / 9$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2}{x^2 + 3} / 12$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1 + e^{x^2}) / 11$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{\ln(x+1)} \right) / 14$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} \ln(e^x + 1)) / 13$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right) / 16$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right) / 15$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x / 17$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 - \frac{1}{x} \right) = +\infty \quad \text{لأن:} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2 - \frac{1}{x}} = +\infty / 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^3 - x} = e^{-\infty + \infty} \quad \text{ح.ع.ت:} / 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(x^2 - 1) = -\infty \quad \text{لأن:} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x(x^2 - 1)} = e^{-\infty(+\infty)} = e^{-\infty} = 0 / 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{x+1}-1} = e^0 = 1 / 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^t}{t^2}} = \frac{1}{+\infty} = 0 / 4$$

نهاية شهيرة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} e^{-x}) = +\infty \times 0 \quad \text{ح.ع.ت:} / 5$$

$t = \sqrt{x}$ معناه $t^2 = x$ ، من أجل: $x \rightarrow +\infty$ تكون $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} t e^{-t^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{t \left(\frac{e^{t^2}}{t^2} \right)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

نهاية شهيرة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-3\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \left(1-3\frac{\ln x}{x}\right)} = +\infty \quad /6$$

x موجب تماما ($x \rightarrow +\infty$) و بالتالي الكمية $\ln x$ لها معنى،

نهاية شهيرة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin x} - e^{0 \times \sin 0}}{x - 0} = (e^{x \sin x})' \Big|_{x=0} = (\sin x + x \cos x) e^{x \sin x} \Big|_{x=0} = 0 \quad /7$$

مشتقة الدالة $e^{x \sin x}$ عند الصفر،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = +\infty \times 0 \quad \text{ح.ع.ت: إزالتها:} \quad /8$$

نضع: $t = \frac{1}{x}$ لما: $x \rightarrow +\infty$ يكون: $t \rightarrow 0$ تصبح النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = (e^t)' \Big|_{t=0} = 1$$

مشتقة الدالة e^t عند الصفر،

/9

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 2 + e^{-x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{e^{-x} - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-x} - 1}{x} \right) = (e^x)'_{x=0} + (-e^{-x})'_{x=0} = 1 - 1 = 0$$

النهايتان موجودتان لهذا نستطيع توزيع رمز النهاية،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^3 + 5) = +\infty - \infty \quad \text{ح.ع.ت: إزالتها:} \quad /10$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^3 \left(\frac{e^x}{x^3} - 1 + \frac{5}{x^3} \right) \right) = +\infty$$

نهاية شهيرة،

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1 + e^{x^2}) = -\infty + \infty \quad \text{ح.ع.ت: إزالتها:} \quad /11$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{e^{x^2}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{1}{x} + x \times \frac{e^{x^2}}{x^2} \right) = +\infty$$

نهاية شهيرة،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2}{x^2 + 3} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{ح.ع.ت: إزالتها:} \quad /12$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2} \times \frac{1 - 2e^{-x}}{1 + \frac{3}{x^2}} \right) = +\infty$$

نهاية شهيرة،

13/ حالة عدم التعيين: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} \ln(e^x + 1)) = +\infty \times 0$ ، إزالتها:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\ln(e^x + 1)}{e^x} \right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(t+1)}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(t+1) - \ln 1}{t} \right) = (\ln(t+1))' \Big|_{t=0} = \frac{1}{t+1} \Big|_{t=0} = 1$$

وضع: $e^x = t$ لدينا: $x \rightarrow -\infty$ فإن $t \rightarrow 0$ ،

مشتقة الدالة $\ln(t+1)$ عند الصفر،

أو مشتقة الدالة $\ln t$ عن العدد 1،

14/ حالة عدم التعيين: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{\ln(x+1)} \right) = \frac{0}{0}$ ، إزالتها:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{\ln(x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\ln(x+1)} \times \frac{e^x - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\left(\frac{\ln(x+1)}{x} \right)} \times \frac{e^x - 1}{x} \right) = 1 \times 1 = 1$$

لاحظ طريقة حساب النهاية 13/ و 8/ (طريقة المشتق)،

15/ حالة عدم التعيين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right) = +\infty \times 0$ ، إزالتها:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 e^{\frac{1}{x+1}} \left(e^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1 \right) \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} e^{\frac{1}{x+1}} \left(\frac{e^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1}{1} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} e^{\frac{1}{x+1}} \right) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1}{\frac{1}{x(x+1)}} \right) = 1 \times \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{e^t - 1}{t} \right) = 1 \times 1 = 1$$

النهايتان موجودتان لهذا نستطيع توزيع رمز النهاية،

نضع: $t = \frac{1}{x(x+1)}$ إذا كان: $x \rightarrow +\infty$ يكون: $t \rightarrow 0$ ،

16/

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x e^{\frac{1}{x+1}} \left(e^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1 \right) \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x+1} e^{\frac{1}{x+1}} \left(\frac{e^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1}{1} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x+1} e^{\frac{1}{x+1}} \right) \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1}{\frac{1}{x(x+1)}} \right) = \lim_{t_1 \rightarrow 0} (t_1 e^{t_1}) \times \lim_{t_2 \rightarrow 0} \left(\frac{e^{t_2} - 1}{t_2} \right) = 0 \times 1 = 0$$

نضع: $t_1 = \frac{1}{x+1}$ إذا كان: $x \rightarrow +\infty$ يكون: $t_1 \rightarrow 0$ ، و نضع: $t_2 = \frac{1}{x(x+1)}$ إذا كان: $x \rightarrow +\infty$ يكون: $t_2 \rightarrow 0$ ،

17 / حالة عدم التعيين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1^{+\infty}$ لإزالتها:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+t)}{t}} = e$$

نضع $t = \frac{1}{x}$ من أجل $x \rightarrow +\infty$ يكون $t \rightarrow 0$ ،

من علماء العرب:

الطوسي:



هو شرف الدين الطوسي (1135هـ - 1213هـ)، وهو رياضي وفلكي ومهندس ميكانيكي من طوس، درس عدة مواضيع مثل في حلب والموصل علم الأعداد والجداول الفلكية وعلم التنجيم في حلب والموصل، وقد كتب الكثير من الأبحاث في علم الجبر، كما عمل على الحصول على قيم تقريبية لجذور المعادلة التكعيبية، ولاحقاً تم تطوير طرائقه من أجل إيجاد جذور معادلات من أي درجة.

ترك الطوسي عدة مؤلفات من بينها (الجبر والمقابلة)، (رسالة في الخططين الذين يقربان ولا يلتقيان)، (المعادلات).

تمارين حول الدوال:

* الأسية

* اللوغاريتمية.

محاولاتك مهمة

من علماء العرب:

أبن مسعود:

هو غياث الدين بن مسعود بن محمد الكاشي، ولد في مدينة كاشان في بلاد فارس، وهو من أعظم من اشتهر في القرن الـ9 الهجري بالحكمة والرياضيات والفلك والنجوم وغيرها.

درس الكاشي النحو والصرف والفقه والمنطق، ثم درس الرياضيات وتفوق فيها، إذ كان والده من أكبر علماء الرياضيات والفلك.

عاش الكاشي معظم حياته في سمرقند، وفيها بنى مرصداً أطلق عليه مرصد سمرقند، وهناك وضع أكثر مؤلفاته التي كانت سبباً في تعريف الناس به.

وعلى الرغم من شهرة الكاشي في الأزياج والمراسد والرياضيات وغيرها، إلا أنه لم يعرف حقه في كتب التراجم والتاريخ، وقد اشتهر الكاشي في علم الهيئة، وحقق جداول النجوم التي وضعها الراصدون في مرصد سمرقند، كما قدر الكاشي تقديراً دقيقاً ما حدث من كسوف للشمس خلال ثلاث سنوات بين (809 - 811 هـ)، وهو أول من اكتشف أن مدارات القمر وعطارد إهليلجية.

أما في الرياضيات فقد ابتكر الكاشي الكسر العشري، ووضع الكاشي قانوناً خاصاً بتحديد قيس أحد أضلاع مثلث انطلاقاً من قيسي ضلعيه الآخرين وقيس الزاوية المقابلة له، بالإضافة إلى قانون خاص بمجموع الأعداد الطبيعية المرفوعة إلى القوة الرابعة، وقدم طريقة لجمع المتسلسلة العددية المرفوعة إلى القوة الرابعة.

اكتشف الصيغة التي تستخدم لحساب جيب 1° ، والتي نسبت إلى فرانسوا فييت وسميت صيغة (فييت)، علماً أن الكاشي هو أول من اكتشف تلك الصيغة، وقد ألف الكاشي الكثير من المؤلفات بالعربية والفارسية، ومنها (كتاب زيح الخاقاني) الذي دقق في جداول النجوم التي وضعها الراصدون في مدينة مراغه، وزاد على ذلك من البراهين الرياضية والأدلة الفلكية مما لم يوجد في الأزياج التي عملت قبله، وله أيضاً (الأبعاد والأجرام)، (نزهة الحقائق)، (رسالة سلم السماء)، (رسالة المحيطية) التي تبحث في كيفية تعيين نسبة محيط الدائرة إلى قطرها، فكان الكاشي هو من أوجد تلك النسبة إلى درجة من التقريب بحيث لم يسبقه إليها أحد، والتي وصلت إلى 16 خانة عشرية، وهي نسبة لم يصل إليها لا علماء الإغريق واليونان وعلماء الصين.

وألّف الكاشي كذلك (رسالة الجيب والوتر) في الهندسة، (مفتاح الحساب) الذي يعتبر من أهم ما أنجز، إذ ضمّنه بعض الاكتشافات في الحساب، ومنها أنه وجد خوارزمية لحساب الجذور النونية لأي عدد، والتي اعتبرت حالة خاصة للطرق التي اكتشفت بعد ذلك بقرون عن طريق هورنر، والكاشي هو مكتشف الكسر العشري وكذلك الرقم (0).

التمرين 01:

الجزء الأول:

تكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (3-2x)e^x + 2$ ،

1. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ،
2. ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها ،
3. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $\alpha \in]1,68; 1,69[$ ،
4. استنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في المجموعة $\mathbb{R}$ ،

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $f(x) = \frac{e^x + 4x - 1}{e^x + 1}$ ، (C_f) المنحنى الممثل لها في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ،

1. احسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟
2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^x + 1)^2}$ ،
3. بين أن: $f(\alpha) = 4\alpha - 5$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$ ،
4. ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيــــــــــــــــراتها ،
5. بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 4x - 1$ مقارب للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ ،
ثم ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ) ،
6. اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 ،
7. عين أحسن تقريب تآلفي للدالة f من أجل x قريب من 0 ، ثم استنتج قيمة تقريبية للعدد $f(10^{-2})$ ،
8. أ- ارسم كلا من (Δ) ، (T) و (C_f) ،
ب- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $me^x - 4x + m + 2 = 0$.

حل:

الجزء الأول:

$$D_g = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[\text{ و } g(x) = (3-2x)e^x + 2$$

1. حساب النهايات:

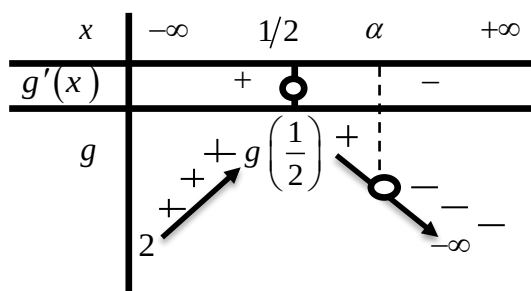
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((3-2x)e^x + 2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((3-2x)e^x + 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3e^x - 2xe^x + 2) = 2$$

2. دراسة تغيرات الدالة:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون: $g'(x) = (3e^x - 2xe^x + 2)' = 3e^x - 2(e^x + xe^x) = (1-2x)e^x$ من الواضح أن:

- g دالة متزايدة تماما على المجال $]-\infty; \frac{1}{2}[$ ، و متناقصة تماما على المجال $[\frac{1}{2}; +\infty[$ ، و منه جدول التغيرات:



$$g(1/2) = 2\sqrt{e} + 2$$

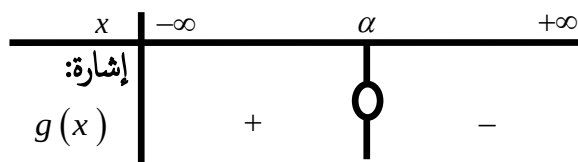
3. من جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة g مستمرة و متناقصة تماما على المجال $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ ،

$$\text{و } g(1,68) = (3 - 2(1,68))e^{1,68} + 2 \approx -(0,36 \times 5.37) + 2 \approx 0.07$$

$$g(1,69) = (3 - 2(1,69))e^{1,69} + 2 \approx -(0,38 \times 5.42) + 2 \approx -0.06$$

و منه: $0 < g(1,68) \times g(1,69) < 0$ ، و بالتالي حسب مبرهنة القيمة المتوسطة يوجد و وحيد $\alpha \in]1,68; 1,69[$ حيث: $g(\alpha) = 0$

4. اعتمادا على جدول التغيرات و الجواب السابق يمكن استنتاج إشارة $g(x)$:



الجزء الثاني:

$$D_f = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{e^x + 4x - 1}{e^x + 1}$$

1. حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 4x - 1}{e^x + 1} = \frac{+\infty}{+\infty} \xrightarrow{\text{ن}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 4\frac{x}{e^x} - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = 1$$

المنحنى (C_f) يقبل المستقيم الذي معادلته $y = 1$ كمقارب أفقي في جوار $+\infty$ ،

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 4x - 1}{e^x + 1} = -\infty$$

2. ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(\frac{e^x + 4x - 1}{e^x + 1} \right)' = \frac{(e^x + 4)(e^x + 1) - e^x(e^x + 4x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 5e^x + 4 - e^{2x} - 4xe^x + e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{2((3 - 2x)e^x + 2)}{(e^x + 1)^2} = \frac{2g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

$$3. \text{ لدينا: } f(\alpha) = \frac{e^\alpha + 4\alpha - 1}{e^\alpha + 1} \quad (*)$$

نلاحظ أننا يجب التخلص من e^α و السبيل الوحيد لتوظيف الدالة المذكورة في الجزء الأول g :

$$\text{لدينا } g(\alpha) = 0 \text{ أي: } (3 - 2\alpha)e^\alpha + 2 = 0 \text{ أي: } e^\alpha = \frac{2}{2\alpha - 3} \text{ عند التعويض في العبارة } (*) \text{ نجد:}$$

$$\alpha > 0,5 \text{ حيث: } f(\alpha) = \frac{\frac{2}{2\alpha - 3} + 4\alpha - 1}{\frac{2}{2\alpha - 3} + 1} = \frac{2 + 8\alpha^2 - 2\alpha - 12\alpha + 3}{2 + 2\alpha - 3} = \frac{8\alpha^2 - 14\alpha + 5}{2\alpha - 1} = \frac{(4\alpha - 5)(2\alpha - 1)}{2\alpha - 1} = 4\alpha - 5$$

- و من الجزء الأول لدينا $\alpha \in]1, 68; 1, 69[$ أي: $4\alpha \in]6, 72; 6, 76[$ و منه نستنتج: $f(\alpha) \in]1, 72; 1, 76[$
4. من عبارة المشتقة للدالة f و اعتمادا على إشارة $g(x)$ يمكن أن نكتب:
- دالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; \alpha[$ و متناقصة تماما على المجال $]\alpha; +\infty[$ ، و بالتالي نشكل جدول التغيرات:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	1

5. لنبين أن $y = 4x - 1$ مقارب لمنحنى الدالة f في جوار $-\infty$ أي نحسب النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^x + 4x - 1}{e^x + 1} - 4x + 1 \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^x + 4x - 1 - 4x e^x - 4x + e^x + 1}{e^x + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x - 4x e^x}{e^x + 1} = 0$$

حقا: $y = 4x - 1$ مستقيم مقارب مائل في جوار $-\infty$ لمنحنى الدالة f ،

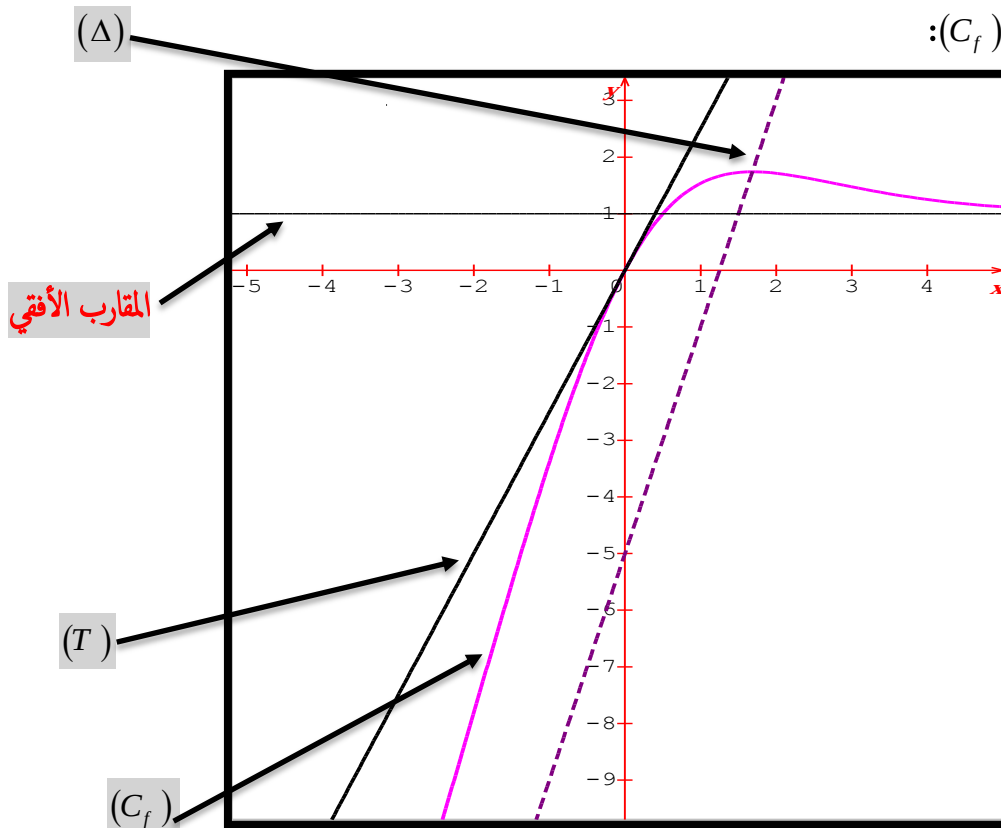
6. كتابة معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 0:

$$(T): y = \frac{5}{2}x \quad \text{بتعويض بسيط نجد: } (T): y = f'(0)x + f(0)$$

7. في جوار النقطة $x \approx 0$ نضع التقريب التآلفي $f(x) \approx \frac{5}{2}x$

و بذلك يمكن استنتاج قيمة مقربة لـ 10^{-2} و هذا لقرب هذه القيمة من الصفر، أي: $f(10^{-2}) = \frac{5}{2} \times \frac{1}{100} = \frac{1}{40} = 0,025$

8. رسم (Δ) , (T) , (C_f) :



ب) المناقشة البيانية لحلول و إشارة المعادلة $me^x - 4x + m + 2 = 0$ حيث: $m \in \mathbb{R}$ ثابت،
رسمنا منحنى الدالة f ، لأجل هذا نشكل عبارة الدالة f في طرف مساواة بعد سلسلة من العبارات المنطقية، لنتحصل في
الطرف الآخر على علاقة بدلالة m :

العبارة السابقة تكافئ $me^x + m + 1 = 4x - 1$ معناه $me^x + m + e^x + 1 = e^x + 4x - 1$ يكافئ:

المذكورة سابقا و هذا يبيننا، هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y = \beta$ الموازي لمحور الفواصل،
لنخلص المناقشة في الجدول التالي:

β	$m = \beta - 1$	المناقشة:
$-\infty$	$-\infty$	حل وحيد سالب
0	-1	حل معدوم
		حل وحيد موجب
1	0	حل وحيد موجب
		حلان موجبان
$f(\alpha)$	$f(\alpha) - 1$	حل مضاعف موجب
$+\infty$	$+\infty$	لا توجد حلول

التمرين 02:

- دالة لمتغير حقيقي x معرفة كما يلي: $f(x) = x - \frac{1}{e^x + 1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس،
1/ احسب كلا من $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) > 0$ ،
2/ ضع جدول تغيرات الدالة f ،
3/ بين أن المستقيمين $(\Delta_1): y = x$ و $(\Delta_2): y = x - 1$ مقاربان مائلان للمنحنى (C_f) ،
4/ ادرس وضعيّة المنحنى (C_f) بالنسبة للمقاربين $(\Delta_1), (\Delta_2)$ ،
5/ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0 < \alpha < 0,5$ ، ثم إستنتج أن: $e^\alpha + 1 = \frac{1}{\alpha}$ ،
6/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(-x) + f(x) = -1$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ،
7/ أعط معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x_0 = 0$ ،
8/ أنشئ $(\Delta_1), (\Delta_2)$ و المنحنى (C_f) . (نعتبر: $\alpha \approx 0,45$).

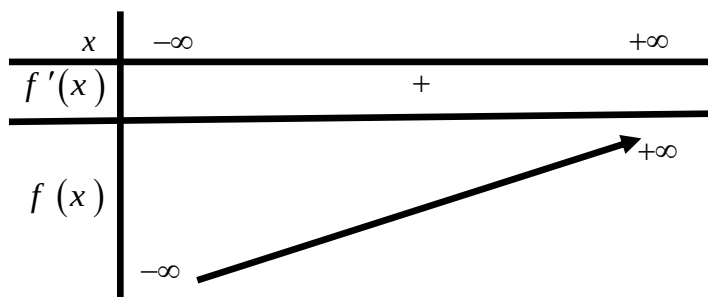
حل:

$$D_f = \mathbb{R} \text{ و } f(x) = x - \frac{1}{e^x + 1}$$

1/ حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{1}{e^x + 1} \right) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{e^x + 1} \right) = +\infty$$

* من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \left(x - \frac{1}{e^x + 1}\right)' = 1 + \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$ وهذا كون الدالة الأسية موجبة تماما من أجل كل عدد حقيقي x ،
 /2 جدول التغيرات:



/3 من النهايات المحسوبة سابقا:

وجدنا: • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^x + 1} = 0$ أي $(\Delta_1): y = x$ مستقيم مقارب مائل في جوار $+\infty$ للمنحنى (C_f) ،

• من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x) = x - \frac{1}{e^x + 1} = x - \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = x - 1 + \frac{e^x}{e^x + 1}$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 0$ وبالتالي $(\Delta_2): y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل في جوار $-\infty$ للمنحنى (C_f) ،

/4 دراسة الوضع النسبي:

• بالنسبة لـ (Δ_1) : $f(x) - y = x - \frac{1}{e^x + 1} - x = -\frac{1}{e^x + 1} < 0$ أي المنحنى (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ_1) دوماً،
 • بالنسبة لـ (Δ_2) : $f(x) - y = x - 1 + \frac{e^x}{e^x + 1} - (x - 1) = \frac{e^x}{e^x + 1} > 0$ أي المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ_2) دوماً،

/5 من جدول التغيرات يمكن ملاحظة أن الدالة f مستمرة و متزايدة تماماً على المجال $]0; 0,5[$ ،

و $f(0) = -\frac{1}{2}$ و $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{e} + 1} = 0.5 - 0.38 = 0.12$ أي: $f(0) \times f(0,5) < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة

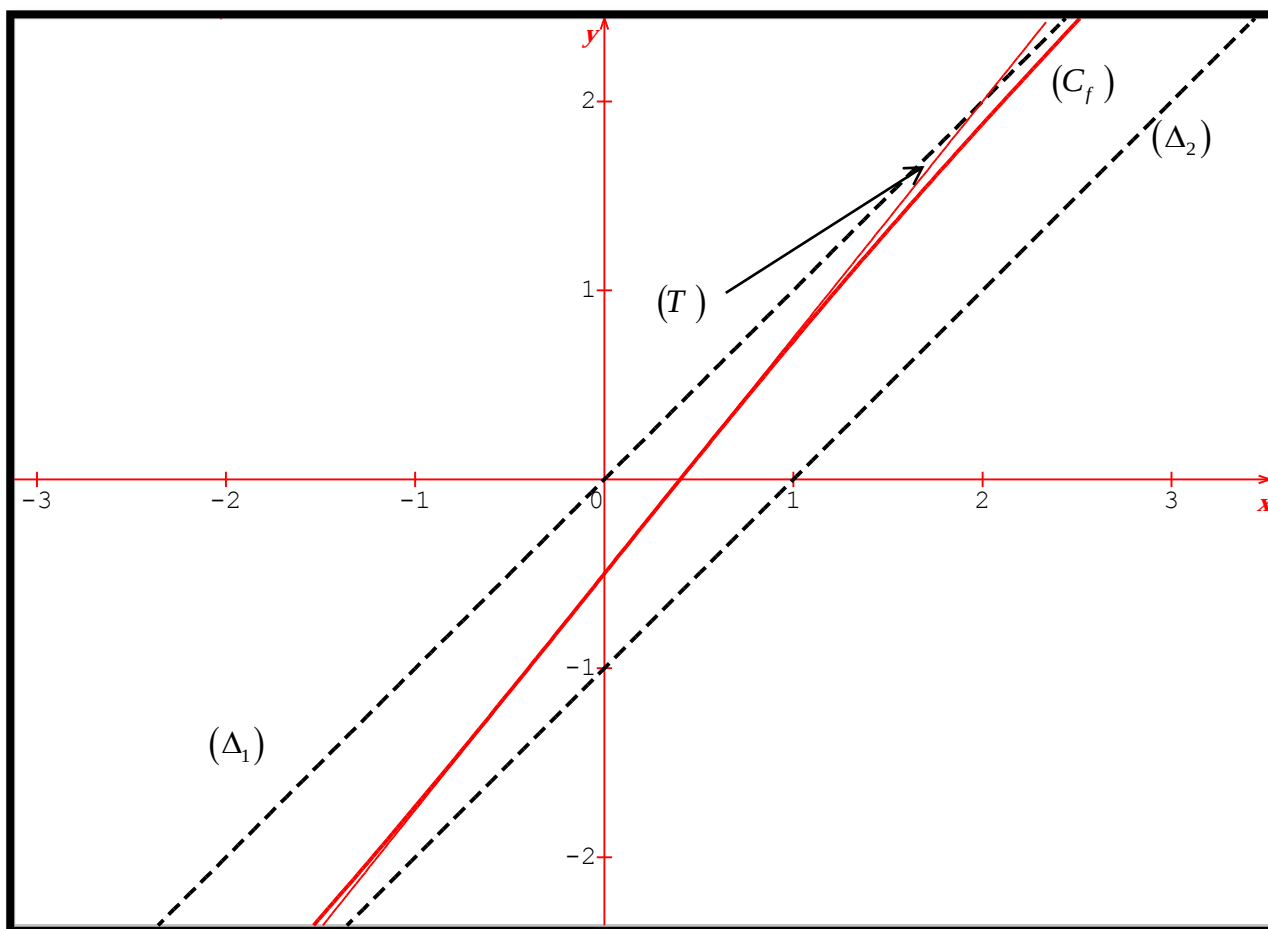
يوجد حل وحيد $\alpha \in]0; 0,5[$ حيث: $f(\alpha) = 0$ أي $\alpha - \frac{1}{e^\alpha + 1} = 0$ و منه $e^\alpha + 1 = \frac{1}{\alpha}$ و . ه . م .

/6 من أجل كل x من $\mathbb{R}$ يكون $-x \in \mathbb{R}$ و $f(-x) + f(x) = -x - \frac{1}{e^{-x} + 1} + x - \frac{1}{e^x + 1} = \frac{-e^x}{e^x + 1} - \frac{1}{e^x + 1} = -1 = 2\left(\frac{-1}{2}\right)$

وبالتالي منحنى الدالة f يقبل النقطة $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر،

/7 معادلة المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة التي فاصلتها 0:

$$(T): y = f'(0)x + f(0) \text{ و منه: } (T): y = \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$$

8/ إنشاء (Δ_1) , (Δ_2) و المنحنى (C_f) :

التمرين 03:

$f(x) = x^2 e^{1-x}$ دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

(C) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$,

1. باستخدام النتيجة $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ برهن أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$ ،

2. احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C)،

3. احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ ،

4. احسب $f'(x)$ ثم استنتج تغيرات الدالة f ،

5. شكل جدول تغيرات الدالة f ،

6. أثبت أن المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف،

7. أ- بين أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0.5 < \alpha < -0.4$ ،

ب- بين أن الحل α يحقق $\alpha = 2 \ln(-\alpha) + 1$ ،

8. أثبت وجود مماس (T) للمنحنى (C) في المجال: $]0; +\infty[$ يمر من المبدأ 0،

9. ارسم المماس (T) والمنحنى (C)،

10. استخدم المنحنى (C) لرسم المنحنى (C') الممثل للدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = x^2 e^{1+|x|}$.

حل:

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[\quad \text{و} \quad f(x) = x^2 e^{1-x}$$

1. لدينا فرضاً $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 4 \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} \right)^2 = 4 \times \lim_{t \rightarrow -\infty} (t e^t)^2 = 4 \times 0^2 = 0$$

$x \rightarrow -\infty \longrightarrow t \rightarrow -\infty$

من الفرض

2. حساب النهاية عند $+\infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{1-x}) \stackrel{t=1-x}{=} \lim_{t \rightarrow -\infty} ((1-t)^2 e^t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} ((1+t^2-2t)e^t) = \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} (e^t + t^2 e^t - 2(t e^t)) = 0 \end{aligned}$$

اعتماداً على ما سبق

من الفرض

• $y = 0$ معادلة مستقيم مقارب أفقي لمنحنى الدالة f في جوار $+\infty$ ،3. حساب النهاية عند $-\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 e^{1-x}) = +\infty$$

4. حساب المشتقة:

من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = (x^2 e^{1-x})' = 2x e^{1-x} - x^2 e^{1-x} = x(2-x)e^{1-x}$$

• الدالة f متزايدة تماماً على المجال $[0; 2]$ و متناقصة تماماً على المجالين: $]2; +\infty[$ و $]-\infty; 0]$ ،

5. و منه جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-
$f(x)$	$+\infty$	0	$4/e$	0

6. إثبات أن منحنى الدالة f يقبل نقطتي انعطاف:لأجل هذا نحسب المشتقة الثانية، لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= ((2x - x^2)e^{1-x})' = (2-2x)e^{1-x} - (2x - x^2)e^{1-x} = \\ &= (x^2 - 4x + 2)e^{1-x} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = 2+\sqrt{2} \\ x_2 = \frac{4-2\sqrt{2}}{2} = 2-\sqrt{2} \end{cases}$$

إذن $f''(x) = 0$ معناه $x^2 - 4x + 2 = 0$ عند استعمال المميز $\Delta = 16 - 8 = 8 = (2\sqrt{2})^2$ و منه:

x	$-\infty$	x_2	x_1	$+\infty$
$f''(x)$		+	-	+

أمكن تشكيل جدول الإشارة:

المشتقة الثانية تنعدم عند x_1 و x_2 مغيرة الإشارة عندهما وهذا كاف للقول أن منحنى الدالة f يقبل نقطتي انعطاف فاصلتها x_1 و x_2 .
7. أ- من جدول التغيرات نستنتج أن f دالة مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-0,5; -0,4[$ و

$$f(-0,5) = (-0,5)^2 e^{1+0,5} \approx 0,25 \times 4,5 \approx 1,12 \text{ و } f(-0,4) = (-0,4)^2 e^{1+0,4} \approx 0,16 \times 4,1 \approx 0,65$$

نلاحظ أن: $f(-0,4) < 1 < f(-0,5)$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد حل وحيد $\alpha \in]-0,5; -0,4[$ حيث: $f(\alpha) = 1$:
ب- لدينا من السؤال السابق $f(\alpha) = 1$ أي: $\alpha^2 e^{1-\alpha} = 1$ ومنه $\ln(\alpha^2 e^{1-\alpha}) = 0$ أي: $\ln(\alpha^2) + \ln e^{1-\alpha} = 0$ أي:

$$2\ln|\alpha| + 1 - \alpha = 0 \text{ و } \alpha < 0 \text{ وكون: } (\alpha \in]-0,5; -0,4[\text{ لاحظ }) \text{ يكون: } 2\ln(-\alpha) + 1 = \alpha \text{ و هو المطلوب،}$$

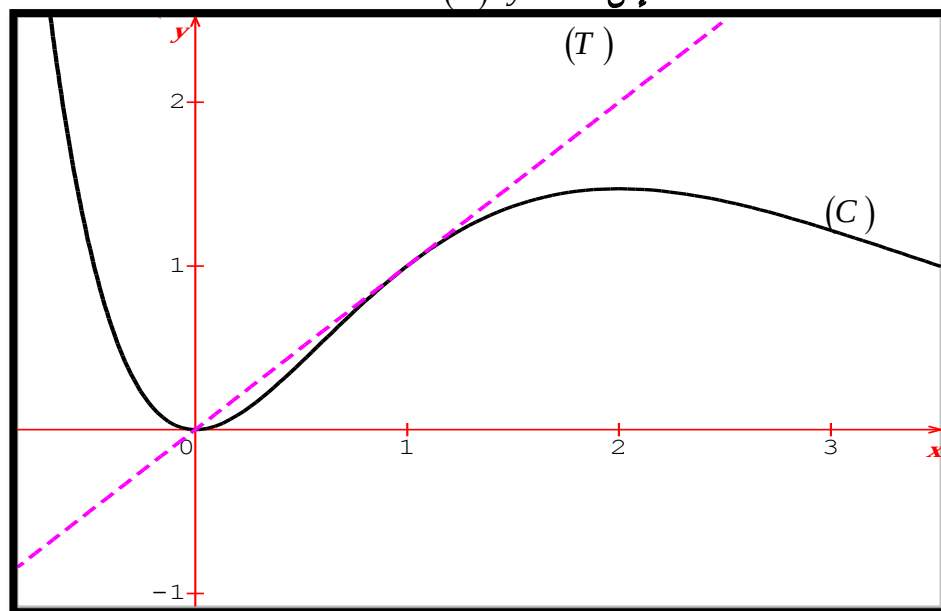
8. يمكن كتابة: $\frac{f(x_0)}{x_0} = f'(x_0)$ حيث: $x_0 \in]0; +\infty[$ فاصلة نقطة التماس، و منه $x_0 e^{1-x_0} = x_0(2-x_0)e^{1-x_0}$ أي:

و منه $x_0^2 - x_0 = 0$ أي: $x_0 = 1$ ، و بالتالي معادلة المماس تكون: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ مع:

$$\text{إذن: } (\Delta): y = x,$$

$$f'(1) = 1$$

9. رسم المماس و (C):



$$10. \text{ و } x \in \mathbb{R} : g(x) = x^2 e^{1+|x|}$$

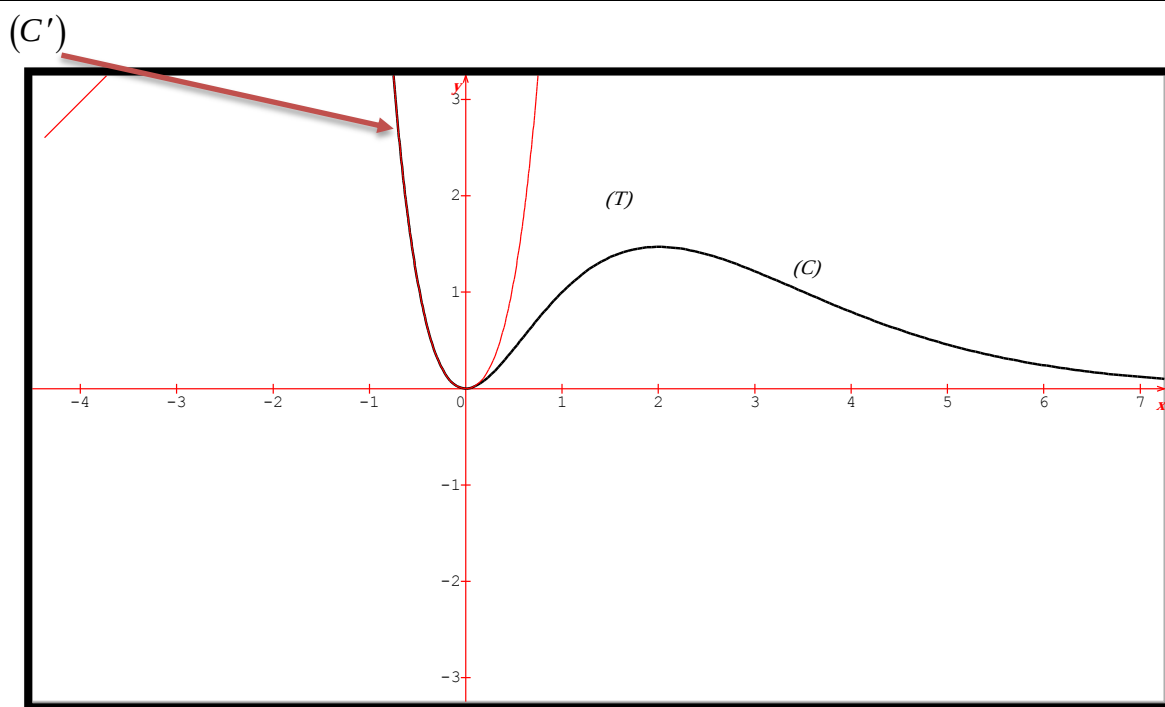
كتابة g دون رمز القيمة المطلقة: $g(x) = \begin{cases} x^2 e^{1+x} = f(-x) & , x \geq 0 \\ x^2 e^{1-x} = f(x) & , x \leq 0 \end{cases}$ من هذه الكتابة يمكن استنتاج:

- (C') ينطبق على (C) على المجال $]-\infty; 0]$ ،
- (C') نظير الجزء المرسوم للمنحنى (C) على المجال $]-\infty; 0]$ بالنسبة لمحور الترتيب، كما يبدو في الشكل:

أو:

• يمكن ملاحظة أن الدالة g زوجية و بالتالي المنحنى الممثل لها متناظر بالنسبة لمحور الترتيب،

و من أجل $x \in]-\infty; 0]$ يكون $g(x) = x^2 e^{1-x} = f(x)$ أي منحنى الدالة g ينطبق على منحنى الدالة f على المجال $]-\infty; 0]$ ،
 و نكمل بقية الرسم أي على المجال $[0; +\infty[$ باستعمال الزوجية أي:



التمرين 04:

أولاً:

لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = e^x + 2 - x$ ،(1) ادرس تغيرات الدالة g و شكل جدول تغيراتها،(2) استنتج إشارة g على $\mathbb{R}$ ،

ثانياً:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$ ، وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (1) بين أن لكل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^{-x} g(x)$ ،(2) ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها،(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ ،(4) أ/ بين أن المستقيم $(\Delta): y = x$ مقارب لـ (C_f) بـ $+\infty$ ،ب/ ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) ،(5) أ/ بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثياتها،ب/ بين أن معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة I هي: $(T): (e^3 - 1)x - e^3 y + 5 = 0$ ،(6) أنشئ (Δ) ، (T) ، (C_f) في نفس المعلم السابق.

حل:

أولاً:

$$D_g = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[\text{ و } g(x) = e^x + 2 - x$$

(1) دراسة تغيرات الدالة g :

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2 - x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + 2 - x) = +\infty - \infty$$

إزالتها: **حالة عدم التعيين**، وهي

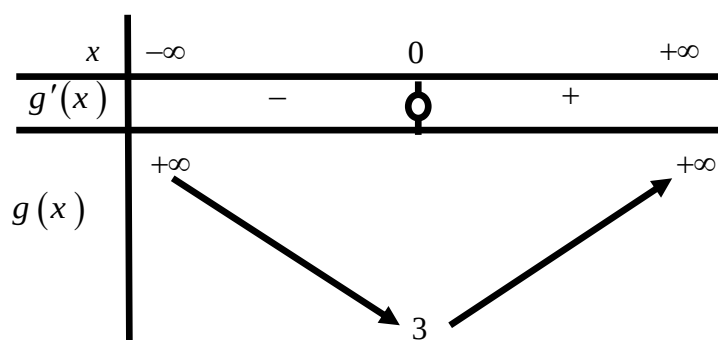
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 2 - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{e^x}{x} + \frac{2}{x} - 1 \right) = +\infty$$

المشتقة:

$$g'(x) = (e^x + 2 - x)' = e^x - 1 = e^x - e^0: \mathbb{R} \text{ من } x \text{ أجل كل}$$

• إذا كان $x \geq 0$ الدالة g متزايدة تماما،• إذا كان $x \leq 0$ الدالة g متناقصة تماما،

و منه جدول التغيرات:

من جدول التغيرات نستنتج أن: $g(x) \geq g(0) = 3 > 0$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ،

ثانياً:

$$D_g = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[\text{ و } f(x) = x + (x-1)e^{-x}$$

(1) من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = (x + (x-1)e^{-x})' = 1 + e^{-x} - (x-1)e^{-x} = 1 + 2e^{-x} - xe^{-x}$$

$$= e^{-x} (e^x + 2 - x) = e^{-x} g(x)$$

(2) من الجزء الأول بينا أن $g(x) > 0$ $x \in \mathbb{R}$ وهذا كاف للحكم أن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ لأن إشارة المشتقة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ،(3) من جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $0; \frac{1}{2}[$ ،

$$f(0) = -1 \text{ و } f(1/2) = 1/2 - (1/2)e^{-1/2} = 0.50 - 0.30 \approx 0.2 \text{ و بالتالي:}$$

$$f(0) \times f\left(\frac{1}{2}\right) < 0 \text{ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد حل وحيد } \alpha \in \left]0; \frac{1}{2}\right[\text{، يحقق: } f(\alpha) = 0$$

(4) **أ/** من عبارة الدالة f يمكن ملاحظة أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} \right) = 0$ أي المستقيم:

$$y = x \text{ (} \Delta \text{) مقارب مائل في جوار } +\infty$$

ب/ دراسة الوضع النسبي: نقوم بدراسة إشارة الفرق: $f(x) - y = (x-1)e^{-x}$ الذي إشارته من إشارة $(x-1)$ كون

$$e^{-x} > 0, x \in \mathbb{R}$$

أي الجدول:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x) - y$		-	+
الوضع النسبي		(C) تحت (Δ)	(C) فوق (Δ)
		(C) قاطع لـ (Δ)	

(5)

أ/ لنبين أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف:

نقوم بحساب المشتقة الثانية، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$f''(x) = (1 + 2e^{-x} - xe^{-x})' = -2e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x} = (-3 + x)e^{-x}$$

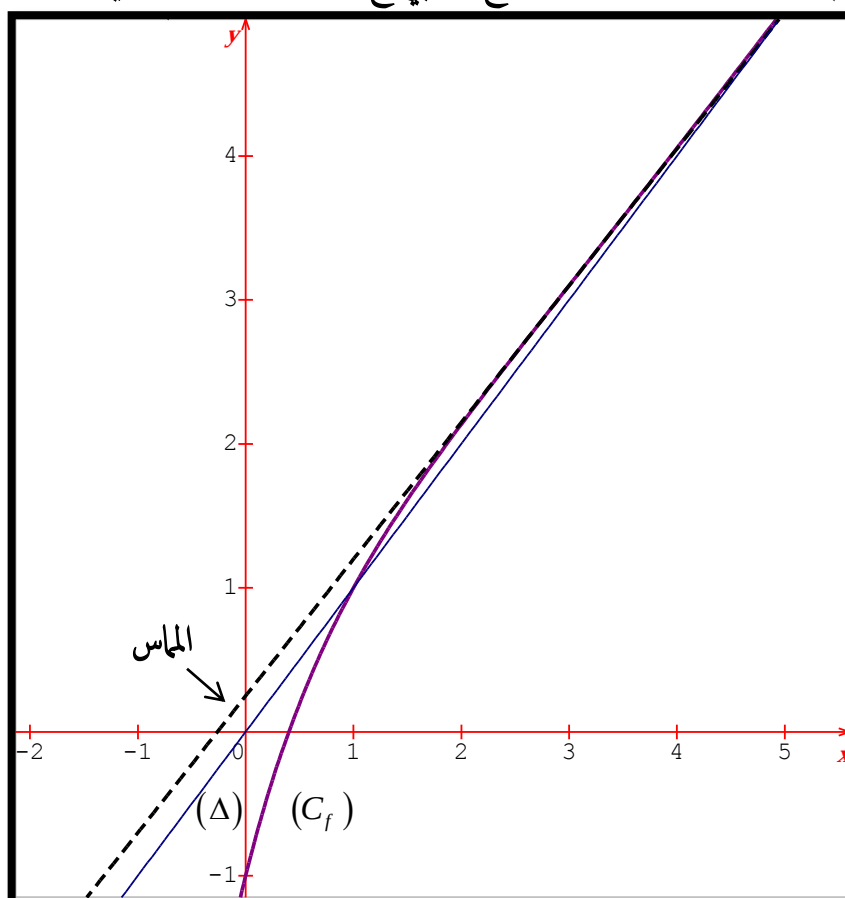
نلاحظ من العبارة المحصل عليها أن المشتقة الثانية تنعدم مغيرة إشارتها عند 3، وهذا كاف للقول أن النقطة $I(3; f(3))$ نقطةانعطاف مع: $f(3) = 3 + 2e^{-3}$ ،ب/ معادلة المماس عند I :

$$f(3) = 3 + 2e^{-3} \text{ و } f'(3) = 1 + 2e^{-3} - 3e^{-3} = 1 - e^{-3} \text{ و } y = f'(3)(x - 3) + f(3)$$

$$y = (1 - e^{-3})(x - 3) + 3 + 2e^{-3} \text{ و منه } e^3 y = (e^3 - 1)(x - 3) + 3e^3 + 2$$

$$(e^3 - 1)x - e^3 y - 3e^3 + 3 + 3e^3 + 2 = 0$$

$$\text{ختاماً: } (T): (e^3 - 1)x - e^3 y + 5 = 0$$

(6) رسم (T) و (Δ) و (C_f) : نراقب جدول التغيرات و الوضع النسبي مع ملاحظة أنه لا توجد أي شروط للوحدة نجد:

التمرين 05:

- f هي الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x-1)e^x$ ،
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ،
- 1/ عين نهاية f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$ ،
 - 2/ ادرس اتجاه تغير الدالة f على $\mathbb{R}$ ثم شكل جدول تغيراتها،
 - 3/ أ/ بين أن المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق أن $1,27 < \alpha < 1,28$ ،
 ب/ اكتب معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 و حدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) ،
 ج/ ارسم (T) و (C_f) ،
 - 4/ عين قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $(x-1)e^x - (m-1)e^m = -1$ حلا واحدا في $\mathbb{R}$ ،
 - 5/ h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = (|x|+1)e^{-|x|}$ ، و (C_h) تمثيلها البياني،
 أ/ بين أن الدالة h زوجية،
 ب/ ارسم (C_h) مستعينا بالمنحنى (C_f) ،
 - 6/ g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = (ax+b)e^x$ حيث: a و b عدنان حقيقيان،
 عين a و b حتى يكون من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x) = f(x)$.

حل:

لدينا $f(x) = (x-1)e^x$ و $D_f = \mathbb{R}$

1/ تعيين النهايات:

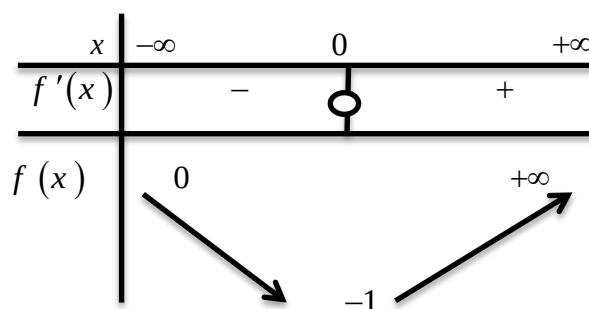
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((x-1)e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x - e^x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x-1)e^x) = +\infty$$

2/ من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = xe^x$ و بالتالي:

* إذا كان $x \leq 0$ تكون $f'(x) \leq 0$ أي الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ ،

* إذا كان $x \geq 0$ تكون $f'(x) \geq 0$ أي الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ ،

أي جدول التغيرات:



- 3/ أ/ من جدول التغيرات لدينا $f(x) < 0 < 1$ من أجل $x \in]-\infty; 0]$ ، أي المعادلة $f(x) = 1$ لا تقبل حلوًا في المجال $]-\infty; 0]$ و f دالة مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و $f(0) = -1 < 1$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد حل وحيد $\alpha \in [0; +\infty[$ يحقق: $f(\alpha) = 0$ ،

و كون $\alpha \in [0; +\infty[\subset]1,27; 1,28[$ يكفي التأكد من أن العدد 1 محصور بين $f(1,27)$ و $f(1,28)$ لدينا:

$$\alpha \in]1.27; 1.28[\text{ ومنه } f(1.27) = 0.27 \times e^{1.27} \simeq 0.96 < 1 < 0.28 \times e^{1.28} = f(1.28) \simeq 1.007$$

ب/ كتابة معادلة المماس:

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1) \text{ بالتعويض } f(1) = 0 \text{ و } f'(1) = e \text{ نجد } (T): y = e(x-1)$$

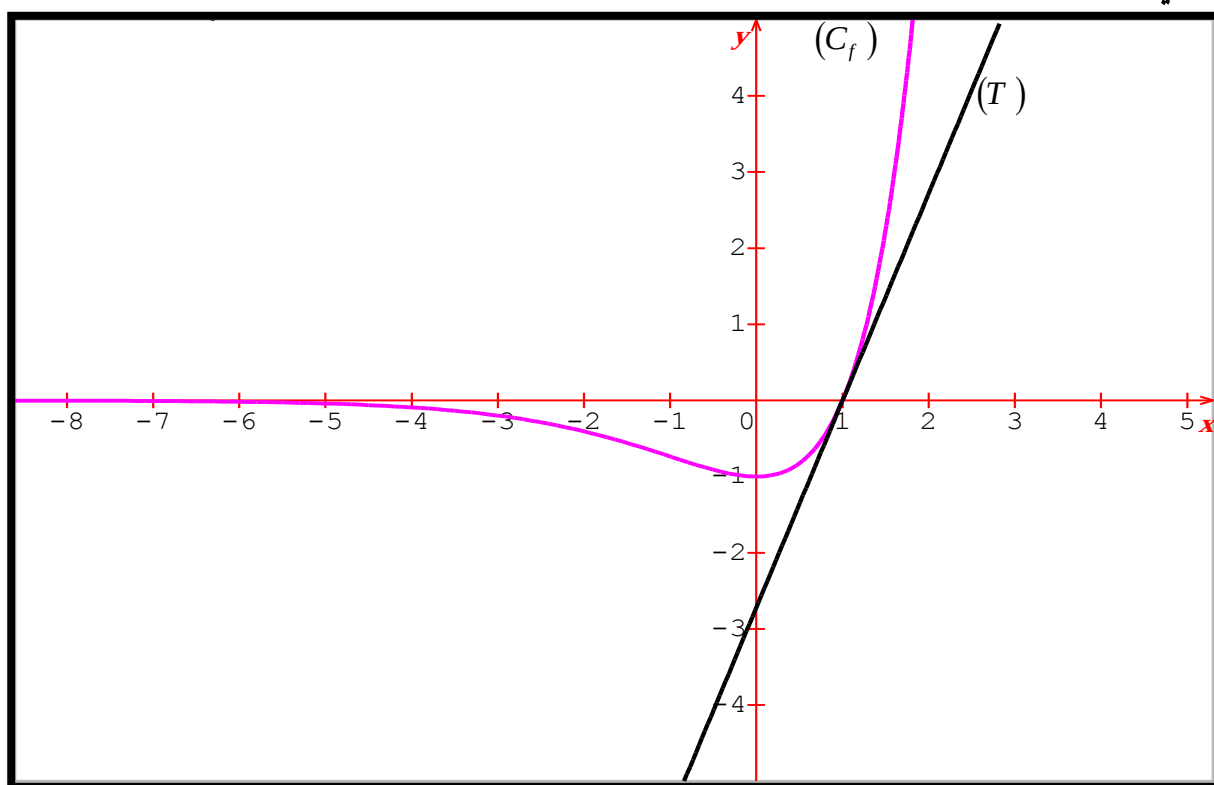
تحديد الوضع النسبي:

$$f(x) - y = (x-1)e^x - e(x-1) = (x-1)(e^x - e^1)$$

و منه جدول الإشارة:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+
$e^x - e^1$	-	0	+
$f(x) - y$	+	0	+
الوضع النسبي	(C _f) فوق (T)		(C _f) فوق (T)
	(C _f) قاطع لـ (T)		

ج/ الرسم البياني:



$$4/ \text{المعادلة } (x-1)e^x - (m-1)e^m = -1 \text{ تكافئ } (x-1)e^x = (m-1)e^m - 1 \text{ أي } f(x) = (m-1)e^m - 1 = k$$

حسب الرسم البياني فالمعادلة السابقة تقبل حلا وحيدا إذا كان:

$$k = -1 \text{ أي } (m-1)e^m = 0 \text{ ومنه: } m = 1$$

$$\text{أو } k \geq 0 \text{ أي: } (m-1)e^m - 1 \geq 0 \text{ معناه } f(m) \geq 1 = f(\alpha) \text{ وهو يكافئ } m \geq \alpha$$

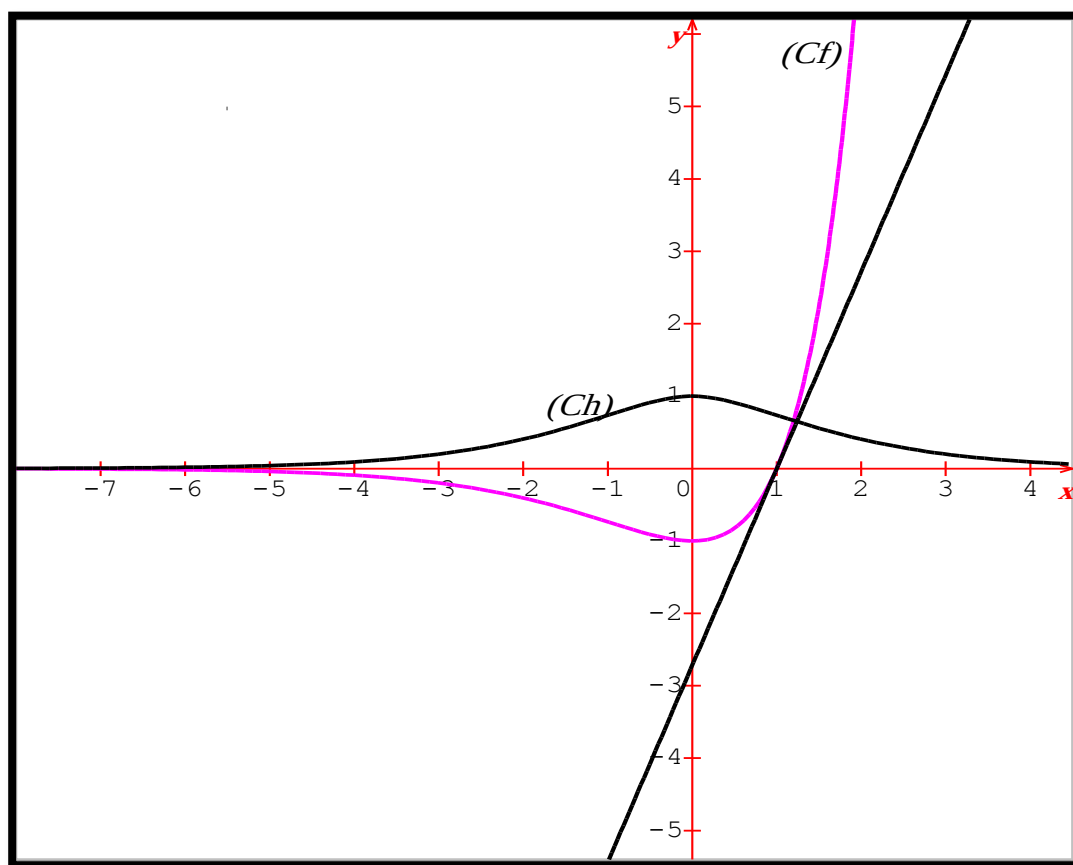
5/ لدينا $h(x) = (|x| + 1)e^{-|x|}$ ،

1/ ليكن $x \in \mathbb{R}$ معناه $-x \in \mathbb{R}$ ومنه:

$$h(-x) = (|-x| + 1)e^{-|-x|} = (|x| + 1)e^{-|x|} = h(x)$$

و بالتالي الدالة h زوجية،

ب/ من أجل $x \leq 0$ نجد: $h(x) = (-x + 1)e^x = -f(x)$ و بالتالي (C_h) يناظر منحنى الدالة (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل على المجال $]-\infty; 0]$ ، وكون الدالة h زوجية فإن البيان متناظر بالنسبة لمحور الترتيب، و نكون بهذا قد رسمنا منحنى الدالة h اعتمادا على منحنى الدالة f لاحظ الشكل:



6/ لدينا $g(x) = (ax + b)e^x$ و $D_g = \mathbb{R}$ ،

لدينا $g'(x) = ((ax + b)e^x)' = (ax + a + b)e^x = (x - 1)e^x$ و منه $((a - 1)x + a + b + 1)e^x = 0$ من أجل كل عدد

حقيقي x ، أي: $\begin{cases} a = 1 \\ a + b + 1 = 0 \rightarrow b = -2 \end{cases}$ تصبح الدالة على النحو:

$$g(x) = (x - 2)e^x$$

التمرين 06:

من أجل كل عدد حقيقي x نعرف الدالة العددية: $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ (و التي تسمى دالة الجيب تمام الزائدي أو القطعي)،

(1) بين أن ch دالة زوجية،

(2) نقتصر في الدراسة على المجال $[0; +\infty[$ ،

(أ) احسب النهاية عند $+\infty$ ،

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة ch ثم شكل جدول التغيرات،

(ج) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{chx}{x}$ ، ماذا تستنتج؟

(د) ارسم (C_{ch}) على المجال $[0; +\infty[$ في مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس،

(3) استنتج المنحنى على $\mathbb{R}$.

حل:

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ و } D_{ch} = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

(1) من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ يكون $ch(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = ch(x)$: $-x \in \mathbb{R}$

إذن الدالة ch زوجية،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} ch(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = +\infty \quad (2) \quad (أ)$$

$$(b) \text{ من أجل كل } x \in [0; +\infty[: \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x} \times \frac{e^{2x} - 1}{2} = e^{-x} \times \frac{e^{2x} - e^0}{2}$$

أي $f'(x) \geq 0$ من أجل كل $x \geq 0$ أي الدالة f متزايدة تماما على $[0; +\infty[$ ،

و بالتالي جدول التغيرات:

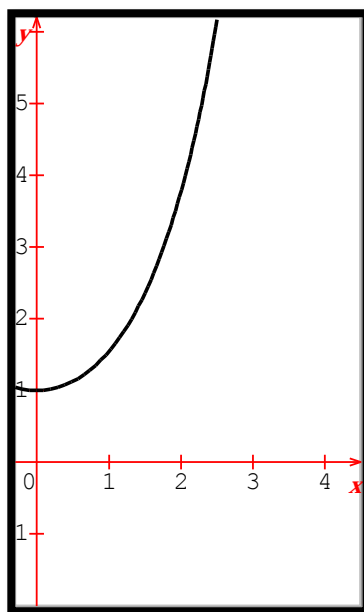
x	0	$+\infty$
$ch'(x)$		+
$ch(x)$	1	$+\infty$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ch(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{e^x}{x} + \frac{1}{xe^x} \right) = +\infty$$

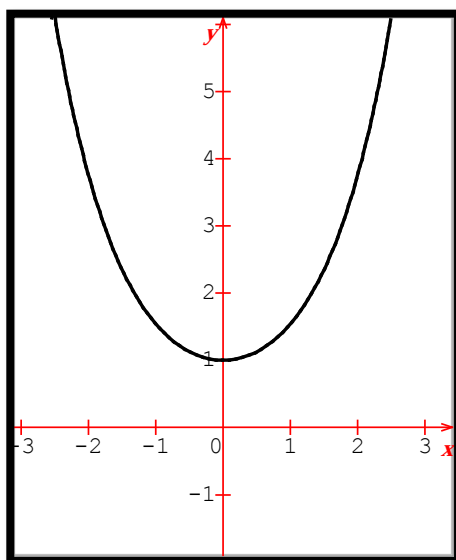
أي منحنى الدالة يملك فرعا لانهائيا منحاه محور الترتيب،

يمكن الاعتماد على جدول لبعض قيم الدالة f لتجنب المرور بالمصطلح "الفروع اللانهائية"،

(د) اعتمادا على جدول التغيرات لدينا:



(3) كون الدالة ch زوجية و منه منحنى الدالة متناظر بالنسبة لمحور الترتيب أي:



يمكن ملاحظة أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $ch(x) > 0$.

التمرين 07:

من أجل كل عدد حقيقي x نعرف الدالة العددية: $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (و التي تسمى دالة الجيب الزائدي أو القطعي)

(1) يبين أن sh دالة فردية،

(2) تقتصر في الدراسة على المجال $[0; +\infty[$ ،

(أ) احسب النهاية عند $+\infty$ ،

(ب) ادرس اتجاه تغير الدالة sh ثم شكل جدول التغيرات،

(ج) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (chx - shx)$ ، ماذا تستنتج؟

(د) ارسم (C_{sh}) على المجال $[0; +\infty[$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس،

(3) استنتج رسم المنحنى.

حل:

$$، D_{sh} = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[\text{ و } shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$(1) \text{ من أجل كل } x \in \mathbb{R} \text{ و } -x \in \mathbb{R} ، sh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -sh(x) ،$$

$$(2) \uparrow \lim_{x \rightarrow +\infty} sh(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = +\infty$$

$$(ب) \text{ من أجل كل } x \in [0; +\infty[: (sh(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = ch(x) > 0$$

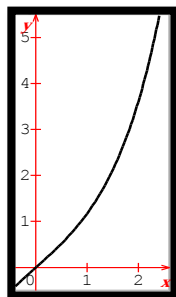
أي الدالة sh متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ، و بالتالي جدول التغيرات:

x	0	$+\infty$
$sh'(x)$		+
$sh(x)$	0	$+\infty$

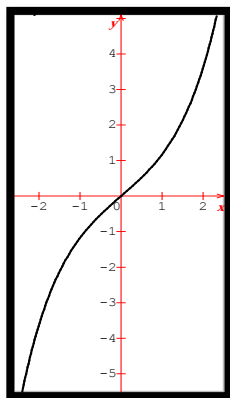
$$(ج) \lim_{x \rightarrow +\infty} (ch(x) - sh(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

و منه نستنتج أن منحنى الدالة ch يقارب منحنى الدالة sh في جوار $+\infty$ ،

(د) رسم منحنى الدالة sh على المجال $[0; +\infty[$:



(3) من فردية الدالة يمكننا إتمام بقية الرسم بالتناظر بالنسبة لمحور للمبدأ:



$$\text{ملاحظة: يمكن تعريف "الظل الزائدي أو القطعي" بـ } th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

التمرين 08:

بين الخواص التالية و هذا من أجل $a, b \in \mathbb{R}$:

- $ch(a+b) = ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b)$
- $sh(a+b) = sh(a)ch(b) + sh(b)ch(a)$
- $ch(2a) = ch^2(a) + sh^2(a)$
- $sh(2a) = 2sh(a)ch(a)$
- $ch^2(a) - sh^2(a) = 1$
- $ch(2a) = 2ch^2(a) - 1$
- $ch(2a) = 2sh^2(a) + 1$

حل:

ليكن $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} ch(a)ch(b) + sh(a)sh(b) &= \left(\frac{e^a + e^{-a}}{2} \right) \left(\frac{e^b + e^{-b}}{2} \right) + \left(\frac{e^a - e^{-a}}{2} \right) \left(\frac{e^b - e^{-b}}{2} \right) = \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{a-b} + e^{-a+b} + e^{-(a+b)} + e^{a+b} - e^{a-b} - e^{-a+b} - e^{-(a+b)}}{4} = \frac{e^{a+b} + e^{-(a+b)}}{2} = ch(a+b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sh(a)ch(b) + ch(a)sh(b) &= \left(\frac{e^a - e^{-a}}{2} \right) \left(\frac{e^b + e^{-b}}{2} \right) + \left(\frac{e^a + e^{-a}}{2} \right) \left(\frac{e^b - e^{-b}}{2} \right) \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{a-b} - e^{-a+b} - e^{-(a+b)} + e^{a+b} - e^{a-b} + e^{-a+b} - e^{-(a+b)}}{4} = \frac{e^{a+b} - e^{-(a+b)}}{2} \end{aligned}$$

بطريقة مشابهة يمكن تعيين $ch(a-b)$ و $sh(a-b)$ (ترك للقارئ)

- من العلاقة الأولى و بوضع $a=b$ نجد: $ch(2a) = ch^2(a) + sh^2(a)$ و من العلاقة الثانية نجد: $sh(2a) = 2ch(a) \times sh(a)$

$$ch^2(a) - sh^2(a) = \left(\frac{e^a + e^{-a}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^a - e^{-a}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2a} + e^{-2a} + 2 - e^{2a} - e^{-2a} + 2}{4} = 1$$

- من العلاقة المبينة أخيرا نجد $ch^2(x) = 1 + sh^2(x)$ عن التعويض في العلاقة (3) نجد: $ch^2(2a) = 1 + sh^2(a) + sh^2(a) = 2sh^2(a) + 1$ وكذلك يمكن استنتاج: $sh^2(a) = ch^2(a) - 1$ و منه في التعويض بالعلاقة (3) نجد: $ch(2a) = ch^2(a) - 1 + ch^2(a) = 2ch^2(a) - 1$

التمرين 09:

إذا علمت أن: $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ و $n \in \mathbb{N}^*$ ، بحيث اصطلح أن: $0! = 1$.

لتكن المتتاليتان $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$ و $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ حيث: $n \in \mathbb{N}$ ،

(1) أثبت أن $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متقاربتان نحو نفس النهاية. العدد e الأساس النييري هو نهاية مشتركة للمتتاليتين،

(2) تأكد أن $u_n < e < v_n$ من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}^*$ ،

(3) بالخلف نفرض أن e عدد ناطق أي يوجد $p \in \mathbb{Z}$ ، $q \in \mathbb{Z}^*$ حيث: $e = \frac{p}{q}$ ،

(أ) تأكد أن $q!u_q < p(q-1)! < q!u_q + 1$ ،

(ب) استنتج أن e عدد أصم.

حل:

(1) لتأكد بداية أن المتتاليتان $(u_n)_n$ و $(v_n)_n$ متقاربتان:

بالنسبة لـ $(u_n)_n$:

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ أي المتتالية $(u_n)_n$ متزايدة تماما،

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} > \frac{1}{2!} & 2 < 2! & \\ \frac{1}{2^2} > \frac{1}{3!} & 2 \times 2 < 3! & \\ \vdots & \vdots & \text{ولدينا:} \\ \frac{1}{2^{n-1}} > \frac{1}{n!} & 2 \times 2 \times \dots \times 2 < n! & \end{array}$$

أي بالجمع طرف لطرف:

$$3 \geq 1 + 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \geq u_n > 0$$

أي المتتالية $(u_n)_n$ متزايدة ومحدودة من الأعلى إذن هي متقاربة، ولتكن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$ هذا من جهة:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n + \frac{1}{n!} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e$$

(2)

وجدنا سابقا $(u_n)_n$ متتالية متزايدة تماما من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، أي: $u_n < e$ حيث $n \in \mathbb{N}$ مثبت،

وكذلك لدينا: $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{n+1}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leq 0$ ، $n \in \mathbb{N}^*$

أي المتتالية $(v_n)_n$ متناقصة تماما، ومنه $v_n > e$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ مثبت،

(3) ليكن فرضا $e = \frac{p}{q}$ مع $p \in \mathbb{Z}$ ، $q \in \mathbb{Z}^*$ ،

أ/ من المتباينة المضاعفة السابقة يمكن كتابة: $u_n < \frac{p}{q} < v_n$ من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ أي: $u_n < \frac{p}{q} < u_n + \frac{1}{n!}$ ومنه
 العلاقة $qu_n < p < qu_n + \frac{q}{n!}$ لما كانت هذه العلاقة محققة من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ يكفي أخذ $n=q$ تصبح العلاقة
 $qu_q < p < qu_q + \frac{q}{q!}$ ومنه $qu_q \leq p \leq qu_q + \frac{1}{(q-1)!}$ أي: $qu_q \leq p \leq qu_q + 1$ أي: $q(q-1)!u_q < p < q(q-1)!u_q + 1$ ومنه:
 ومن جهة أخرى نعلم أن $p(q-1)! \in \mathbb{N}$ و $q!u_q < p < q!u_q + 1$
 و $p(q-1)! \in \mathbb{N}$ وجدنا عددا طبيعيا $p(q-1)!$ أي: $q!u_q = q! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!} \right) = 2q! + 3 \times 4 \times \dots \times n + 4 \times \dots \times n + \dots + 1 \in \mathbb{N}$
 محصورا بين عددين طبيعيين متعاقبين وهو التناقض المرتقب.
 ب/ وهذا كاف للقول أن العدد e ليس ناطقا .

التمرين 10:

- f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$
 و (C) التمثيل البياني للدالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$
 1. أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x :
 $f(x) = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}$ و $f(x) = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$
 ب) جد نهايات الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$ ،
 ج) بين أن المستقيمين $(\Delta_1), (\Delta_2)$ الذين معادلتيهما على الترتيب:
 $y = x + 1$ و $y = x - 1$ مقاربان مائلان لـ (C)،
 د) ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى كل من $(\Delta_1), (\Delta_2)$ ،
 2. أ) بين أن الدالة f فردية،
 ب) ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; +\infty[$ ،
 ج) جد معادلة مماس المنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها 0،
 د) أنشئ $(\Delta_1), (\Delta_2)$ ، ثم المنحني (C).

حل:

$$f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \quad \text{و} \quad D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

1- أ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = x - \frac{e^x + 1 - 2}{e^x + 1} = x - 1 + \frac{2}{e^x + 1} \dots (1)$$

$$\text{و} \quad f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = x - \frac{2e^x - (e^x + 1)}{e^x + 1} = x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1} \dots (2)$$

(ب) النهايات عند $+\infty$ و $-\infty$:العبارة (1) أنسب لحساب النهاية عند $+\infty$:

$$، \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{(1) x \rightarrow +\infty} \left(x - 1 + \frac{2}{e^x + 1} \right) = +\infty$$

العبارة (2) أنسب لحساب النهاية عند $-\infty$:

$$، \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{(2) x \rightarrow -\infty} \left(x + 1 - \frac{2e^x}{e^x + 1} \right) = -\infty$$

(ج) من العبارة (1) لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e^x + 1} \right) = 0$ إذن $y = x - 1$ (Δ_2) مقارب مائل لمنحنى الدالة f في جوار $+\infty$ ،كذلك من العبارة (2) لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2e^x}{e^x + 1} \right) = 0$ إذن $y = x + 1$ (Δ_1) مقارب مائل لمنحنى الدالة f في جوار $-\infty$ ،(د) دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيمين المقاربين (Δ_1): (Δ_2):
• بالنسبة للمستقيم (Δ_1):

$$، \mathbb{R} \text{ من } x \text{ من أجل كل } f(x) - y = -\frac{2e^x}{e^x + 1} < 0$$

↑
العبارة (2)

إذن منحنى الدالة f يقع تحت (Δ_1)،• بالنسبة للمستقيم (Δ_2):

$$، \mathbb{R} \text{ من } x \text{ من أجل كل } f(x) - y = \frac{2}{e^x + 1} > 0$$

↑
العبارة (1)

إذن منحنى الدالة f يقع فوق (Δ_1)،2-أ) من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ و $-x \in \mathbb{R}$:

$$f(-x) = -x - \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = -\left(x + \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} \right) = -\left(x + \frac{1 - e^x}{1 + e^x} \right) = -\left(x - \frac{e^x - 1}{1 + e^x} \right) = -f(x)$$

إذن الدالة f فردية،(ب) دراسة تغيرات f على المجال $[0; +\infty[$:المشتقة: من أجل كل x من $[0; +\infty[$:

$$f'(x) = \left(x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)' = 1 - \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 1 + 2e^x - 2e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2} > 0$$

أي الدالة f دالة متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$ ، و منه جدول التغيرات:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

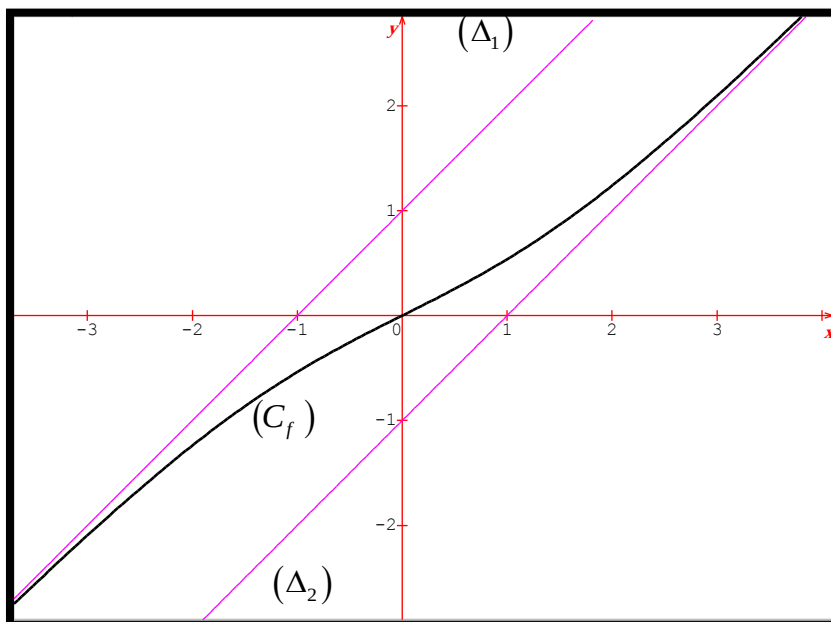
(ج) معادلة المماس للمنحنى (C_f) عن النقطة ذات الفاصلة 0:

$$y = f'(0)x + f(0) \quad \text{أي: } y = \frac{1}{2}x$$

نلاحظ أن النقطة $(0;0)$ نقطة انعطاف.

(د) إنشاء الرسم:

اعتمادا على جدول التغيرات و الوضعية النسبية، و فردية الدالة يمكن إنشاء الرسم:



التمرين 11

نعتبر المعادلتين التفاضليتين:

$$(E_1): y' = 2y \quad \text{و} \quad (E_2): y' = y$$

1. أ) حل المعادلتين: $(E_1), (E_2)$,ب) عين الحل الخاص f_1 للمعادلة (E_1) بحيث: $f_1'(0) = 2$,ج) عين الحل الخاص f_2 للمعادلة (E_2) بحيث: $f_2'(0) = 2$,2. لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^{2x} - 2e^x$,(C) التمثيل البياني للدالة g في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$,• ادرس نهاية الدالة g عند $-\infty$ وعند $+\infty$,• استنتج وجود مستقيم مقارب (d) يطلب تعيين معادلة له،• احسب $g'(x)$,• ادرس إشارة $g'(x)$ ثم شكل جدول تقيُّرات g ,• أثبت أن المنحنى (C) الممثل للدالة g يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α ,حيث: $0.6 < \alpha < 0.7$,• أنشئ المنحنى (C) الممثل للدالة g في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

حل:

$$(E_2): y' = y \quad \text{و} \quad (E_1): y' = 2y$$

1. حل المعادلتين التفاضليتين:

$$\text{المعادلة } (E_1): y = C_1 e^{2x}, C_1 \in \mathbb{R} \quad , \quad \text{المعادلة } (E_2): y = C_2 e^x, C_2 \in \mathbb{R}$$

(ب) تعيين الحل الخاص f_1 للمعادلة (E_1) مع $f_1'(0) = 2$ معناه: $2C_1 = 2$ أي: $f_1'(x) = e^{2x}$

(ج) تعيين الحل الخاص f_2 للمعادلة (E_2) مع $f_2'(0) = 2$ معناه: $C_2 = 2$ أي: $f_2(x) = 2e^x$

$$2. \quad D_g = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad g(x) = e^{2x} - 2e^x$$

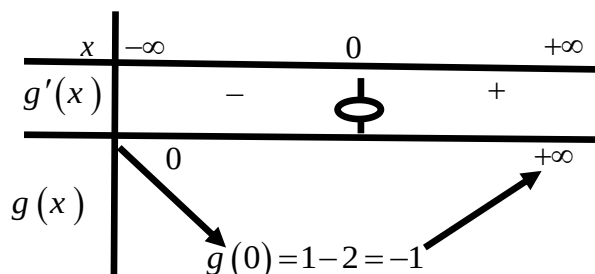
• حساب النهايات عند $-\infty$ و عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - 2e^x) = 0 \quad \text{و منه } y = 0 \text{ معادلة مستقيم مقارب أفقي في جوار } -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - 2e^x) = +\infty - \infty \quad \text{هذه حالة عدم التعيين} \quad \text{و بالتالي } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (e^x - 2) = +\infty$$

• مما سبق $y = 0$ (d) مستقيم مقارب أفقي في جوار $-\infty$ • من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x) = (e^{2x} - 2e^x)' = 2(e^{2x} - e^x) = 2e^x(e^x - 1)$ • من أجل $x \geq 0$ لدينا $g'(x) \geq 0$ أي الدالة g متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ • من أجل $x \leq 0$ لدينا $g'(x) \leq 0$ أي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$

و منه جدول التغيرات:

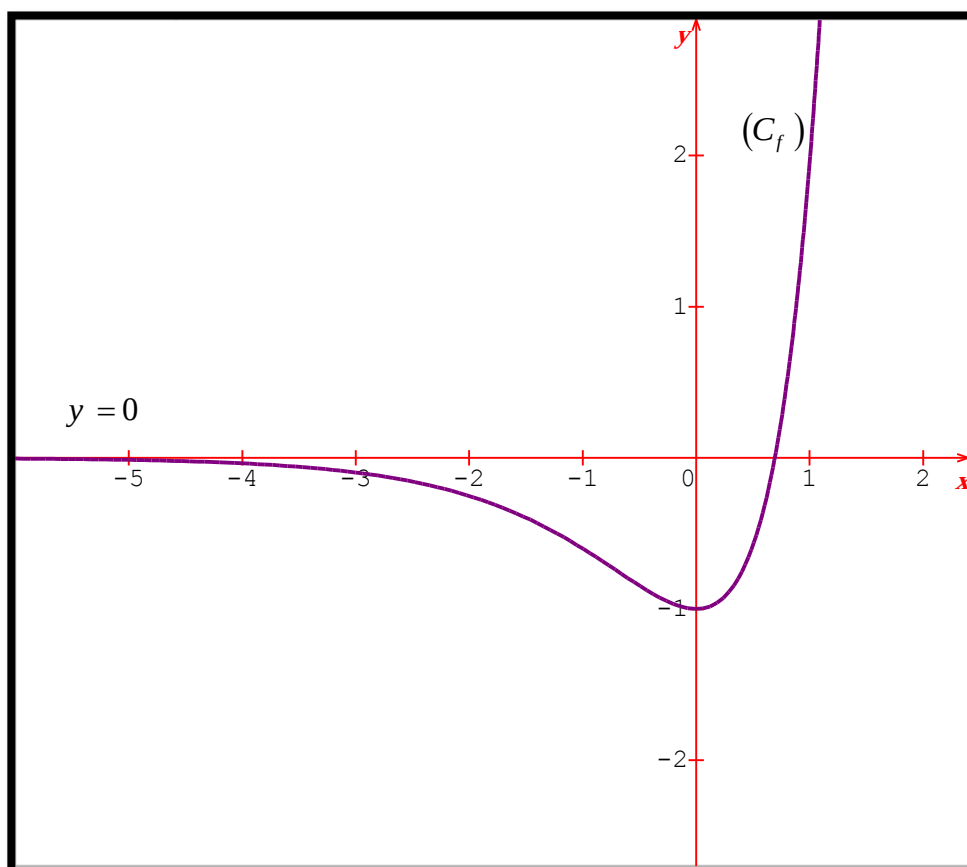
• من جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0, 6; 0, 7[$

$$\text{و } g(0, 6) = e^{1.2} - 2e^{0.6} \approx 3.32 - 3.64 = -0,32 \quad \text{و} \quad g(0, 7) = e^{1.4} - 2e^{0.7} \approx 4,06 - 4,03 = 0,03 \quad \text{بالتالي:}$$

$$g(0, 6) \times g(0, 7) < 0 \quad \text{حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد حل وحيد } \alpha \in]0, 6; 0, 7[\text{ يحقق: } g(\alpha) = 0$$

• إنشاء الرسم:

$$\text{نلاحظ: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 2e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} (e^x - 2) = +\infty \quad \text{أي هناك فرع لا نهائي باتجاه محور الترتيب،}$$



التمرين 12:

أولاً: لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x - 1 - e^{-x}$ ،

(C_f) التمثيل البياني لها في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1/ حدد: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ،

2/ احسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f ،

3/ برهن أن المستقيم (d) ذا المعادلة $y = 2x - 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) في جوار $+\infty$ ،

4/ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $0,72 < \alpha < 0,74$ ،

5/ استنتج إشارة $f(x)$ ،

6/ أنشئ المنحنى (C_f) ،

ثانياً: g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $g(x) = 4x^3 - 3x^2 + 6(x+1)e^{-x}$ ،

1/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x) = 6x f(x)$ ،

2/ استنتج إشارة $g'(x)$ ،

3/ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ (استعمل النهاية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right) = 0$)

4/ شكل جدول تغيرات الدالة g ،

5/ بين أن: $g(\alpha) = 4\alpha^3 + 9\alpha^2 + 6\alpha - 6$ ،

6/ ارسم (C_g) .

حل:
أولاً:

$$f(x) = 2x - 1 - e^{-x} \quad \text{و} \quad D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

1/ حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1 - e^{-x}) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1 - e^{-x}) = +\infty$$

2/ من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = (2x - 1 - e^{-x})' = 2 + e^{-x} > 0$ أي الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ ، ومنه جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3/ من عبارة الدالة f لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) = 0$ ومنه المستقيم $y = 2x - 1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ ، والذي نرمز له بـ (d) ،

4/ من جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة f مستمرة و متزايدة تماماً على المجال $]0,72; 0,74[$ ،

$$f(0,74) = 2(0,74) - 1 - e^{-0,74} \approx 0,48 - 0,477 \approx 0,003 \quad \text{و} \quad f(0,72) = 2(0,72) - 1 - e^{-0,72} \approx 0,44 - 0,49 \approx -0,05$$

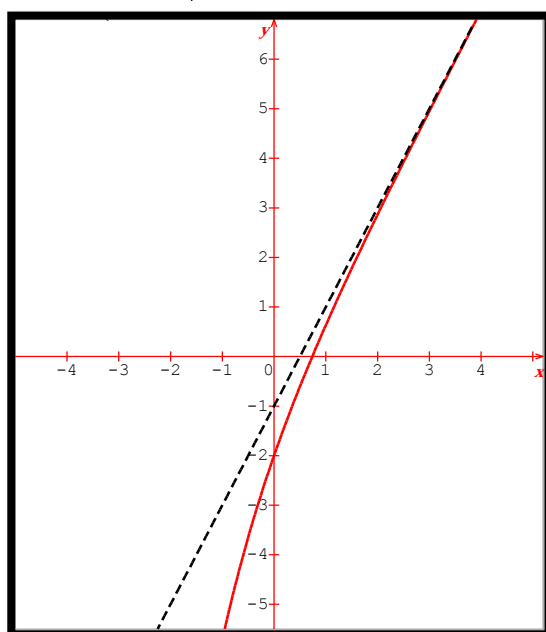
و بالتالي: $f(0,72) \times f(0,74) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد حل وحيد $\alpha \in]0,72; 0,74[$ يحقق: $f(\alpha) = 0$ ،

5/ من جدول التغيرات و الإجابة على السؤال السابق يمكن وضع الجدول:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
إشارة			
$f(x)$	-	0	+

6/ إنشاء الرسم:

هناك فرع لا نهائي باتجاه محور الترتيب. يمكن الاعتماد على جدول لبعض قيم الدالة f لتجنب المرور بالمصطلح "الفروع اللانهائية"،



ثانياً:

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[\text{ و } g(x) = 4x^3 - 3x^2 + 6(x+1)e^{-x}$$

1/ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (4x^3 - 3x^2 + 6(x+1)e^{-x})' = 12x^2 - 6x + 6e^{-x} - 6(x+1)e^{-x} = 12x^2 - 6x + (6 - 6x - 6)e^{-x} \\ &= 12x^2 - 6x - 6xe^{-x} = 6x(2x - 1 - e^{-x}) = 6x f(x) \end{aligned}$$

2/ من الجزء الأول يمكن وضع الجدول الذي يمثل إشارة المشتقة g' :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
x	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$+$

3/ حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^3 - 3x^2 + 6(x+1)e^{-x}) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^3 - 3x^2 + 6(x+1)e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(4x - 3 + 6 \frac{x+1}{x^3} \times \frac{x}{e^x} \right) = +\infty$$

4/ تشكيل جدول التغيرات:

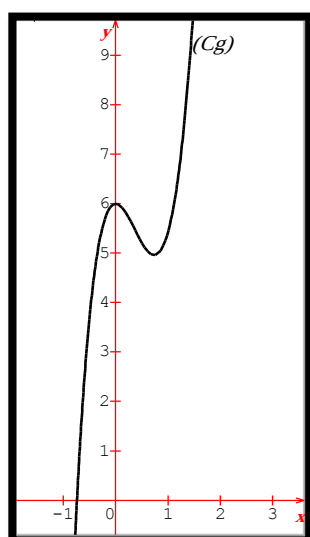
x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$	$-\infty$	6	$g(\alpha)$	$+\infty$

5/ $g(\alpha) = 4\alpha^3 - 3\alpha^2 + 6(\alpha+1)e^{-\alpha}$ و من الجزء الأول لدينا $f(\alpha) = 0$ و منه $e^{-\alpha} = 2\alpha - 1$ عند التعويض في العلاقة

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= 4\alpha^3 - 3\alpha^2 + 6(\alpha+1)(2\alpha-1) = 4\alpha^3 - 3\alpha^2 + 12\alpha^2 + 6\alpha - 6 \\ &= 4\alpha^3 + 9\alpha^2 + 6\alpha - 6 \end{aligned}$$

الأولى نجد:

6/ إنشاء الرسم:



التمرين 13:

الجزء الأول:

لتكن المعادلة التفاضلية: (1) $y' - 2y = xe^x$

1/ حل المعادلة التفاضلية: (2) $y' - 2y = 0$ ، مع: y دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و x من $\mathbb{R}$ ،

2/ ليكن a, b عددين حقيقيين و u الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x) = (ax + b)e^x$ ،

أ) عيّن a, b حتى يكون u حلا للمعادلة (1) ،

ب) برهن أن v حل للمعادلة (2) إذا و فقط إذا كان: $u + v$ حلا للمعادلة (1) ، ثم استنتج مجموعة حلول المعادلة (1) ،

3/ عيّن حل المعادلة (1) الذي ينعدم من أجل $x = 0$ ،

الجزء الثاني:

لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2e^x - x - 2$ ،

1/ عين نهاية g عند: $+\infty$ ، $-\infty$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها ،

2/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ ، تقبل بالضبط حلين حقيقيين في $\mathbb{R}$ ،

تحقق أن 0 هو أحد هذه الحلول ، و نرمز للحل الآخر بالرمز α ، برهن أن: $-1.6 \leq \alpha \leq -1.5$ ، ثم عيّن حسب قيم x إشارة $g(x)$

الجزء الثالث:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي بـ: $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$ ،

1/ عيّن نهاية f عند $+\infty$ ثم عند $-\infty$ ، ثم برهن أن المشتقة f' لها نفس إشارة g ، شكل جدول التغيرات للدالة f ،

2/ برهن أن $f(\alpha) = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ حيث α العدد المعرف في الجزء الثاني ، استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$ ،

3/ ارسم المنحنى (C) الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس (الوحدة : 2 cm) .

حل:

الجزء الأول:

1/ حل المعادلة التفاضلية هو: $y(x) = Ce^{2x}$ ، حيث C ثابت حقيقي ،

2/

أ) تعيين a, b : عند تعويض $u(x) = (ax + b)e^x$ في المعادلة (1) و بالمقارنة نجد: $a = -1, b = -1$ ،

ب) ليكن $u + v$ حلا للمعادلة (1) معناه: $(u + v)' - 2(u + v) = u' - 2u + v' - 2v = xe^x$ أي: $v' - 2v = 0$ معناه:

v حل للمعادلة (2) و منه نستنتج حلول المعادلة (1): $y(x) = -(x+1)e^x + Ce^{2x}$ حيث C ثابت حقيقي ،

3/ حل المعادلة (1) الذي ينعدم عند 0 هو: $y(x) = -(x+1)e^x + e^{2x}$ ،

الجزء الثاني:

لدينا: $g(x) = 2e^x - x - 2$ و $D_g = \mathbb{R}$

1/ حساب النهايات:

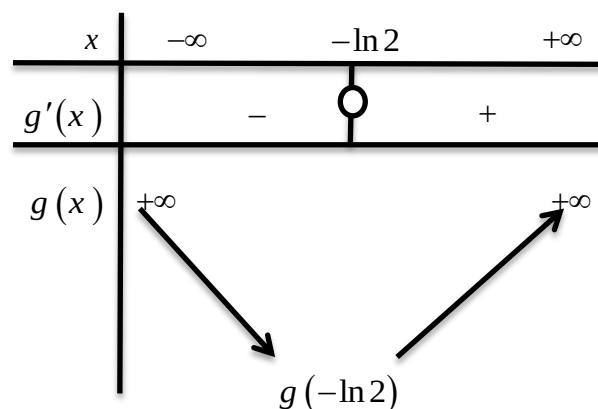
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x - x - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 \times \frac{e^x}{x} - 1 - \frac{2}{x} \right) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - x - 2) = +\infty$$

* دراسة اتجاه تغير الدالة g :

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$g'(x) = (2e^x - x - 2)' = 2e^x - 1 = 2\left(e^x - \frac{1}{2}\right) = 2\left(e^x - e^{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right)$$

أي جدول التغيرات:

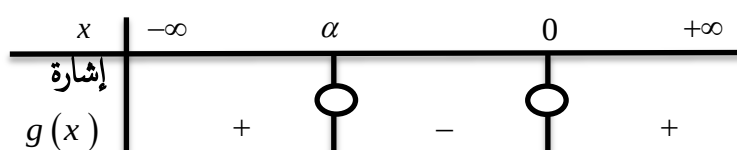


$$\text{مع: } g\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 1 + \ln(2) - 2 = \ln(2) - 1 \approx -0,31 < 0$$

2/ عند ملاحظة جدول التغيرات نجد:

* g دالة مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]-\infty; -\ln 2[$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \times g(-\ln 2) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطةيوجد و وحيد $\alpha \in]-\infty; -\ln 2[$ حيث: $g(\alpha) = 0$ * g دالة مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\ln 2; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \times g(-\ln 2) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطةيوجد و وحيد $\beta \in]-\ln 2; +\infty[$ حيث: $g(\beta) = 0$ هنا من جهة و من جهة أخرى عند حساب صورة العدد 0 نجد: $g(0) = 2 - 0 - 2 = 0$ أي: $\beta = 0$ ،
وكون $]-1,6; -1,5[\subset]-\infty; -\ln 2[$ يكفي التأكيد أن $g(-1,6) \times g(-1,5) < 0$ لدينا: —————

$$g(-1,5) = 2e^{-1,5} + 1,5 - 2 \approx -0,054 \text{ و } g(-1,6) = 2e^{-1,6} + 1,6 - 2 \approx 0,004$$

حقا $g(-1,6) \times g(-1,5) < 0$ و منه $\alpha \in]-1,6; -1,5[$ و منه إشارة الدالة g على $\mathbb{R}$:

الجزء الثالث:

1/ النهايات:

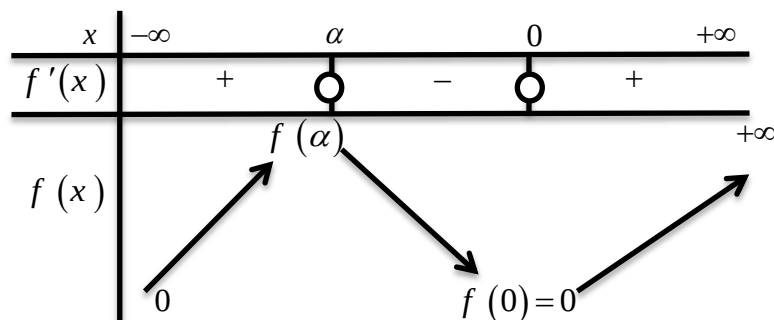
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - (x+1)e^x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - x e^x - e^x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{2x} - (x+1)e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} \left(1 - \left(\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)\right) = +\infty \text{ و}$$

من أجل كل حقيقي x لدينا:

$$g'(x) = (e^{2x} - (x+1)e^x)' = 2e^{2x} - (x+2)e^x = e^x (2e^x - x - 2) = e^x g(x)$$

و منه جدول التغيرات:



١٢ عند ملاحظة أن $g(\alpha) = 0$ أي $e^\alpha = \frac{\alpha+2}{2}$ بالتعويض في العبارة:

$$f(\alpha) = (e^\alpha)^2 - (\alpha+1)e^\alpha = \frac{\alpha^2 + 4\alpha + 4}{4} - \frac{2\alpha^2 + 6\alpha^2 + 4}{4} = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$$

و منه يمكن استنتاج حصر لـ $f(\alpha)$:

لدينا $-1,6 < \alpha < -1,5$ أي: $2,25 < \alpha^2 < 2,56$ و منه $-0,95 < \alpha^2 + 2\alpha < -0,44$ و أخيرا $0,2375 < f(\alpha) < 0,11$.

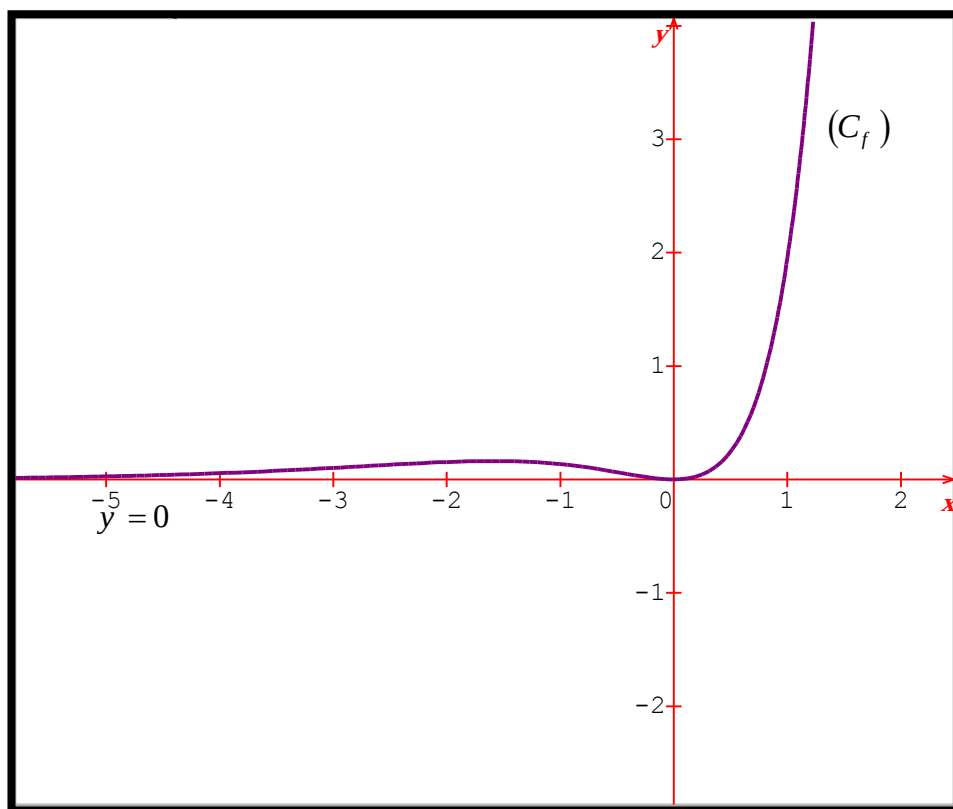
١٣ الرسم: الوحدة 2 cm :

نلاحظ:

* $y = 0$ معادلة مستقيم مقارب أفقي لمنحنى الدالة f في جوار $-\infty$ ،

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - (x+1)e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^x \left(\frac{e^x}{x} - \frac{x+1}{x} \right) \right) = +\infty$ ، أي هناك فرع لانهائي باتجاه محور الترتيب.

يمكن الاعتماد على جدول لبعض قيم الدالة f لتجنب المرور بمصطلح "الفروع اللانهائية"،



التمرين 14:

أولاً:

- f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$ ،
 و (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ،
 1- ادرس تغيرات الدالة f ،
 2- بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف ω و أكتب معادلة لمماس (C_f) عند النقطة ω ،
 - أثبت أن ω مركز تناظر للمنحنى (C_f) ،
 3- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)]$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 3)]$ ،
 - استنتج أن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما،
 4- بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2,77; -2,76[$ ،
 - احسب $f(1)$ و $f(-1)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ثم ارسم (C_f) و مستقيمه المقاربين،

ثانياً:

- g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $g(x) = -x + 3 - \frac{4}{e^x + 1}$ ، (C_g) منحنى الدالة g .
 1- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $g(x) = f(-x)$ ،
 - استنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول (C_f) إلى (C_g) ،
 2- أنشئ في نفس المعلم السابق (C_g) (دون دراسة الدالة g).

حل:

أولاً:

1/ دراسة التغيرات:

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$$

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} \right) = +\infty$$

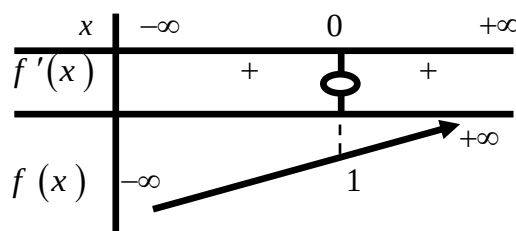
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} \right) = -\infty$$

المشتقة: من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x) = \left(x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} \right)' = 1 - \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x + 1)^2} = \frac{(e^x - 1)^2}{(e^x + 1)^2} \geq 0$$

و منه الدالة f متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$

يمكن إنشاء جدول التغيرات:

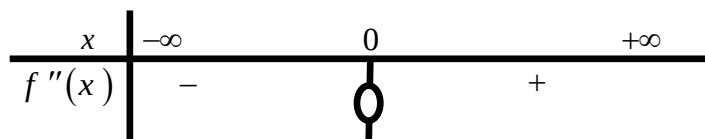


2/ من جدول التغيرات السابق يمكن أن نستنتج أن النقطة (0;1) نقطة انعطاف، وهذا لانعدام المشتقة الأولى عند 1 و عدم تغير إشارتها، أو نحسب المشتقة الثانية من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$f''(x) = -4 \times \left(\frac{e^x (e^x + 1)^2 - 2e^{2x} (e^x + 1)}{(e^x + 1)^4} \right) = -4e^x \times \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - 2e^{2x} - 2e^x}{(e^x + 1)^4} =$$

$$= 4e^x \times \frac{e^{2x} - 1}{(e^x + 1)^4} = \frac{4e^x (e^x + 1)(e^x - 1)}{(e^x + 1)^4}$$

جدول إشارة $f''(x)$:



المشتقة الثانية تنعدم مغيرة إشارتها عند 0، و منه: $\omega(0; f(0))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f و بالتعويض الواضح نجد: $\omega(0;1)$ ،
• تعيين معادلة المماس عند نقطة الانعطاف:

لدينا: $y = f'(0)x + f(0)$ و منه: $y = 1$ ،

- لنثبت أن ω مركز تناظر:

ليكن $x \in \mathbb{R}$ و منه $-x \in \mathbb{R}$ و هذا لتناظر المجموعة $\mathbb{R}$ ،

$$f(x) + f(-x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} - x - 1 + \frac{4}{e^{-x} + 1} = -2 + \frac{4}{e^x + 1} + \frac{4e^x}{e^x + 1} = 4 - 2 = 2 = 2 \times (1)$$

و منه ω مركز تناظر لمنحنى الدالة f ،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4}{e^x + 1} \right] = 0 / 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 3)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} - (x + 3) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-1 + \frac{4}{e^x + 1} - 3 \right] = 0$$

- و من النهايتين السابقتين نستنتج أن:

$y = x - 1$ معادلة مستقيم مقارب مائل في جوار $+\infty$ ، و $y = x + 3$ معادلة مستقيم مقارب مائل في جوار $-\infty$ لمنحنى الدالة f

4/ لنبين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2.77; -2.76[$:

معناه نبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $x_0 \in]-2.77; -2.76[$ لأجل هذا من جدول التغيرات:

f دالة مستمرة و رتيبة تماما (متزايدة تماما) على المجال $]-2.77; -2.76[$ و $f(-2.77) \times f(-2.76) < 0$ لأن:

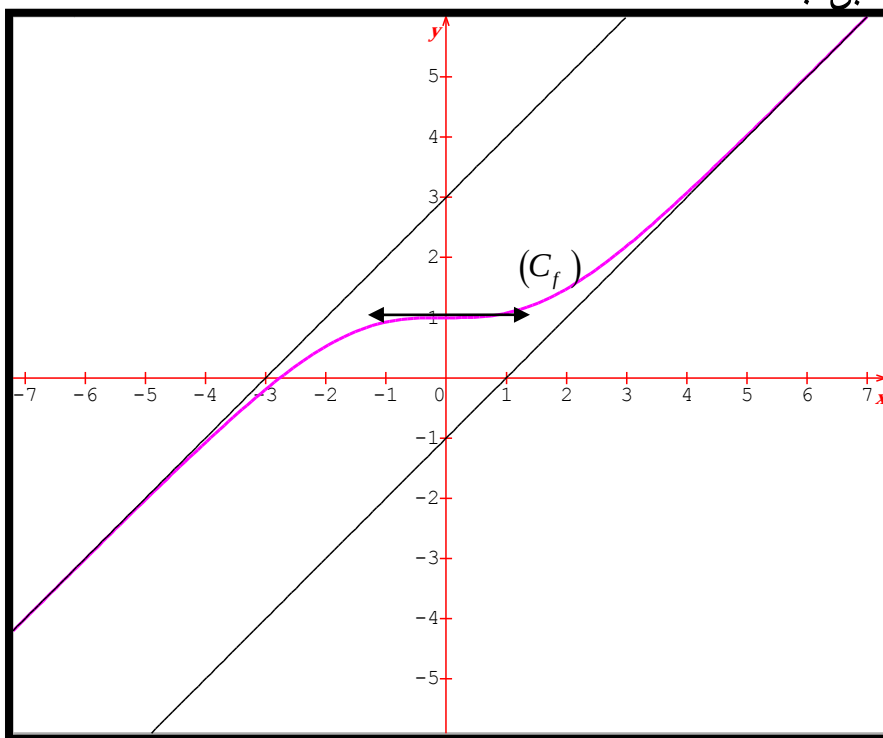
$$f(-2.76) = -3.76 + \frac{4}{e^{-2.76} + 1} \simeq 0.002 \text{ و } f(-2.77) = -3.77 + \frac{4}{e^{-2.77} + 1} \simeq -0.006$$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد حل وحيد $x_0 \in]-2.77; -2.76[$ يحقق: $f(x_0) = 0$ ،

- حساب $f(1)$ و $f(-1)$ (تدور النتيجة إلى 10^{-2}):

$$f(-1) = -2 + \frac{4e}{e+1} \approx 0,92 \text{ و } f(1) = \frac{4}{e+1} \approx 1,08$$

*رسم (C_f) ، اعتمادا على ما سبق نجد:



$$D_g = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[\text{ و } g(x) = -x + 3 - \frac{4}{e^x + 1}$$

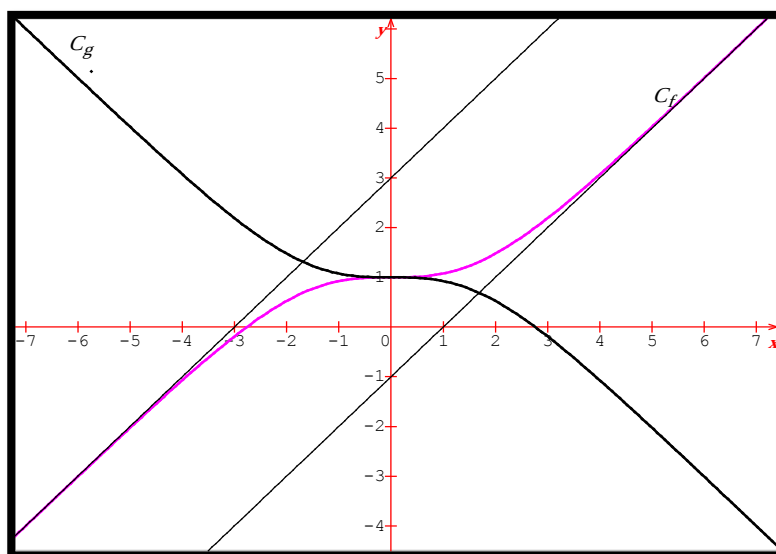
ثانياً:

1/ ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = -x + 3 - \frac{4}{e^x + 1} = -x - 1 + 4 - \frac{4}{e^x + 1} = -x - 1 + \frac{4e^x + 4 - 4}{e^x + 1} = -x - 1 + \frac{4e^x}{e^x + 1} = f(-x)$$

- من العلاقة الموجودة سابقا بين الدالة g و الدالة f يمكن أن نستنتج أن (C_g) نظير (C_f) بالنسبة لمحور الترتيب، إذن التحويل المطلوب هو تناظر بالنسبة لمحور الترتيب،

2/ إنشاء (C_g) : دون دراسة،



التمرين 15:

أولاً:

$g(x) = (2-x)e^x - 1$: كما يلي: $\mathbb{R}$ الدالة العددية المعرفة على

1/ ادرس تغيرات الدالة g ،

2/ بين أن للمعادلة $g(x) = 0$ في $\mathbb{R}$ حلان α و β حيث: $-1,2 < \alpha < -1,1$ و $1,8 < \beta < 1,9$ ،

3/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ ،

ثانياً:

$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$: كما يلي: $\mathbb{R}$ الدالة العددية المعرفة على (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم

متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ،

1/ احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$ و فسر النتيجة هندسياً ،

2/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها ،

3/ بين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ و استنتج حصراً للعددين $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ ،

4/ احسب $f(1)$ ثم ارسم المنحنى (C_f) .

حل:

أولاً:

لدينا: $g(x) = (2-x)e^x - 1$ و $D_g = \mathbb{R}$

1/ دراسة تغيرات الدالة g :

النهايات:

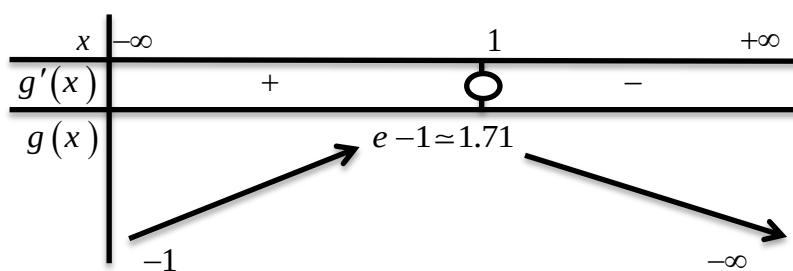
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ((2-x)e^x - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2e^x - xe^x - 1) = -1^*$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((2-x)e^x - 1) = -\infty^*$$

المشتقة:

$$g'(x) = ((2-x)e^x - 1)' = (-1+2-x)e^x = (1-x)e^x : \mathbb{R} \text{ من } x \text{ كل}$$

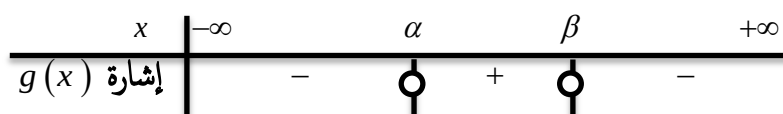
و منه جدول التغيرات:



2/ من جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ ، فهي مستمرة على المجالين $[-1, 2; -1, 1]$ و $[1, 8; 1, 9]$ متزايدة تماماً على المجال $]-\infty; 1]$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \times g(1) < 0$ و بالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد و وحيد $\alpha \in]-\infty; 1]$ حيث: $g(\alpha) = 0$ و كون $]-1, 2; -1, 1] \subset]-\infty; 1]$ يكفي التأكد أن $g(-1.2) \times g(-1.1) < 0$ ؟ لدينا $g(-1.2) = (2+1.2)e^{-1.2} - 1 \approx -0.036 < 0$ و $g(-1.1) = (2+1.1)e^{-1.1} - 1 \approx 0.032 > 0$ و منه $g(-1.2) \times g(-1.1) < 0$ و بالتالي: $\alpha \in]-1, 2; -1, 1]$.

* و متناقصة تماماً على المجال $[1; +\infty[$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \times g(1) < 0$ و بالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد و وحيد $\beta \in [1; +\infty[$ حيث: $g(\beta) = 0$ و كون $[1, 8; 1, 9] \subset [1; +\infty[$ يكفي التأكد أن $g(1.8) \times g(1.9) < 0$ ؟ لدينا $g(1.8) = (2-1.8)e^{1.8} - 1 \approx 0.21 > 0$ و $g(1.9) = (2-1.9)e^{1.9} - 1 \approx -0.33 < 0$ و منه $g(1.8) \times g(1.9) < 0$ و بالتالي: $\beta \in [1, 8; 1, 9]$.

3/ من جدول التغيرات و الجواب السابق نستنتج إشارة الدالة g :



ثانياً:

$$\text{لدينا } f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \text{ و } D_f = \mathbb{R}$$

1/ حساب النهايتين:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x - 1}{e^x - x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - e^{-x}}{1 - \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)}} \right) = 1$$

التفسير الهندسي: المنحنى (C_f) يقبل مستقيماً مقارباً أفقياً معادلته $y = 1$ في جوار $+\infty$ ،

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x - 1}{e^x - x} \right) = 0 \text{ و التفسير الهندسي: المنحنى } (C_f) \text{ يقبل مستقيماً مقارباً أفقياً معادلته } y = 0 \text{ في جوار } -\infty$$

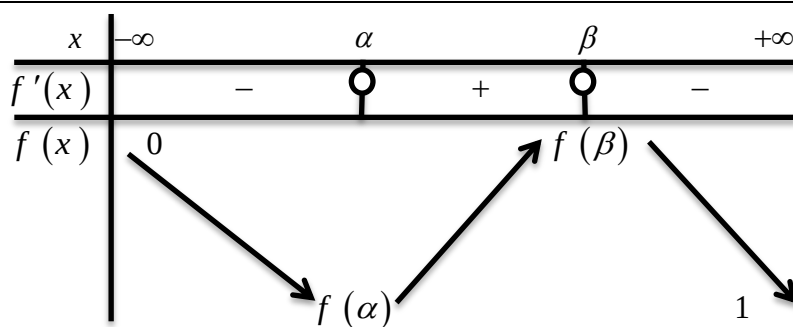
2/ من أجل كل عدد حقيقي $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x - x} \right)' = \frac{e^{2x} - x e^x - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2} = \frac{e^{2x} - x e^x - e^{2x} + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{(2-x)e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{g(x)}{(e^x - x)^2}$$

و من الجزء الأول نستنتج:

* f دالة متناقصة تماماً على المجالين $]-\infty; \alpha]$ و $[\beta; +\infty[$ ،

* f دالة متزايدة تماماً على المجال $[\alpha; \beta]$ ،



3/ نعلم أن $g(\alpha) = 0$ (أو $g(\beta) = 0$) (*) معناه $(2-\alpha)e^\alpha = 1$ أي: $e^\alpha = \frac{1}{2-\alpha}$ ، هذا من جهة ومن جهة أخرى:

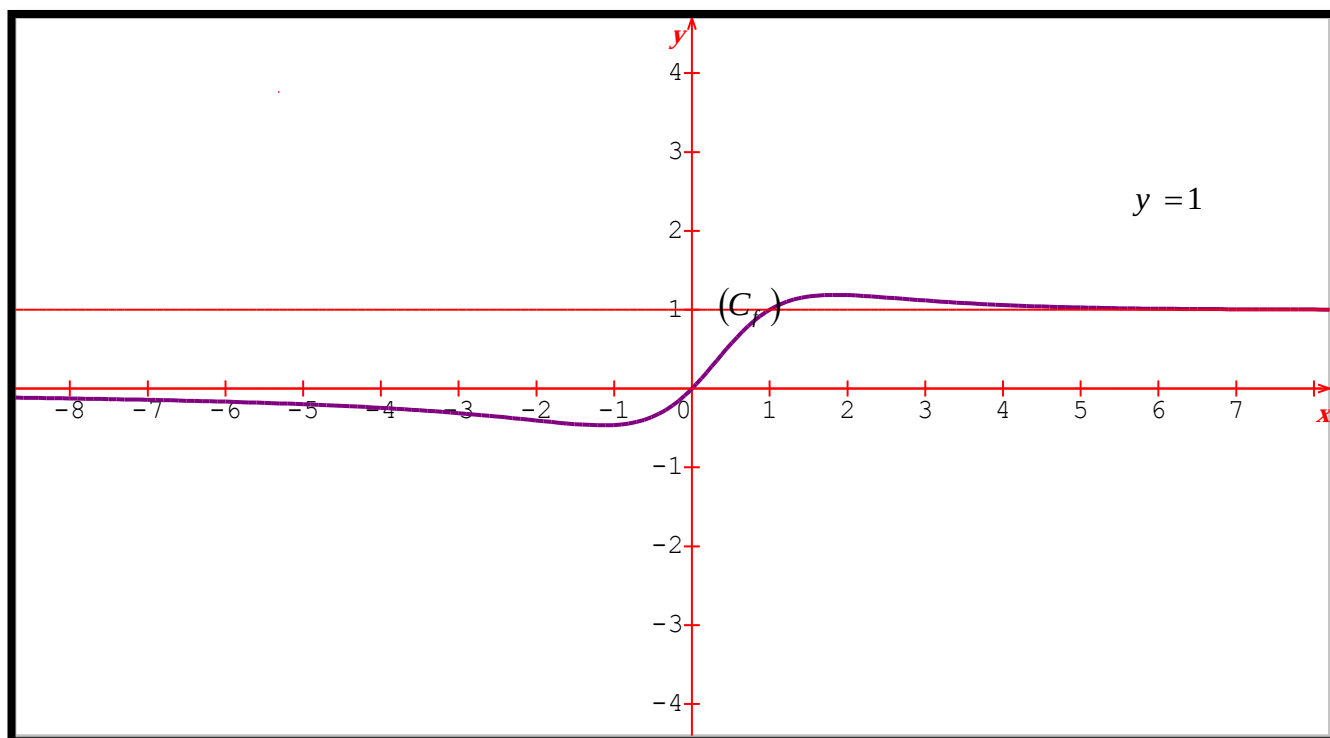
$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha - \alpha} = \frac{\frac{1}{2-\alpha} - 1}{\frac{1}{2-\alpha} - \alpha} = \frac{1-2+\alpha}{1-2\alpha+\alpha^2} = \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)^2} = \frac{1}{\alpha-1}$$

وكون $\alpha \in]-1.2; -1.1]$ معناه $-2.2 < \alpha - 1 < -2.1$ أي: $-0.48 < f(\alpha) < -0.45$ ،

ومن (*) يمكن الحصول على: $f(\beta) = \frac{1}{\beta-1}$ و بما سبق لدينا $1.8 < \beta < 1.9$ أي: $0.8 < \beta - 1 < 0.9$ ومنه:

$$1.11 < f(\beta) < 1.25$$

4/ لدينا $f(1) = 1$ ، رسم المنحنى (C_f) :



التمرين 16:

أولاً:

$g(x) = \frac{x-1+2e^x}{e^x}$ دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

- (1) ادرس تغيرات الدالة g ،
- (2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في $\mathbb{R}$ و $-1 < \alpha < 0$ ،
- (3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$ ،

ثانياً:

f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$ ،

- (1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$ ،
- (2) ادرس تغيرات الدالة f ،
- (3) بين أن المستقيم ذي المعادلة $y = 2x + 1$ (Δ) مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$ ،
- (4) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ) ،
- (5) بين أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف ،
- (6) بين أن: $f(\alpha) = 2\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha - 1}$ ،
- (7) (Δ_β) مستقيم معادلته: $y = 2x + \beta$ ، عين العدد الحقيقي β حتى يكون (Δ_β) مماساً لـ (C_f) في نقطة يطلب تعيينها ،
- (8) ارسم كلاً من (Δ) ، (Δ_β) ، (C_f) ، تأخذ: $\alpha \approx -0.37$ ،
- (9) ناقش بياناً حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $1 - xe^{-x} = m$.

حل:

أولاً:

$$D_g = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[\quad \text{و} \quad g(x) = \frac{x-1+2e^x}{e^x}$$

(1) دراسة التغيرات:

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x-1+2e^x}{e^x} \right) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^x} (x-1+2e^x) \right) = \frac{1}{0^+} \times (-\infty) = -\infty \\ \text{أو} \\ x = -t, \quad x \rightarrow -\infty \Leftrightarrow t \rightarrow +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} (-te^t - e^t + 2) = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1+2e^x}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\left(\frac{e^x}{x} \right)} - \frac{1}{e^x} + 2 \right) = 2$$

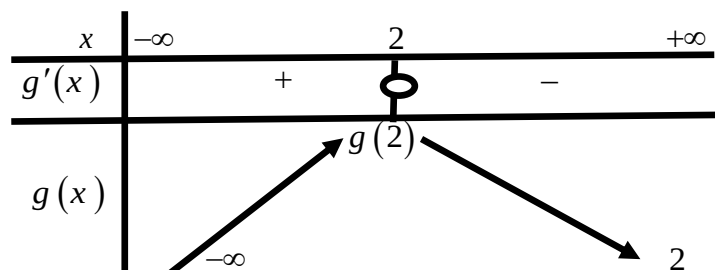
نستنتج أن منحنى الدالة g يقبل مستقيماً مقارباً أفقياً في جوار $+\infty$ معادلته: $y = 2$ ،

المشتقة:

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = \left(\frac{x-1+2e^x}{e^x} \right)' = \frac{(1+2e^x)e^x - e^x(x-1+2e^x)}{e^{2x}} = \frac{1+2e^x - x + 1 - 2e^x}{e^x} = \frac{2-x}{e^x}$$

و منه جدول التغيرات:



$$g(2) = \frac{1+2e^2}{e^2} \approx 2,14$$

(2) من جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة g مستمرة على $\mathbb{R}$ ولدينا حالتان:

* g متناقصة تماما على المجال $[2; +\infty[$ و من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $g(x) \geq 2 > 0$ أي المعادلة $g(x) = 0$ لا تقبل حولا في المجال $[2; +\infty[$,

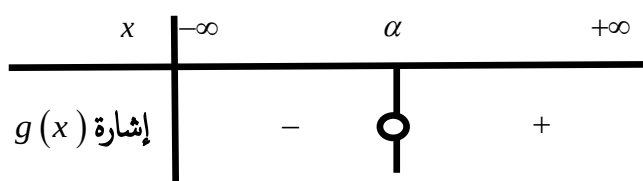
* و g متزايدة تماما على المجال $]-\infty; 2]$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \times g(2) < 0$ وبالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد حل وحيد $\alpha \in]-\infty; 2[$ تحقق: $g(\alpha) = 0$,

* خلاصة: المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في مجموعة الأعداد الحقيقية،

ولما كان $]-\infty; 2[\subset]-1; 0[$ يكفي التأكد من أن $g(-1) \times g(0) < 0$ لأجل هذا لدينا:

$$g(0) = 1 \text{ و } g(-1) = 2 - 2e \approx -3,44 \text{ وبالتالي: } g(-1) \times g(0) < 0 \text{ إذن } \alpha \in]-1; 0[.$$

(3) بملاحظة جدول التغيرات و السؤال السابق يمكن استنتاج الجدول التالي الذي يمثل إشارة $g(x)$:



ثانيا:

$$f(x) = 2x + 1 - xe^{-x} \text{ و } D_f = \mathbb{R}$$

1/ من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = (2x + 1 - xe^{-x})' = 2 - e^{-x} + xe^{-x} = \frac{2e^x}{e^x} - \frac{1}{e^x} + \frac{x}{e^x} = \frac{x-1+2e^x}{e^x} = g(x)$$

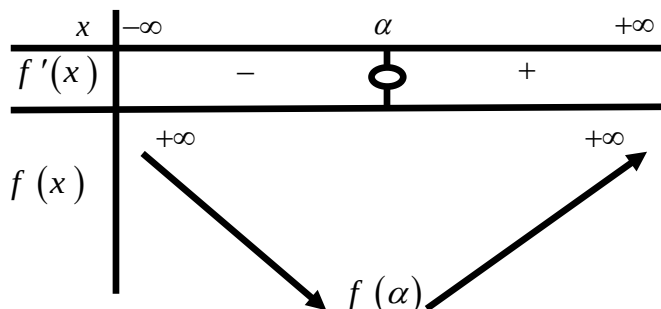
2/

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + 1 - xe^{-x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(2 + \frac{1}{x} - e^{-x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1 - xe^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + 1 - \frac{x}{e^x} \right) = +\infty$$

من الجواب السابق إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ، أي رسم جدول التغيرات:



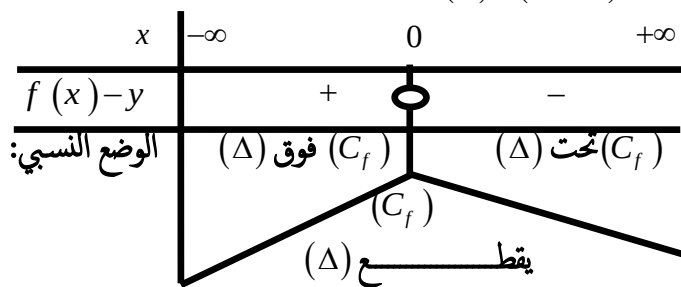
(3) لنحسب النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{e^x} \right) = 0$$

أي أن المستقيم ذا المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ رمز له بـ (Δ) ،

(4) دراسة الوضع النسبي لمنحنى الدالة f و المستقيم المقارب (Δ) :

لهذا نقوم بدراسة إشارة الفرق: $f(x) - (2x + 1) = -xe^{-x}$ إليك الجدول:



(5) لنحسب المشتقة الثانية التي تمثل المشتقة الأولى للدالة g :

أي من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = g'(x) = \frac{2-x}{e^x}$ التي بينا أنها تتعدم عند 2 مغيرة إشارتها و هذا كاف للحكم أن النقطة

$(2; f(2))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f ،

(6) لدينا (*) $f(\alpha) = 2\alpha + 1 - \frac{\alpha}{e^\alpha}$ و من الجزء الأول لدينا كذلك: $g(\alpha) = 0$ معناه $\alpha - 1 + 2e^\alpha = 0$ أي: $e^\alpha = \frac{1-\alpha}{2}$

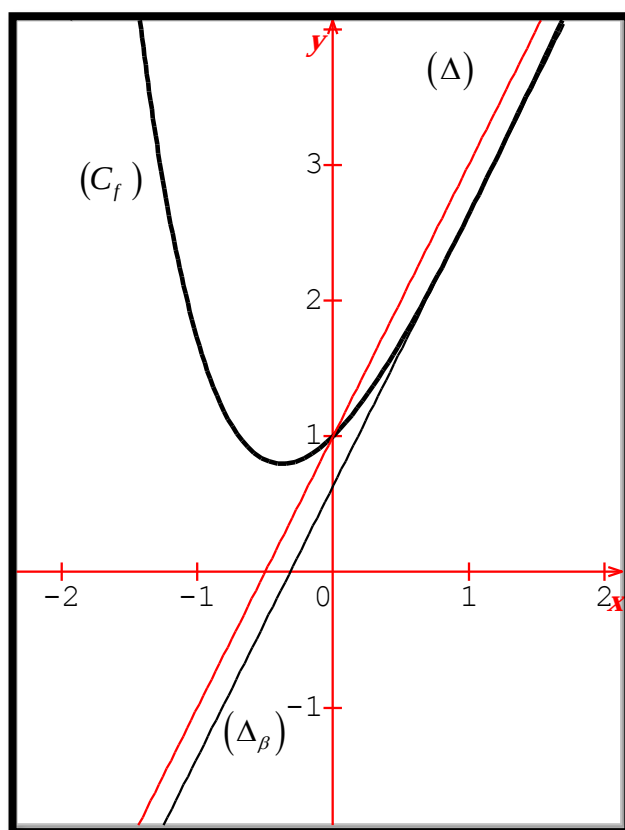
عند التعويض في (*) نجد

$$f(\alpha) = 2\alpha + 1 - \frac{\alpha}{\frac{1-\alpha}{2}} = 2\alpha + 1 - \frac{2\alpha}{1-\alpha} = 2\alpha + 3 - 2 + \frac{2\alpha}{\alpha-1} = 2\alpha + 3 + 2\left(-1 + \frac{\alpha}{\alpha-1}\right) = 2\alpha + 3 + \frac{2}{\alpha-1}$$

و. ه. م

(7) (Δ_β) مماس لـ (C_f) معناه: $f'(x_0) = 2$ حيث: $x_0 \in \mathbb{R}$ و منه $x_0 = 1$ عند التعويض في عبارة الدالة نجد ترتيبية النقطة المطلوبة $(1; 3 - e^{-1})$ وكون النقطة منتمية إلى المماس نستطيع تعيين β بالتعويض الواضح: $3 - e^{-1} = 2 + \beta \rightarrow \beta = 1 - e^{-1}$

(8) الرسم:



9. المناقشة الوسيطة:

لنشكل الدالة f :

من المعادلة المعطاة لدينا: $1 - xe^{-x} = m$ معناه $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x} = 2x + m$ إذن حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع منحنى الدالة f و المستقيم ذي المعادلة $y = 2x + m$ ، لأجل هذا نراقب الرسم السابق و نشكل الجدول:

المناقشة:	
x	
$-\infty$	
	لا توجد حلول
$1 - e^{-1}$	حل مضاعف
	حالتان مختلفتان
1	حل وحيد
	حل وحيد
$+\infty$	

التمرين 17:

أولاً:

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $g(x) = 1 - x^2 - \ln|x|$ ،

1/ ادرس تغيرات الدالة g ،

2/ احسب $g(1)$ و $g(-1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ ،

ثانياً:

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x) = -x + \frac{\ln|x|}{x}$

و (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس،

1/ بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ،

2/ ادرس تغيرات الدالة f ،

3/ تحقق أن: $f(x) + f(-x) = 0$ ، ماذا تستنتج؟

4/ بين أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تحديدهما،

5/ بين أن المستقيم $y = -x$ (Δ) مقارب لـ (C_f) ، ثم ادرس الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)،

6/ أنشئ (C_f) في المعلم السابق،

7/ أ) بين أن (C_f) يقبل مماسين موازيين لـ (Δ) يطلب كتابة معادلتها،

ب) ناقش بياناً وجود وإشارة حلول المعادلة: $\ln|x| = mx$

ثالثاً: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ $u_n = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} + f\left(\frac{n}{n+1}\right) \right)$

1/ اكتب u_n بدلالة n ثم ادرس اتجاه تغير (u_n) ،

2/ احسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ،

3/ عين قيمة n حتى يكون: $S_n = -\ln(2008)$.

حل:

أولاً:

لدينا: $g(x) = 1 - x^2 - \ln|x|$

1/ دراسة تغيرات الدالة g :

$$D_g = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

* النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x^2 - \ln|x|) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x^2 - \ln|x|) = -\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{+} 0} g(x) = \lim_{x \xrightarrow{+} 0} (1 - x^2 - \ln|x|) = 1 - \ln 0^+ = +\infty = \lim_{x \xrightarrow{-} 0} g(x)$$

* المشتق: كتابة الدالة g دون رمز القيمة المطلقة:

$$g(x) = \begin{cases} 1-x^2 - \ln x & ; x > 0 \\ 1-x^2 - \ln(-x) & ; x < 0 \end{cases}$$

$$, g'(x) = -2x - \frac{1}{x} = -x \times \frac{2x^2 + 1}{x^2}$$

ليكن $x \in \mathbb{R}^*$

و منه جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		+		-	
$g(x)$	$-\infty$		$+\infty$		$-\infty$

$$, g(-1) = 1 - (-1)^2 - \ln 1 = 0 \text{ و } g(1) = 1 - 1^2 - \ln 1 = 0$$

لدينا: 2/

من الصورتين و الجدول السابق نستنتج:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g(x)$		-	○	+		+	○	-	
إشارة		-	○	+		+	○	-	

ثانياً:

$$f(x) = -x + \frac{\ln|x|}{x} \text{ لدينا:}$$

1/ ليكن $x \in \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \left(-x + \frac{\ln|x|}{x} \right)' = -1 + \frac{1 - \ln|x|}{x^2} = \frac{-x^2 + 1 - \ln|x|}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

2/ دراسة تغيرات الدالة f :

$$, D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

* النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x + \frac{\ln|x|}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x - \frac{\ln(-x)}{-x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + \frac{\ln|x|}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + \frac{\ln(x)}{x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \left(-x + \frac{\ln|x|}{x} \right) = \lim_{x \xrightarrow{<} 0} \left(-x + \frac{1}{x} \times \ln(-x) \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \left(-x + \frac{\ln|x|}{x} \right) = \lim_{x \xrightarrow{>} 0} \left(-x + \frac{1}{x} \times \ln(x) \right) = -\infty$$

وكون: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ ، نشكل جدول التغيرات:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\circ$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

$f(-1)=1$ $f(1)=-1$

3/ من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ يكون: $-x \in \mathbb{R}^*$ لدينا: $f(-x) + f(x) = x - \frac{\ln|x|}{x} - x + \frac{\ln|x|}{x} = 0$ ، إذن: $f(-x) = -f(x)$ ، ومنه نستنتج أن الدالة f فردية، وبالتالي بيان الدالة f متناظر بالنسبة للمبدأ،
4/ ليكن x من $\mathbb{R}^*$:

$$f''(x) = \frac{g'(x)x^2 - 2xg(x)}{x^4} = \frac{-x(2x^2+1) - 2x(1-x^2-\ln|x|)}{x^4} = \frac{-2x^3 - x - 2x + 2x^3 + 2x\ln|x|}{x^4} = \frac{x(-3+2\ln|x|)}{x^4}$$

لدينا: $-3+2\ln|x| \geq 0$ معناه $\ln|x| \geq \frac{3}{2} = \ln\left(e^{\frac{3}{2}}\right)$ أي: $|x| \geq e^{\frac{3}{2}}$ كون الدالة اللوغاريتمية متزايدة تماما،
بهاته التكافؤات يمكن كتابة الجدول:

x	$-\infty$	$-e^{3/2}$	0	$e^{3/2}$	$+\infty$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$-3+2\ln x $	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$
$f''(x)$	$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$+$

المشتقة الثانية تنعدم مغيرة إشارتها عند $-e^{3/2}$ و $e^{3/2}$ ومنه منحى الدالة f يقبل نقطتي انعطاف، لاحظ الشكل،

$$5/ لدينا: \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{\ln|x|}{x} = 0$$

ومنه منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = -x$ في جوار $-\infty$ و $+\infty$ ،

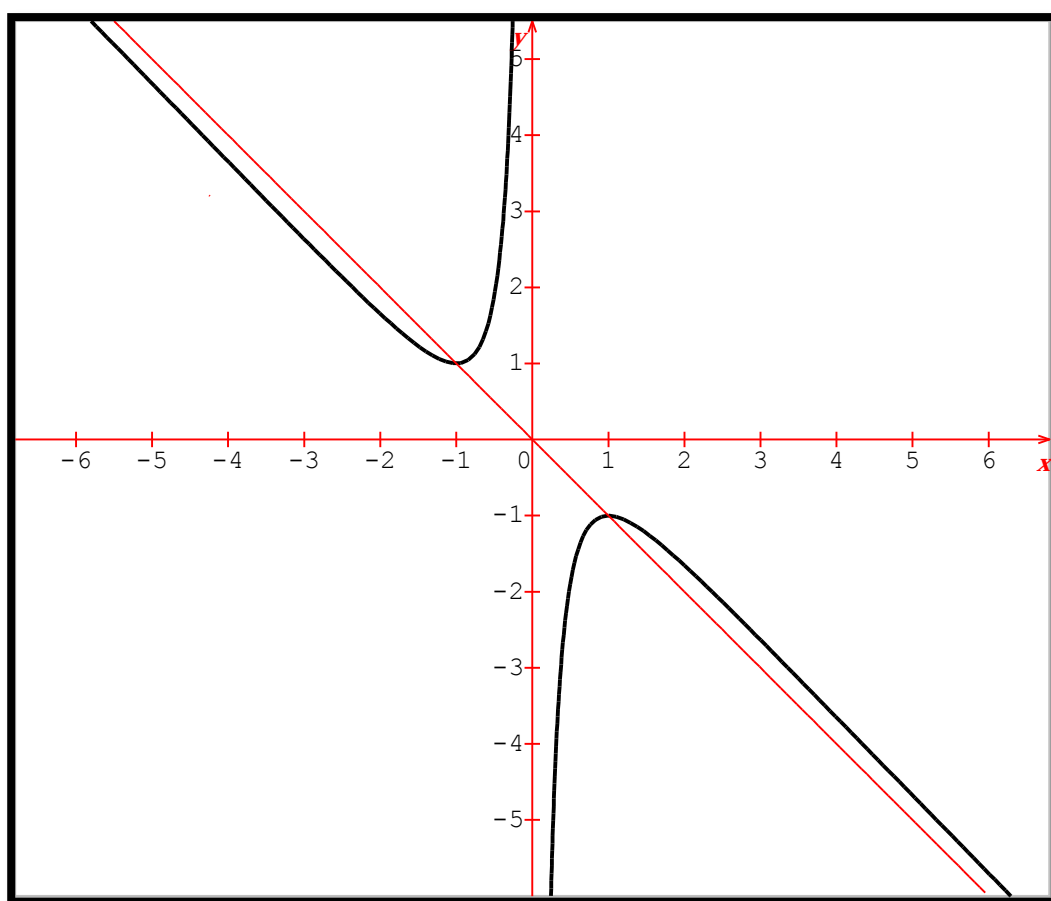
دراسة الوضع النسبي:

لدينا $f(x) + x = \frac{\ln|x|}{x}$ وعند ملاحظة التكافؤ التالي: $|x| \geq 1$ معناه $\ln|x| \geq 0 = \ln 1$ يمكن تشكيل الجدول:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$\ln x $	$+$	0	$-$	0	$+$
إشارة: $f(x)+x$	$-$	0	$+$	$-$	$+$
الوضعي النسبي:	(C_f)	(C_f)	(C_f)	(C_f)	(C_f)
	تحت	فوق	تحت	فوق	
	(Δ)	قاطع لـ	(Δ)	قاطع لـ	(Δ)
		(Δ)		(Δ)	

/6 إنشاء (C_f) :

نقوم برسم المستقيمات المقاربة، و بمراقب الوضع النسبي و جدول التغيرات نجد:



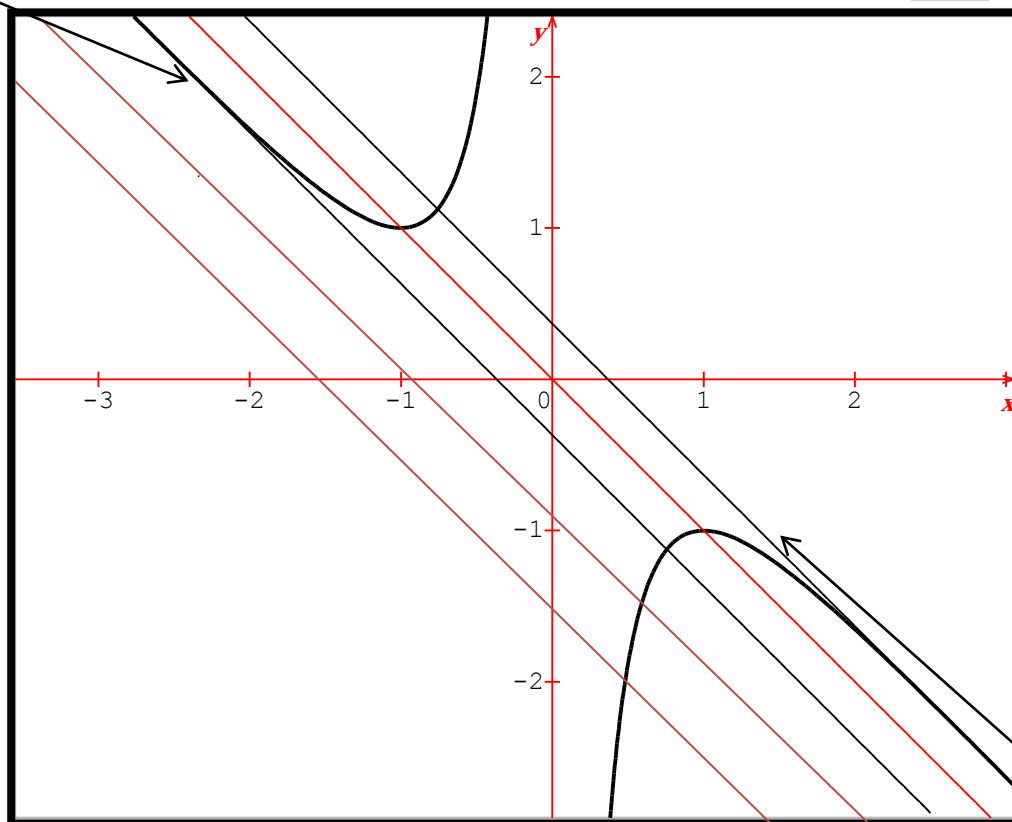
/7

أ) نبحث عن حلول المعادلة: $f'(x) = -1$ معناه $\frac{g(x)}{x^2} = -1$ أي $g(x) = -x^2$ معناه $\ln|x| = 1$ ومنه: $x_0 = e$ أو $x_1 = -e$ ، حقا منحنى الدالة f يقبل مماسين موازيين للمستقيم (Δ) معادلتها:

$(\Delta_1): y = -x + \frac{1}{e}$ و $(\Delta_2): y = -x - \frac{1}{e}$

على التوالي، لاحظ الشكل:

المماس الأول



المماس الثاني

ب) لدينا من أجل $x \in \mathbb{R}^*$ يكون $\ln|x| = mx$ معناه $\frac{\ln|x|}{x} = m$ ومنه $f(x) = -x + \frac{\ln|x|}{x} = -x + m$ وبالتالى فحلل المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمت من الشكل $y = -x + m$ حيث: m هي ترتيبية النقطة التي فاصلتها 0، الموازية للمقارب و المماسين، و عند مراقبة الشكل بالرسومات الموضحة نشكل الجدول:

m	المناقشة
$-\infty$	حل موجب تماما
$-1/e$	حل مضاعف سالب، و آخر موجب تماما ثلاثة حلول، اثنان منها سالبان و الآخر موجب،
0	حل سالب تماما والآخر موجب تماما ثلاثة حلول، اثنان منها موجبان و الآخر سالب،
$1/e$	حل مضاعف موجب، و آخر سالب تماما
$+\infty$	حل سالب تماما

ثالثا:

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} + f \left(\frac{n}{n+1} \right) \right)$

1/ لدينا: $u_n = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} + f \left(\frac{n}{n+1} \right) \right) = \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)$ من أجل: $n \in \mathbb{N}^*$

دراسة اتجاه التغير:

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_{n+1} - u_n = \ln \left(\frac{n+1}{n+2} \right) - \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) = \ln \left(\frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} \right) = \ln \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n} \right) = \ln \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n} \right) > \ln 1 = 0$$

و منه المتتالية $(u_n)_n$ متزايدة تماما،

2/ حساب المجموع:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \ln \left(\frac{1}{2} \right) + \ln \left(\frac{2}{3} \right) + \dots + \ln \left(\frac{n-1}{n} \right) + \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) = \ln \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1} \right)$$

$$= \ln \left(\frac{1}{n+1} \right) = -\ln(n+1)$$

3/ تعيين قيمة n : لدينا $S_n = -\ln 2008$ معناه $\ln(n+1) = \ln 2008$ و بالتالي $n = 2007$.

التمرين 18:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $D_f =]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{3}{x} + \ln(x)$

(1) احسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف،

(2) احسب f' و حدد إشارتها على D_f ،(3) ضاع جدول تغيرات الدالة f ،(4) ادرس الفروع اللانهائية لمنحنى الدالة f ، "يمكن الاستغناء عن هذا السؤال لحذفه من البرنامج"(5) احسب f'' و ادرس إشارتها على D_f ،(6) بين أن $I \left(6; \frac{1}{2} + \ln(6) \right)$ نقطة انعطاف لـ (C_f) ،(7) أنشئ (C_f) .

حل:

$$D_f =]0; +\infty[\text{ و } f(x) = \frac{3}{x} + \ln(x)$$

(1) حساب النهايات عند الأطراف المفتوحة:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x} + \ln(x) \right) = +\infty - \infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{x} + \ln(x) \right) = +\infty$$

$$\text{إزالتها: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} (3 + x \ln x) = +\infty \text{ (لأن: } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{) نستنتج أن } x = 0 \text{ مقارب عمودي لمنحنى الدالة } f$$

(2) من أجل كل $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f'(x) = \left(\frac{3}{x} + \ln x \right)' = -\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-3}{x^2}$

و منه جدول الإشارة:

x	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$ $	$\circ$	$+$
		-	

(3) جدول التغيرات:

x	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$ $	$\circ$	$+$
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$
		$f(3) = 1 + \ln 3$	

(4)

رأينا سابقا أن $x = 0$ مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f ،
و عند حساب النهاية:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x} \right) = 0$$

منحنى الدالة f يقبل فرعا لانهايا باتجاه محور الفواصل،

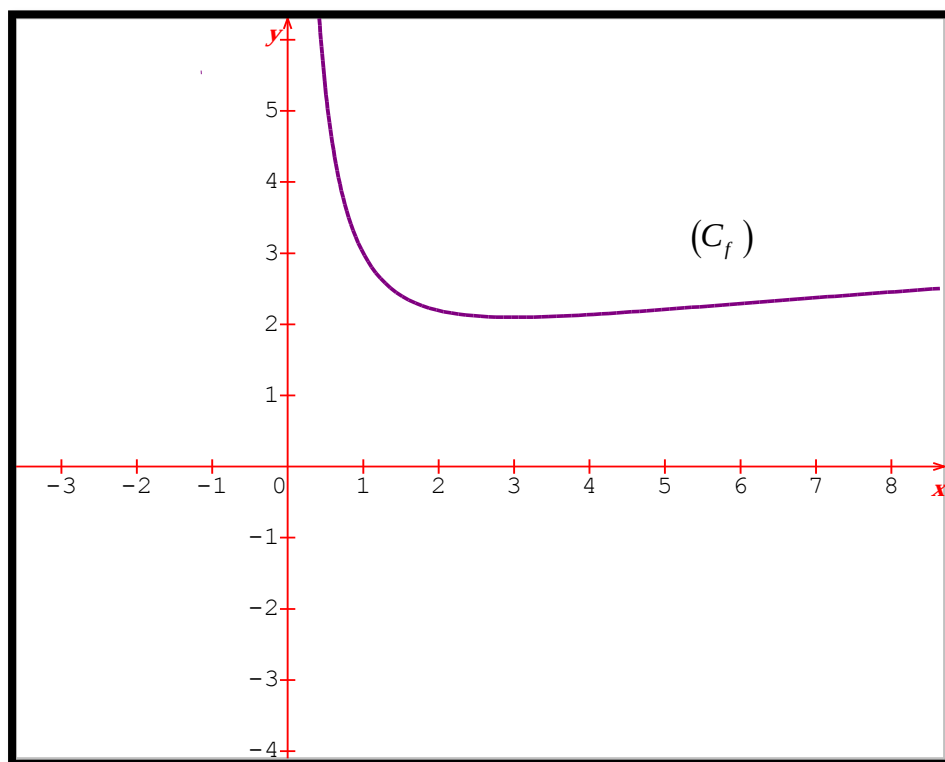
(5) حساب المشتقة الثانية:

من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = \left(-\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x} \right)' = \frac{6x}{x^4} - \frac{x^2}{x^4} = \frac{x(6-x)}{x^4}$ ، وبالتالى إشارة المشتقة الثانية:

x	0	6	$+\infty$
$f''(x)$	$ $	$\circ$	$-$
		+	

(6) من الجدول السابق نستنتج أن المشتقة الثانية تنعدم عند 6، مغيرة للإشارة و بالتالى النقطة $\left(6; \frac{1}{2} + \ln 6 \right)$ نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) ،

(7) إنشاء المنحنى:



التمرين 19:

في الشكل المقابل (C_f) هو بيان الدالة f و $x = -2$: (Δ) مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C_f) ،

1. احسب $f(-1)$ ، $f'(-1)$ ، $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ ،

2. ما هو عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ،

3. نضع من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2; +\infty[$ ،

$$f(x) = -2x + m + p \ln(x + 2)$$

حيث m و p عدنان حقيقيان ثابتان ،

أ/ يبين أن: $m = 1$ ،

ب/ احسب f' بدلالة p ،

ج/ بين أن: $f(x) = -2x + 1 + 2 \ln(x + 2)$ ،

د/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم $(D): y = -2x + 1$.

حل:

1.

من الشكل لدينا: $f(-1) = 3$ و $f'(-1) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty$ ،

2.

كذلك من الشكل السابق المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين في المجال $]-2; +\infty[$ ،

3.

من أجل $x \in]-2; +\infty[$ لدينا: $f(x) = -2x + m + p \ln(x + 2)$ مع: $m, p \in \mathbb{R}$ ،

أ/ من أجل $x = -1$ يكون: $3 = f(-1) = 2 + m + 0$ ، $m = 1$ ،

ب/ حساب المشتقة بدلالة p :

$$f'(x) = (-2x + 1 + p \ln(x + 2))' = -2 + \frac{p}{x + 2} \quad \text{من أجل كل } x \in]2; +\infty[$$

ج/ مما سبق وجدنا $f'(-1) = 0$ معناه حسب العبارة الموجودة سابقا: $-2 + p = 0$ أي: $p = 2$ ،

د/

دراسة الوضع النسبي لمنحنى الدالة f والمستقيم $y = -2x + 1$: (D) :

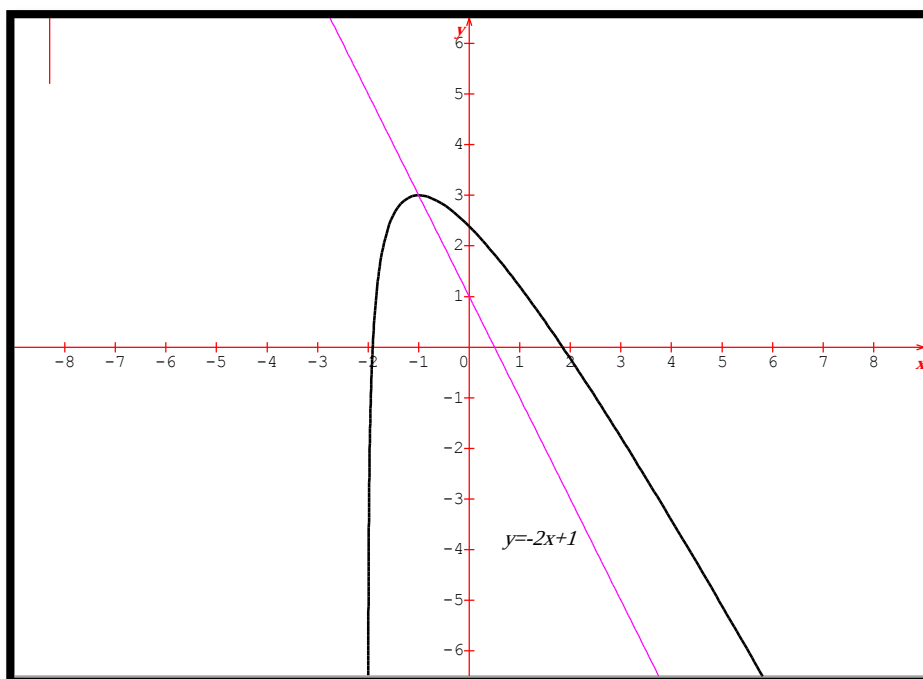
لدينا: $f(x) - y = 2 \ln(x + 2)$ ونميز الحالتين:

• $\ln(x + 2) \geq 0 \rightarrow x + 2 \geq 1 \rightarrow x \geq -1$ معناه

• $0 < x + 2 \leq 1 \rightarrow -2 < x \leq -1$ معناه $\ln(x + 2) \leq 0$ ، ومنه جدول الوضع النسبي:

x	-2	-1	$+\infty$
$f(x) - y$		+	-
الوضع النسبي:		(C_f) تحت (D)	(C_f) فوق (D)
		(C_f)	
		يقطع لـ (D)	

لاحظ الشكل:



التمرين 20:

أولا:

لتكن الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 2 - 2\ln(x)$.

(1) ادرس تغيرات الدالة g و سجل جدول تغيراتها،

(2) استنتج، حسب قيم x إشارة $g(x)$ ،

ثانيا:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{2\ln x}{x} + x - 1$ ،

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2 \text{ cm}$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، و فسر النتيجة هندسيا،

(2) /أ احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا،

ب/ ادرس وضعية (C_f) مع مستقيمه المقارب المائل (Δ) ،

(3) /أ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ،

ب/ استنتج إشارة $f'(x)$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f ،

(4) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) عند نقطة يطلب تعيين إحداثياتها، ثم أكتب معادلة لـ (T) ،

(5) أنشئ كـلا من المستقيمين (T) و (Δ) ، ثم المنحني (C_f) ،

(6) ناقش بياننا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $2\ln x - xm = x$.

حل:

أولا:

$$D_g =]0; +\infty[\text{ و } g(x) = x^2 + 2 - 2\ln(x)$$

(1) دراسة التغيرات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2 - 2\ln(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2} - 2\frac{\ln(x)}{x^2} \right) = +\infty \times (1 + 0 + 0) = +\infty$$

نهاية شهيرة

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2 - \ln x) = +\infty$$

المشتقة: من أجل كل x من $]0; +\infty[$:

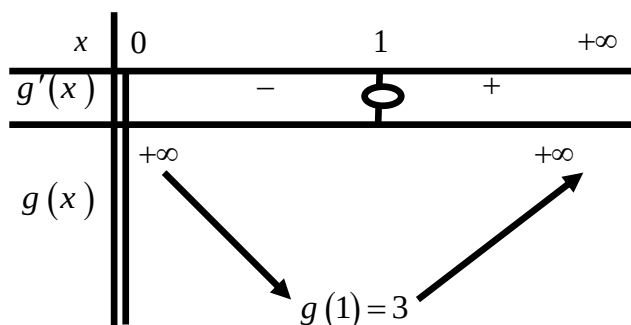
$$g'(x) = (x^2 + 2 - \ln x)' = 2x - \frac{1}{x} = 2x - \frac{1}{x} = 2x \times \frac{x^2 - 1}{x^2} = 2x \times \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

عند التأمل في العبارة يمكن كتابة:

• دالة متزايدة تماما على المجال $[1; +\infty[$ ،

• دالة متناقصة تماما على المجال $]0; 1]$ ،

و منه جدول التغيرات:

(2) من جدول التغيرات نستنتج أن: $g(x) \geq g(1) = 3 > 0$ من أجل كل حقيقي x من $]0; +\infty[$ ،

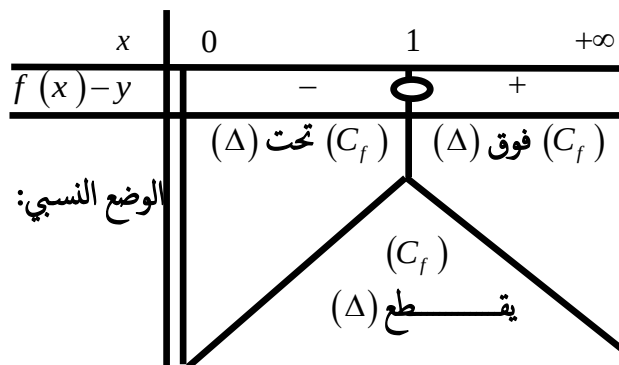
ثانياً:

$$، D_f =]0; +\infty[\text{ و } f(x) = \frac{2\ln x}{x} + x - 1$$

$$(1) \text{ حساب النهاية: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2\ln x}{x} + x - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{x} \times \ln x + x - 1 \right) = -\infty$$

منحنى الدالة f يقبل مستقيماً مقارباً عمودياً معادلته $x = 0$ ،

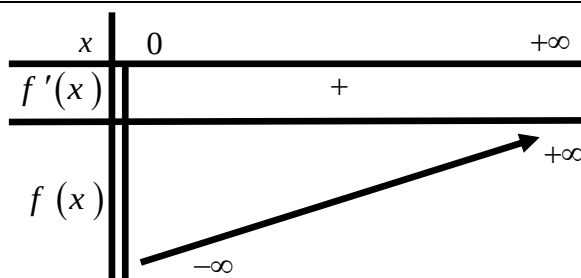
$$(2) \text{ /! من أجل كل } x \in]0; +\infty[\text{، } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2\ln x}{x} + x - 1 \right) = +\infty$$

إذن $y = x - 1$ معادلته مستقيم مقارب مائل في جوار $+\infty$ ،ب/ دراسة الوضع النسبي: ندرس إشارة الفرق $f(x) - y = \frac{2\ln x}{x}$ أي جدول التالي:حيث: (Δ) المستقيم المقارب المائل،(3) /! من أجل كل x من $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \left(\frac{2\ln x}{x} + x - 1 \right)' = \left(\frac{2 - 2\ln x}{x^2} + 1 \right) = \frac{2 - 2\ln x + x^2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

إذن إشارة المشتقة من إشارة $g(x)$ ، التي قمنا بدراستها في الجزء الأول أي:من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ أي الدالة f متزايدة تماماً على المجال $]0; +\infty[$ ،

و بالتالي جدول التغيرات:

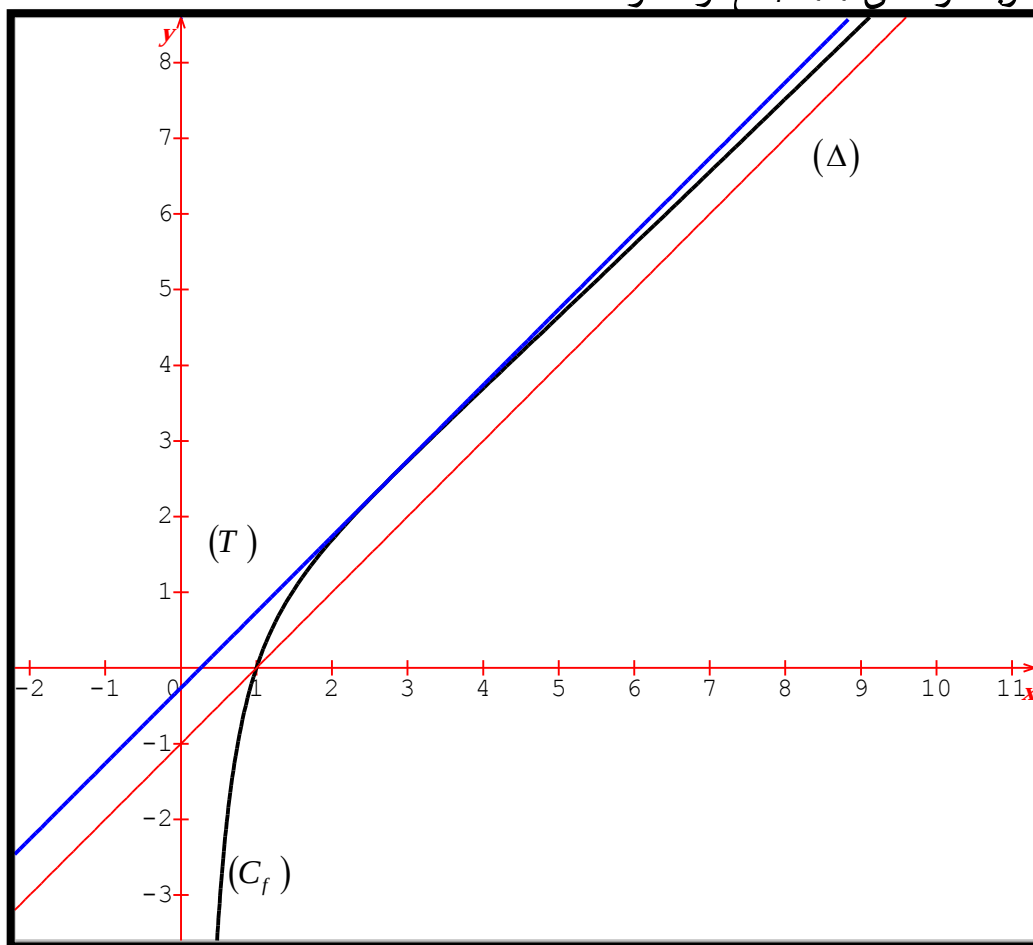


(4) (T) مماس لمنحنى الدالة f مواز للمستقيم المقارب (Δ) معناه يوجد x_0 من $]0; +\infty[$ حيث: $f'(x_0) = 1$ عند تعويض

عبارة المشتقة: $2 - 2\ln x_0 + x_0^2 = x_0^2$ ومنه $\ln x_0 = 1$ أي: $x_0 = e$ ، أي معادلة المماس: $(T): y = x - e + f(e)$

مع $f(e) = \frac{2}{e} + e - 1$ وبالتالي: $(T): y = x + \frac{2}{e} - 1$

(5) إنشاء المماس والمقاربات ومنحنى الدالة f مع مراعاة الوحدة:



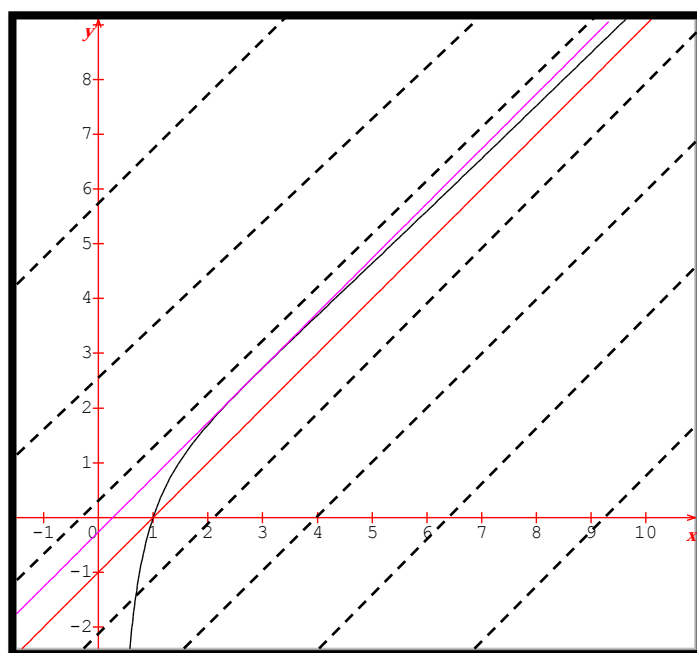
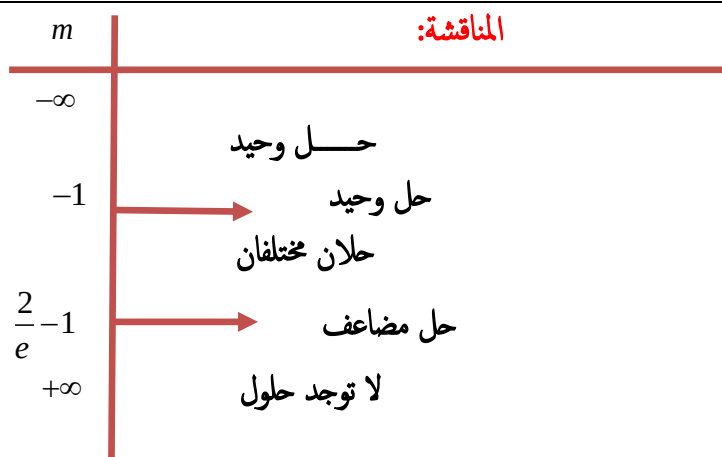
(6) المناقشة الوسيطة:

هدفنا هو إظهار عبارة الدالة f ، و من الواضح أن المعادلة معرفة إذا $x > 0$:

المعادلة $2\ln x - xm = x$ تكافئ $2\ln x = (m+1)x$ معناه $\frac{2\ln x}{x} = m+1$ أي $\frac{2\ln x}{x} + x - 1 = x + m$ ومنه:

$$f(x) = x + m$$

وبالتالي فلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع منحنى الدالة f والمستقيم الذي معادلته $y = x + m$ الذي يوازي المقارب والمماس، ومنه الجدول:

**التمرين 21:**

نعتبر من أجل كل عدد حقيقي k موجب تماماً الدالة f_k المعرفة على $[0; +\infty[$ بالشكل: $f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$ ، وليكن (C_k) التمثيل البياني لها في المستوى المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ،

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب: $f_k(x) = \ln\left(1 + k \frac{x}{e^x}\right)$ ،

(2) استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x)$ ،

(3) شكل جدول تغيرات الدالة f_k ،

أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب $\ln(x+1) \leq x$ ،

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب $f_k(x) \leq \frac{k}{e}$ ،

(3) عين معادلة المماس (T_k) عند النقطة ذات الفاصلة 0،

(4) ليكن p, m عددين حقيقيين موجبين تماماً بحيث: $p < m$ ،

أ- ادرس الأوضاع النسبية للمنحنين $(C_p), (C_m)$ ،

ب- ارسم كلا من $(T_1), (T_2)$ و (C_1) و (C_2) .

حل:

$$D_f = [0; +\infty[\text{ و } f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x$$

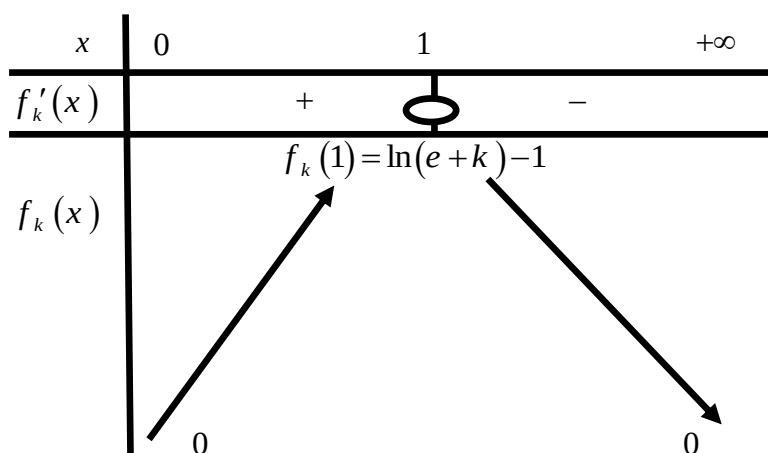
(1) ليكن x من $[0; +\infty[$:

$$f_k(x) = \ln(e^x + kx) - x = \ln\left(e^x \left(1 + k \frac{x}{e^x}\right)\right) - x = \ln e^x + \ln\left(1 + k \frac{x}{e^x}\right) - x = \ln\left(1 + k \frac{x}{e^x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln\left(1 + k \frac{x}{e^x}\right) \right) = \ln 1 = 0 \quad (2)$$

(3) جدول التغيرات:

$$(f_k(x))' = \frac{e^x + k}{e^x + kx} - 1 = \frac{e^x + k - e^x - kx}{e^x + kx} = \frac{k(1-x)}{e^x + kx} \quad \text{من أجل كل } x \in [0; +\infty[$$

أ- ليكن x عدد حقيقي موجب:

يمكن أن نبين أن $e^x \geq x + 1$ **تبرير:** نضع $g(x) = e^x - x - 1$ لدينا: $x \in [0; +\infty[$ ، $g'(x) = e^x - 1 \geq 0$ أي الدالة g متزايدة تماماً و منه $g(x) \geq g(0)$ فنحصل على المطلوب،

و منه $\ln(x+1) \leq x$ من أجل كل عدد حقيقي موجب x .

ب- من أجل كل عدد حقيقي x موجب، و بملاحظة جدول التغيرات $f_k(x) \leq f_k(1) = \ln(e+k) - 1 = \ln\left(1 + \frac{k}{e}\right) \leq \frac{k}{e}$ من أ-

(3) معادلة نصف المماس على 0 :

$$(T_k): y = kx \text{ و منه } f'_k(0) = \frac{k}{1} = k \text{ و } f(0) = 0 \text{ لدينا: } (T_k): y = f'_k(0)x + f(0)$$

(4) $0 < p < m$:

أ- دراسة الوضع النسبي:

$$f_m(x) - f_p(x) = \ln(e^x + mx) - \ln(e^x + px) \text{ نحسب إشارة الفرق:}$$

لدينا التكافؤات: $\ln(e^x + mx) < \ln(e^x + px)$ أي: $\ln(e^x + mx) < \ln(e^x + px)$ من تزايد الدالة $\ln$: $(m-p)x < 0$ ، وهذا ليس محققاً، لأن $m-p > 0$ و $x > 0$ ، هذا يثبت أن $\ln(e^x + mx) - \ln(e^x + px) > 0$ أي منحنى الدالة f_m يقع فوق منحنى f_p من أجل كل x موجب تماماً،

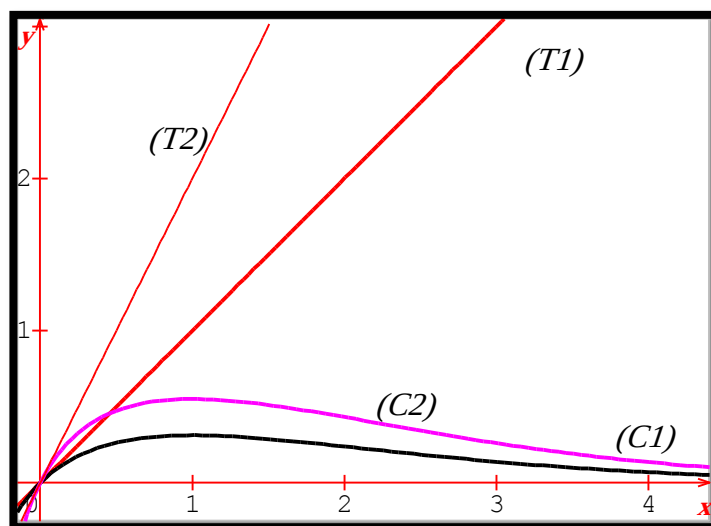
ب- رسم كلا من (T_1) , (T_2) و (C_1) و (C_2) :

من أجل $k = 1$:

$$f_1(x) = \ln(e^x + x) - x \quad \text{و} \quad (T_1): y = x$$

من أجل $k = 2$:

$$f_2(x) = \ln(e^x + 2x) - x \quad \text{و} \quad (T_2): y = 2x$$



التمرين 22:

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ: $f(x) = x + 1 - 3x \ln x$

(1) احسب النهايات عند أطراف مجال التعريف،

(2) ادرس اتجاه تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها،

(3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1, 2]$ ،

(4) بين أن: $\ln \alpha = \frac{\alpha + 1}{3\alpha}$ ،

(5) استنتج إشارة $f(x)$ ،

٢. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ: $g(x) = \frac{\ln x}{(1+x)^3}$ ،

(1) احسب النهاية على 0 ، وماذا تستنتج؟

(2) لاحظ أن: $g(x) = \frac{x}{(1+x)^3} \cdot \frac{\ln x}{x}$ و احسب النهاية عند $+\infty$ ، ثم أعط التفسير الهندسي،

(3) بين أن $g(\alpha) = \frac{1}{3\alpha(\alpha+1)^2}$ ،

(4) أوجد علاقة بين g' و الدالة f ، مشكلا جدول التغيرات،

(5) أكتب معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1،

(6) تعطى $\alpha = 1.7$ أنشئ (C_g) في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

حل:

$$f(x) = x + 1 - 3x \ln x \quad \text{و} \quad D_f =]0; +\infty[$$

(1. حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1 - 3x \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{1}{x} - 3 \ln x \right) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1 - 3x \ln x) = 1$$

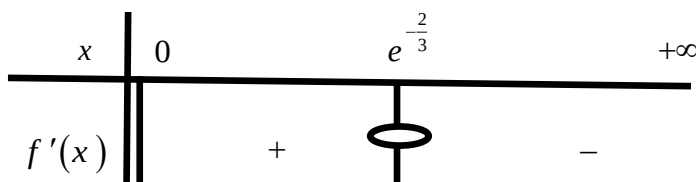
(2 دراسة اتجاه التغير:

من أجل كل x من $]0; +\infty[$ لدينا:

$$f'(x) = (x + 1 - 3x \ln x)' = 1 - 3 \ln x - 3 = -2 - 3 \ln x$$

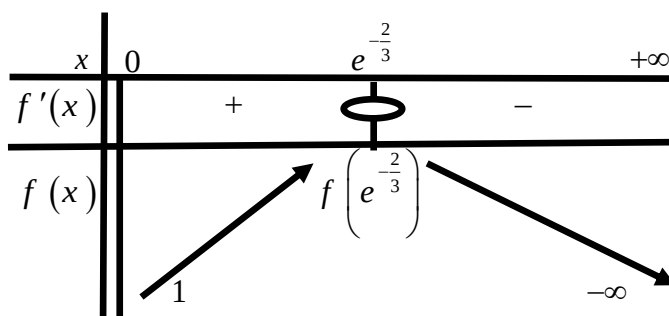
$$\bullet \text{ لدينا } -2 - 3 \ln x > 0 \text{ معناه } \ln(x) < \frac{-2}{3} = \ln\left(e^{-\frac{2}{3}}\right) \text{ أي: } 0 < x < e^{-\frac{2}{3}}$$

و منه جدول الإشارة:



$$\text{و منه الدالة } f \text{ متزايدة تماما على المجال }]0; e^{-\frac{2}{3}}[\text{ و } f \text{ متناقصة تماما على المجال }]e^{-\frac{2}{3}}; +\infty[$$

و منه جدول التغيرات:

(3 من جدول التغيرات، نلاحظ أن الدالة f مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]1; 2[$,و $f(1) = 2$ و $f(2) = 3 - 6 \ln 2 \approx -1,16$ و بالتالي: $f(1) \times f(2) < 0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد حل وحيد

$$\alpha \in]1; 2[\text{ حيث: } f(\alpha) = 0$$

$$(4 \text{ من الجواب السابق أمكن كتابة: } f(\alpha) = 0 \text{ و منه } \alpha + 1 - 3\alpha \ln \alpha = 0 \text{ أي: } \ln \alpha = \frac{\alpha + 1}{3\alpha}$$

(5 من جدول التغيرات نستنتج:



$$g(x) = \frac{\ln x}{(1+x)^3} \quad \text{و} \quad D_g =]0; +\infty[\quad 2.$$

(1) حساب النهاية على يمين 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{(x+1)^3} \right) = -\infty$$

نستنتج أن: المستقيم ذي المعادلة $x = 0$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة f ,

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{(x+1)^3} \times \frac{\ln x}{x} \right) = 0 \times 0 = 0$$

حساب النهاية عند $+\infty$ مع استعمال الملاحظة المعطاة: $0 \times 0 = 0$

و التفسير الهندسي لهذه النهاية: $y = 0$ معادلة مستقيم مقارب أفقي لمنحنى الدالة g في جوار $+\infty$,

$$(3) \quad \text{لدينا } g(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{(\alpha+1)^3} \text{ مما سبق يمكن كتابة: } g(\alpha) = \frac{\frac{\alpha+1}{3\alpha}}{(\alpha+1)^3} = \frac{1}{3\alpha(\alpha+1)^2}$$

(4) من أجل كل $x \in]0; +\infty[$:

$$g'(x) = \left(\frac{\ln x}{(x+1)^3} \right)' = \frac{(x+1)^3 - 3(x+1)^2 \ln x}{(x+1)^6} = \frac{x+1-3x \ln x}{x(x+1)^4} = \frac{f(x)}{x \times (x+1)^4}$$

منه إشارة $g'(x)$ من إشارة $f(x)$ التي نعلم إشارتها من **الجزء الأول**، و منه جدول التغيرات:

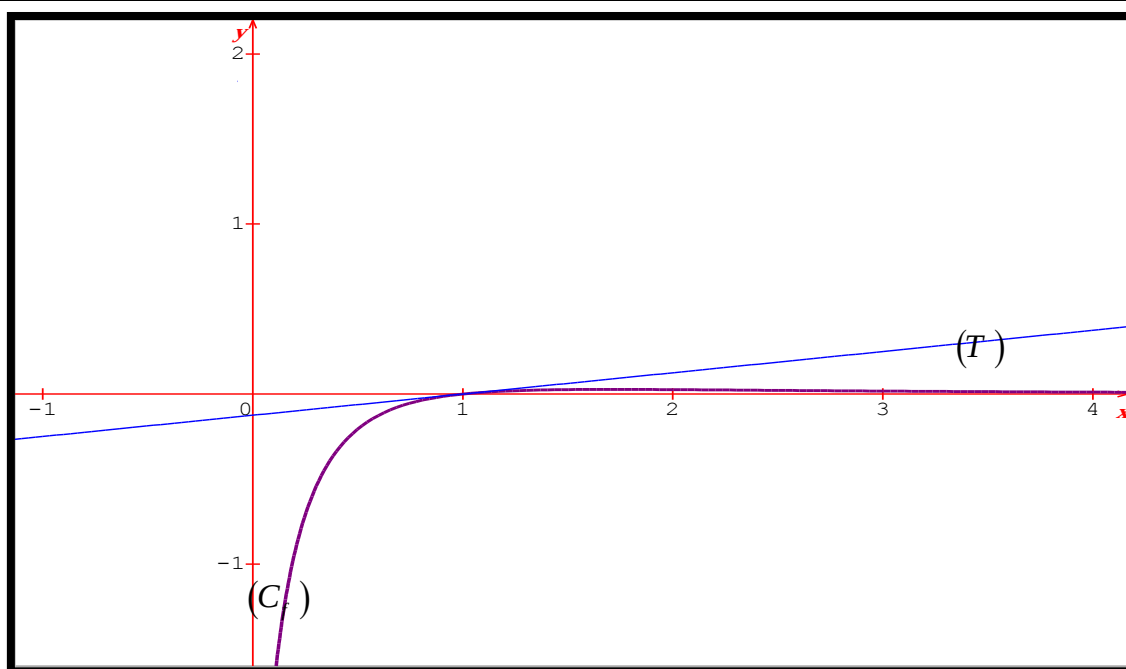
x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$		$g(\alpha)$	

$-\infty \swarrow \quad \searrow 0$

(4) كتابة معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1:

$$(T): y = g'(1)(x-1) + g(1) \quad \text{و لدينا: } g'(1) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \quad \text{و} \quad g(1) = 0 \quad \text{و بالتالي: } (T): y = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}$$

(5) نشئ البيان و هذا بعد رسم المستقيمت المقاربة:



التمرين 23:

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- أولاً: (1) عين النهايات عند أطراف المجال، و ماذا تستنتج؟
- (2) ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها،
- (3) ضع تخميناً حول عدد حلول المعادلة $f(x) = -\frac{1}{2}$ ،
- (4) بين أن المعادلة $f(x) = -\frac{1}{2}$ تقبل حلاً وحيداً α من المجال $]\frac{1}{2}, 1[$ ،
- (5) استنتج إشارة $h(x)$ حيث: $h(x) = f(x) + \frac{1}{2}$ ،

ثانياً:

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ: $g(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 + \frac{\ln x}{x}$ ،

- (1) احسب النهايات عند أطراف مجال التعريف، و ماذا تستنتج؟
- (2) بين أن: $g'(x) = 2h'(x)h(x)$ من أجل كل x من $]0, +\infty[$ ،
- (3) ادرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها،
- (4) بين أن $g(\alpha) = -\frac{1}{4}$ ،
- (5) بين أن (C_f) و (C_g) يقبلان نفس المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1،
- (6) ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) بالنسبة إلى (C_g) ،
- (7) أنشئ في نفس المعلم كل من (C_f) ، (C_g) و (T) .

حل:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{و} \quad D_f =]0; +\infty[$$

أولاً:

(1) تعيين النهايات عند أطراف مجموعة التعريف:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \ln x \right) = +\infty \times (-\infty) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

نستنتج أن:

- معادلة مستقيم مقارب أفقي لمنحنى الدالة f في جوار $+\infty$ ، $y = 0$
- معادلة مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f ، $x = 0$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2} \quad :]0; +\infty[\text{ من أجل كل } x$$

و منه:

- إذا كان $0 < x < e$ لدينا $f'(x) > 0$ إذن الدالة متزايدة تماماً على هذا المجال،
- إذا كان $x \geq e$ يكون $f'(x) \leq 0$ إذن الدالة متناقصة تماماً على هذا المجال،

و منه جدول التغيرات:

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
f	$-\infty$	$1/e$	0

(3) بمراقبة جدول التغيرات من حيث تغير إشارة $f(x)$ و موقع القيمة $-\frac{1}{2}$ يمكن وضع التخمين:

$$\text{المعادلة } f(x) = -\frac{1}{2} \text{ تقبل حلاً وحيداً منتبهاً إلى المجال }]0; +\infty[,$$

(4) من جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة f مستمرة و متزايدة تماماً على المجال $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[$ و $f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 \ln 2 \approx -1,39$

$$f(1) = 0, \text{ و بالتالي: } f\left(\frac{1}{2}\right) < -\frac{1}{2} < f(1) \text{ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد وحيد } \alpha \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[$$

حيث:

$$f(\alpha) = -\frac{1}{2}$$

(5) نميز الحالتين:

- إذا كان: $0 < x < \alpha$ يكون و هذا اعتماداً على جدول التغيرات $f(x) < -\frac{1}{2}$ و منه $f(x) + \frac{1}{2} < 0$ أي: $h(x) < 0$
- وإذا كان $\alpha \leq x$ يكون $f(x) \geq -\frac{1}{2}$ و منه $f(x) + \frac{1}{2} \geq 0$ أي: $h(x) \geq 0$

$$D_g =]0; +\infty[\text{ و } g(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 + \frac{\ln x}{x}$$

(1) حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 + \frac{\ln x}{x} \right) = 0 \text{ و منه نستنتج أن } y = 0 \text{ معادلة مستقيم مقارب أفقي في جوار } +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 + \frac{\ln x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{x} \times \left(\frac{\ln x}{x} + 1 \right) \right) = (-\infty) \times (-\infty) = +\infty$$

و منه نستنتج كذلك: $x = 0$ معادلة مستقيم مقارب عمودي لمنحنى الدالة f ,(2) من أجل $x \in]0; +\infty[$:

$$g'(x) = \left(\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 + \frac{\ln x}{x} \right)' = 2 \times \frac{1 - \ln x}{x^2} \times \frac{\ln x}{x} + \frac{1 - \ln x}{x^2} = 2 \times \frac{1 - \ln x}{x^2} \times \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{2} \right) = 2h'(x)h(x)$$

(3) إذن حسب العلاقة السابقة $g'(x)$ و $2h'(x)h(x)$ لهما نفس الإشارة، و منه الجدول:

x	0	α	e	$+\infty$
$h'(x) = f'(x)$		+	+	-
$h(x)$	-	-	+	+
$g'(x) = 2h'(x)h(x)$	-	-	+	-

إذن:

• دالة g متناقصة تماماً على المجال $]-\infty; \alpha[\cup]e; +\infty[$,• دالة g متزايدة تماماً على المجال $[\alpha; e]$,

و منه جدول التغيرات:

x	0	α	e	$+\infty$
$g'(x)$		-	+	-
$g(x)$	$+\infty$	$g(\alpha)$	$\frac{1+e}{e^2}$	0

$$(4) \text{ لدينا } (*) \quad g(\alpha) = \frac{(\ln \alpha)^2}{\alpha^2} + \frac{\ln \alpha}{\alpha} \text{ و من الجزء الأول } f(\alpha) = -\frac{1}{2} \text{ أي: } \ln \alpha = -\frac{\alpha}{2} \text{ عند التعويض في العبارة } (*):$$

و. ه. م،

$$g(\alpha) = \frac{\alpha^2}{4\alpha^2} - \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$(5) \text{ لدينا } g'(1) = 2 \times f'(1) \times \frac{1}{2} = 2 \times f'(1) \times \left(0 + \frac{1}{2}\right) = 2 \times f'(1) \times \left(f(1) + \frac{1}{2}\right) = g'(1) \times \left(f(1) + \frac{1}{2}\right)$$

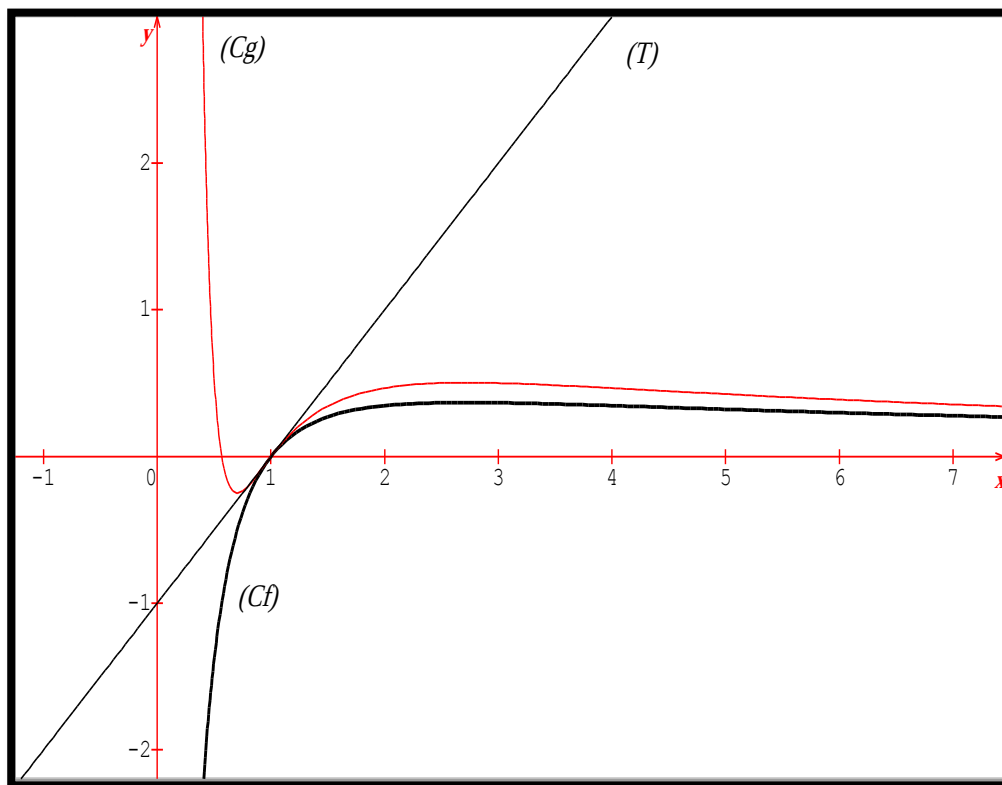
أخرى $f(1) = 0 = g(0)$ و هذا كاف ليقول أن منحنى الدالة f و الدالة g لهما نفس المماس لأن:

$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1) = g'(1)(x-1) + g(1) = x-1 \text{ و منه: } (T): y = x-1$$

(6) دراسة الوضع النسبي: $f(x) - g(x) = -\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \leq 0$ ، أي منحنى الدالة f يقع دوماً تحت منحنى الدالة g ،

ويشتركان متماسين في النقطة $(1; 0)$ ،

(7) إنشاء المنحنى (C_f) ، (C_g) و (T) :



من علماء العرب:

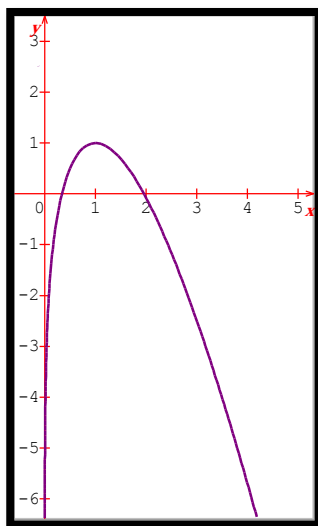
أبو بكر الحَصَّار:

هو محمد بن عبد الله بن عياش الحَصَّار المعروف بأبو بكر الحَصَّار، وهو من الرياضيين البارزين في المغرب العربي، لم يصل إلينا سوى بعض الاستشهادات العلمية التي وردت في مؤلفات اللاحقين له، حيث أغفلت كتب التراجم سيرة حياته وعصره، وقد ذكر المؤرخون والرياضيون الحَصَّار بأنه أسهم في تسهيل الأعمال الحسابية وسرعتها، وخصوصاً الفلكية منها، وللحَصَّار عدة مؤلفات منها (الكتاب الصغير)، ولأن أعمال الحَصَّار كانت محط اهتمام الباحثين في فترة مبكرة، فقد ترجم موسى بن تيبون سنة 1271م الكتاب إلى اللغة العبرية، كما اهتم بأعماله كبار الباحثين في تاريخ العلوم، أمثال: شتينشنايدر M.Steinschneider، سوتر H.Suter، رينو H.P.J.Renaud، وغيرهم، ويكشف هذا الاهتمام المتميز من الشرق والغرب بأعمال الحَصَّار عن الأصالة والإبداع في مؤلفاته، والتي من بينها (البيان والتذكار)، و(الكامل في صناعة العدد)، وهما من المؤلفات المغربية المبكرة في الرياضيات العربية التي لم يوضح دورها الحقيقي في تطور الرياضيات.

التمرين 24:

الجزء الأول:

لتكن الدالة f معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = ax + (bx + c)\ln x$ حيث a, b, c أعداد حقيقية،
 (C_f) هو المنحنى الممثل للدالة f يعطى في الشكل (1):



الشكل (1)

1/ باستعمال المنحنى البياني للدالة f وعلمنا أن: $f(2) = 2 - 3\ln 2$ بين أن: $b = -2, a = c = 1$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x + (1 - 2x)\ln x$ ،

1/ عين نهاية الدالة g عندما يؤول x إلى 0، فسر النتيجة هندسياً،

2/ عين نهاية الدالة g عندما يؤول x إلى $+\infty$ ،

3/ أ) احسب الدالة المشتقة g' ثم يبين أن $g'(1) = 0$ ،

ب) شكل جدول تغيرات الدالة g ،

4/ ليكن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ ،

أ) حل في المجال $]0; +\infty[$ المعادلة $(1 - 2x)\ln x = 0$ ثم أعط تفسيراً هندسياً لهذه الحلول،

ب) استنتج الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) ،

5/ لتكن الدالة h حيث: $h(x) = |g(x)|$ ، ارسم منحنى الدالة h في مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

حل:

الجزء الأول:

$$f(x) = ax + (bx + c)\ln x \quad \text{و} \quad D_f =]0; +\infty[$$

1/ من الشكل يمكن استنتاج:

• $f(1) = 1$ أي: $a = 1$ ، ولدينا $f'(1) = 0$ نقوم بحساب المشتقة وهذا من أجل كل x من $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = (x + (bx + c)\ln x)' = 1 + b \ln x + \frac{bx + c}{x}$$

أي: $1+b+c=0$ و حسب الإرشاد المذكور في نص التمرين: $2+(2b+c)\ln 2=2-3\ln 2$ و منه: $2b+c=-3$ أي نحصل على الجملة الخطية ذات مجهولين: $\begin{cases} b+c=-1 \\ 2b+c=-3 \end{cases}$ بالطرح نجد: $b=-2$ و بالتالي: $c=1$ ، و. ه. م.

الجزء الثاني:

$$g(x) = x + (1-2x)\ln x \quad \text{و} \quad D_g =]0; +\infty[$$

1/ حساب النهاية على يمين الصفر:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + (1-2x)\ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \ln x - 2(x \ln x)) = -\infty$$

و بالتالي منحنى الدالة g يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x=0$ ،

2/ حساب النهاية عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + (1-2x)\ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{\ln x}{x} - 2 \ln x \right) = -\infty$$

3/ أ) المشتقة:

$$g'(x) = (x + (1-2x)\ln x)' = 1 - 2\ln x + \frac{1-2x}{x} = -2\ln x + \frac{1-x}{x} \quad : x \in]0; +\infty[$$

من الملاحظ أن: $g'(1) = 0$ ،

ب) لنبين أن الدالة $-2\ln x + \frac{1-x}{x} = -2\ln x + \frac{1}{x} - 1$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}_+^*$:

$$\text{ليكن: } x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^* \text{ مع: } \begin{cases} \ln x_1 < \ln x_2 \rightarrow -2\ln x_1 > -2\ln x_2 \\ \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \end{cases} \text{ بالجمع نجد: } -2\ln x_1 + \frac{1}{x_1} - 1 > -2\ln x_2 + \frac{1}{x_2} - 1$$

و منه $g'(x_1) > g'(x_2)$

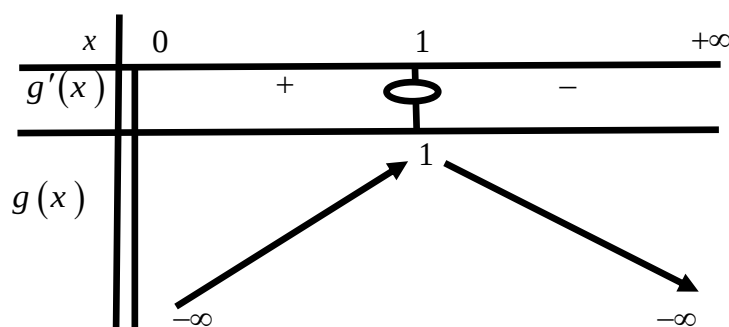
و بالتالي:

• $x \geq 1$ يكون $g'(x) \leq g'(1) = 0$ أي الدالة g متناقصة تماما على المجال $[1; +\infty[$ ،

• كذلك $0 < x \leq 1$ و منه $g'(x) \geq g'(1) = 0$ أي الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0; 1]$ ،

"يمكن الاعتماد على الشكل السابق لتشكيل جدول التغيرات"

و منه جدول التغيرات:



4/ لدينا $y = x$ ، (Δ)

$$\text{أ) لدينا: } (1-2x)\ln x = 0 \text{ معناه } \begin{cases} 1-2x=0 \\ \ln x=0 \end{cases} \text{ أي } S = \left\{ \frac{1}{2}; 1 \right\}$$

يمكن تفسير هذا هندسياً بـ:

المستقيم (Δ) يقطع منحنى الدالة g في النقطتين ذات الفاصلتين $1, \frac{1}{2}$,

(ب) الوضع النسبي:

تقوم بدراسة إشارة الفرق: $g(x) - x = (1 - 2x) \ln x$ ، لأجل هذا نشكل الجدول:

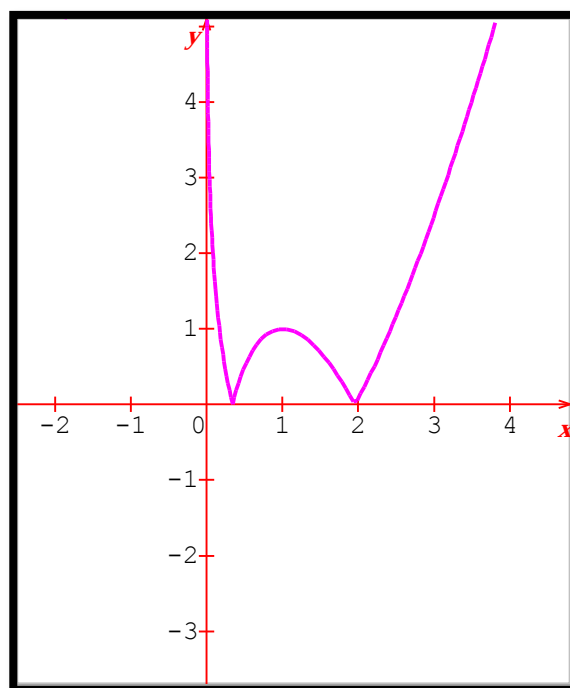
x	0	$1/2$	1	$+\infty$
$\ln x$	-	-	0	+
$1 - 2x$	+	0	-	-
$(1 - 2x) \ln x$	-	0	+	-
الوضع النسبي:	تحت (C_f)	فوق (C_f)	تحت (C_f)	
	(Δ)	(C_f)	(Δ)	(C_f)
		قاطع (Δ)	قاطع (Δ)	

$$h(x) = |g(x)| \quad (5)$$

كتابة g دون رمز القيمة المطلقة:

$$\begin{cases} h(x) = g(x), & \{x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) \geq 0\} \\ h(x) = -g(x), & \{x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) \leq 0\} \end{cases}$$

يمكن ملاحظة أن استعمال الرسم المعطى لتمثيل منحنى الدالة h أسهل من الخوض في تفاصيل العلاقة السابقة، وهذا لصعوبة تعيين الأعداد الحقيقية x التي تغير فيها الدالة g إشارتها:



التمرين 25

- لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي: $f(x) = 4\frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{2}$ ،
- وليكن (C_f) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، مع: $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$ ،
- (1) احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ماذا تستنتج ؟
- (2) أ) يبين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = 4\left(\frac{1-2\ln x}{x^3}\right)$ ،
 ب) شكل جدول تغيرات الدالة f ،
- (3) يبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين مختلفين α, β حيث: $1 < \alpha < \sqrt{e} < \beta < 3$ ،
- (4) حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 ،
- (5) ارسم المنحنى (C_f) و المستقيم (T) ،
- (6) ناقش بياننا حسب قيم الوسيط الحقيقي m حلول المعادلة: $4\ln(x) = m x^2$.

حل:

$$f(x) = 4\frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{2} \text{ و } D_f =]0; +\infty[$$

1/ حساب النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 \times \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(4 \times \frac{1}{x^2} \times \ln x - \frac{1}{2} \right) = -\infty$$

نهاية شهيرة،

نستنتج أن بيان الدالة f يقبل مستقيمين مقارنين أحدهما عمودي معادلته: $x = 0$ و الآخر أفقي معادلته $y = \frac{-1}{2}$ في جوار $+\infty$ ،

2/

أ) من أجل كل x موجب تماما لدينا:

$$f'(x) = \left(4\frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{2} \right)' = 4\frac{x - 2x \ln x}{x^4} = 4\left(\frac{1 - 2\ln x}{x^3}\right)$$

ب) تشكيل جدول التغيرات:

$$\text{لدينا } x > 0 \text{ أي: } x^3 > 0 \text{ و } f'(x) = 8\left(\frac{\ln(e^{1/2}) - \ln(x)}{x^3}\right) \text{ أي:}$$

x	0	$e^{1/2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$f(\sqrt{e})$	
		$-\infty$	$-1/2$

3/ من جدول التغيرات يمكن أن نلاحظ بسهولة أن شروط مبرهنة القيم المتوسطة محققة ولدينا $f(\sqrt{e}) = \frac{2}{e} - \frac{1}{2} \approx 0.24 > 0$ وبالتالي المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين α, β في المجالين $]0; \sqrt{e}[$, $]\sqrt{e}; +\infty[$ على التوالي، لكن هل $1 < \alpha < \sqrt{e} < \beta < 3$ ؟

عند تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة مرتين على المجالين $]\sqrt{e}; 3[$, $]1; \sqrt{e}[$ ، مع ملاحظة بقاء استمرارية الدالة f على هذين المجالين و

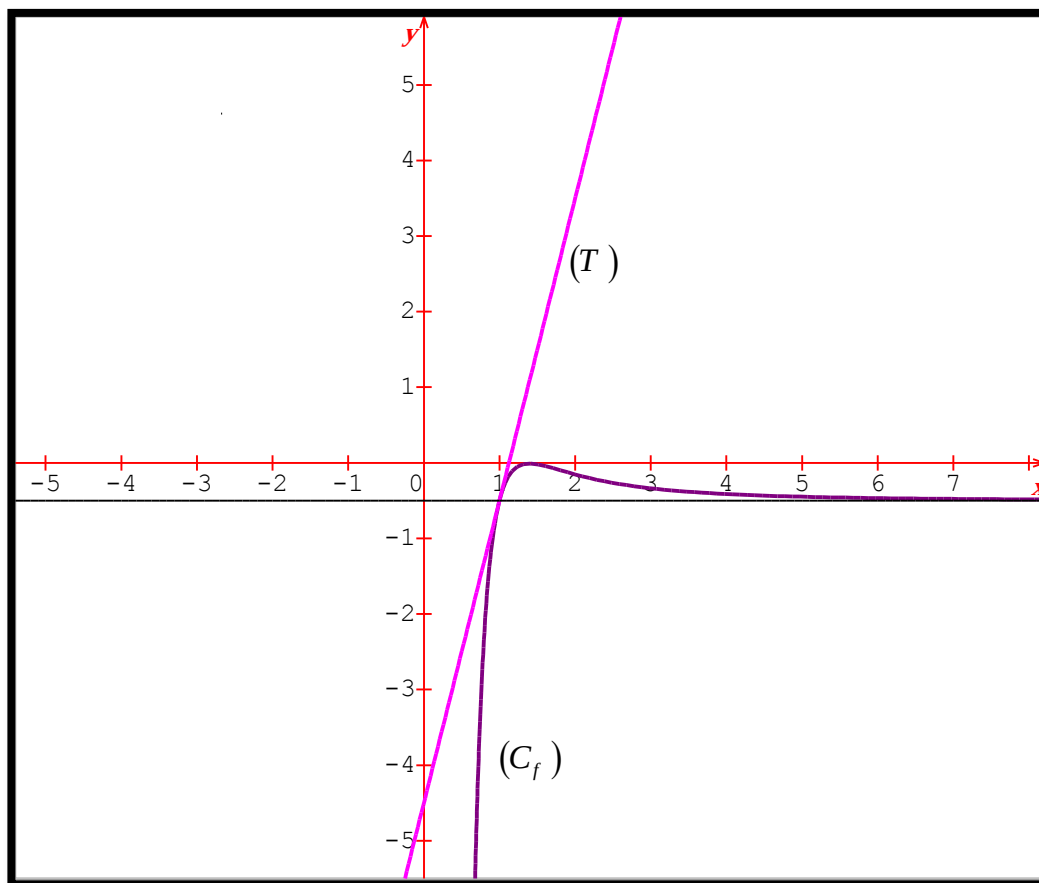
* $f(1) \times f(\sqrt{e}) < 0$ لأن $f(1) = -\frac{1}{2} < 0$ و $f(\sqrt{e}) = \frac{2}{e} - \frac{1}{2} > 0$ بالتالي $\alpha \in]1; \sqrt{e}[$

* $f(\sqrt{e}) \times f(3) < 0$ لأن $f(\sqrt{e}) = \frac{2}{e} - \frac{1}{2} > 0$ و $f(3) = 4 \times \frac{\ln 3}{9} - \frac{1}{2} < 0$ ومنه $\beta \in]\sqrt{e}; 3[$

4/ تحديد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عن النقطة ذات الفاصلة 1:

لدينا: $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ أي: $y = 4x - \frac{9}{2}$ ، (T)

5/ الرسم البياني:



6/ المناقشة البيانية:

طلب منا حل المعادلة $4 \ln(x) = m x^2$ بيانيا، أي وجب إظهار عبارة الدالة f ، فتصبح المعادلة على النحو: $4 \frac{\ln x}{x^2} = m$ أي:

$$4 \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{2} = m - \frac{1}{2} = \alpha$$

ومنه:

α	m	المناقشة البيانية:
$-\infty$	$-\infty$	حل وحيد
$-1/2$	0	حل وحيد
		حلان
$(2/e)-1/2$	$2/e$	حل مضاعف
		لا توجد حلول
$+\infty$	$+\infty$	

التمرين 26:

f دالة معرفة على $]-1;1[$ كما يلي: $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

(C) تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس،

1. أ- عيين مشتملة الدالة f ،

ب- استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $]-1;1[$ ،

2. أ- ادرس نهايات الدالة f عند -1 و عند 1 ،

ب- استنتج وجود مستقيمت مقارنة للمنحنى (C)،

3. أ- شكل جدول تغيرات الدالة f ،

ب- بين أن مبدأ المعلم هو مركز تناظر للمنحنى (C)،

ج- أنشئ المنحنى (C) و المماس لـ (C) عند النقطة التي فاصلتها 0،

4. أ- انطلاقا من الدراسة السابقة، بين أنه من أجل كل عدد حقيقي y ، المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلا واحدا،

ب- عبر بالحساب، عن x بدلالة y ،

ج- نرمز بـ (C') إلى المنحنى الممثل للدالة الجديدة،

اشرح لماذا المنحنيان (C) و (C') متناظران بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $y = x$ ؟

د- ارسم (C') في نفس المعلم السابق.

حل:

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \text{و} \quad D_f =]-1;1[$$

1. أ- من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right)' = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1+x}{1-x} \right)'}{\left(\frac{1+x}{1-x} \right)} = \frac{1}{2} \frac{\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}}{\left(\frac{1+x}{1-x} \right)} = \frac{1}{(1-x)(x+1)} > 0$$

و منه الدالة متزايدة تماما على المجال $]-1;1[$ و بالتالي أجبنا على السؤال ب).

2. أ- النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \right) = -\infty$$

ب) من النهايات السابقة يمكن استنتاج ما يلي:

- $x = -1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C) ،
- $x = 1$ معادلة مستقيم مقارب عمودي للمنحنى (C) ،

(3) أ) تشكيل جدول التغيرات للدالة f :

x	-1	1
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

ب) لنبين أن مبدأ المعلم هو مركز تناظر للمنحنى (C) ، أي الدالة f فردية: لدينا $x \in]-1;1[$ يكون $-x \in]-1;1[$

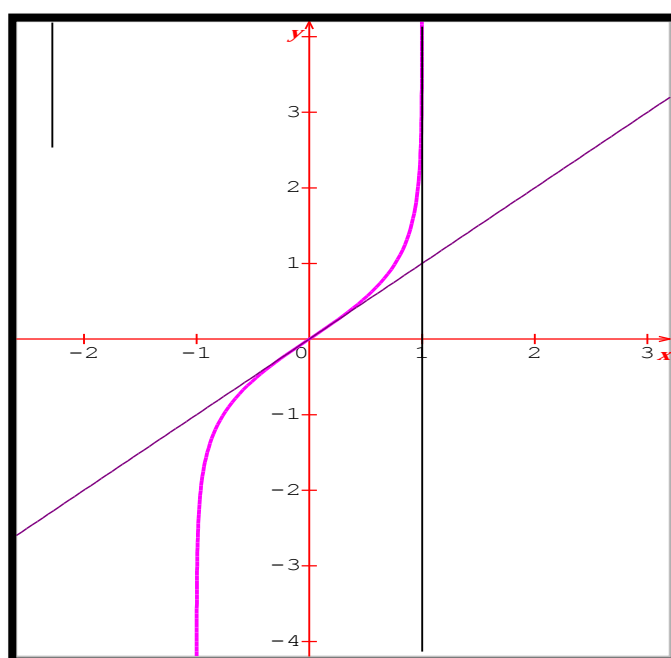
$$f(-x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = -f(x)$$

أي الدالة f فردية،

- معادلة المماس لـ (C) عند 0 :

$f(0)=0, f'(0)=1$ ، $y=f'(0)x+f(0)$ ، ومنه: $y=x$ ، يمكن استنتاج أن النقطة $(0;0)$ هي "نقطة انعطاف" لمنحنى الدالة f

ج/



(4) أ) معرفة و مستمرة على المجال $]-1;1[$ و متزايدة تماما عليه و $y \in]-\infty; +\infty[$ مع:

$$-\infty = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) < y < \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$$

 و منه المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-1;1[$ هذا حسب مبرهنة القيم المتوسطة،
 ب) لنعبر حسابيا عن x بدلالة y :

لدينا: $y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ و منه: $\frac{1+x}{1-x} = e^{2y}$ أي: $1+x = e^{2y} - x e^{2y}$ و منه: $x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

ج) (C') هو المنحنى الممثل للدالة:

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow]-1;1[$$

$$x \longrightarrow g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

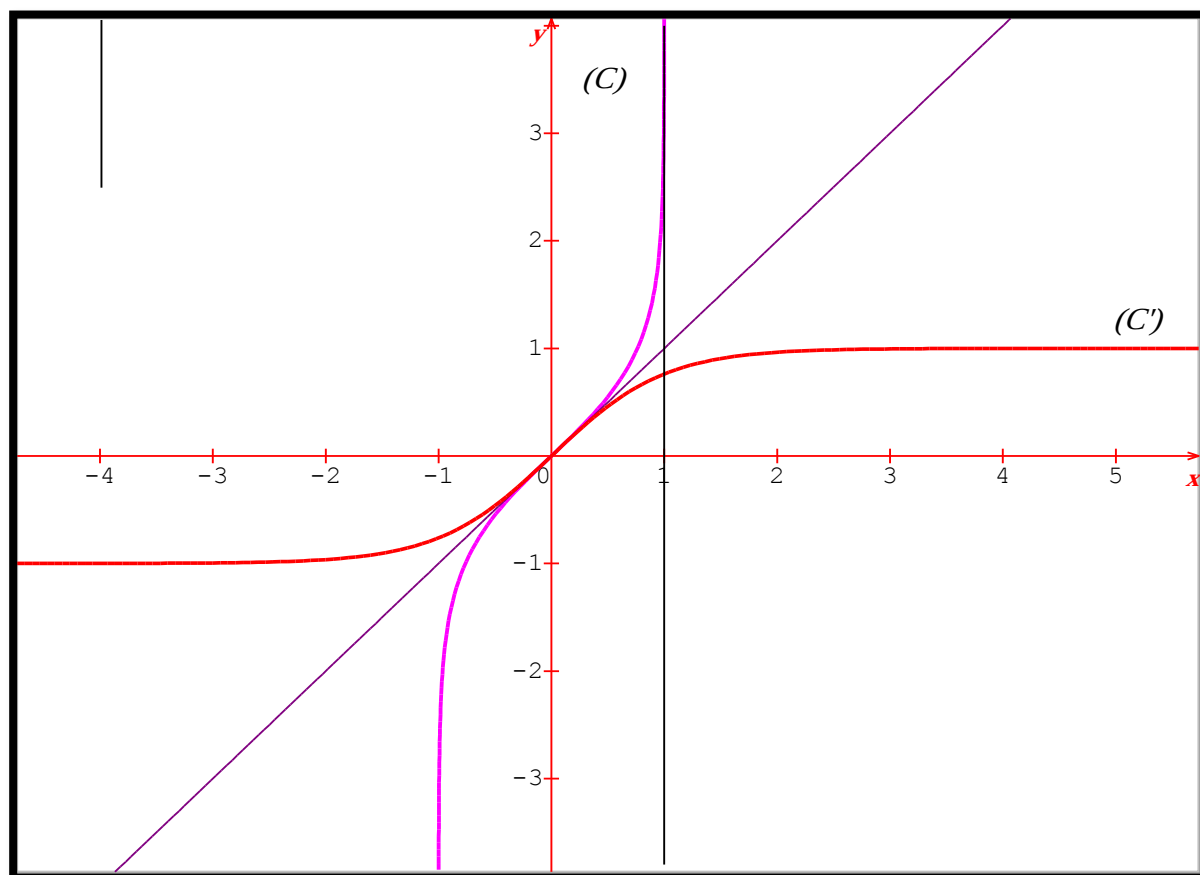
لتكن $M_0(x_0; y_0)$ نقطة من المنحنى (C) بذلك: $f(x_0) = y_0$ و حسب 4- أ) أي: $g(y_0) = x_0$ $M'_0(y_0, x_0) \in (C')$
 لنبحث عن علاقة بين M_0, M'_0 :

معامل توجيه المستقيم $(M_0 M'_0)$ هو -1: لأن $\frac{y_0 - x_0}{x_0 - y_0} = -1$ أي $\frac{y_0 - x_0}{x_0 - y_0} = -1$ أي $M_0 M'_0$ عمودي على المنصف الأول الذي معادلته $y = x$ ،

هذا من جهة و من جهة أخرى مسافتنا M_0 و M'_0 من المنصف الأول هي: $MM_0 = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - x)^2} = MM'_0$
 حيث: النقطة M من المنصف الأول،

أي M'_0 نظيرة M_0 بالنسبة للمنصف الأول.

د) رسم (C') :



التمرين 27:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ،

أولاً:

g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; 3]$ بنـ $g(x) = x \ln x + x$

(1) ادرس تغيرات الدالة g ،

(2) / بين أن المعادلة $g(x) = 2$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; 3]$ ،

ثم تحقق أن $1,45 < \alpha < 1,46$ ،

ب/ استنتج إشارة $g(x) - 2$ ،

ثانياً:

التمثيل المقابل (C_f) هو للدالة f المعرفة على المجال $]0; 3]$ بنـ

$$f(x) = |x - 2| \ln x$$

(1) باستعمال (C_f) ضع تخميناً حول قابلية اشتقاق الدالة f عند 2،

(2) أثبت صحة تخمينك،

(3) ادرس تغيرات الدالة f ،

ثالثاً:

h الدالة المعرفة على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ كما يلي:

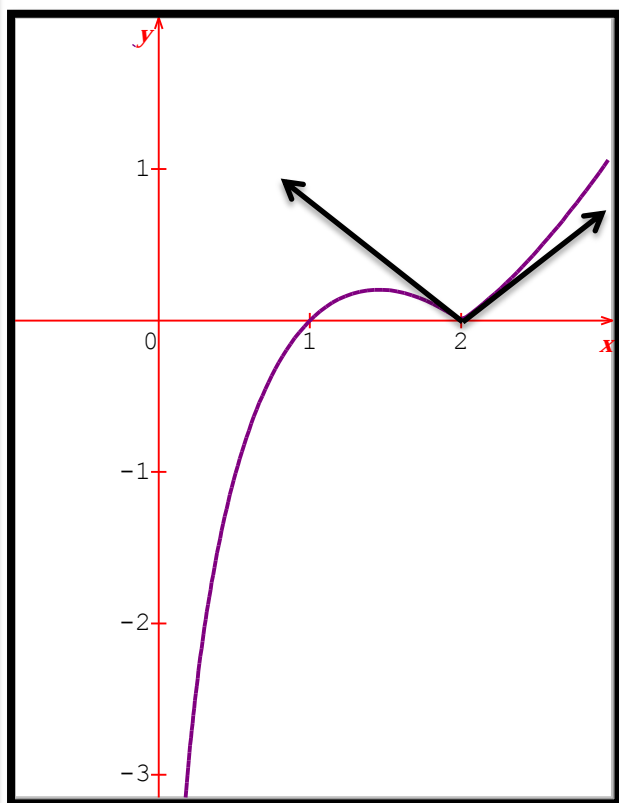
$$h(x) = (2 - \cos x) \ln(\cos x)$$

(1) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب للمنحنى (C_h) ،

حيث: (C_h) هو التمثيل البياني للدالة h ،

(2) أدرس اتجاه تغير الدالة h ، ثم شكل جدول تغيراتها و ارسم

(Δ) و (C_h) .



حل:

أولاً:

لدينا $g(x) = x \ln x + x$ و $D_g =]0; 3]$

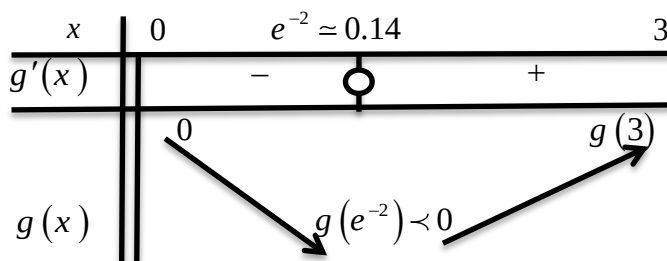
1/ دراسة تغيرات الدالة g :

النهايات:

$$g(3) = 3(1 + \ln 3) \approx 6.3 \text{ * و } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x + x) = 0 \text{ *}$$

المشتق:

من أجل كل x من $]0; 3]$ لدينا: $g'(x) = \ln x + 2$ و منه جدول التغيرات:



2/ أ/ من جدول التغيرات نستنتج المعادلة $g(x) = 2$ لا تقبل حلاً في المجال $]0; e^{-2}[$ لأنه: من أجل كل x من $]0; e^{-2}[$ لدينا $g(x) < \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 < 2$ (دالة متناقصة على المجال $]0; e^{-2}[$ ، الدالة g مستمرة و متزايدة تماماً على المجال $]e^{-2}; 3[$ و $g(e^{-2}) = -0.13 < 2 < g(3) \approx 6.3$ وبالتالي حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد حل وحيد $\alpha \in]0; 3[$ حيث: $g(\alpha) = 2$ ، يكفي التأكد أن العدد 2 محصور بين $g(1.45)$ و $g(1.46)$ كون $]1.45; 1.46[\subset]0; 3[$ لدينا $g(1.45) = 1.45 \ln(1.45) + 1.45 = 1.99 < 2 < 2.01 = g(1.46) = 1.46 \ln(1.46) + 1.46$

ب/ من جدول التغيرات نستنتج:

* إذا كان $0 < x \leq \alpha$ يكون $g(x) \leq 2$ أي: $g(x) - 2 \leq 0$ ،

* إذا كان $\alpha \leq x \leq 3$ يكون $g(x) \geq 2$ أي: $g(x) - 2 \geq 0$ ،

ثانياً:

لدينا: $f(x) = |x - 2| \ln x$ و $D_f =]0; 3[$

1/ من الشكل المرفق يمكن وضع التخمين التالي: الدالة f ليست قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 2$ ،

2/ اثبات التخمين:

لنستعمل التعريف:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2| \ln x}{x - 2} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2) \ln x}{x - 2} = \ln 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2) \ln x}{x - 2} = -\ln 2 \end{cases}$$

و بالتالي الدالة f ليست قابلة للاشتقاق عند $x_0 = 2$ ،

3/ دراسة تغيرات الدالة f :

النهايات:

$$f(3) = \ln 3 \quad * \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (|x - 2| \ln x) = 2 \ln 0^+ = -\infty \quad *$$

المشتقة:

$$f(x) = |x - 2| \ln x = \begin{cases} (x - 2) \ln x & , 3 \geq x \geq 2 \\ -(x - 2) \ln x & , 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

كتابة الدالة f دون رمز القيمة المطلقة:

و من أجل كل x من $]0; 3[- \{2\}$:

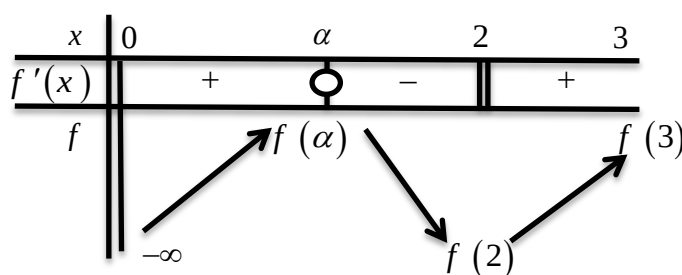
$$f'(x) = \begin{cases} \ln x + \frac{x-2}{x} = \frac{x \ln x + x - 2}{x} = \frac{g(x)-2}{x} > 0, \alpha < 2 < x < 3 \\ -\ln x - \frac{x-2}{x} = -\frac{x \ln x + x - 2}{x} = -\frac{g(x)-2}{x}, 0 < x < 2 \end{cases}$$

من دراسة إشارة $g(x)-2$

وإذا كان $0 < x < 2$:



ومن جدول التغيرات:



ثالثا:

لدينا $h(x) = (2 - \cos x) \ln(\cos x) = f(\cos x)$ مع $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \cos(x) \in]0; 1]$

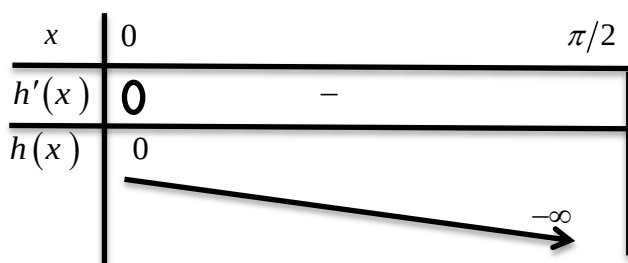
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} h(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2 - \cos x) \ln(\cos x) = 2 \ln 0^+ = -\infty \text{ لدينا } 1/$$

من هاته النهاية نستنتج أن المستقيم الذي معادلته $x = \frac{\pi}{2}$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة h ,

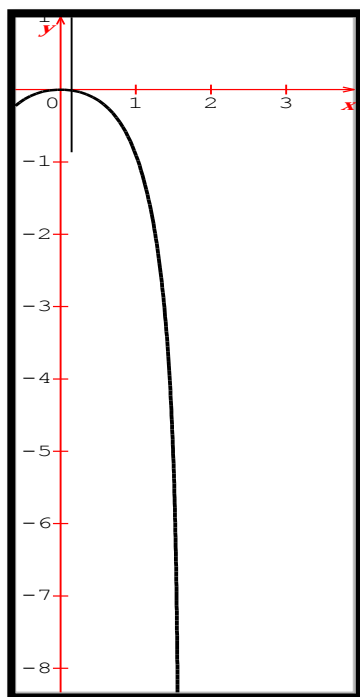
$$h'(x) = (f(\cos x))' = -\sin x \times f'(\cos x) = \sin x \times \frac{g(\cos x) - 2}{\cos x} \leq 0 : x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\text{ من أجل كل } 2/$$

تذكر أن $\cos(x) \in]0; 1]$ إذن نعوض بالعبار الثانية للمشتقة،

ومن جدول التغيرات:



الرسم البياني:



التمرين 28

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$ ،
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ،
- 1 / أ / احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، فسّر النتيجة هندسياً ،
- ب / ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها ،
- 2 / أ / ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = 1$ ،
- ب / اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1 ،
- ج / بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; 1[$ حلاً وحيداً α ، حيث: $e^{-0.4} < \alpha < e^{-0.3}$ ،
- 3 / أنشئ (T) و (C_f) ،
- 4 / لتكن الدالة h المعرفة على المجال $\mathbb{R} - \{0\}$ كما يلي: $h(x) = 1 + \frac{2 \ln |x|}{|x|}$ ،
- و ليكن (C_h) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق ،
- أ / بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم $h(x) - h(-x) = 0$ ، ماذا تستنتج؟
- ب / أنشئ المنحنى (C_h) اعتماداً على المنحنى (C_f) ،
- ج / ناقش بياناً حسب الوسيط الحقيقي m ، عدد حلول المعادلة: $\ln x^2 = (m-1)|x|$.

حل:

لتكن الدالة

$$D_f =]0; +\infty[\text{ و } f(x) = 1 + \frac{2 \ln x}{x}$$

$$1 / \text{ أ / } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2 \ln x}{x} \right) = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{2 \ln x}{x} \right) = -\infty$$

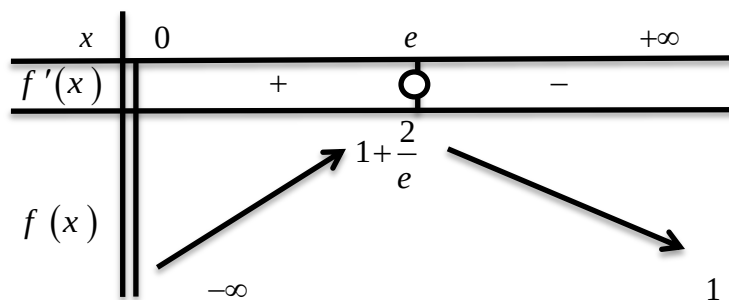
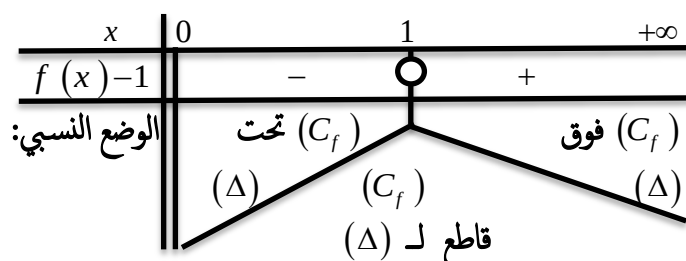
التفسير الهندسي للنهائيتين:

المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقارب عمودي لمنحنى الدالة f ،
المستقيم الذي معادلته $y = 1$ مقارب أفقي لمنحنى الدالة f في جوار $+\infty$.

ب/ دراسة التغيرات:

$$f'(x) = \left(1 + \frac{2 \ln x}{x}\right)' = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2} = 2 \left(\frac{1 - \ln x}{x^2}\right) \text{ من أجل كل } x \in]0; +\infty[\text{ يكون:}$$

و بالتالي يمكن تشكيل جدول التغيرات:

(2) أ/ دراسة الوضع النسبي: لدينا $f(x) - 1 = \frac{2 \ln x}{x}$ و منه جدول الوضع النسبي:ب/ معادلة المماس: $(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ بالتعويض نجد: $(T): y = 2x - 1$ ج/ من جدول التغيرات نستنتج أن f مستمرة و متزايدة تماماً على المجال $]0; 1[$ و

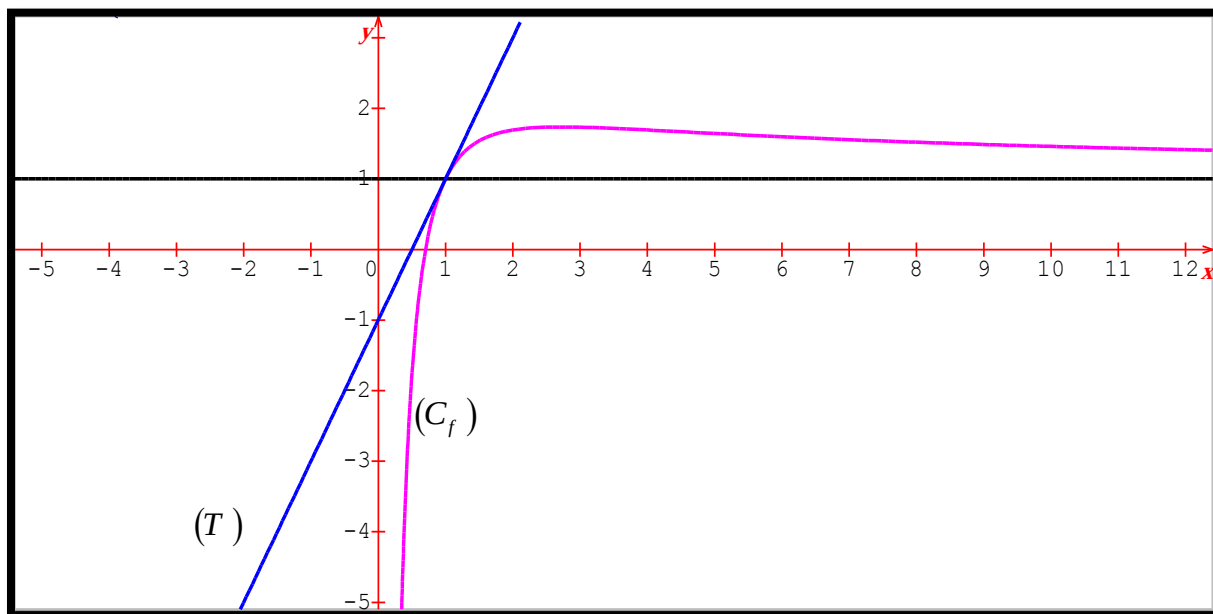
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \times f(1) = -\infty \times (1) = -\infty < 0$$

و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد حل وحيد $\alpha \in]0; 1[$ حيث $f(\alpha) = 0$ وكون: $]0; 1[\subset]e^{-0.4}; e^{-0.3}[$ يكفي التأكد من أن $f(e^{-0.4}) \times f(e^{-0.3}) < 0$

$$\text{لدينا: } f(e^{-0.3}) = 1 - \frac{0.6}{0.74} = 1 - 0.81 = 0.189 \text{ و } f(e^{-0.4}) = 1 - \frac{0.8}{0.67} = 1 - 1.19 = -0.19$$

و بالتالي تحقق المطلوب،

(3) الرسم البياني:



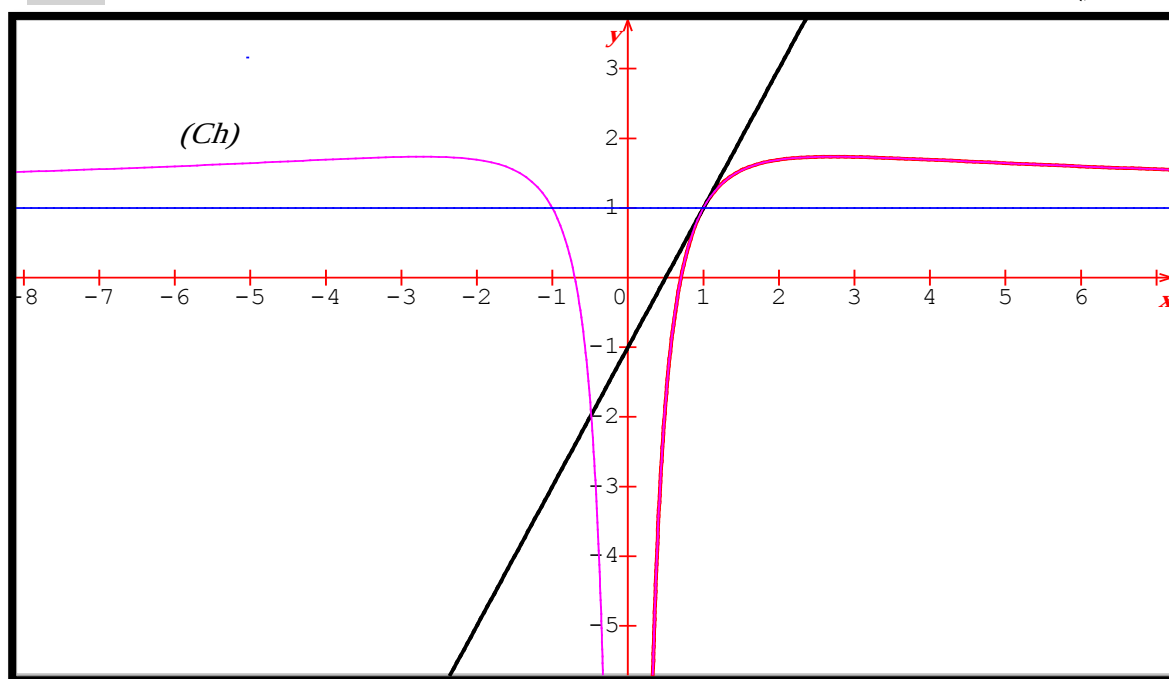
(4) لدينا: $h(x) = 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|}$ و $D_h = \mathbb{R}^*$

أ/ من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ يكون $-x \in \mathbb{R}^*$

$$h(x) - h(-x) = 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|} - 1 - \frac{2\ln|-x|}{|-x|} = 0$$

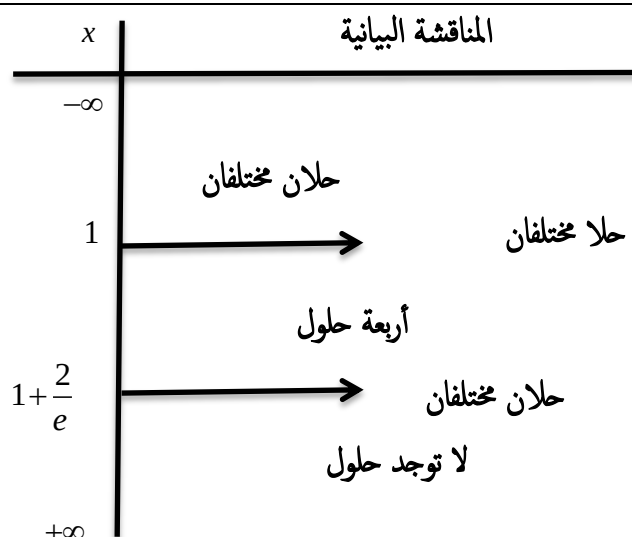
ب/ من أجل $x > 0$ يكون $h(x) = f(x)$ و منه منحنى الدالة h ينطبق على منحنى الدالة f ،

و نكمل الجزء المتبقي أي على المجال $]-\infty; 0]$ باستعمال التناظر بالنسبة لمحور الترتيب كون h الدالة زوجية، لاحظ الشكل:



ج/ لدينا: $\ln x^2 = (m-1)|x|$ معناه $2\ln|x| = (m-1)|x|$ أي: $h(x) = 1 + \frac{2\ln|x|}{|x|} = m$ حلول المعادلة هي فواصل نقط

تقاطع منحنى الدالة f مع المستقيم الذي معادلته $y = m$:



التمرين 29:

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$ ،
- (C) المنحني الممثل للدالة f في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ،
- أ- ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ،
 - ب- عين الدالة المشتقة للدالة f ،
 - ج- ادرس إشارة $f'(x)$ ، استنتج تغيرات f ،
 - أ- بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = 2x$ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$ ،
 - ب- أرسم المستقيم (D) و المنحني (C) .
 - 3 . k عدد حقيقي موجب تماما ، ناقش حسب قيم k عدد حلول المعادلة $e^{2x} - e^x + 1 - k = 0$ ،
- أ) بالحساب ،
- ب) باستعمال تغيرات الدالة f "بيانيا".

حل:

$$f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1) \quad \text{و} \quad D_f = \mathbb{R}$$

1 / أ) حساب النهايات عند $-\infty$ ، $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^{2x} - e^x + 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x (e^x - 1 + e^{-x}))) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(e^{2x} - e^x + 1)) = \ln(1) = 0$$

المستقيم الذي معادلته $y = 0$ مقارب أفقي لمنحني الدالة f في جوار $-\infty$ ،

ب) تعيين الدالة المشتقة للدالة f :

$$f'(x) = (\ln(e^{2x} - e^x + 1))' = \frac{2e^{2x} - e^x}{e^{2x} - e^x + 1} = \frac{2e^x \left(e^x - \frac{1}{2} \right)}{e^{2x} - e^x + 1} = \frac{2e^x (e^x - e^{-\ln 2})}{e^{2x} - e^x + 1} : \mathbb{R} \text{ من أجل كل } x$$

ج) دراسة إشارة المشتقة:

إشارة المشتقة من إشارة $e^x - e^{-\ln 2}$ أي نرسم الجدول:

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+

و منه جدول التغيرات:

x	$-\infty$	$-\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		0	

$$f\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{4}{4}\right) = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$$

(2) أ) لنبين أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y = 2x$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$:

طريقة أولى:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{2x} - e^x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^{2x} + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{\ln(1 - e^{-x} + e^{-2x})}{x} \right) = 2$$

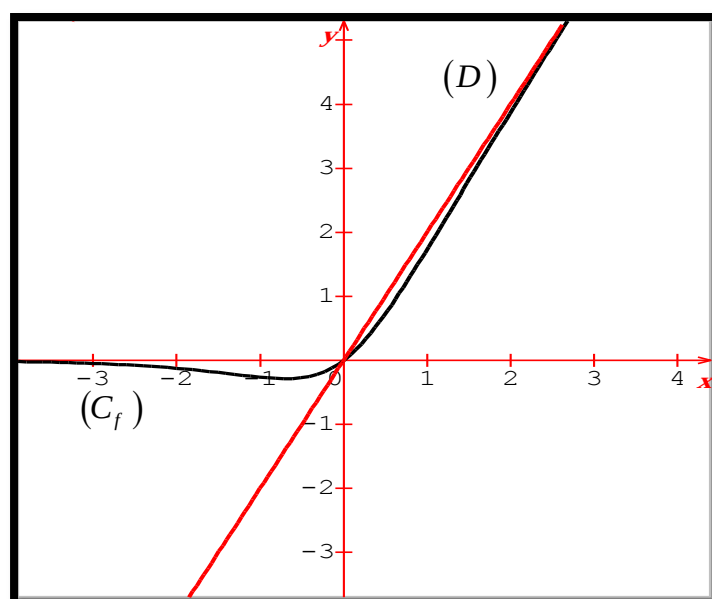
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^{2x} - e^x + 1) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) - 2x) = \ln(1) = 0$$

حقا $y = 2x$ مستقيم مقارب مائل في جوار $+\infty$ ،

هاته الطريقة تستعمل في حالة عدم ذكر معادلة المستقيم،

طريقة ثانية: يستحسن استعمال هاته الطريقة:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^{2x} - e^x + 1) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + \ln(1 - e^{-x} + e^{-2x}) - 2x) = \ln(1) = 0$$

و هذا يؤكد أن المستقيم الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل لمنحنى الدالة في جوار $+\infty$ ،(ب) رسم المستقيم الذي معادلته $y = 2x$ (D) والمنحنى (C) :

(3) k عدد حقيقي موجب تماما،

المناقشة حسب قيم k عدد حلول المعادلة: $e^{2x} - e^x + 1 = k$ ،
أ/ بالحساب:

نضع: $\begin{cases} X = e^x \\ X > 0 \end{cases}$ و منه: $X^2 - X + 1 - k = 0$ لنحسب المميز: $\Delta = 1 - 4(1 - k) = -3 + 4k$ ، نميز الحالات التالية:

• إذا كان: $0 < k < \frac{3}{4}$ يكون: $\Delta < 0$ و منـه المعادلة ليس لها حلول في $\mathbb{R}$ ،

• إذا كان: $k = \frac{3}{4}$ يكون: $\Delta = 0$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا $e^{x_0} = \frac{1}{2}$ أي: $x_0 = -\ln 2$ ،

• إذا كان: $k > \frac{3}{4}$ يكون: $\Delta > 0$ و منه المعادلة $X^2 - X + 1 - k = 0$ تقبل حلين مختلفين في الحالة العامة، لكنه يوجد شرط يجب تحقيقه $X > 0$ لنحسب الحلين و لتأكد من تحقيقها الشرط الموضوع:

$e^{x_1} = X_1 = \frac{1 + \sqrt{-3 + 4k}}{2}$ نلاحظ أن $X_1 > 0$ أي: $x_1 = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{-3 + 4k}}{2}\right)$ ،

و $e^{x_2} = X_2 = \frac{1 - \sqrt{-3 + 4k}}{2}$ هل $X_2 = \frac{1 - \sqrt{-3 + 4k}}{2} > 0$ ؟

لدينا: $1 - \sqrt{-3 + 4k} = \frac{1 + 3 - 4k}{1 + \sqrt{-3 + 4k}} = \frac{4(1 - k)}{1 + \sqrt{-3 + 4k}}$ أي نحصل على التكافؤ $\frac{1 - \sqrt{-3 + 4k}}{2} > 0$ معناه $1 - k > 0$

أي: من أجل $\frac{3}{4} < k < 1$ يصبح $X_2 > 0$ ،

و من أجل: $k \geq 1$ يصبح $X_2 < 0$ و هذا يتنافى و الشرط،

خلاصة:

إذا كان: $0 < k < \frac{3}{4}$ يكون: $\Delta < 0$ ، و منه المعادلة ليس لها حلول،

إذا كان: $k = \frac{3}{4}$ يكون: $\Delta = 0$ ، المعادلة تقبل حلا مضاعفا،

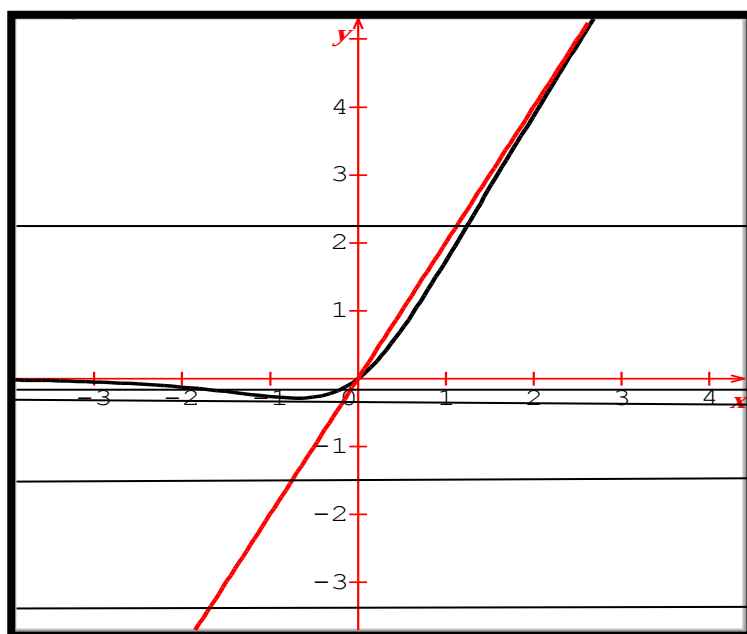
من أجل $\frac{3}{4} < k < 1$ المعادلة تقبل حلين مختلفين،

من أجل: $k \geq 1$ المعادلة تقبل حلا وحيدا.

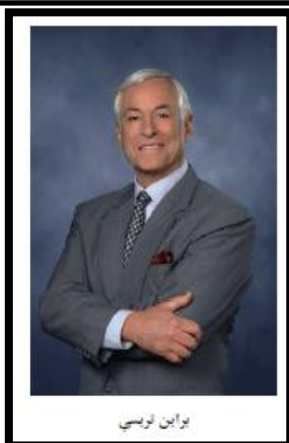
(ب) باستعمال البيان:

لدينا التكافؤ: $e^{2x} - e^x + 1 = k$ معناه $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1) = \ln k$ و منه حلول المعادلة هي فواصل تقط تقاطع المنحنى (C_f) و المستقيم $y = \ln k$ الموازي لمحور الفواصل،

$\ln k$	k	المناقشة:
$-\infty$	0	لا توجد حلول،
$\ln\left(\frac{3}{4}\right)$	$\frac{3}{4}$	حل مضاعف،
		حلان مختلفان،
0	1	حل وحيد،
		حل وحيد،
$+\infty$	$+\infty$	



مفتاح النجاح هو أن نركز فكرنا و وعينا على الأشياء التي نتمناها، لا أن نركز على الأشياء التي نخشاه.



إبراهيم التميمي

التمرين 30:

أولاً:

f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = (1 + 2 \ln x)(-1 + \ln x)$ ،

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ،

أ/ ادرس تغيرات الدالة f ،

ب/ اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة e (أساس اللوغاريتم النيبيري) ،

ج/ عين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل ثم ارسم (C_f) على المجال $]0; e^2]$ ،

ثانياً:

g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 1 - \ln x$ ،

(C_g) تمثيلها البياني في المعلم السابق ،

أ/ ادرس تغيرات الدالة g ،

ب/ عين الوضع النسبي للمنحنيين (C_g) و (C_f) ثم ارسم (C_g) على المجال $]0; e^2]$.

حل:

1/ لدينا $f(x) = (1 + 2 \ln x)(-1 + \ln x)$ و $D_f =]0; +\infty[$

أ/ دراسة تغيرات الدالة f :

النهايات:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(1 + 2 \ln x)(-1 + \ln x)] = +\infty ، \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [(1 + 2 \ln x)(-1 + \ln x)] = +\infty *$$

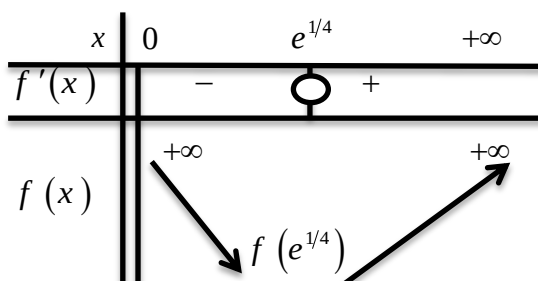
المشتقة:

من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$:

$$f'(x) = \left(\frac{2}{x}\right)(-1 + \ln x) + \left(\frac{1}{x}\right)(1 + 2 \ln x) = \frac{1}{x}(-2 + 2 \ln x + 1 + 2 \ln x) = \frac{1}{x}(-1 + 4 \ln x)$$

لدينا $f'(x) = 0$ معناه $\ln x = \frac{1}{4}$ أي: $x = e^{1/4}$ ،

أي: $f'(x) = \frac{4}{x} \left(\ln x - \ln e^{1/4} \right)$ و منه جدول التغيرات:



$$\text{مع: } f(e^{1/4}) = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(-1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{8}$$

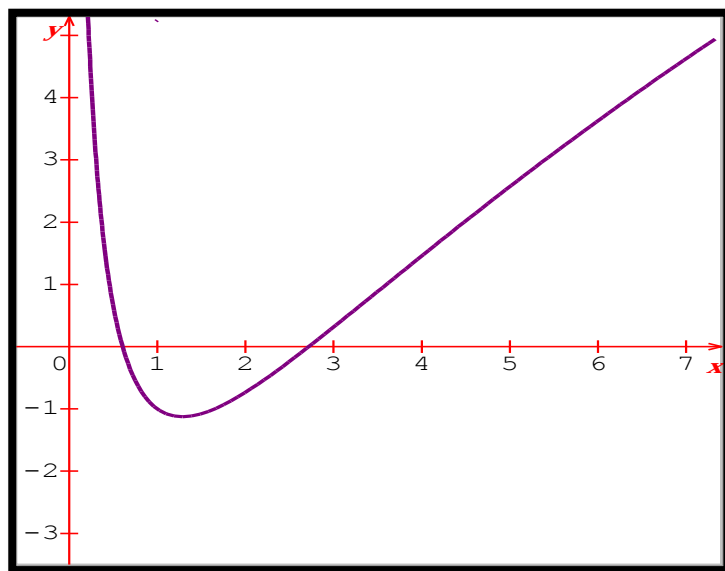
ب/ لدينا $y = f'(e)(x - e) + f(e)$ مع $f'(e) = \frac{3}{e}$ و $f(e) = 0$ ، بالتعويض نجد المعادلة النهائية:

$$(\Delta): y = \frac{3}{e}(x - e)$$

ج/ تعيين فواصل نقط تقاطع منحنى الدالة f مع محور الفواصل أي البحث عن حلول المعادلة $f(x) = 0$ معناه $f(x) = 0$ وبالتالي $x = e^{-1/2}$ أو $x = e$ ومنه:

$$(C_f) \cap (xx') = \{A(e; 0); B(e^{-1/2}; 0)\}$$

رسم المنحنى (C_f) على المجال $]0; e^2]$ لدينا $f(e^2) = 5$ ومراقبة جدول التغيرات نجد:



2/ لدينا $g(x) = 1 - \ln x$ و $D_g =]0; +\infty[$

أ/ دراسة تغيرات الدالة g :

النهايات:

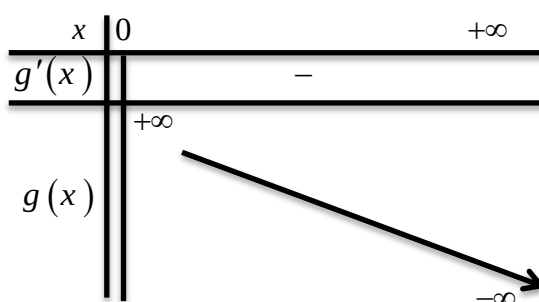
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \ln x) = +\infty \quad * \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \ln x) = -\infty \quad *$$

المشتقة: من أجل كل عدد حقيقي x من $]0; +\infty[$:

$$g'(x) = (1 - \ln x)' = -\frac{1}{x} < 0$$

أي الدالة g متناقصة على المجال $]0; +\infty[$ ،

ومن جدول التغيرات:



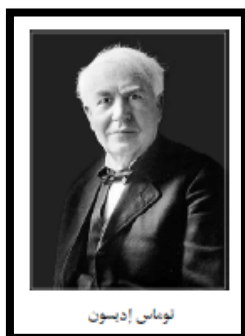
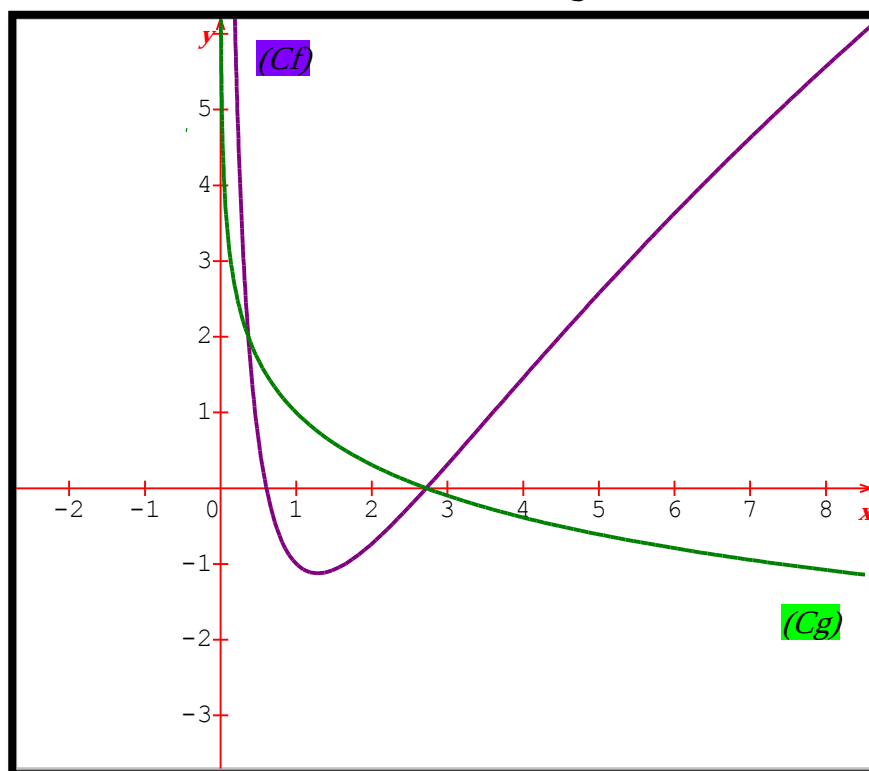
ب/ تعيين الوضع النسبي للمنحنين:

لدينا الفرق:

$$f(x) - g(x) = (1 + 2\ln x)(-1 + \ln x) - (1 - \ln x) = (1 - \ln x)[-1 - 2\ln x - 1] = 2(\ln x - \ln e)(\ln x - \ln e^{-1})$$

و منه جدول الوضع النسبي:

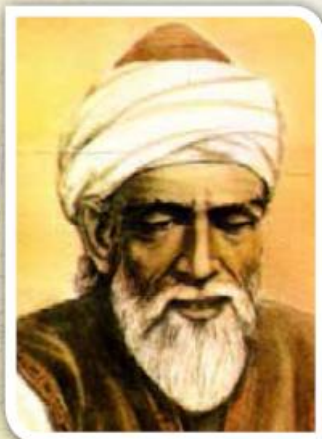
x	0	e^{-1}	e	$+\infty$
$\ln x - 1$		-	-	+
$\ln x + 1$		-	+	+
$(\ln x - 1)(\ln x + 1)$		+	-	+
الوضع النسبي:	فوق (C_f) (C_g)	تحت (C_f) (C_g)	فوق (C_f) (C_g)	
قاطع (C_f) لـ (C_g)				

رسم (C_g) على المجال: بمراقبة جدول التغيرات و الوضع النسبي نجد:

لويس إديسون

هناك طريقة ما لأدائها بشكل أفضل - اعثر عليها.

من علماء العرب



أبو الوفا البوزجاني:

هو أبو الوفا محمد بن محمد بن يحيى بن اسماعيل بن العباس البوزجاني، من علماء القرن الـ5 الهجري، ولد في بوزجان بخراسان فارس، ثم انتقل إلى بغداد واستقر فيها حتى وفاته، كان البوزجاني من أعظم علماء الرياضيات في عصره، وأحد الذين لهم فضل كبير في تقدم العلوم الرياضية. درس على يدي عمه أبي عمرو المغازلي، وخاله أبي عبد الله محمد بن عنبسة، فيما درس الهندسة على يد أبي يحيى الماوردي وأبي العلاء بن كرنيب.

في بغداد لمع اسم البوزجاني، وظهر للناس إنتاجه في كتبه ورسائله وشروحه لمؤلفات إقليدس

وديوفانتس والخوارزمي، حيث قضى حياته في التأليف والرصد والتدريس، وانتخب ليكون أحد أعضاء المرصد الذي أنشأه شرف الدولة في سراية سنة 377 هـ.

كان البوزجاني أحد الأئمة المعدودين في الفلك والرياضيات، وله فيهما مؤلفات قيمة، وكان من أشهر الذين برعوا في الهندسة، أما في الجبر فقد زاد على بحوث الخوارزمي ما يعتبر أساساً لعلاقة الجبر بالهندسة.

وأبو الوفا أول من وضع النسبة المثلثية، وأول من استعملها في حلول المسائل الرياضية، وهو الذي أدخل القاطع والقاطع تمام، ووضع الجداول الرياضية للمماس، كما أوجد طريقة جديدة لحساب جدول الجيب، وطوّر وسائل جديدة لحل مسائل المثلثات الكرية. كما أنه أول من وضع تعريفات في حساب المثلثات، وهو مكتشف صيغة الجيب، وواضع بعض المعادلات التي تتعلق بجيب زاويتين، وقد كشف أبو الوفا بعض العلاقات بين الجيب والمماس والقاطع ونظائرها، ولأن عبقرية البوزجاني ظهرت في فن الرسم؛ فقد وضع كتاب (المسطرة والبركار والكونيا) أي المثلث القائم الزاوية، وفي هذا الكتاب وصف طرائق خاصة مبتكرة لكيفية الرسم واستعمال الآلات.

ترك البوزجاني مؤلفات قيمة منها: (الزيج الشامل)، (الكامل)، لكن (المجسطي) أشهر مؤلفاته، وهو محفوظ في مكتبة باريس الوطنية، بالإضافة إلى كتابين أحدهما فيما يحتاج إليه الصانع في أعمال الهندسة، والآخر فيما يحتاج إليه الكتاب والعمال من علم الحساب، وتخليداً لذكر هذا العالم أطلق اسمه على فوهة بركانية في القمر (فوهة أبو الوفا).

الفصل الثاني:

- الأعداد الأولية
- القسمة في $\mathbb{Z}$ و القاسم المشترك الأكبر
- الموافقات بترديد n حيث: $n \in \mathbb{N}$.

ملاحظة:

خاص بشعبي "الرياضي" و "التقني الرياضي"

أهداف الدرس الأول:

- الأعداد الأولية.

الدرس الأول:

من التاريخ:

للأعداد الأولية أهمية بالغة في الرياضيات، و هذا لكثرة استعمالها في مجالات شتى، لذا الغرض انكب الرياضياتيون على تعيين تلك الأعداد، فمنهم من حاول تعيين متتالية حدودها هي الأعداد الأولية، لكنهم أخفقوا، و مثالا على ذلك أن فريقا أميريكيا توصل إلى إيجاد العدد الأولي $1 - 2^{3021377}$ الذي يعتبر أكبر عدد أولي على الأقل في سنة 1998، و قد كان اكتشاف هذه الأعداد حاضرا قبل عصر الحاسوب ومقتصرا على علماء الرياضيات الكبار مثل Fermat و Euler وغيرهم، حيث كانوا يستخدمون عددا من النظريات أشهرها ما يعرف باختبار Lucas-Lehmer، وهو اختبار ابتكره Lucas في أواخر 1870 م و وضعه على صورة اختبار مبسط لـ Lehmer في 1930 م، ثم استخدم في حل البرامج التي تهدف لاكتشاف الأعداد الأولية مع ظهور الحاسوب الآلي و معظم أعداد Mersenne الكبيرة تم حسابها بواسطة هذا الاختبار.

تعريف:

نسمي عددا أوليا كل عدد طبيعي يقبل قاسمــــــــــــــــين مختلفين،

بعض الطرق لاختبار أولية عدد:

يمكن ملاحظة أن اختبار أولية عدد طبيعي، تزداد صعوبة كلما كان العدد كبيرا لهذا إليك بعض الطرق لتعيين أعدادا أولية:

- **غريبال إيراتوستين** (للأعداد التي تقل عن 100 أما إذا كان كبيرا يصبح استعمال هذه الطريقة صعبا)، للاطلاع على هاته الطريقة لاحظ النشاط المذكور في "الكتاب المدرسي للسنة الأولى جذع مشترك علوم".

- طريقة القسمة:

تعتمد على القسمة على الأعداد الأولية التي تقل عن الجذر التربيعي للعدد المختبر، فإذا لم يقبل العدد المختبر القسمة على أي عدد أولي سابق قلنا أنه أولي،

مثال: سنختبر أولية العدد 211، لدينا $\sqrt{211} \approx 14$ ، يمكن أن نتأكد أن العدد 211 لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية التي تقل عن الجذر التربيعي أي: 2، 3، 5، 7، 11، 13،

و هذا كاف لأن نقول أن العدد 211 أولي، لكن هذه الطريقة يصعب استعمالها إذا كان العدد المختبر كبيرا.

لنثبت طريقة القسمة:

إليك هذه الـ

مبرهنة:

كل عدد طبيعي غير أولي يختلف عن 1، يقبل قاسما أوليا على الأقل يصغر جذره التربيعي.

لأن:

ليكن العدد الطبيعي a حيث: $a \neq 1$ و ليس أوليا، يوجد $d, d' \in \mathbb{N}$ يقسمان a حيث: $a = d \times d'$ ، لنفرض مثلا أن $1 < d \leq d'$ و منه: $d^2 \leq d \times d' = a$ و منه $d^2 \leq a$ ، أي: $d \leq \sqrt{a}$ ، من الواضح وجود عدد أولي m يقسم d مع $m \leq d < \sqrt{a}$ حيث: $m | a$.

كل عدد لا يحقق المبرهنة السابقة هو عدد أولي، و هي الفائدة الضمنية لهاته المبرهنة،

بعض الأعداد الأولية التي تساعدنا في طريقة القسمة:

2، 3، 5، 7، 11، 13، 17، 19، 23، 29، 31، 37، 41.

تمرين تطبيقي:

اختر أولية الأعداد الطبيعية، باستعمال طريقة القسم: 203 ، 301 ، 307 ، 263 .

حل:

* العدد 203:

لدينا: $\sqrt{203} \approx 14$ هل العدد 203 يقبل القسمة على الأعداد الأولية: 2، 3، 5، 7، 11، 13؟

$$203 = 101 \times 2 + 1$$

$$203 = 67 \times 3 + 2$$

$$203 = 40 \times 5 + 3$$

$$203 = 29 \times 7$$

و هذا كاف للحكم أن العدد 203 ليس عددا أوليا.

* العدد 301:

لدينا: $\sqrt{301} \approx 17$ هل العدد 301 يقبل القسمة على الأعداد الأولية: 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17؟

$$301 = 150 \times 2 + 1$$

$$301 = 100 \times 3 + 1$$

$$301 = 60 \times 5 + 1$$

$$301 = 43 \times 7$$

و هذا كاف للحكم أن العدد 301 ليس عددا أوليا.

* العدد 307:

لدينا: $\sqrt{307} \approx 17$ هل العدد 307 يقبل القسمة على الأعداد الأولية: 2، 3، 5، 7، 11، 13، 17؟

$$307 = 153 \times 2 + 1$$

$$307 = 102 \times 3 + 1$$

$$307 = 61 \times 5 + 2$$

$$307 = 43 \times 7 + 6$$

$$307 = 27 \times 11 + 10$$

$$307 = 23 \times 13 + 8$$

$$307 = 18 \times 17 + 1$$

و بالتالي 307 عدد أولي،

* العدد 263:

لدينا: $\sqrt{263} \approx 16$ هل العدد 263 يقبل القسمة على الأعداد الأولية: 2، 3، 5، 7، 11، 13؟

$$263 = 131 \times 2 + 1$$

$$263 = 87 \times 3 + 2$$

$$263 = 52 \times 5 + 3$$

$$263 = 37 \times 7 + 4$$

$$263 = 23 \times 11 + 10$$

$$263 = 20 \times 13 + 3$$

و بالتالي 263 عدد أولي.

بعد أن تعرفنا على الأعداد الأولية، إليك هاته الـ

مبرهنة:

كل عدد طبيعي غير أولي و يختلف عن 1 و 0 يحلل إلى جداء عوامل أولية.

مثلا:

سنكتب العدد 68 على شكل جداء عوامل أولية،

سنقوم بقسمة العدد 68 على الأعداد الأولية بالترتيب، و اختصارا نكتب:

$$\begin{array}{r|l}
 68 & 2 \\
 34 & 2 \\
 17 & 17 \\
 1 &
 \end{array}$$

العدد المحصل عليه بعد القسمة على العدد الأولي و يجب أن يكون قابلا للقسمة،
الأعداد الأولية،

و باستعمال خواص القوى نجد: $68 = 2^2 \times 17$.

بعض استعمالات تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية:

* تعيين قواسم عدد طبيعي:

مثال: عين قواسم العدد 144، نقوم بتحليل هذا العدد إلى جداء عوامل أولية:

$$\begin{array}{r|l}
 144 & 2 \\
 72 & 2 \\
 36 & 2 \\
 18 & 2 \rightarrow 144 = 2^4 \times 3^2 \\
 9 & 3 \\
 3 & 3 \\
 1 &
 \end{array}$$

و من هذا التحليل سنعين قواسم 144:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^0 \times 3^0 = 1, 2^0 \times 3^1 = 3, 2^0 \times 3^2 = 9, 2^1 \times 3^0 = 2, 2^1 \times 3^1 = 6, 2^1 \times 3^2 = 18, 2^2 \times 3^0 = 4, 2^2 \times 3^1 = 12 \\ 2^2 \times 3^2 = 36, 2^3 \times 3^0 = 8, 2^3 \times 3^1 = 24, 2^3 \times 3^2 = 72, 2^4 \times 3^0 = 16, 2^4 \times 3^1 = 48, 2^4 \times 3^2 = 144 \end{array} \right\}$$

أي: $D_{144} = \{1, 3, 9, 2, 6, 18, 4, 12, 36, 8, 24, 72, 16, 48, 144\}$

ملاحظة:

إذا حلل العدد الطبيعي a غير المعدوم و يختلف عن 1 إلى جداء عوامل أولية، أي: $a = q_1^{m_1} \times q_2^{m_2} \times \dots \times q_n^{m_n}$ ، فإن عدد قاسمه هو:

$$(m_1 + 1) \times (m_2 + 1) \times \dots \times (m_n + 1)$$

العدد:

* تعيين القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين:

تتبع الخطوات التالية:

- نقوم بتحليل العددين الطبيعيين إلى جداء عوامل أولية،
- نأخذ جداء العوامل المشتركة مرة واحدة بأس أصغر، و نكون بهذا قد عينا القاسم المشترك الأكبر و نرمز له بـ $PGCD$.

تمرين تطبيقي 01:

- حل العددين التاليين إلى جداء عوامل أولية: 120 و 124،
- اعتمادا على التحليل السابق:
- أ) عين القواسم المشتركة لهما،
- ب) عين القاسم المشترك الأكبر لهما،
- ج) اختزل الكسر $\frac{120}{124}$.

حل:

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\rightarrow 120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

$$\begin{array}{r|l} 124 & 2 \\ 62 & 2 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{array}$$

$$\rightarrow 124 = 2^2 \times 31$$

• لدينا:

$$\bullet \text{ أ) } D_{124,120} = \{1, 2, 4\} \text{ أي: } D_{124,120} = \{2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4\}$$

$$\bullet \text{ ب) } PGCD(124, 120) = 2^2 = 4$$

$$\bullet \text{ ج) اختزال الكسر: } \frac{120}{124} = \frac{30 \times 4}{31 \times 4} = \frac{30}{31}$$

* تعيين المضاعف المشترك الأصغر:

- نقوم بتحليل العددين الطبيعيين إلى جداء عوامل أولية،
- نأخذ جداء العوامل المشتركة بأس أكبر مرة واحدة و كذلك العوامل غير المشتركة و نكون بهذا قد عينا المضاعف المشترك الأصغر، و نرمز له بـ $PPCM$.

تمرين تطبيقي 02:

عين المضاعف المشترك الأصغر للعددين 12 و 26.

حل:

نقوم بتحليل العددين 12 و 26 إلى جداء عوامل أولية:

$$\begin{array}{r|l} 26 & 2 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

$$\rightarrow 26 = 2 \times 13$$

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\rightarrow 12 = 2^2 \times 3$$

$$\bullet \text{ ومنه: } PPCM(12; 26) = 2^2 \times 3 \times 13 = 156$$

ملاحظة:

في دروس قادمة سنتعرف على خواص كل من القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر.

أهداف الدرس الثاني:

• القسمة في $\mathbb{Z}$ و خواصها.

الدرس الثاني:

تمهيد:

نعتبر أن مفهوم "قابلية القسمة" في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ واضح للجميع. فمن الطبيعي أن نطرح السؤال التالي: هل يمكن تعميم مفهوم قابلية القسمة إلى مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ ؟

جواب:

نعم، إليك هذا الـ

تعريف:

$a, b \in \mathbb{Z}$ ، نقول أن "العدد الصحيح a غير المعدوم يقسم b "أو" b يقبل القسمة على a "أو" b مضاعف لـ a " إذا وجد عدد $k \in \mathbb{Z}$ حيث: $b = ka$ و نكتب اختصاراً $a|b$.

انطلاقاً من هذا التعريف سنلخص بعض الخواص التي نحتاج إليها في بعض المشاكل الرياضية التي تتعلق بهذا الفصل:

خواص:

$a, b, c \in \mathbb{Z}$ و $a, b \neq 0$

(1) $a|b$ و $b|c$ فإن: $a|c$

(2) $a|a$

(3) $a|b$ و $a|c$ فإن: $a|nb + mc$ حيث: $n, m \in \mathbb{Z}$

(4) $a|b$ معناه: $na|nb$ ، $n \in \mathbb{Z}^*$.

الإثبات:

$a, b, c \in \mathbb{Z}$ و $a, b \neq 0$

• $k, k' \in \mathbb{Z}$ مع ملاحظة $a|c$ إذن: $b = ka, c = k'b \xrightarrow{=} k'b = k'ka \xrightarrow{=} c = (k'k)a$ ، $k', k \in \mathbb{Z}$

• $a = 1 \times a$ ، و $1 \in \mathbb{Z}$

• $\begin{cases} b = ka, k \in \mathbb{Z} \\ c = k'a, k' \in \mathbb{Z} \end{cases} \xrightarrow{\text{عند الجمع نجد:}} \begin{cases} nb = nka \\ mc = mk'a \end{cases}$; $nb + mc = (nk + mk')a$; $nk + mk' \in \mathbb{Z}$

إذن $a|nb + mc$ (لاحظ الحالة الخاصة من أجل $m = 0$)

• $b = ka$ ، $k \in \mathbb{Z}$ و منه $nb = k(na)$ ، مع: $na \in \mathbb{Z}$

تمرين تطبيقي 01:

$a = 3n - 1$ و $b = n - 1$ ، حيث: $n \in \mathbb{Z}$

1/ بين أنه إذا كان a قاسماً لـ b فإن a قاسم لـ 8،

2/ جد قيم n الصحيحة التي تجعل a قاسماً لـ 8، ثم استنتج قيم n التي تجعل a قاسماً لـ b .

حل:

1/ لنفرض أن a قاسم لـ b أي يوجد $k \in \mathbb{Z}$ حيث: $b = ka$

و منه $\begin{cases} 3b = (3k)a \\ a = 1 \times a \end{cases}$ بالطرح نجد: $8 = (3k - 1)a$ أي: $8|a$ ، لأن: $3k - 1 \in \mathbb{Z}$

2/ لدينا $a|8$ و منه $(3n-11)|8$ أي: $(3n-11) \in \{-8; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 8\}$ ، نميز الحالات التالية:

- $3n-11=-8$ و منه $3n=3$ أي: $n=1$ ،
 - $3n-11=-4$ أي: $3n=7$ و هذه المعادلة لا تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}$ ،
 - $3n-11=-2$ و منه: $3n=9$ أي: $n=3$ ،
 - $3n-11=-1$ أي: $3n=10$ و هذه المعادلة لا تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}$ ،
 - $3n-11=1$ و منه: $3n=12$ أي: $n=4$ ،
 - $3n-11=2$ أي: $3n=13$ و هذه المعادلة لا تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}$ ،
 - $3n-11=4$ و منه: $3n=15$ أي: $n=5$ ،
 - $3n-11=8$ أي: $3n=19$ و هذه المعادلة لا تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}$ ،
- و منه القيم المطلوبة: $n \in \{1; 3; 4; 5\}$.

القيم السابقة تحقق: $a|8$ و لكن لا نعلم ما إذا كانت تجعل $a|b$ ؟

لأجل هذا نختبر كل قيمة:

- $n=1$ يكون: $a=-8$ و $b=0$ و من الواضح $a|b$
 - $n=3$ يكون: $a=-2$ و $b=2$ و من الواضح $a|b$
 - $n=4$ يكون: $a=1$ و $b=3$ من الواضح أن: $a|b$
 - $n=5$ يكون: $a=4$ و $b=4$ من الواضح أن: $a|b$
- إذن القيم المطلوبة: $n \in \{1; 3; 4; 5\}$.

تمرين تطبيقي 02:

عين الأعداد الصحيحة n حيث: $3n+8$ يقسم $n+6$.

حل:

لدينا $(n+6)|(3n+8)$ معناه $(3n+8)|(3n+18)$ ، و نعلم أن $(3n+8)|(3n+8)$ و بالتالي: $(3n+8)|10$ أي: $(3n+8) \in \{-10; -5; -2; -1; 1; 2; 5; 10\}$ نميز الحالات التالية:

- $3n+8=-10$ معناه $n=-6$
 - $3n+8=-5$ هذه المعادلة لا تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}$
 - $3n+8=-2$ هذه المعادلة لا تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}$
 - $3n+8=-1$ معناه $n=-3$
 - $3n+8=1$ هذه المعادلة لا تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}$
 - $3n+8=2$ و منه $n=-2$
 - $3n+8=5$ معناه $n=-1$
 - $3n+8=10$ هذه المعادلة لا تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}$
- القيم $\{-6; -3; -2; -1\}$ تجعل $(3n+8)|10$ ، لكن هل تجعل $3n+8|n+6$ ؟ لتأكد:

$$n=-6 \rightarrow \begin{cases} n+6=0 \\ 3n+8=-10 \end{cases} \rightarrow -10|0 \text{ و } n=-3 \rightarrow \begin{cases} n+6=3 \\ 3n+8=-1 \end{cases} \rightarrow -1|3$$

$$n = -2 \rightarrow \begin{cases} n+6=4 \\ 3n+8=2 \end{cases} \rightarrow 2|4 \text{ و } n = -1 \rightarrow \begin{cases} n+6=5 \\ 3n+8=5 \end{cases} \rightarrow 5|5$$

أي القيم المطلوبة هي: $\{-6; -3; -2; -1\}$.

تمرين تطبيقي 03:

عين قيم n الطبيعية حتى تتحقق: $3|n+7$.

حل:

$3|n+7$ معناه $n+7=3k$ أي: $n=3k-7$ حيث: $k \in \mathbb{N} - \{0; 1; 2\}$.

تمرين تطبيقي 04:

بين أن كل قاسم لـ $n-2$ و $n^2-2n+18$ قاسم للعدد 18 مع: $n \in \mathbb{Z}$.

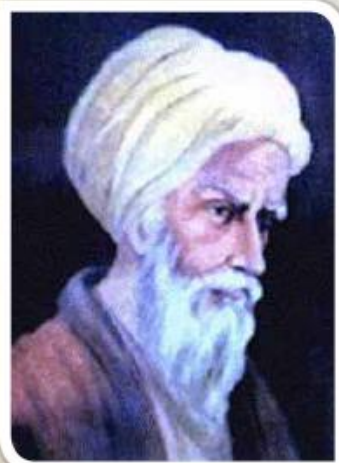
حل:

$n \in \mathbb{Z}$

ليكن $d|n-2$ ومن الخواص المذكورة السابقة $d|(n(n-2))$ أي $d|(n^2-2n)$ و من المعطيات لدينا كذلك $d|(n^2-2n+18)$ ومنه $d|((n^2-2n+18)-(n^2-2n))$ أي: $d|18$.

من علماء العرب:

ابن باجه:



هو أبو بكر محمد بن يحيى بن الصائغ بن باجه التجيبي توفي سنة (529هـ)، ويعرف عند الغرب باسم آفيمبس، وهو من أبرز الفلاسفة العرب في الفلسفة والطب والرياضيات والطب والفلك والأدب والموسيقى.

نشأ في ابن باجة في سرقسطة، وعمل وزيرا وكاتباً لأبي إبراهيم بن تيفلويت حتى توفي بعد سقوط دولة بني هود في سرقسطة.

وحسب ابن أبي أصيبعة فإن لابن باجه 28 مؤلفاً، تقع في 3 فئات مختلفة، وهي: شروح أرسطوطاليس، وتآليف إشراقية، ومصنفات

طبية، كما كانت لكتاباته أثر عظيم على ابن رشد وفلسفة ابن باجه، ويذكر أن جميع أصول كتبه العربية ضاعت، ولم يبقَ منها إلا ما ترجم في حينه إلى اللاتينية، ومأثله من جاء بعده من الفلاسفة مثل ابن رشد وابن ميمون.

أهداف الدرس الثالث:

- خواص القاسم المشترك الأكبر،
- استعمال القاسم المشترك الأكبر في اختزال كسر يتعلق بسطه ومقامه بعدد صحيح n .

الدرس الثالث:

تمهيد:

تعلمنا في السنوات السابقة طريقة لحساب القاسم المشترك الأكبر لعددتين طبيعيتين تعرف بطريقة "خوارزمية إقليدس"، دون إعطاء إثبات لها، إليك هذا **المثال التوضيحي**:

عين القاسم المشترك الأكبر للعددتين 2800 و 512:

نعمد على القسمة المتتالية حتى نصل إلى آخر باق غير معدوم الذي يمثل القاسم المشترك الأكبر للعددتين كما يلي:

$$2800 = 512 \times 5 + 240$$

$$512 = 240 \times 2 + 32$$

$$240 = 32 \times 7 + 16$$

$$32 = 16 \times 2 + 00$$

أي: $PGCD(2800; 512) = 16$

سنورد إثبات لهاته الطريقة، قبل ذلك لابد من التعريف ببعض الأدوات المساعدة للإثبات:

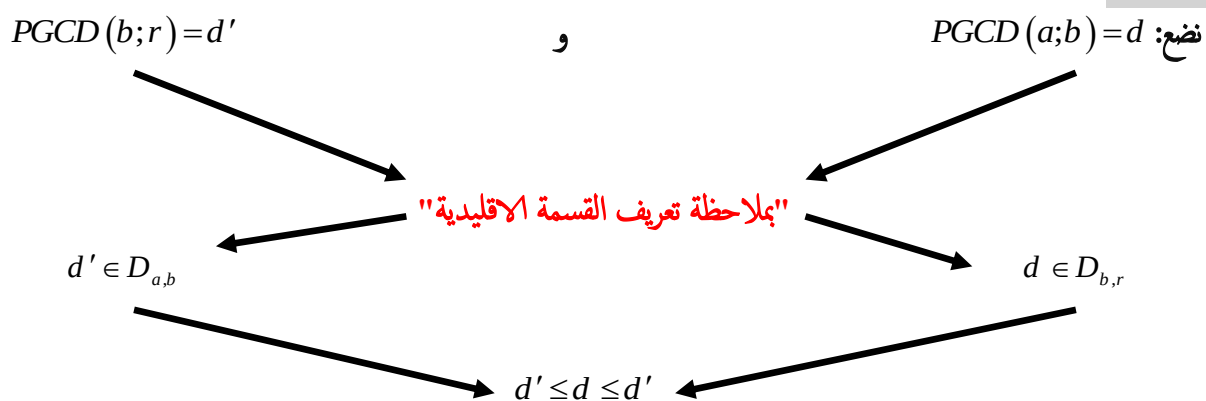
تعريف القسمة الاقليدية في $\mathbb{Z}$:

ليكن $a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{N}^*$ ، يوجد عددان صحيحان وحيدان q, r حيث: $a = qb + r$ مع $0 \leq r < b$.
عملية البحث عن q, r تسمى القسمة الاقليدية للعدد a على العدد b .

نتيجة هامة:

من التعريف السابق يمكن استنتاج: $PGCD(a; b) = PGCD(b; r)$ ،

و هذا لأن:



أي $d' = d$ ، حيث: $D_{a,b}$ و $D_{b,r}$ القواسم المشتركة بين a, b و b, r على التوالي.

إثبات خوارزمية إقليدس:

ليكن $a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$ مع: $0 \neq b$ ، بالقسمة المتتالية نجد:

$$\begin{array}{l}
 \uparrow a = q_1 b + r_1 \\
 b = q_2 r_1 + r_2 \\
 \vdots \\
 r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n \\
 r_{n-1} = q_{n+1} r_n + 0
 \end{array}
 \quad \dots (*) \quad \downarrow$$

مع $r_n \neq 0$

طريقة أولى:

سنعتمد على النتيجة السابقة:

$$PGCD(a; b) = PGCD(b; r_1) = \dots = PGCD(r_{n-2}; r_{n-1}) = PGCD(r_{n-1}; r_n) = PGCD(r_n; 0) = r_n$$

أي: $PGCD(a; b) = r_n$.

طريقة ثانية:

- من (*) و هذا من الأسفل إلى الأعلى حسب السهم المبين يكون: r_n يقسم كلا من $a, b, r_1, r_2, \dots, r_{n-1}$
- و من (*) و هذا من الأعلى إلى الأسفل حسب السهم المبين يكون كل قاسم d لـ a, b قاسم لـ r_n ، من هذا كله يكون r_n هو أكبر قاسم لـ a, b .

تعميم مهم:

من أجل كل a, b, c من $\mathbb{N}^*$ ، حيث: $a = bk + c$, $k \in \mathbb{N}$ لدينا: $PGCD(a; b) = PGCD(b; c)$.

لأن:

ليكن d قاسم لـ a, b أي: $d|a, d|b$ معناه: $d|kb$ و منه $d|(a - kb)$ أي أن: d قاسم لـ b, c هذا من جهة و من جهة أخرى يمكن و بطريقة مماثلة تبيان أن كل قاسم لـ b, c قاسم لـ a, b أي مجموعة قواسم a, b هي نفسها مجموعة قواسم لـ b, c و بالتالي لهما نفس العنصر الأكبر. و.ه.م.

إليك هذه الخواص التي نحتاج إليها في العديد من التمارين (لاحظ التمرين التطبيقي 02 + 03):

$$a, b, c \in \mathbb{N}^*$$

$$1/ PGCD(a; b) = PGCD(b; a)$$

$$2/ \text{ليكن: } PGCD(a; b) = d, \text{ القواسم المشتركة للعددين } a, b \text{ هي قواسم } d$$

$$3/ PGCD(ka; kb) = k \times PGCD(a; b) \text{ مع: } k \in \mathbb{N}^*$$

$$4/ \text{إذا كان } a|b \text{ فإن: } PGCD(a; b) = a$$

$$5/ \text{إذا كان: } PGCD(a; b) = 1 \text{ نقول أن } a \text{ و } b \text{ أوليان فيما بينهما،}$$

$$6/ PGCD(a; b) = a \text{ معناه يوجد } a', b' \in \mathbb{N}^* \text{ حيث: } (a = da', b = db') \text{ و } PGCD(a'; b') = 1.$$

إثبات:

1/ واضح،

2/ لاحظ شرح خوارزمية إقليدس،

3/ نضع $d_1 = \text{PGCD}(a; b)$ و $d_2 = \text{PGCD}(ka; kb)$ لدينا:

d_1 قاسم لـ a و b أي kd_1 قاسم لـ ka و kb و منه $kd_1 \in D_{d_2}$ أي $d_2 = kk'd_1$ ، و من جهة أخرى: $d_2 = kk'd_1$ قاسم لـ ka و kb و منه $k'd_1$ قاسم لـ a و b و منه وجب أن يكون $k'=1$ بالتعويض نجد: $d_2 = kd_1$ ، مع: $k, k' \in \mathbb{N}^*$.

4/ واضح،

5/ واضح (استعمل الخواص السابقة لتبين التكافؤ).

تمديد مفهوم القاسم المشترك الأكبر في $\mathbb{Z}$:

$a, b \in \mathbb{Z}^*$ القاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين a, b هو أكبر عنصر لمجموعة القواسم المشتركة أي:

$$\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(|a|, |b|)$$

تمرين تطبيقي 01:

اعتمادا على خوارزمية إقليدس، عين ثنائية صحيحة $(n; m)$ في الحالتين التاليتين:

$$9150n + 8700m = 150$$

$$691n + 625m = 1$$

حل:

** بالنسبة لـ: $9150n + 8700m = 150$

$$9150 = 1 \times 8700 + 450$$

لدينا من خوارزمية إقليدس: $8700 = 19 \times 450 + 150$ و منه:

$$450 = 3 \times 150 + 0$$

$$150 = 8700 - 19 \times 450 = 8700 - 19 \times (9150 - 8700) = -19 \times 9150 + 20 \times 8700$$

أي: $n = -19, m = 20$ ** بالنسبة لـ: $691n + 625m = 1$

$$691 = 1 \times 625 + 66$$

$$625 = 9 \times 66 + 31$$

$$66 = 2 \times 31 + 4$$

لدينا من خوارزمية إقليدس: و منه

$$31 = 7 \times 4 + 3$$

$$4 = 1 \times 3 + 1$$

$$3 = 3 \times 1 + 0$$

$$1 = 4 - 3 = 4 - 31 + 7 \times 4 = -31 + 8 \times 4 = -31 + 8 \times 66 - 16 \times 31 =$$

$$= 8 \times 66 - 17 \times 31 = 8 \times 66 - 17 \times 625 + 153 \times 66 = -17 \times 625 + 161 \times 66 =$$

$$= -17 \times 625 + 161 \times 691 - 161 \times 625 = 161 \times 691 - 178 \times 625$$

ملاحظة:

يبدو أن خوارزمية إقليدس منحتنا ثنائيات تحقق المعادلتين في التمرين التطبيقي 01، و هذا في حد ذاته يجعلنا نطرح الأسئلة التالي: هل يمكن إيجاد جميع الحلول للمعادلة $9150n + 8700m = 150$ مثلا؟ بل ما هي الشروط حتى تقبل معادلة من هذا النوع حولا في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ؟ سنجيب عن هاته الأسئلة في الدرس الآتي وكذلك درس الموافقات في $\mathbb{Z}$.

تمرين تطبيقي 02:

- (1) برهن أن العددين $a = 9n + 4$ و $b = 2n + 1$ حيث: $n \in \mathbb{N}$ ، هما أوليان فيما بينهما،
 (2) ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين $a = 9n + 4$ و $c = 2n - 1$.

حل:

- (1) ليكن d قاسما مشتركا بين a و b أي: $d|a$ و $d|b$ وبالتالي: $d|(9b - 2a)$ أي: $d|1$ ومنه $d \in \{1\}$ أي القاسم الوحيد بين العددين a و b هو العدد 1، وهذا يؤكد أن: $PGCD(a; b) = 1$ ،
 (2) ليكن d' قاسما مشتركا بين a و c ، ومنه $d'|(9c - 2a)$ أي: $d'|17$ ومنه $PGCD(a; c) \in \{1; 17\}$.

تمرين تطبيقي 03:

- ليكن $a = 3n + 1$ و $b = 5n - 1$ حيث: $n \in \mathbb{N}^*$
 1/ ما هي القيم الممكنة لـ $PGCD(a; b)$ ،
 2/ عين حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين،
 3/ ما هي قيم n حتى يكون $\frac{3n+1}{5n-1}$ كسرا غير قابل للاختزال.

حل:

$$\begin{cases} PGCD(a, b) = 8 \\ PGCD(a, b) = 4 \\ PGCD(a, b) = 2 \\ PGCD(a, b) = 1 \end{cases} \quad \text{1/ ليكن } d = PGCD(a, b) \text{ معناه } d|a \text{ و } d|b \text{ ومنه } d|(5a - 3b) \text{ معناه } d|8 \text{ أي القيم الممكنة هي:}$$

$$\text{2/ كتابة } b \text{ بدلالة } a: b = 5n - 1 = 3n + 1 + 2n - 2 = a + 2n - 2 \quad \text{إذن: } PGCD(a, b) = PGCD(a, 2n - 2) \text{ ولدينا:}$$

$$a = 3n + 1 = 2n - 2 + n + 3 \quad \text{إذن: } PGCD(a, 2n - 2) = PGCD(2n - 2, n + 3) \text{ ولدينا:}$$

$$2n - 2 = 2(n + 3) - 8$$

$$\text{أي: } PGCD(a, b) = PGCD(n + 3; 8) \text{ لأجل هذا نميز الحالات:}$$

$$\bullet \quad n + 3 = 8k \quad \text{أي: } n = 8k - 3 \quad \text{في هذه الحالة } PGCD(a, b) = 8, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

$$\bullet \quad n + 3 \text{ من مضاعفات 4 وليس من مضاعفات 8 أي: } n + 3 = 4(2\alpha + 1) \quad \text{أي: } n = 8\alpha + 1, \alpha \in \mathbb{N} \text{ في هذه الحالة:}$$

$$PGCD(n + 3, 8) = PGCD(4(2\alpha + 1), 8) = 4PGCD(2\alpha + 1, 2) = 4 \times 1 = 4$$

$$\bullet \quad n + 3 \text{ من مضاعفات 2 وليس من مضاعفات 4 أي: } n + 3 = 2(2\beta + 1) \quad \text{أي: } n = 4\beta - 1, \beta \in \mathbb{N}^* \text{ في هذه الحالة:}$$

$$PGCD(a, b) = PGCD(n + 3, 8) = PGCD(2(2\beta + 1), 8) = 2PGCD(2\beta + 1, 4) = 2$$

$$\bullet \quad n + 3 \text{ ليس من مضاعفات 2 أي: } n + 3 = 2\delta + 1 \quad \text{أي: } n = 2\delta - 2 = 2(\delta - 1) \quad \text{حيث: } \delta \in \mathbb{N}^*,$$

$$PGCD(a, b) = PGCD(n + 3, 8) = PGCD(2\delta + 1; 8) = 1$$

$$\text{3/ يكون } \frac{3n+1}{5n-1} \text{ غير قابل للاختزال معناه } PGCD(5n - 1, 3n + 1) = 1 \text{ اعتمادا على الحالات السابقة } n \text{ زوجي}$$

مع العلم $n \neq 0$.

أهداف الدرس الرابع:

- عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما،
- مبرهنة بيزو و مبرهنة غوص و بعض استعملاتهما.

الدرس الرابع:

هذا الدرس امتداد للدرس السابق إذ أردنا تعريف بعض المفاهيم العالقة:

تعريف:

نقول عن العددين الطبيعيين a, b أنها أوليان فيما بينهما إذا $PGCD(a; b) = 1$ (معناه).

مبرهنتان مهمتان:

مبرهنة بيزو:

يكون العددين الطبيعيين a, b أوليين فيما بينهما إذا وجد u و v من $\mathbb{Z}$ حيث: $au + bv = 1$.

مبرهنة غوص:

لتكن a, b و c أعدادا طبيعية مع $c \neq 0$ ، إذا كان $\begin{cases} c | a \times b \\ PGCD(b; c) = 1 \end{cases}$ فإن: $c | a$.

نتيجة 01 (من مبرهنة بيزو):

* إذا كان a أوليا مع b و c فإن a أولي مع $b \times c$ ،
* إذا كان لدينا $PGCD(a, b) = d$ مع: $a, b \in \mathbb{N}$ ، يوجد u و v من $\mathbb{Z}$ حيث: $au + bv = d$.

مبرهنة هامة:

نعتبر المعادلة ذات المجهولين x, y من $\mathbb{Z}$ ، $ax + by = c$ و $(1) \dots ax + by = c$ ، $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ ،
المعادلة تقبل حولا إذا $PGCD(a, b) = 1$ أو $PGCD(a; b)$ قاسما لـ c .

إثبات:

(1) الاستلزام الأول:

لنفرض أن الثنائية (x, y) حل للمعادلة معناه: $ax + by = c$ وليكن $PGCD(a, b) = d$ ، أي وحسب خواص القاسم المشترك الأكبر يوجد $a' = da'$ ، $b' = db'$ مع: $PGCD(a', b') = 1$ و $d(a'x + b'y) = c$ منه وكون $a'x + b'y \in \mathbb{Z}$ يكون $d | c$ و منه $d = 1$ أي: a, b أوليان فيما بينهما، أو d من قواسم c .

(2) الاستلزام الثاني:

لنفرض أن $PGCD(a, b) = 1$ حسب مبرهنة بيزو يوجد u و v من $\mathbb{Z}$ حيث $au + bv = 1$ و عليه نحصل على الجملة التالية:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ cau + cbv = c \end{cases} \text{ بالطرح نجد: } \begin{cases} a(x - cu) = b(cv - y) \\ PGCD(a; b) = 1 \end{cases}$$
 حسب مبرهنة غوص نكتب: $x = bk + cu$ ، $k \in \mathbb{Z}$
 بالتعويض نجد: $cv - y = ak$ أي: $y = cv - ka$ وبالتالي المعادلة تقبل حولا في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

نقصد بهاته الكتابة الثنائيات أعداد صحيحة

ملاحظة:

في حالة $PGCD(a; b) = d$ حيث: $d \neq 1$

طريقة أولى:

يمكن استعمال النتيجة 01 لنحصل على المطلوب بسهولة،

طريقة ثانية:

نضع $a = da'$
 $b = db'$ مع: $PGCD(a', b') = 1$ و $a', b' \in \mathbb{Z}$ و نكمل الالابات كما أوردنا سابقا.

تمرين تطبيقي 01:

 a, b عدنان طبيعان غير معدومين و أوليان فيما بينهما،1/ أثبت أن a أولي مع $(a+b^2)$ ،2/ عين العددين a, b بحيث يكون $16a^2 = 49(a+b^2)$.

حل:

1/ لدينا $a, b \in \mathbb{N}^*$ و أوليان فيما بينهما فحسب يوزو يوجد $u, v \in \mathbb{Z}$ حيث: $au + bv = 1$ معناه $(au + bv)^2 = 1$ بالنشرنجد: $a^2u^2 + 2abuv + b^2v^2 = 1$ و منـه: $a \times (au^2) + 2abuv - av^2 + av^2 + b^2v^2 = 1$ معناه: $a \times (au^2 + 2buv - v^2) + (a+b^2) \times v^2 = 1$ من الواضح أن: $au^2 + 2buv - v^2 \in \mathbb{Z}$ و $v^2 \in \mathbb{Z}$ و حسب مبرهنةيوزو a أولي مع $a+b^2$

/2

لدينا: $16a^2 = 49(a+b^2)$ معناه: $a \times (16a) = 49(a+b^2)$ أي: $a \mid (49 \times (a+b^2))$ و مما سبق: a أولي مع $a+b^2$ و حسب مبرهنة غوص $a \mid 49$ أي: $a \in \{1; 7; 49\}$ نيز الحالات التالية: $a = 1^*$ عند التعويض في: $(*)$ $16a^2 = 49(a+b^2)$ نجد: $16 = 49(1+b^2)$ و هذه المعادلة لا تقبل حولا في $\mathbb{N}$ ، $a = 7^*$ عند التعويض نجد $(*)$: $16 = 7 + b^2$ و منـه: $b^2 = 9$ أي $b = 3$ ، $a = 49^*$ عند التعويض في $(*)$: $38416 = 49(49 + b^2)$ و منه: $b^2 = 735$ و هاته المعادلة لا تقبل حولا في $\mathbb{N}$ ،و منه الثنائية الوحيدة المحققة للمعادلة هي: $(7; 3)$.

تمرين تطبيقي 02:

• حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهولين (x, y) : $5x - 8y = 3$ ،• حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهولين (x, y) : $20x - 45y = 5$ ،• حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهولين (x, y) : $6x - 8y = 9$.

حل:

$$5x - 8y = 3 \bullet$$

من الواضح أن $PGCD(5;8)=1$ أي المعادلة تقبل حلولاً في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$

سنستعمل خطوات مشابهة لتلك التي أثبتنا بها المبرهنة السابقة، لا بأس من هذا التكرار:

لتكن المعادلة (*) $ax + by = c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a, b \neq 0$...

لنفرض أننا لاحظنا أو أعطيت ثنائية (x_0, y_0) تحقق (*) و "تسمى حلاً خاصاً"،

(يمكن الحصول على حل خاص باستعمال خوارزمية إقليدس)،

و بالتالي نجد الجملة: $\begin{cases} ax + by = c \\ ax_0 + by_0 = c \end{cases}$ عند الطرح نجد: $a(x - x_0) = b(y_0 - y)$ لدينا الحالتان:

** $PGCD(a; b) = 1$ أي: $b \mid (x - x_0)$ و منه: $x = kb + x_0$ عند التعويض نجد: $y_0 - y = ka$ و منه $y = -ka + y_0$ حيث: $k \in \mathbb{Z}$ ، أي الحلول المطلوبة: $(x; y) = (kb + x_0; -ka + y_0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

** $PGCD(a; b) = d$ حيث: $d \neq 1$ بوضع: $\begin{matrix} a = da' \\ b = db' \end{matrix}$ مع: $PGCD(a'; b') = 1$ و $a', b' \in \mathbb{Z}$ تتضح الفكرة.

نعود إلى المعادلة:

* نلاحظ أن الثنائية $(-1; -1)$ حل خاص للمعادلة،

* أي نحصل على الجملة $\begin{cases} 5x - 8y = 3 \\ 5(-1) - 8(-1) = 3 \end{cases}$ بالطرح $\begin{cases} 5(x+1) = 8(y+1) \\ PGCD(5;8)=1 \end{cases}$ حسب مبرهنة غوص نجد: $k \in \mathbb{Z}$, $\begin{cases} x = 8k - 1 \\ y = 5k - 1 \end{cases}$

$$\bullet \text{ لدينا: } 20x - 45y = 5$$

لدينا $PGCD(20;45)=5$ إذن المعادلة تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$ ،

* نلاحظ أن الثنائية $(-2; -1)$ حل خاص للمعادلة،

* أي نحصل على الجملة $\begin{cases} 20x - 45y = 5 \\ 20(-2) - 45(-1) = 5 \end{cases}$ بالطرح $\begin{cases} 4(x+2) = 9(y+1) \\ PGCD(4;9)=1 \end{cases}$ حسب مبرهنة غوص نجد: $k \in \mathbb{Z}$, $\begin{cases} x = 9k - 2 \\ y = 4k - 1 \end{cases}$

$$\bullet 6x - 8y = 9$$

لدينا $PGCD(6;8)=2$ مع أن 2 ليس قاسماً لـ 9: هذا كاف للقول أن المعادلة لا تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$ ،

أهداف الدرس الخامس:

- المضاعف المشترك الأصغر،
- العلاقة بين $PGCD$ و $PPCM$.

الدرس الخامس:

تعرفنا في درس الأعداد الأولية، أنه يمكن استعمال تحليل الأعداد الطبيعية إلى جداء عوامل أولية في تعيين القاسم المشترك الأكبر - الذي عرفنا خواصه - و المضاعف المشترك الأصغر، الذي سنتطرق إلى علاقته بالقاسم المشترك الأكبر و بعض خواصه:

العلاقة بين القاسم المشترك الأكبر و المضاعف المشترك الأصغر:

ليكن $a, b \in \mathbb{N}^*$ ، يمكن كتابة العلاقة: $PGCD(a, b) \times PPCM(a, b) = a \times b$.

خاصية:

$PPCM(ka; kb) = k \cdot PPCM(a; b)$ من أجل كل $k \in \mathbb{N}^*$ ، مع: $a, b \in \mathbb{N}^*$.

تمديد مفهوم المضاعف المشترك الأصغر إلى الأعداد الصحيحة النسبية:

$PPCM(a; b) = PPCM(|a|; |b|)$ حيث: $a \in \mathbb{Z}^*$ و $b \in \mathbb{Z}^*$.

تمارين تطبيقي:

$A = 2n^2 + 5n + 8$ و $B = n + 1$ عدنان طبيعان، حيث: $n \in \mathbb{N}$

(1) تحقق أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ $2n^2 + 5n + 8 = (2n + 3)(n + 1) + 5$ ،

(2) ناقش تبعاً لقيم العدد الطبيعي n قيم $PGCD(A; B)$ ،

(3) عين n لكي يكون B يقسم A ،

(4) عين العدد الطبيعي n الذي يحقق: $\begin{cases} PGCD(A; B) = 5 \\ PPCM(A; B) = 430 \end{cases}$

حل:

ليكن $n \in \mathbb{N}$

(1) لدينا $(2n + 3)(n + 1) + 5 = 2n^2 + 5n + 3 + 5 = 2n^2 + 5n + 8$ و هـ.م،

(2) من المساواة السابقة نستنتج: $PGCD(A; B) = PGCD(n + 1; 5)$ ، لنميز الحالات التالية:

* إذا كان: $n + 1 = 5k$ ، $k \in \mathbb{N}^*$ و منه $n = 5k - 1$:

$$PGCD(A; B) = PGCD(5k; 5) = 5 \times PGCD(k; 1) = 5$$

* إذا كان $n \neq 5k - 1$ ، $k \in \mathbb{N}^*$ فإن:

$$PGCD(A; B) = 1$$

(3) لدينا $\frac{A}{B} = \frac{2n^2 + 5n + 8}{n + 1} = \frac{(2n + 3)(n + 1) + 5}{n + 1} = 2n + 3 + \frac{5}{n + 1} \in \mathbb{N}$ معناه $5 \mid (n + 1)$ أي: $(n + 1) \in \{1; 5\}$ و منه: $n \in \{0; 4\}$

(4) أي: $A \times B = 2150$ معناه $(n + 1)((2n + 3)(n + 1) + 5) = 2150$ $\begin{cases} PGCD(A; B) = 5 \\ PPCM(A; B) = 430 \end{cases}$

و كون $PGCD(A; B) = 5$ نستنتج $n = 5k - 1$ ، $k \in \mathbb{N}$ و التعويض نجد: $5k((10k + 1)5k + 5) = 2150$

أي: $10k^2 + k + 1 = 86$ ، و لدينا:

* من أجل $k = 1$ بالتعويض: $1 \times 12 = 12$ ، قيمة مرفوضة،

* من أجل $k = 2$ بالتعويض: $2 \times 43 = 86$ إذن هاته القيمة مقبولة،

* من أجل $k = 3$ بالتعويض: $3 \times 94 = 282$ ، قيمة مرفوضة،

أي القيمة المطلوبة هي: $n = 9$ ، و بالتالي: $A = 215$ و $B = 10$.

قال الله تعالى:

" و قل اعملوا فسيرى الله عملكم و رسوله و المؤمنون "

آية كريمة

و قال المصطفى عليه الصلاة و السلام:

" إن الله يحب إذا عمل أحدكم عملا أن يتقنه "

حديث شريف

تمارين حول القسمة في $\mathbb{Z}$
و القاسم المشترك الأكبر
و مبرهنة بيزو و غوص :

محاولاتكم مهمة:

من علماء العرب:

محمد، أحمد، الحسن أبناء محمد بن موسى بن شاكر:

هم ثلاثة إخوة من خراسان، عاشوا في القرن الـ4 الهجري، رياضيون وفلكيون، اشتغلوا بالميكانيكا، برعوا في علومهم، وجذبوا حولهم الكثير من العلماء والأطباء والمترجمين.

برع أبو جعفر محمد بن موسى بن شاكر في الفلك والهندسة والجغرافية والفيزياء، فيما برع أحمد بن موسى بن شاكر في الهندسة والميكانيكا، أما الحسن بن موسى بن شاكر فقد برع في الهندسة والجغرافية.

كان والدهم موسى بن شاكر منجماً، ويعمل لدى الخليفة المأمون، الذي عهد بهم بعد وفاة الأب إلى يحيى بن أبي منصور أحد فلكيي بيت الحكمة الذي علمهم الرياضيات والفلك وعلوم الميكانيكا، فبرع كل من محمد والحسن في الرياضيات والفلك، فيما برع أحمد في الميكانيكا.

أعطوا الإخوة الثلاث للعلوم التي برعوا فيها جل ثروتهم ووقتهم، فسافروا كثيراً إلى الدولة البيزنطية للحصول على المراجع، وأنشأوا في قصرهم في بغداد مرصداً متكاملًا، ولأنهم كانوا يتمتعون زمن الخليفة المأمون بنفوذ كبير، فقد صاروا يكلفون بالمشاريع الفلكية والميكانيكية وبت ترجمة الكتب.

بحث أبناء محمد بن موسى في موضوع مراكز الثقل، وحددوا طرائق استخدام ثقل الجسم المحمول، وابتدعوا طريقة تقسيم الزاوية إلى 3 أقسام متساوية، وتكوين الشكل الإهليجي، كما حددوا وعلماء دار الحكمة البغدادية درجة خط الهاجرة (محيط الأرض) بدقة كبيرة، لكن بأقل قليلاً مما قدره أراتوستين في الإسكندرية (320 ق.م).

لا يمكن فصل أعمال أبناء محمد بن موسى كلاً على حدة، أو عن أعمال مساعديهم من العلماء الذين عملوا معهم، وقد ترك هؤلاء العلماء الثلاثة العديد من الآثار العلمية، ومنها كتاب أرشميدس حول قياس الاشكال المسطحة والمستديرة، الذي ترجمه جيراردو الكريموني إلى اللاتينية في القرن الـ12 الميلادي باسم (أقوال بني شاكر)، ودرسه أبرز زعماء النهضة الأوروبية مثل روجر بيكون، ولهم أيضاً (كتاب الحيل) أو (حيل بني موسى) الذي نُقل مؤخراً إلى الإنكليزية، وهو من أوائل الكتب التي ألُفت بالعربية في علوم الميكانيكا، ويضم حوالي 100 تركيب مختلف في الوسائل الميكانيكية، وألفوا أيضاً كتاب في (مراكز الاثقال)، وكتاب في (القرسطون)، وكتاب في (قسمه الزاوية إلى ثلاثة أقسام)، وكتاب في (مساحة الأكر).

تمرين 01:

ليكن $n \in \mathbb{N}$ ،(1) عين قيمة العدد الطبيعي n حتى يكون: $\frac{2n^2 + 3n + 3}{n + 2} \in \mathbb{N}$ ،(2) ما هي القيم الممكنة للعدد n حتى يكون الكسر $\frac{2n^2 + 3n + 3}{n + 2}$ غير قابل للاختزال،(3) ما هي القيم الممكنة للعدد n حتى يكون n^2 يقسم 468،(4) حل في $\mathbb{N}$ المعادلة: $2m^3 + m^2 - 468 = 0$.

حل:

$$\begin{array}{r}
 2n^2 + 3n + 3 \quad | \quad n + 2 \\
 -(2n^2 + 4n) \quad | \quad 2n - 1 \\
 \hline
 -n + 3 \\
 -(-n - 2) \\
 \hline
 5
 \end{array}$$

(1) لدينا من أجل كل عدد طبيعي و باستعمال القسمة الاقليدية مثلاً نجد:

$$\frac{2n^2 + 3n + 3}{n + 2} = 2n - 1 + \frac{5}{n + 2}$$

و بالتالي: $\frac{2n^2 + 3n + 3}{n + 2} \in \mathbb{N}$ معناه $5 \mid n + 2$ أي: $n + 2 \in \{1; 5\}$ ومنه:• $n = -1$ مرفوض، و بالتالي $n = 3$ هي القيمة المطلوبة،

(2)

طريقة أولى: الكسر $\frac{2n^2 + 3n + 3}{n + 2}$ غير قابل للاختزال معناه: $p \gcd(2n^2 + 3n + 3; n + 2) = 1$

لدينا:

$$p \gcd(2n^2 + 3n + 3; n + 2) = p \gcd(n + 2; 5) \text{، إذن } 2n^2 + 3n + 3 = (n + 2) \times (2n - 1) + 5$$

$$\text{أ) إذا كان } 5 \mid n + 2 \text{ أي: } n = 5k - 2, k \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{و منه: } p \gcd(2n^2 + 3n + 3; n + 2) = 5$$

$$p \gcd(2n^2 + 3n + 3; n + 2) = p \gcd(n + 2; 5) = 1 \text{ يكون: } n + 2 \text{ غير قاسم لـ } 5$$

لأن القاسمين الوحيديين للعدد 5 هما: 1، 5، أي القيم المطلوبة هي: $n \neq 5k - 2, k \in \mathbb{Z}$.

طريقة ثانية:

$$\text{الكسر } \frac{2n^2 + 3n + 3}{n + 2} = 2n - 1 + \frac{5}{n + 2} \text{ غير قابل للاختزال معناه } \frac{5}{n + 2} \text{ غير قابل للاختزال}$$

و يمكن بسهولة ملاحظة أن الكسر $\frac{5}{n + 2}$ قابل للاختزال إذا $n + 2$ من مضاعفات 5 أو $n + 2$ قاسم لـ 5،

$$\text{و منه } \frac{2n^2 + 3n + 3}{n + 2} \text{ غير قابل للاختزال معناه } n + 2 \neq 5k, k \in \mathbb{N}^*, n \neq 5k - 2, k \in \mathbb{N}^*$$

(3) القيم الممكنة لـ n حتى يكون $n^2 \mid 468$ أي:

$$n^2 \in \{1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 13; 18; 26; 36; 39; 52; 78; 156; 117; 234; 468\}$$

عند اختبار كل قيمة في المجموعة السابقة نجد أن القيم المطلوبة: $n=1$ أو $n=2$ أو $n=3$ أو $n=6$ ،
أو نستعمل طريقة التحليل إلى جداء عوامل أولية:

$$\begin{array}{r|l} 468 & 2 \\ 234 & 2 \\ 117 & 3 \longrightarrow 468 = 2^2 \times 3^2 \times 13 \\ 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

ومنه: $n^2 = 1$ أي: $n=1$

أو $n^2 = 2^2$ أي: $n=2$

أو $n^2 = 3^2$ أي: $n=3$

أو $n^2 = (2 \times 3)^2$ أي: $n=6$

(4) حل في $\mathbb{N}$ المعادلة:

$$2m^3 + m^2 - 468 = 0 \dots (*) \text{ معناه } m^2(2m+1) = 468 \text{ أي:}$$

$$468 | m^2, \text{ من } (3) \text{ نستنتج } m \in \{1; 2; 3; 6\}$$

- إذا كان $m=1$ تكون المعادلة (*) غير محققة و منه نرفض هذه القيمة،
- إذا كان $m=2$ تكون المعادلة (*) غير محققة و منه نرفض هذه القيمة،
- إذا كان $m=3$ تكون المعادلة (*) غير محققة و منه نرفض هذه القيمة،
- إذا كان $m=6$ تكون المعادلة (*) محققة و هي القيمة الوحيدة المقبولة.

$$S = \{6\}$$

التمرين 02:

- n عدد طبيعي غير معدوم، لتكن أعدادا طبيعية z, y, x حيث: $x = 2n - 1$ و $y = 9n + 1$ و $z = 2(5n - 2)$
- (1) برهن أن كل قاسم للعددين x, y هو قاسم للعدد 11،
 - (2) عين العدد الطبيعي n حتى يكون $PGCD(x; y) = 11$ ،
 - (3) برهن أن العددين z, x أوليان فيما بينهما.

حل:

(1) ليكن $d \in \mathbb{N}^*$ حيث: $d|x$ و $d|y$ و منه: $d|(2y - 9x)$

و هذا لجعل القيمة المحصل عليها غير متعلقة بـ n ، أي $d|11$.

(2)

يمكن أن نستنتج من (1) أن: $PGCD(x; y) \in \{1; 11\}$

$$y = 9n + 1 = 4x + (n + 5)$$

$$2n - 1 = (n + 5) \times 1 + (n - 6)$$

$$n + 5 = (n - 6) \times 1 + 11$$

لدينا:

$$PGCD(x; y) = PGCD(n + 5; n - 6) = PGCD(n - 6; 11) \text{ و منه:}$$

و نميز الحالتين:

• إذا كان العدد $n-6$ مضاعفا لـ 11: يكون $n=11k+6, k \in \mathbb{N}$ ومنه:

$$PGCD(x; y) = PGCD(n+5; n-6) = PGCD(n-6; 11) = 11$$

• إذا كان العدد $n-6$ غير مضاعف لـ 11: يكون $PGCD(x; y) = 1$ لاحظ أن العدد 11 له قاسمان فقط هما 1، 11.
(3) هل $PGCD(x; z) = 1$ ؟

ليكن $d|(x=2n-1)$ و $d|(z=10n-4)$ أي: $d|(z-5x)$ و $d|1$ منه $d=1$.

تمرين 03:

ليكن: $a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1$ و $b = 2n^2 + n$ حيث: $n \in \mathbb{N}^*$

(1) أثبت أن $2n+1$ يقسم a, b ،

(2) استنتج أن: $PGCD(a; b) = 2n+1$.

حل:

(1) من الواضح: $b = 2n^2 + n = n(2n+1)$ أي: $2n+1|b$

$$\begin{array}{r} 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 \\ - (2n^3 + n^2) \\ \hline 4n^2 + 4n + 1 \\ - (4n^2 + 2n) \\ \hline 2n + 1 \\ - (2n + 1) \\ \hline 00 \end{array}$$

وكذلك:

أي: $a = (2n+1) \times (n+1)^2$ ومنه: $2n+1|a$ ،

(2) يمكن ملاحظة أن:

$$PGCD(a; b) = PGCD((2n+1)(n+1)^2; n(2n+1)) = (2n+1) PGCD((n+1)^2; n) = 2n+1$$

$$PGCD((n+1)^2; n) = PGCD(n; 1) = 1 \text{ لأن } (n+1)^2 = n(n+2)+1 \text{ أي } PGCD(n; 1) = 1$$

$$PGCD(a; b) = 2n+1 \text{ أي:}$$

تمرين 04:

(1) x عدد طبيعي. برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k أن:

$$x^k - 1 = (x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{k-1})$$

(2) أ/ d و n عدنان طبيعيان غير معدومين حيث: d يقسم n ،

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم a ، العدد $a^d - 1$ يقسم العدد $a^n - 1$ ،

ب/ استنتج أن العدد $2^{2010} - 1$ يقبل القسمة على 7 ثم على 63 ثم على 9،

(3) أ/ عين $PGCD(63; 60)$ ،

$$\text{ب/ بين أن: } (a^{63} - 1) - (a^{60} - 1)a^3 = a^3 - 1$$

$$\text{ج/ برهن أن: } PGCD(a^{63} - 1; a^{60} - 1) = a^3 - 1$$

$$\text{د/ استنتج القيمة لـ: } PGCD(2^{63} - 1; 2^{60} - 1).$$

حل:

(1) طريقة 1:

ليكن $x \in \mathbb{N}$: يمكن ملاحظة أن: $1+x+x^2+\dots+x^{k-1}$ مجموع حدود متتالية هندسية أسـها x ، نكتب:

$$1+x+x^2+\dots+x^{k-1} = 1 \times \frac{1-x^k}{1-x} = \frac{1-x^k}{1-x} \quad \text{أي:} \quad (1+x+x^2+\dots+x^{k-1})(x-1) = x^k - 1 \quad (*)$$

حيث: $x \neq 1$ من أجل $x=1$ نلاحظ تحقق العلاقة (*), أي: $x \in \mathbb{N}$, $x^k - 1 = (x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{k-1})$

طريقة 2:

نقوم بالنشر: $x^k - 1 = \cancel{x^k} - \cancel{x^{k-1}} - \dots - \cancel{x^2} - \cancel{x} + 1 = (x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{k-1})$

$$(2) \quad n \in \mathbb{N}^*, d \mid n \text{ و } d \text{ معناه } n = kd, k \in \mathbb{N}^*$$

أو $a \in \mathbb{N}^*$ يمكن ملاحظة الحالتين:

① $n = d : k = 1$ أي: $a^n - 1 = (1) \times (a^d - 1)$ و منه: $a^d - 1$ قاسم لـ $a^n - 1$ ، و يجدر بنا أن نشير إلى أن كلا من $a^d - 1$ و $a^n - 1$ عدنان طبيعيان،

② أو $k \neq 1$: لدينا - هذا اعتمادا على السؤال الأول - :

$$a^n - 1 = a^{kd} - 1 = (a^d)^k - 1 = (a^d - 1) \times (1 + a^d + \dots + (a^d)^{k-1})$$

نضع: $\alpha = 1 + a^d + \dots + (a^d)^{k-1}$ ، من الملاحظ أن $\alpha \in \mathbb{N}$ ، لأنه مجموع أعداد طبيعية نجد: $a^n - 1 = \alpha \times (a^d - 1)$ و منه: $a^d - 1$ قاسم لـ $a^n - 1$

ب / لدينا: $7 = 2^3 - 1$ و $2010 = 3 \times 670$ حسب 2، أ) $2^3 - 1 = 7$ و منه 7 يقسم العدد $2^{2010} - 1$ ، وكذلك لدينا: $63 = 2^6 - 1$ و $2010 = 63 \times 335$ و حسب 2) 63 يقسم العدد $2^{2010} - 1$ ، و لدينا 9 قاسم لـ 63 و مما سبق نستنتج أن 9 قاسم لـ $2^{2010} - 1$ ، (3) أو / نستعمل التحليل إلى جداء عوامل أولية:

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \longrightarrow 60 = 2^2 \times 3 \times 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 63 & 3 \\ 21 & 3 \longrightarrow 63 = 3^2 \times 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

و منه: $PGCD(63; 60) = 3$ ب / لدينا: $a^3 - 1 = a^3 - a^3 + a^3 = a^3 - 1 - a^3 + a^3 = (a^3 - 1) - (a^3 - 1)a^3$ ج / يمكن كتابة: $a^3 - 1 = (a^3 - 1) + (a^3 - 1)a^3$ ، وبالتالي:

د / بوضع $a = 2$ نجد: $PGCD(a^{63} - 1; a^{60} - 1) = PGCD(2^{63} - 1; 2^{60} - 1) = 2^3 - 1 = 7$ و نلاحظ: $60 = 3 \times 20$ حسب 2، أ) يكون: $a^3 - 1$ قاسما لـ $a^{60} - 1$

معناه:

$$PGCD(a^{63} - 1; a^{60} - 1) = a^3 - 1$$

د / بوضع $a = 2$ نجد: $PGCD(2^{63} - 1; 2^{60} - 1) = 2^3 - 1 = 7$

التمرين 05:

- 1/ عين مجموعة قواسم العدد 15،
 2/ x, y عدنان طبيعيان غير معدومين حيث: $yx^2 - y = 15$ ،
 أ) أثبت أن y قواسم لـ 15،
 ب) حل في $\mathbb{N}^2$: $yx^2 - y = 15$.

حل:

- 1/ قواسم 15: $\{1; 3; 5; 15\}$ ،
 2/ أ) لدينا: x, y عدنان طبيعيان غير معدومين و $yx^2 - y = 15$ معناه $(x^2 - 1)y = 15$ وكون: $(x^2 - 1) \in \mathbb{N}$ يكون: $15|y$ ،
 ب) حل المعادلة في $\mathbb{N}^2$:
 من أ) يينا أن $15|y$ معناه: $y \in \{1; 3; 5; 15\}$ لنميز الحالات:
 • $y = 1$ عند التعويض في المعادلة (*) نجد $x^2 = 16$ أي $x = 4$ كون x عددا طبيعيا،
 • $y = 3$ بالتعويض نجد $x^2 = 6$ وهذه المعادلة لا تقبل حولا في $\mathbb{N}$ ،
 • $y = 5$ بالتعويض نجد $x^2 = 4$ أي: $x = 2$ ،
 أي حلول المعادلة هي: $x = 4, y = 1$ أو $x = 2, y = 5$.

التمرين 06:

- عند قسمة العدد الطبيعي n على 3 كان الباقي 2،
 ما هو باقي قسمة $n^2 + 7$ على 3.

حل:

- لدينا من المعطيات: $n = 3m + 2$ مع: $m \in \mathbb{N}$ ، و منه:

$$n^2 + 7 = (3m + 2)^2 + 7 = 9m^2 + 12m + 4 + 7 = 9m^2 + 12m + 11 = 9m^2 + 12m + 9 + 2 = 3(3m^2 + 4m + 3) + 2$$
 وكون: $(3m^2 + 4m + 3) \in \mathbb{N}$ يكون باقي قسمة $n^2 + 7$ على العدد 3 هو 2.

التمرين 07:

- 1/ عند قسمة عدد طبيعي a على 12 كان باقي القسمة 8،
 - ما هو باقي القسمة على 4،
 - ما هو باقي القسمة على 3،
 2/ عند قسمة عدد طبيعي n على 4 كان باقي القسمة 3، فما هو باقي قسمته على 2.

حل:

/1

لدينا من المعطيات: $a = 12m + 8$, $m \in \mathbb{N}$ و منه:- لدينا $a = 12m + 8 = 4(3m + 2)$ و كون: $3m + 2 \in \mathbb{N}$ فالباقي 0،- لدينا: $a = 12m + 8 = 12m + 6 + 2 = 3(4m + 2) + 2$ و كون: $4m + 2 \in \mathbb{N}$ فالباقي 2،

/2

لدينا: $n = 4k + 3$, $k \in \mathbb{N}$ $n = 4k + 3 = 2(2k + 1) + 1$ و كون: $2k + 1 \in \mathbb{N}$ فالباقي هو 1.**التمرين 08:**/1 عين $PGCD(10030; 6018)$ ،/2 عين أكبر قيمة للعدد الطبيعي n ، بحيث عند قسمة 10080 و 6030 على n كان باقي القسمة هو 50 و 12 على الترتيب.**حل:**/1 تعيين $PGCD(10030; 6018)$:

باستعمال خوارزمية إقليدس:

$$10030 = 6018 \times 1 + 4012$$

$$6018 = 4012 \times 1 + 2006$$

$$4012 = 2006 \times 2 + 00$$

إذن: $PGCD(10030; 6018) = 2006$ ،/2 من المعطيات يمكن كتابة: $\begin{cases} 10080 = k_1 n + 50 \\ 6030 = k_2 n + 12 \end{cases}$ معناه: $\begin{cases} 10030 = k_1 n \\ 66018 = k_2 n \end{cases}$ حيث: $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ أي حولت المسألة إلى

البحث عن أكبر قاسم مشترك للعددين: 10030 و 6030 الموجود سابقا: أي: 2006.

التمرين 09: n عدد طبيعي مؤلف من رقمين حيث: $PGCD(n; 360) = 5$ ،عين قيم n .**حل:**لدينا: $PGCD(n; 360) = 5$ أي: $n = 5n'$ مع: $n, n' \in \mathbb{N}$ و منه $PGCD(n'; 72) = 1$ ، لدينا:

$$72 \mid 2$$

$$36 \mid 2$$

$$18 \mid 2 \longrightarrow 72 = 2^3 \times 3^2$$

$$9 \mid 3$$

$$3 \mid 3$$

$$1$$

و منه $n' \in \{5; 7; 11; 13; 17; 19\}$ لأن n مؤلف من رقمين، إذن: $n \in \{25; 35; 55; 65; 85; 95\}$

التمرين 10:

ليكن a, b عددين طبيعيين حيث: $PGCD(a; b) = 2$ ،
ما هو $PGCD(a^2; b^2)$.

حل:

من المعطيات يمكن وضع: $a = 2a'$ ، $b = 2b'$ مع أن: $PGCD(a', b') = 1$ ،
و $a^2 = 4a'^2$ ، $b^2 = 4b'^2$ لدينا: $PGCD(a^2; b^2) = PGCD(4a'^2; 4b'^2) = 4PGCD(a'^2; b'^2) = 4$ ،
لنثبت أن: $PGCD(a'^2; b'^2) = 1$:

طريقة أولى:

يمكن كتابة $a' = n_1^{k_1} \times n_2^{k_2} \times \dots$ حيث: $n_1^{k_1}, n_2^{k_2}, \dots$ و $m_1^{l_1}, m_2^{l_2}, \dots$ أعدادا أولية، التي لا يمكن أن تتساوى وهذا لأن
 $b' = m_1^{l_1} \times m_2^{l_2} \times \dots$

$PGCD(a', b') = 1$ و منه يكون $(a')^2 = (n_1^{k_1})^2 \times (n_2^{k_2})^2 \times \dots$ ،
أمكن ملاحظة أنه لا توجد عوامل مشتركة بين التحليلين
 $(b')^2 = (m_1^{l_1})^2 \times (m_2^{l_2})^2 \times \dots$

و هذا كاف لكتابة: $PGCD(a'^2; b'^2) = 1$. لاحظ تحقق المساواة في حالة $a' = 1$ أو $b' = 1$.

طريقة ثانية:

لدينا a' و b' أوليان فيما بينهما، من النتيجة 01 صفحة 341 نستنتج أن a' أولي مع b'^2 ، أي حسب بيزو توجد ثنائية صحيحة
 $(u; v)$ حيث: $a'(u) + b'^2(v) = 1$ معناه $a'(u) = 1 - b'^2(v)$ بالتربيع نجد: $a'^2(u^2) = 1 - 2b'^2(v) + b'^4(v^2)$
أي: $1 = a'^2(u^2) + b'^2(2(v) - b'^2(v^2)) \in \mathbb{Z}$ فحسب بيزو يكون a'^2 و b'^2 أوليين فيما بينهما.

التمرين 11:

x, y عددان طبيعيان أوليان فيما بينهما، بفرض أن $x + y$ أولي مع $x^2 + y^2 + xy$ ،
عين x, y بحيث: $5 \times (x^2 + xy + y^2) = 19 \times (x + y)$.

حل:

لدينا: $5 \times (x^2 + xy + y^2) = 19 \times (x + y)$ وبالتالي: $(5 \times (x^2 + xy + y^2)) \mid (x + y)$ وكون: $x + y$ أوليا مع
 $x^2 + y^2 + xy$ و منه حسب غوص $5 \mid (x + y)$ أي: $(x + y) \in \{1, 5\}$ لأجل هذا ننظر الحالات:
 $x + y = 1 = 0 + 1 = 1 + 0$ *

أي: $x = 0, y = 1$ وعند التعويض في المعادلة نجد $5 = 19$ و هذا تناقض، أي أن هاتين القيمتين مرفوضتان،
أو: $x = 1, y = 0$ عند التعويض في المعادلة نجد $5 = 19$ و هذا تناقض، إذن فالقيمتان مرفوضتان، أو نلاحظ أن المعادلة متناظرة،
 $x + y = 5 = 0 + 5 = 1 + 4 = 2 + 3 = 3 + 2 = 4 + 1 = 5 + 0$ *

أي: $x = 0, y = 5$ و عند التعويض في المعادلة نجد $125 = 95$ و هذا تناقض، أي نرفض هاتين القيمتين،
 $x = 1, y = 4$ و عند التعويض في المعادلة نجد $105 = 95$ و هذا تناقض، أي نرفض هاتين القيمتين،
 $x = 2, y = 3$ و عند التعويض في المعادلة نجد $95 = 95$ إذن فهما قيمتان مقبولتان،

من الواضح أن الحالات المتبقية مرفوضة، و عند ملاحظة أن العبارة $x^2 + xy + y^2$ متناظرة "أي لا تتغير العبارة
بتغيير موضعي x و y "، خلاصة: مجموعة حلول المعادلة هي: $(x, y) \in \{(2, 3), (3, 2)\}$.

التمرين 12:

$(u_n)_n$ متتالية هندسية حدودها أعداد طبيعية غير معدومة،
عين الحد الأول u_0 و الأساس الأوليان فيما بينهما حيث: $u_1 + 2u_3 = 44u_0^2$.

حل:

$(u_n)_n$ متتالية هندسية حدودها أعداد طبيعية غير معدومة و منه من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$: $u_n = u_0 q^n$ حيث: q أولي مع u_0

ولدينا: $u_1 + 2u_3 = u_0 q + 2u_0 q^3 = 44u_0^2$ و منه: $q(1 + 2q^2) = 44u_0$ كون $u_0 \neq 0$ أي: $q \mid 44u_0$ نلاحظ أن $1 + 2q^2 \in \mathbb{N}$

و كون q أوليا مع u_0 ، إذن: $q \mid 44$ و هذا حسب غوص و منه: $q \in \{1; 2; 4; 11; 22; 44\}$ لنميز الحالات التالية:

• $q = 1$ نعوض في المعادلة (1) نجد: $3 = 44u_0$ و هذه المعادلة ذات المجهول u_0 لا تقبل حولا في $\mathbb{N}$ ،

• $q = 2$ نعوض في المعادلة (1) نجد: $18 = 44u_0$ و هذه المعادلة ذات المجهول u_0 لا تقبل حولا في $\mathbb{N}$ ،

• $q = 4$ نعوض في المعادلة (1) نجد: $132 = 44u_0$ و بالتالي: $u_0 = 3$ ،

• $q = 11$ نعوض في المعادلة (1) نجد: $2673 = 44u_0$ و هذه المعادلة ذات المجهول u_0 لا تقبل حولا في $\mathbb{N}$ ،

• $q = 22$ نعوض في المعادلة (1) نجد: $21318 = 44u_0$ و هذه المعادلة ذات المجهول u_0 لا تقبل حولا في $\mathbb{N}$ ،

• $q = 44$ نعوض في المعادلة (1) نجد: $170412 = 44u_0$ أي: $u_0 = 3873$ ،

و منه توجد متتاليتان:

* الأولى: حدها الأول 3873 و أساسها 44،

* الثانية: حدها الأول 3 و أساسها 4.

التمرين 13:

a, b عدنان طبيعيان غير معدومين و أوليان فيما بينهما،

- أثبت أن $a+b$ أولي مع $a \times b$.

حل:

a, b عدنان طبيعيان غير معدومين و أوليان فيما بينهما حسب يـزو $au + bv = 1$ حيث: $u, v \in \mathbb{Z}$ و مـنـه:

$$a^2 u^2 + b^2 v^2 + 2abvu = 1$$

$$a^2 u^2 + abv^2 + b au^2 + b^2 v^2 - abv^2 - b au^2 + 2abvu = 1$$

$$a(au^2 + bv^2) + b(au^2 + bv^2) + ab(2uv - u^2 - v^2) = 1$$

$$(a+b)(au^2 + bv^2) + ab(2uv - u^2 - v^2) = 1$$

كون: $au^2 + bv^2 \in \mathbb{Z}$ و $2uv - u^2 - v^2 \in \mathbb{Z}$ فحسب يـزو دائما $a+b$ أولي مع $a \times b$.

أهداف الدرس السادس:

- الموافقات في $\mathbb{Z}$.

الدرس السادس:

نشاط استكشافي:

(1) عين باقي قسمة كل من: 17 و 15 على 2،

ماذا تلاحظ؟

نقول في هذه الحالة أن العددين: 15, 17 متوافقان، و نكتب $17 \equiv 15[2]$ و نقرأ: " 17 يوافق 15 بترديد 2"(أو $15 \equiv 17[2]$)(2) ليكن a, b عددين صحيحين، و $n \in \mathbb{N}^*$ ،

بين التكافؤ:

$$a \equiv b[n] \bullet \text{ معناه } a - b \text{ مضاعفات } n.$$

حل النشاط:

(1)

لدينا: $17 = 2 \times 8 + 1$ و $15 = 2 \times 7 + 1$ الباقي في الحالتين مساو لـ 1، نلاحظ توافق العددين 15, 17 في باقي القسمة على 2 و نكتب كما ورد في النشاط $17 \equiv 15[2]$ أو $15 \equiv 17[2]$ ،

(2) a, b عددان صحيحان و $n \in \mathbb{N}^*$:

لنفرض أن $a \equiv b[n]$ أي a, b لهما نفس باقي القسمة على n أي: مع $0 \leq r < n$ و $k, k' \in \mathbb{Z}$ $a = kn + r$ و $b = k'n + r$ بطرح العلاقتين نجد: $a - b = (k - k')n$ إذن: $a - b$ من مضاعفات n ، مع ملاحظة أن $(k - k') \in \mathbb{Z}$ ، الاستلزام العكسي:

طريقة أولى:

لنفرض $a - b$ من مضاعفات n ، أي: $a - b = k_1 n$ (*)، نقوم بقسمة a على n فنجد $a = k_2 n + r_1$ مع: $0 \leq r_1 < n$ وكذلك نقوم بقسمة b على n فنجد $b = k_3 n + r_2$ مع: $0 \leq r_2 < n$ ، و لنفرض جدلاً أن: $r_1 > r_2$ ، عند التعويض في (*): $k_1 n = a - b = (k_2 - k_3)n + r_1 - r_2$ من هذه العلاقة يمكن أن نستنتج أن $r_1 - r_2$ من مضاعفات n و من الواضح أن: $-n < r_1 - r_2 < n$ أي: $\alpha = 0$ و منه $r_1 = r_2$ ، مع العلم: $k_3, k_2, k_1 \in \mathbb{Z}$.

طريقة ثانية:

عند تعويض $b = k_3 n + r_2$ في (*) فقط نجد: $a = (k_1 + k_3)n + r_2$ و كون $(k_1 + k_3) \in \mathbb{Z}$ و $0 \leq r_2 < n$ فإن باقي قسمة a على n هو r_2 .

بناء المعارف:

الأعداد الصحيحة المتوافقة بترديد n :

العددان الصحيحان a, b متوافقان بترديد n إذا كان لهما نفس باقي قسمتهما على n و نكتب: $a \equiv b[n]$ (أو $b \equiv a[n]$) و نقرأ " a يوافق b بترديد n "، (أو b يوافق a بترديد n).

نتيجة هامة:

من أجل a, b من $\mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}^*$ ،

$$a \equiv b [n] \text{ معناه } a - b \text{ من مضاعفات } n$$

الإثبات:

لاحظ النشاط السابق.

ملاحظة هامة:

عند إجراء القسمة الاقليدية للعدد الصحيح a على العدد الطبيعي n وجدنا $a = nq + r$ حيث: $0 \leq r < n$ ،
عندئذ $a \equiv r [n]$.

لأن:

من القسمة الاقليدية نكتب: $a - r = nq$ أي: $a - r$ من مضاعفات n وبالتالي: $a \equiv r [n]$.

تمرين تطبيقي:

أذكر ما إذا كانت الموافقات التالية صحيحة أم لا:

$$2 \equiv 1 [8] \bullet$$

$$10 \equiv 2 [4] \bullet$$

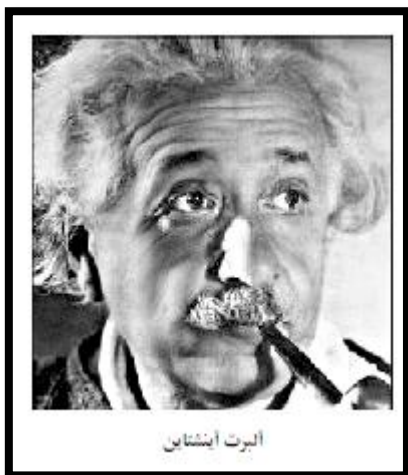
$$9 \equiv 1 [7] \bullet$$

$$5 \equiv 3 [3] \bullet$$

$$14 \equiv 5 [9] \bullet$$

حل:

- لدينا: $2 - 1 = 1$ و الناتج ليس من مضاعفات 8، أي الموافقة $2 \equiv 1 [8]$ خاطئة،
- لدينا: $10 - 2 = 8$ و الناتج من مضاعفات 4، أي الموافقة $10 \equiv 2 [4]$ صحيحة،
- $9 - 1 = 8$ و الناتج ليس من مضاعفات 7، أي الموافقة $9 \equiv 1 [7]$ خاطئة،
- $5 - 3 = 2$ و الناتج ليس من مضاعفات 3، أي الموافقة $5 \equiv 3 [3]$ خاطئة،
- $14 - 5 = 9$ و الناتج من مضاعفات 9، أي الموافقة $14 \equiv 5 [9]$ صحيحة.



ألبرت أينشتاين

المنطق سيأخذك من النقطة أ إلى النقطة ب، الخيال سيذهب بك إلى أي مكان.

أهداف الدرس السابع:

- خواص الموافقات في $\mathbb{Z}$.

الدرس السابع:

سوف نتعرف في هذا الدرس على خواص للموافقات، إليك هاته الـ

مبرهنة:

من أجل الأعداد الصحيحة النسبية التالية: a, b, c, m و $k, n, m' \in \mathbb{N}^*$

- إذا كان $a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$ فإن: $a \equiv c[n]$
- إذا كان $a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$ فإن: $a+c \equiv (b+d)[n]$
- إذا كان $a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$ فإن: $a \times c \equiv b \times d[n]$
- إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $ma \equiv mb[n]$ و $m'a \equiv m'b[m'n]$
- إذا كان $a \equiv b[n]$ فإن $a^k \equiv b^k[n]$

إثباتها:

لدينا: $a \equiv b[n]$ و $b \equiv c[n]$ أي: $b-a$ و $c-b$ من مضاعفات n ، ومنه $(b-a)+(c-b)$ من مضاعفات n أي $c-a$ من مضاعفات n ، أي $a \equiv c[n]$

وكذلك لدينا: $a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$ أي: $b-a$ و $d-c$ من مضاعفات n ، ومنه $(b-a)+(d-c)$ من مضاعفات n أي $(b+d)-(a+c)$ من مضاعفات n وبالتالي: $a+c \equiv (b+d)[n]$

ليكن $a \equiv b[n]$ و $c \equiv d[n]$ أي: $b-a$ و $d-c$ من مضاعفات n معناه يوجد $k, k' \in \mathbb{Z}$ حيث: $b-a = kn$ و $d-c = k'n$ ولدينا من جهة أخرى:

$$ac - bd = ac - ad + ad - bd = -a(d-c) - d(b-a) = \left(-ak' \right)n + \left(-dk \right)n = \left(-ak' - dk \right)n$$

أي: $ac - bd$ من مضاعفات n

لدينا: $a \equiv b[n]$ أي: $b-a$ من مضاعفات n أي $m(b-a)$ من مضاعفات n ومنه $ma \equiv mb[n]$

أو $b-a = kn$ أي $m'b - m'a = k(m'n)$ ومنه: $ma \equiv mb[mn]$

لدينا: $a \equiv b [n]$ أي: $b - a = kn$ من مضاعفات n أي $b - a = kn$ ولدينا:

$$b^k - a^k = (b - a)(b^{k-1} + b^{k-2}a + \dots + a^{k-1}) = (k(b^{k-1} + b^{k-2}a + \dots + a^{k-1}))n$$

$\in \mathbb{Z}$

أي $b^k - a^k \equiv 0 [n]$ من مضاعفات n ، أي: $a^k \equiv b^k [n]$.

خاصية بسيطة كثيرة الاستعمال:

$a, b, m \in \mathbb{Z}$ و $n \in \mathbb{N}^*$ يكون:

$$a \equiv b [n] \text{ معناه } a \equiv (b + mn) [n]$$

إثبات:

$a \equiv b [n]$ معناه $a - b = kn$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ، ولدينا $a - b - mn = kn - mn = (k - m)n$ ، وبالتالي صحة الخاصية.

تمرين تطبيقي:

a, b عدنان طبيعيا حيث: $a = 1428, b = 2006$ ،

1/ أ) عين باقي القسمة الاقليدية للعدد a على 9،

ب) يبين أن: $b \equiv -1 [9]$ ،

ج) هل a و b متوافقان بترديد 9، برر إجابتك،

2/ أ) ما هو باقي قسمة العدد $(a + b^2)$ على 9؟

ب) استنتج باقي قسمة $(a + b^2)$ على 3.

حل:

1/

أ) $a = 1428 = 158 \times 9 + 6$ أي الباقي هو: 6

ب) لدينا $b = 2006 = 2007 - 1 = 223 \times 9 - 1$ أي $b \equiv -1 [9]$ ومنه $b \equiv -1 [9]$ ،

ج) لا: من أ) باقي قسمة a على 9 هو 6، في حين باقي قسمة b على 9 هو 8 لأننا وجدنا: $b \equiv -1 [9]$ أي: $b \equiv 8 [9]$ ،

2/

أ) لدينا: $b \equiv 8 [9]$ ومنه $b^2 \equiv 64 [9]$ أي: $b^2 \equiv 1 [9]$ ومنه $a + b^2 \equiv (6 + 1) [9]$ وبالتالي: $a + b^2 \equiv 7 [9]$ ،

أي باقي قسمة $(a + b^2)$ على 9 هو: 7،

ب) لدينا: $a + b^2 = 9k + 7$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ ومنه $a + b^2 = 3(3k + 2) + 1$ وكون: $(3k + 2) \in \mathbb{N}$

فإن باقي قسمة $(a + b^2)$ على 3 هو 1.

استعمال الموافقات في بعض التمارين.

محاولاتك مهمة

(1) يمكن استعمال الموافقات في تعيين بواقي قسمة أعداد كبيرة على أعداد طبيعية أخرى:

التمرين 01:

(أ) ما هو باقي قسمة الأعداد الآتية على 7: 12^{2003} , $(4000)^{500}$, $(772)^{1450}$,
(ب) ما هو باقي قسمة الأعداد الآتية على 6: $(10)^{3000}$, $(15)^{2003}$, $(8)^{200}$, $(17)^{2003}$.

حل:

(أ)

*طريقة أولى:

باقي قسمة 12 على 7 هو: 5 أي: $12 \equiv 5[7]$ ومنه وحسب خواص الموافقات: $12^{2003} \equiv 5^{2003}[7]$ ،
ولما كان باقي قسمة أي عدد على 7 هو: 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 ، لندرس بواقي قسمة 5^n (مع: $n \in \mathbb{N}$) على 7، لأجل هذا:
 $5^0 \equiv 1[7]$ و $5^1 \equiv 5[7]$ و $5^2 = 25 \equiv 4[7]$ و $5^3 \equiv 6[7]$ و $5^4 = 625 \equiv 2[7]$ و $5^5 = 3125 \equiv 3[7]$ و $5^6 = 15625 \equiv 1[7]$
إذن نميز الحالات:

- من أجل: $n = 6k$, $k \in \mathbb{N}$ يكون: $5^{6k} = (5^6)^k \equiv 1[7]$ ،
 - من أجل: $n = 6k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ يكون: $5^{6k+1} = 5^{6k} \times 5 \equiv 5[7]$ ،
 - من أجل: $n = 6k + 2$, $k \in \mathbb{N}$ يكون: $5^{6k+2} = 5^{6k} \times 5^2 \equiv 4[7]$ ،
 - من أجل: $n = 6k + 3$, $k \in \mathbb{N}$ يكون: $5^{6k+3} = 5^{6k} \times 5^3 \equiv 6[7]$ ،
 - من أجل: $n = 6k + 4$, $k \in \mathbb{N}$ يكون: $5^{6k+4} = 5^{6k} \times 5^4 \equiv 2[7]$ ،
 - من أجل: $n = 6k + 5$, $k \in \mathbb{N}$ يكون: $5^{6k+5} = 5^{6k} \times 5^5 \equiv 3[7]$ ،
- نلاحظ أن الباقي يتكرر كل 6 مراحل، لأجل هذا نسمي 6 بـ "الدور"،
ولدينا: $2003 = 333 \times 6 + 5$ ، أي الحالة الأخيرة المذكورة سابقا ومنه: $12^{2003} \equiv 3[7]$ أي الباقي هو 3.

*طريقة ثانية:

- أي إذا كان: $n = 6k$, $k \in \mathbb{N}$ يكون: $12^{6k} = (12^6)^k \equiv 1[7]$ ،
 - إذا كان: $n = 6k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ يكون: $12^{6k+1} = 12^{6k} \times 12 \equiv 5[7]$ ،
 - إذا كان: $n = 6k + 2$, $k \in \mathbb{N}$ يكون: $12^{6k+2} = 12^{6k} \times 12^2 \equiv 4[7]$ ،
 - إذا كان: $n = 6k + 3$, $k \in \mathbb{N}$ يكون: $12^{6k+3} = 12^{6k} \times 12^3 \equiv 6[7]$ ،
 - إذا كان: $n = 6k + 4$, $k \in \mathbb{N}$ يكون: $12^{6k+4} = 12^{6k} \times 12^4 \equiv 2[7]$ ،
 - إذا كان: $n = 6k + 5$, $k \in \mathbb{N}$ يكون: $12^{6k+5} = 12^{6k} \times 12^5 \equiv 3[7]$ ،
- ومن الباقي هو 3.

* لدينا: $4000 \equiv 3[7]$ أي: $4000^{500} \equiv 3^{500}[7]$ ، إذن نقوم بدراسة باقي قسمة 3^n على 7 حسب قيم: n ، لنبحث على الدور:
 $3^0 \equiv 1[7]$ و $3^1 \equiv 3[7]$ و $3^2 \equiv 2[7]$ و $3^3 \equiv 6[7]$ و $3^4 \equiv 4[7]$ و $3^5 \equiv 5[7]$ و $3^6 \equiv 1[7]$ أي الدور 6، ومنه:

- من أجل: $n = 6k, k \in \mathbb{N}$ يكون: $3^{6k} = (3^6)^k \equiv 1[7]$ ،
- من أجل: $n = 6k + 1, k \in \mathbb{N}$ يكون: $3^{6k+1} = 3^{6k} \times 3 \equiv 3[7]$ ،
- من أجل: $n = 6k + 2, k \in \mathbb{N}$ يكون: $3^{6k+2} = 3^{6k} \times 3^2 \equiv 2[7]$ ،
- من أجل: $n = 6k + 3, k \in \mathbb{N}$ يكون: $3^{6k+3} = 3^{6k} \times 3^3 \equiv 6[7]$ ،
- من أجل: $n = 6k + 4, k \in \mathbb{N}$ يكون: $3^{6k+4} = 3^{6k} \times 3^4 \equiv 4[7]$ ،
- من أجل: $n = 6k + 5, k \in \mathbb{N}$ يكون: $3^{6k+5} = 3^{6k} \times 3^5 \equiv 5[7]$ ،
- لدينا: $500 = 83 \times 6 + 2 \equiv 2[7]$ أي نحن في الحالة الثانية: $4000^{500} \equiv 2[7]$.

- * لدينا: $772 \equiv 2[7]$ أي: $772^{1450} \equiv 2^{1450} \equiv 2[7]$ لندرس باقي قسمة 2^n على 7 من أجل كل $n \in \mathbb{N}$
- $2^0 \equiv 1[7]$ و $2^1 \equiv 2[7]$ و $2^2 \equiv 4[7]$ و $2^3 \equiv 1[7]$ فالدور: 3
- من أجل: $n = 3k, k \in \mathbb{N}$ يكون: $2^{3k} = (2^3)^k \equiv 1[7]$ ،
 - من أجل: $n = 3k + 1, k \in \mathbb{N}$ يكون: $2^{3k+1} = 2^{3k} \times 2^1 \equiv 2[7]$ ،
 - من أجل: $n = 3k + 2, k \in \mathbb{N}$ يكون: $2^{3k+2} = 2^{3k} \times 2^2 \equiv 4[7]$ ،
 - لدينا: $2^{1450} = 2^{3 \times 483 + 1} \equiv 2[7]$ ، ومنه $772^{1450} \equiv 2[7]$.

(ب)

- * لدينا: $10 \equiv 4[6]$ أي: $10^{3000} \equiv 4^{3000} \equiv 4[6]$ لندرس باقي قسمة 4^n على 6 من أجل كل $n \in \mathbb{N}$
- $4^0 \equiv 1[6]$ و $4^1 \equiv 4[6]$ و $4^2 \equiv 4[6]$ و $4^3 \equiv 4[6]$ و $4^4 \equiv 4[6]$ إذن من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $4^n \equiv 4[6]$
- $10^{3000} \equiv 4[6]$

- * لدينا: $15 \equiv 3[6]$ و منه: $15^{2003} \equiv 3^{2003} \equiv 3[6]$ لندرس باقي قسمة 3^n على 6 حسب قيم n
- $3^0 \equiv 1[6]$ و $3^1 \equiv 3[6]$ و $3^2 \equiv 3[6]$ أي من أجل كل n طبيعي غير معدوم $3^n \equiv 3[6]$ ، أي: $15^{2003} \equiv 3[6]$

- * لدينا: $8 \equiv 2[6]$ أي: $8^{200} \equiv 2^{200} \equiv 2[6]$ لندرس باقي قسمة 2^n على 6 حسب العدد الطبيعي n
- $2^0 \equiv 1[6]$ و $2^1 \equiv 2[6]$ و $2^2 \equiv 4[6]$ و $2^3 \equiv 2[6]$ و $2^4 \equiv 4[6]$ و $2^5 \equiv 2[6]$
- أي إذا كان: $n = 2k, k \in \mathbb{N}^*$ فإن: $2^{2k} \equiv 4[6]$ ،
- و إذا كان: $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ فإن: $2^{2k+1} = 2^{2k} \times 2 \equiv 4 \times 2[6]$ و منه: $2^{2k+1} \equiv 2[6]$ ،
- و كون $200 = 2(100)$ و منه: $8^{200} \equiv 4[6]$ ،

- * $17 \equiv 5[6]$ و منه: $17^{2003} \equiv 5^{2003} \equiv 5[6]$ لندرس باقي قسمة 5^n على 6 حسب قيم n
- $5^0 \equiv 1[6]$ و $5^1 \equiv 5[6]$ و $5^2 \equiv 1[6]$ فالدور: 2، إذن نميز الحالتين:
- إذا كان: $n = 2k, k \in \mathbb{N}$ فإن: $5^{2k} \equiv 1[6]$ ،
 - إذا كان: $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$ فإن: $5^{2k+1} \equiv 5[6]$ ، و كون: $2003 = 2(1001) + 1$ أي: $17^{2003} \equiv 5[6]$ ،

التمرين 02:

- ليكن العدد الطبيعي $a = 25$ ،
 1 / أ- تحقق أن $a \equiv 1[3]$ ،
 ب- استنتج باقي القسمة الاقليدية للعدد $2a^2 + 4$ على 3 ،
 ج- بين أن: $a^{360} - 5 \equiv 2[3]$ ،
 2. (أ) أدرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة العدد 5^n على 3 ،
 (ب) عين قيم العدد الطبيعي n حيث: $5^n + a^2 \equiv 0[3]$.

حل:

- 1 /
 أ- لدينا: $a = 25 = 8 \times 3 + 1$ أي: $a \equiv 1[3]$ ،
 ب- لدينا: $a^2 \equiv 1[3]$ أي: $2a^2 \equiv 2[3]$ و منه: $2a^2 + 4 \equiv 0[3]$ ،
 نستنتج أن باقي القسمة الاقليدية للعدد $2a^2 + 4$ على 3 هو 0 ،
 ج - لدينا $a \equiv 1[3]$ حسب خواص الموافقات لدينا: $a^{360} \equiv 1[3]$ أي: $a^{360} - 5 \equiv (1-5)[3]$ أي: $a^{360} - 5 \equiv -4[3]$ و منه $a^{360} - 5 \equiv -1[3]$ و منه: $a^{360} - 5 \equiv 2[3]$ ،
 2.
 (أ) دراسة حسب قيم n ، بواقي قسمة 5^n على 3 :
 • من أجل $n = 0$: $5^0 = 1$ و منه $5^0 \equiv 1[3]$ ،
 • من أجل $n = 1$: $5^1 = 5$ و منه $5^1 \equiv 2[3]$ ،
 • من أجل $n = 2$: $5^2 = 25$ و منه $5^2 \equiv 1[3]$ ، الدور 2 ،
 و منه باقي قسمة 5^n على 3 هي: 1 إذا كان n زوجيا و 2 إذا كان n فرديا ، و منه مجموعة البواقي هي: $\{1, 2\}$ ،
 (ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n حيث: $5^n + a^2 \equiv 0[3]$ ، مما سبق يمكن كتابة $a^2 \equiv 1[3]$ و $5^n \equiv 2[3]$ من أجل n فردي ،
 أي: $5^{2k+1} \equiv -1[3]$ و من خواص الموافقات لدينا: $5^{2k+1} + a^2 \equiv 0[3]$ ،
 و $5^n \equiv 1[3]$ إذا كان n زوجيا و منه: $5^n + a^2 \equiv 2[3]$ و بالتالي فالقيم المطلوبة لـ n هي القيم الفردية.

التمرين 03:

- 1 - (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 17^n على 7 ،
 (ب) عين باقي قسمة كل من العددين: 17^{2014} ، 36×17^{1962} على 7 ،
 2 - عين قيم العدد الطبيعي n لكي يقبل العدد $5 \times 17^{6n+3} + 2 \times 17^{n+2}$ القسمة على 7 .

حل:

- 1 - لنبحث عن الدور:
 $17^0 \equiv 1[7]$ و $17^1 \equiv 3[7]$ و $17^2 \equiv 2[7]$ و $17^3 \equiv 6[7]$ و $17^4 \equiv 4[7]$ و $17^5 \equiv 5[7]$ و $17^6 \equiv 1[7]$ إذن الدور 6 ،
 و منه الحالات التالية:
 • إذا كان: $n = 6k$ ، $k \in \mathbb{N}$ فإن: $17^{6k} \equiv 1[7]$ ،

- إذا كان: $n = 6k + 1, k \in \mathbb{N}$ فإن: $17^{6k+1} \equiv 3[7]$ ،
- إذا كان: $n = 6k + 2, k \in \mathbb{N}$ فإن: $17^{6k+2} \equiv 2[7]$ ،
- إذا كان: $n = 6k + 3, k \in \mathbb{N}$ فإن: $17^{6k+3} \equiv 6[7]$ ،
- إذا كان: $n = 6k + 4, k \in \mathbb{N}$ فإن: $17^{6k+4} \equiv 4[7]$ ،
- إذا كان: $n = 6k + 5, k \in \mathbb{N}$ فإن: $17^{6k+5} \equiv 5[7]$ ،

و منه باقي قسمة 17^n على 7 هو 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 من أجل كل عدد طبيعي n .

ب) • $2014 = 335 \times 6 + 4 \equiv 4[9]$ أي: $7^{2014} \equiv 4$ و منه الباقي هو 4 ،

• $1962 = 327 \times 6$ و $36 \equiv 2[17]$ أي: $36 \equiv 2[17]$ و منه الباقي هو: 2 ،

2 - لدينا: $17^{6n+3} \equiv 6[7]$ و منه: $5 \times 17^{6n+3} \equiv 2[7]$ و بالتالي: $5 \times 17^{6n+3} + 2 \times 17^{n+2} \equiv (2 + 2 \times 17^{n+2})[17]$ ،
لنفرض و هذا اعتمادا على المناقشة السابقة:

* إذا كان: $n + 2 = 6k, k \in \mathbb{N}$ فإن: $2 + 2 \times 17^{n+2} \equiv 4[7]$ ،

* إذا كان: $n + 2 = 6k + 1, k \in \mathbb{N}$ فإن: $2 + 2 \times 17^{n+2} \equiv 8[7]$ ، أي: $2 + 2 \times 17^{n+2} \equiv 1[7]$ ،

* إذا كان: $n + 2 = 6k + 2, k \in \mathbb{N}$ فإن: $2 + 2 \times 17^{n+2} \equiv 6[7]$ ،

* إذا كان: $n + 2 = 6k + 3, k \in \mathbb{N}$ فإن: $2 + 2 \times 17^{n+2} \equiv 14[7]$ ، $2 + 2 \times 17^{n+2} \equiv 0[7]$ ،

* إذا كان: $n + 2 = 6k + 4, k \in \mathbb{N}$ فإن: $2 + 2 \times 17^{n+2} \equiv (2+8)[7]$ ، أي: $2 + 2 \times 17^{n+2} \equiv 3[7]$ ،

* إذا كان: $n + 2 = 6k + 5, k \in \mathbb{N}$ فإن: $2 + 2 \times 17^{n+2} \equiv (2+10)[7]$ ، أي: $2 + 2 \times 17^{n+2} \equiv 5[7]$ ،

من هذه المناقشة نستنتج أن القيم المطلوبة في نص السؤال هي: $n = 6k + 1, k \in \mathbb{N}$.

التمرين 04:

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

أ) $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ يقبل القسمة على 17 ،

ب) $n(n^4 - 1)$ يقبل القسمة على 5 ،

ج) $7^n + 3n - 1$ من مضاعفات 9 .

حل:

أ) ليكن $n \in \mathbb{N}$ لدينا: $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 15(25)^n + 2(8)^n \equiv (15 \times 8^n + 2 \times 8^n)[17]$ و منه:

$3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv (17 \times 8^n)[17]$ أي: $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv (15 \times 8^n + 2 \times 8^n)[17]$

و منه: $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0[17]$ ،

ب) ليكن $n \in \mathbb{N}$:

نعلم أن باقي قسمة كل عدد طبيعي n على 5 هو: 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 ، لأجل هذا نميز الحالات:

• إذا كان n من مضاعفات 5 فمن الواضح أن $n(n^4 - 1)$ من مضاعفات 5 ، (لاحظ أن $n^4 - 1$ عدد طبيعي) ،

• إذا كان: $n \equiv 1[5]$ فإن: $n^4 \equiv 1[5]$ و منه $n^4 - 1 \equiv 0[5]$ و من خواص الضرب في الموافقات نجد: $n(n^4 - 1) \equiv 0[5]$ ،

• إذا كان: $n \equiv 2[5]$ فإن: $n^4 \equiv 1[5]$ و منه: $n^4 - 1 \equiv 0[5]$ أي: $n(n^4 - 1) \equiv 0[5]$ ،

• إذا كان: $n \equiv 3[5]$ فإن: $n^4 \equiv 1[5]$ و منه: $n^4 - 1 \equiv 0[5]$ أي: $n(n^4 - 1) \equiv 0[5]$ ،

• إذا كان: $n \equiv 4[5]$ فإن: $n^4 \equiv 1[5]$ و منه: $n^4 - 1 \equiv 0[5]$ أي: $n(n^4 - 1) \equiv 0[5]$.

أي من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن $n(n^4 - 1) \equiv 0[5]$ ،

(ج) لندرس بواقي قسمة 7^n على 9:

$$7^0 = 1 \equiv 0[9] \text{ و } 7^1 = 7 \equiv 7[9] \text{ و } 7^2 = 49 \equiv 4[9] \text{ و } 7^3 = 343 \equiv 1[9] \text{ و الدور 3:}$$

• من أجل $n = 3k$ يكون: $7^{3k} \equiv 1[9]$ ،

• من أجل $n = 3k + 1$ يكون: $7^{3k+1} \equiv 7[9]$ ،

• من أجل $n = 3k + 2$ يكون: $7^{3k+2} \equiv 4[9]$ ،

لنميز الحالات التالية:

* $n = 3k$ يكون: $7^n + 3n - 1 \equiv (1 + 9k - 1)[9] \equiv 0[9]$ أي: $7^n + 3n - 1 \equiv 0[9]$ ،

* $n = 3k + 1$ يكون: $7^n + 3n - 1 \equiv (7 + 9k + 3 - 1)[9] \equiv 0[9]$ أي: $7^n + 3n - 1 \equiv 0[9]$ ،

* $n = 3k + 2$ يكون: $7^n + 3n - 1 \equiv (4 + 9k + 6 - 1)[9] \equiv 0[9]$ أي: $7^n + 3n - 1 \equiv 0[9]$ ،

إذن من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$ يكون: $7^n + 3n - 1 \equiv 0[9]$.

التمرين 05:

(1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 7،

(2) أ - عين باقي قسمة العدد 3^{2014} على 7،

ب - برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي k : $2 \times 3^{6k+1} - 3^{12k+3} \equiv 0[7]$ ،

(3) عين مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث: $2 \times 3^{n+1} + 3^{6n+2} + 1 \equiv 0[7]$.

حل:

$$(1) \quad 3^0 = 1 \equiv 1[7] \text{ و } 3^1 = 3 \equiv 3[7] \text{ و } 3^2 = 2 \equiv 2[7] \text{ و } 3^3 = 27 \equiv 6[7] \text{ و } 3^4 = 81 \equiv 4[7] \text{ و } 3^5 = 243 \equiv 5[7] \text{ و } 3^6 = 729 \equiv 1[7]$$

الدور 6، و منه الحالات التالية:

• $3^{6k} \equiv 1[7]$ من أجل كل k من $\mathbb{N}$:

• $3^{6k+1} \equiv 3[7]$ ، $k \in \mathbb{N}$.

• $3^{6k+2} \equiv 2[7]$ ، $k \in \mathbb{N}$.

• $3^{6k+3} \equiv 6[7]$ ، $k \in \mathbb{N}$.

• $3^{6k+4} \equiv 4[7]$ ، $k \in \mathbb{N}$.

• $3^{6k+5} \equiv 5[7]$ مع: $k \in \mathbb{N}$.

2 أ - لدينا: $2014 = 6 \times 335 + 4$ أي: $3^{2014} \equiv 4[7]$ ،

ب - ليكن $k \in \mathbb{N}$ لدينا: $2 \times 3^{6k+1} - 3^{12k+3} = 2 \times 3^{6k+1} - 3 \times 3^{12k+2} = 2 \times 3^{6k+1} - 3 \times (3^{6k+1})^2 \equiv (6 - 3 \times 9)[7] \equiv 0[7]$ ومنه:

$$2 \times 3^{6k+1} - 3^{12k+3} \equiv 0[7]$$

(3) المطلوب إيجاد قيم n التي تجعل: $2 \times 3^{n+1} + 3^{6n+2} + 1 \equiv 0[7]$ لدينا: $(2 \times 3^{n+1} + 3)[7]$ ،

من العبارة الأخيرة يكفي إيجاد قيم n حيث: $2 \times 3^{n+1} + 3 \equiv 0[7]$ ، لأجل هذا نميز الحالات:

• $2 \times 3^{6k} + 3 \equiv 5[7]$ يوجد: $n + 1 = 6k$ ، $k \in \mathbb{N}$.

- $n+1=6k+1, k \in \mathbb{N}$ يوجد: $2 \times 3^{6k+1} + 3 \equiv (6+3)[7]$ أي: $2 \times 3^{6k+1} + 3 \equiv 2[7]$ ،
 - $n+1=6k+2, k \in \mathbb{N}$ يوجد: $2 \times 3^{6k+2} + 3 \equiv (4+3)[7]$ أي: $2 \times 3^{6k+2} + 3 \equiv 0[7]$ ،
 - $n+1=6k+3, k \in \mathbb{N}$ يوجد: $2 \times 3^{6k+3} + 3 \equiv (12+3)[7]$ أي: $2 \times 3^{6k+3} + 3 \equiv 1[7]$ ،
 - $n+1=6k+4, k \in \mathbb{N}$ يوجد: $2 \times 3^{6k+4} + 3 \equiv (8+3)[7]$ أي: $2 \times 3^{6k+4} + 3 \equiv 4[7]$.
- أي فالتقيم المطلوب هي: $n = 6k + 1, k \in \mathbb{N}$.

(2) يمكن أن نستعمل الموافقات لحل المعادلات من الشكل $ax + by = c$ حيث: a, b, c من $\mathbb{Z}$ ، ذات المجهولين الصحيحين x, y :

التمرين 06:

- حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهولين (x, y) : $5x - 8y = 3$ ،
- حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهولين (x, y) : $20x - 45y = 5$ ،
- حل في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة ذات المجهولين (x, y) : $6x - 8y = 9$.

حل:

• من الواضح أن $PGCD(5;8)=1$ أي المعادلة الأولى تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$ ، و —منه: $5x - 3 = 8y$ إذن: $5x \equiv 3[8]$ لدينا:

و عادة ما نبحث عن عدد يكون باقي قسمة جدائه مع معامل x : 1 أو -1 ،
في مثالنا $3 \times 5x \equiv 9[8]$ نجد: $15x \equiv 1[8]$ و منه $-x \equiv 1[8]$ أي: $x = -8k' - 1, k' \in \mathbb{Z}$ و منه: $x = 8k + 7, k \in \mathbb{Z}$
و عند التعويض في المعادلة نجد: $8y = 5(8k + 7) - 3 = 40k + 35 - 3 = 40k + 32$ أي:
 $(x; y) = (8k + 7; 5k + 4), k \in \mathbb{Z}$ أي: $y = 5k + 4$

أو:

نعلم أن باقي قسمة أي عدد صحيح x على 8 هو: 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 أو 7، و منه نميز الحالات:

$$5x \equiv 0[8] \text{ و منه: } x \equiv 0[8]$$

$$5x \equiv 5[8] \text{ و منه: } x \equiv 1[8]$$

$$5x \equiv 2[8] \text{ و منه: } x \equiv 2[8]$$

$$5x \equiv 7[8] \text{ و منه: } x \equiv 3[8]$$

$$5x \equiv 4[8] \text{ و منه: } x \equiv 4[8]$$

$$5x \equiv 1[8] \text{ و منه: } x \equiv 5[8]$$

$$5x \equiv 6[8] \text{ و منه: } x \equiv 6[8]$$

$$5x \equiv 3[8] \text{ و منه: } x \equiv 7[8]$$

إذن: $x = 8k + 7, k \in \mathbb{Z}$ بالتعويض نجد: $y = 5k + 4$.

• المعادلة $20x - 45y = 5$ تكافئ: $4x - 9y = 1$ مع ملاحظة أن $PGCD(4;9)=1$ ولدينا: $4x \equiv 1[9]$ و منه:

$$4x \equiv 0[9] \text{ و منه: } x \equiv 0[9]$$

$$4x \equiv 4[9] \text{ و منه: } x \equiv 1[9]$$

$$4x \equiv 8[9] \text{ و منه: } x \equiv 2[9]$$

$$4x \equiv 3[9] \text{ و } x \equiv 3[9] \text{ منه:}$$

$$4x \equiv 7[9] \text{ و } x \equiv 4[9] \text{ منه:}$$

$$4x \equiv 2[9] \text{ و } x \equiv 5[9] \text{ منه:}$$

$$4x \equiv 6[9] \text{ و } x \equiv 6[9] \text{ منه:}$$

$$4x \equiv 1[9] \text{ و } x \equiv 7[9] \text{ منه:}$$

$$4x \equiv 5[9] \text{ و } x \equiv 8[9] \text{ منه:}$$

إذن: $x = 9k + 7, k \in \mathbb{Z}$ عند التعويض في المعادلة نجد: $9y = 4(9k + 7) - 1$ و منه:

$$9y = 9 \times 4k + 27 \text{ و بالتالي: } y = 4k + 3, k \in \mathbb{Z}, (x; y) = (9k + 7; 4k + 3),$$

• لدينا: $6x - 8y = 9$ لدينا: $PGCD(6; 8) = 2$ لكن 2 لا يقسم 9، وهذا كاف للقول أن المعادلة لا تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$.

من علماء العرب:

أبو جعفر الخازن:



هو أبو جعفر محمد بن الحسين الخازن الخراساني، من علماء القرن 4 الهجري، تخصص في الرياضيات والفلك، واهتم بعلم الميكانيكا، درس مفهوم الاحتكاك، لكن لا نكاد نعرف شيئاً يذكر من حياته سوى أنه خدم ابن العميد وزير ركن الدولة البويهية، وأن والده توفي حين كان في سن 16 أو 17، وقيل إنه أول عالم حل المعادلات التكعيبية هندسياً بواسطة قطوع المخروط، وأنه بحث في المثلثات على أنواعها.

وضع أبو جعفر الخازن نظرية في شكل الكون وتركيبه، كما وضع تفسيراً لحركة الكواكب في تقدمها وتباعدها، وتفسيراً عن اختلاف مطالع الأقواس المتساوية في كتابه (المدخل الكبير إلى علم النجوم)، وناقش كذلك في كتابه هذا لأول مرة نظرية ابن الهيثم في تكوين النجوم، وبيّن أنه اعتمد على فروض بطليموس التي ترجمها ثابت بن قره، وناقشها أيضاً في كتابه الآخر (سر العالمين)، ووضع طرائق لتعيين أول محرم وأول السنة الهجرية، وبعض المسائل في علم التواريخ، كما بيّن في هذا الكتاب رأيه في شكل العالم، وفيه تتساوى أبعاد الأرض عن الشمس مع اختلاف الحركة فتصير ناحيتي الشمال والجنوب متكافئتين في الحر والبرد.

أبو جعفر الخازن كان قد شرح بعض آلات الرصد الفلكية، وتمكّن في علم الرياضيات من حل المعادلات التكعيبية حلاً هندسياً بواسطة قطوع المخروط، فسبق بذلك بيكر وديكارت في كتابه (شكل القطوع)، ودرس في الحساب مسائل العدد، كما ألف كتاباً في (حساب المثلثات)، وحل بعض المسائل الخاصة بحساب المتوازيات، وللخازن العديد من المؤلفات غير تلك التي ذكرناها، من بينها (المسائل العددية)، (الآلات العجيبة الرصدية)، (شكل القطوع)، (السماء والأرض)، (زيج الصفائح)، (الأبعاد والأجرام)، (شرح كتاب تفسير المجسطي)، (شرح المقالة العاشرة من كتاب الأصول لإقليدس).

أهداف الدرس الثامن:

• التعداد.

تہید:

من التاريخ:

الحضارة البابلية:

الحضارة المصرية:

وغيرهم من الحضارات وصولاً إلى الحضارة العربية التي كانت تعتمد على النظام العشري أي على 10 أرقام فقط هي 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9.

نحن ننوي إيجاد علاقة بين كل هذه النظم التي كانت تعتمد على كل حضارة، دون الخوض في الرموز التي كانت تستعمل آنذاك أي بمعنى سنعتبر عنها باستعمال الأعداد المعروفة الآن.

مثال:

تُرى هل يمكن كتابة هذا العدد في النظام الثنائي أو "النظام ذي الأساس 2"، أي يكتب بدلالة العدد 2 فقط؟ لدينا:

$$\begin{aligned} 522 &= 261 \times 2 = (130 \times 2 + 1) \times 2 = 130 \times 2^2 + 2 = (65 \times 2) \times 2^3 + 2 = 65 \times 2^3 + 2 = (32 \times 2 + 1) \times 2^3 + 2 = 32 \times 2^4 + 2^3 + 2 \\ &= (16 \times 2) \times 2^4 + 2^3 + 2 = 2^9 + 2^3 + 2 = 1 \times 2^9 + 0 \times 2^8 + 0 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2 + 0 \times 2^0 \end{aligned}$$

نلاحظ كذلك أن المعاملات لا يمكن أن تفوق 2 أي يمكننا أن نكتب عدد طبيعي باستعمال رقمين هما: 0 ، 1 فقط

و نرزم للعدد المكتوب في النظام الثنائي بـ $522 = \overline{1000001010}$ أو كما يفضل البعض كتابته: $522 = \overline{1000001010}^2$.

يبدو أنه يمكن التفكير في كتابة أي عدد في نظام ذي أساس مختار، إليك هذه المبرهنة:

مبرهنة:

 $m, n \in \mathbb{N}$ مع: $m \neq 0$ ، لدينا الحالتان:

- $n < m$ ، لا يمكن كتابته في نظام ذي الأساس m ، و نقول أنه رقم و يحافظ على رمزه،
- $n \geq m$ ، يمكن كما يظهر في المثال السابق باستعمال القسمة الاقليدية كتابة n بدلالة m وهذه الكتابة وحيدة، أي:

$$n = a_k m^k + a_{k-1} m^{k-1} + \dots + a_0 m^0 \text{ مع } a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N} \text{ تحقق: } 0 \leq a_k < m$$

$$\text{و } 0 \leq a_i < m, i \in \{0; 1; 2; \dots; k-1\}$$

و نقول في هذه الحالة أننا كتبنا n في النظام ذي الأساس m و نكتب: $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}^m$ أو $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_0}$.

تمرين تطبيقي 01:

أكتب كلا من الأعداد التالية في النظام ذا الأساس: 2 ثم 5 ثم 8 :

125 ، 18 ، 29 ، 94.

حل:

* كتابة 125 في نظام تعداد 2:

$$125 = 62 \times 2 + 1 = (31 \times 2) \times 2 + 1 = 31 \times 2^2 + 1 = (15 \times 2 + 1) \times 2^2 + 1 = 15 \times 2^3 + 2^2 + 1 = (7 \times 2 + 1) \times 2^3 + 2^2 + 1 = 7 \times 2^4 + 2^3 + 2^2 + 1$$

$$= (3 \times 2 + 1) \times 2^4 + 2^3 + 2^2 + 1 = 3 \times 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 1 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 1$$

$$\text{أي: } 125 = \overline{1111101}^2$$

* كتابة 125 في نظام التعداد 5: $125 = 25 \times 5 = 5^3 + 0 \times 5^2 + 0 \times 5 + 0 \times 1$ أي: $125 = \overline{1000}^5$ * كتابة 125 في نظام التعداد 8: $125 = 15 \times 8 + 5 = (1 \times 8 + 7) \times 8 + 5 = 8^2 + 7 \times 8 + 5$ أي: $125 = \overline{175}^8$ ،• * كتابة 18 في النظام 2: $18 = 9 \times 2 = (2^3 + 1) \times 2 = 2^4 + 2$ أي: $18 = \overline{10010}^2$ ،* كتابة 18 في نظام التعداد 5: $18 = 3 \times 5 + 3$ أي: $18 = \overline{33}^5$ ،** كتابة 18 في نظام التعداد 8: $18 = 2 \times 8 + 2$ أي: $18 = \overline{22}^8$ ،

• * كتابة 29 في نظام التعداد 2:

$$29 = 14 \times 2 + 1 = (7 \times 2) \times 2 + 1 = 7 \times 2^2 + 1 = (3 \times 2 + 1) \times 2^2 + 1 = 3 \times 2^3 + 2^2 + 1 = (2 + 1) \times 2^3 + 2^2 + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 1$$

$$\text{أي: } 29 = \overline{11101}^2$$

* كتابة 29 في نظام التعداد 5: $29 = 5^2 + 4$ أي: $29 = \overline{104}^5$ ،* كتابة 29 في نظام التعداد 8: $29 = 3 \times 8 + 5$ أي: $29 = \overline{35}^8$ ،

• * كتابة 94 في نظام التعداد 2:

$$94 = 47 \times 2 = (23 \times 2 + 1) \times 2 = 23 \times 2^2 + 2 = (11 \times 2 + 1) \times 2^2 + 2 = 11 \times 2^3 + 2^2 + 2 = (5 \times 2 + 1) \times 2^3 + 2^2 + 2 = 5 \times 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 = (2 \times 2 + 1) \times 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 = 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1$$

$$\text{أي: } 94 = \overline{1011110}^2$$

* كتابة 94 في نظام التعداد 5: $94 = 18 \times 5 + 4 = (3 \times 5 + 3) \times 5 + 4 = 3 \times 5^2 + 3 \times 5 + 4$ أي: $94 = \overline{334}^5$ ،* كتابة 94 في نظام التعداد 8: $94 = 11 \times 8 + 6 = (1 \times 8 + 3) \times 8 + 6 = 1 \times 8^2 + 3 \times 8 + 6$ أي: $94 = \overline{136}^8$.

تمرين تطبيقي 02:

اكتب كلا من العددين التاليين في النظام العشري:

$$\overline{12112}^3 \quad \text{و} \quad \overline{10001010}^2.$$

حل:

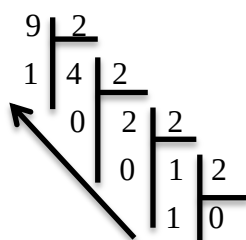
$$\overline{12112}^3 = 2 + 1 \times 3^1 + 1 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + 1 \times 3^4 = 2 + 3 + 9 + 54 + 81 = 149$$

$$\overline{10001010}^2 = 0 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^7 = 128 + 8 + 2 = 138$$

ملاحظة:

يمكن استعمال القسمة الاقليدية للمرور إلى نظام ما وهذا للتبسيط،

مثال: نريد كتابة العدد 9 في النظام الثنائي، لدينا:

أي: $\overline{1001}^2 = 9$.

من علماء العرب:

إبراهيم بن سنان:

هو إبراهيم بن سنان بن ثابت بن قره بن مروان أبو إسحق الحراني، والده العالم سنان بن ثابت بن قره، وجدّه العالم الشهير ثابت بن قره، عاش في الفترة بين (296-335هـ / 908-946م)، هو عالم رياضيات وفلك، عاش في بغداد في القرن 4 الهجري، وتوفي عن 46 عاماً.

برع بن سنان في الهندسة المستوية، وله معرفة في الطب، وقد قال معاصروه بانهم لم يروا اذكي منه، حيث ألف وهو في سن الـ 16 من العمر كتاباً في الفلك عنوانه (آلات الإظلال)، ثم جعله لطوله 3 مقالات صوّبها وهو في سن الـ 25، وأثناء ذلك كتب كتابه الثاني عن (الرخامات المسطحة)، ثم ألف كتاباً نقد فيه بطليموس في بعض المسائل الخاصة باستخراج اختلافات زحل والمريخ والمشتري. كما كتب في الهندسة المستوية 13 مقالة في الدوائر المتماسة، بيّن فيها أوجه تماس الدوائر والخطوط التي تمر على أي نقطة في هذه الدوائر، وألف كذلك مقالة مستقلة بيّن فيها الوجه في استخراج المسائل الهندسية بالتحليل والتركيب، وذكر ما يعرض للمهندسين ويقع عليهم من الخطأ نتيجة الاختصار الذي يسلكونه في التحليل إذا اختصروه، حسب ما جرت عليه عاداتهم. كما كتب مقالة طريفة في رسم القطاعات الثلاثة، وقد ضمت إحدى مقالاته مسألة هندسية من أصعب المسائل في الدوائر والخطوط والمماس والدوائر المتماسة وسواها، وسلك فيها طريق التحليل من غير أن يذكر تركيباً إلا في 3 مسائل.

ولابن سنان كتاب في حركة الشمس، ومقالات ورسائل في الفلك، ومؤلفات في الرياضيات من أهمها: (رسالة في الهندسة والنجوم)، (رسالة في المعاني المستخرجة من علم الهندسة وعلم النجوم)، (أصول الهندسة)، (مساحة القطع المكافئ).

تمارين نموذجية حول الفصل الثاني:

محاولاتك مهمة

من علماء العرب:

أبو كامل شجاع بن أسلم:

هو أبو كامل شجاع بن أسلم بن محمد بن شجاع، عاش في القرن الـ3 للهجرة، ولم تذكر عنه المصادر العربية القديمة ما يزيل الغموض المحيط بتاريخ حياته، اشتهر بالحساب والهندسة والفلك، فهو مهندس وعالم بالحساب.

جاء في كتاب (أخبار العلماء بأخبار الحكماء) أنه: (كان فاضل وقته، وعالم زمانه، وحاسب أوانه، وله تلاميذ تخرجوا بعلمه)، ذكره ابن النديم في (الفهرست)، وابن حجر في (لسان الميزان)، وهو واحد من أعظم علماء الحساب في العصر الذي تبع عصر الخوارزمي، ومن مؤلفات أبو الكامل في الرياضيات والفلك وغير ذلك: (الجمع والتفريق)، (الخطأين)، (كمال الجبر وتمامه والزيادة في أصوله)، (الكامل)، (الوصايا بالجبر والمقابلة)، (الجبر والمقابلة)، (الوصايا بالجدور)، (الشامل في الجبر والمقابلة)، (الطرائف في الحساب)، (الجمع والتفريق)، (الكفاية)، (المساحة والهندسة والطير)، (مفتاح الفلاح)، (في الخمس والمعشر)، (كتاب العصور).

ذكره ابن خلدون وكتب أنه اعتمد كثيراً على كتب الخوارزمي، واستفاد من حلوله في كثير من المسائل الجبرية، بل كانت تلك الحلول حجر الأساس، فنهج منهجه في حل المعادلات الجبرية ذات الدرجة الثانية، وأدخل تحسينات على طريقة الحل مع الإيضاح لبعض النقاط الغامضة.

أوضح أبو كامل في مؤلفاته مسائل كثيرة حلّها بطريقة مبتكرة لم يسبقه إليها أحد، وقد ذكره جورج سارتون في كتابه (المدخل إلى تاريخ العلوم)، فكتب: (إن أبا كامل أوجد الجذرين الحقيقيين للمعادلة الجبرية ذات الدرجة الثانية، في حين اهتم الخوارزمي بالجذر الحقيقي الموجب)، وطوّر أبو كامل طريقة ضرب وقسمة الكميات الجبرية، بالإضافة إلى ما قدمه في جمع وطرح الأعداد الصم، وهو الذي عكف على دراسة الأشكال الهندسية في محاولة لمعرفة مساحاتها وحجومها، وقد أولى أبو كامل موضوع النقد البناء اهتماماً كبيراً، فكتب كتاباً في ذلك أسماه (الوصايا بالجبر والمعادلة)، ويمكن اعتباره أول من شرح المعادلة التي درجتها أعلى من الثانية بوضوح تام، وكان أبو كامل ملماً بجمع القوى الجبرية بشكل جيد.

التمرين 01:

- 1) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(x+1)^2 = 9+5y$ (E) ،
 أ / إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (E) بين أن: $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 2[5]$ ،
 ب / حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) ،
 2) بين أن $PGCD(x, y)$ يقسم 8.

حل:

- (1)
 أ / ليكن $(x; y)$ حلا للمعادلة (E) لدينا $(x+1)^2 = 9+5y$ أي: $(x+1)^2 \equiv 9[5]$ و منه
 $(x+1)^2 - 9 \equiv 0[5] \Rightarrow (x+1-3)(x+1+3) = (x+1)^2 - 9 \equiv 0[5]$ أي $x+4 \equiv 0[5]$ أو $x-2 \equiv 0[5]$ و منه:
 * $x \equiv -4[5]$ و منه $x \equiv (-4+5)[5]$ أي $x \equiv 1[5]$ ،
 * أو $x \equiv 2[5]$.
 ب / مما سبق بينا أنه إذا كان $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ فإن $x \equiv 1[5]$ أو $x \equiv 2[5]$ لهذا نميز الحالتين:
 • $x \equiv 1[5]$ أي: $x = 5k + 1, k \in \mathbb{Z}$ عند التعويض في (E): $(5k+2)^2 = 9+5y$ معناه: $25k^2 + 20k + 4 = 9+5y$
 أي: $5y = 25k^2 + 20k - 5$ و منه: $y = 5k^2 + 4k - 1$ ،
 • أو $x \equiv 2[5]$ أي: $x = 5k' + 2$ عند التعويض في (E): $(5k'+3)^2 = 9+5y$ معناه $25k'^2 + 30k' + 9 = 9+5y$ أي:
 $y = 5k'^2 + 6k'$
 إذن حلول المعادلة (E) هي: $k \in \mathbb{Z}$: $\begin{cases} x = 5k + 1 \\ y = 5k^2 + 4k - 1 \end{cases}$ أو: $k' \in \mathbb{Z}$: $\begin{cases} x = 5k' + 2 \\ y = 5k'^2 + 6k' \end{cases}$

- 2) ليكن $d = PGCD(x; y)$ أي: $x = dx'$ و $y = dy'$ مع $x', y' \in \mathbb{Z}$ ، عند التعويض في المعادلة:
 $(dx'+1)^2 = 9+5dy'$ و منه: $d^2x'^2 + 2dx' + 1 = 9+5dy'$ أي: $d(dx'^2 + 2x' - 5y') = 8$ و كـ
 $d \mid 8$ فإن $(dx'^2 + 2x' - 5y') \in \mathbb{Z}$

التمرين 02:

- نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $3x - 21y = 78$ ،
 1) أ- بين أن (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$ ،
 ب- أثبت أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 5[7]$ ، استنتج حلول المعادلة (E) ،
 2) أ- ادرس ، حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمه الاقليدية للعدد 5^n على 7 ،
 ب- عين الثنائيات (x, y) من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول المعادلة (E) و تحقق $5^x + 5^y \equiv 3[7]$.

حل:

(1)

أ- لدينا: $PGCD(3; 21) = 3$ و $78 = 26 \times 3$ و هذا كاف لأن تقبل المعادلة (E) حلولاً في $\mathbb{Z}^2$ ،

ب- ليكن $(x; y)$ من $\mathbb{Z}^2$ حلاً للمعادلة معناه: $3x - 78 = 21y$ أي: $x - 26 = 7y$ ومنه: $x - 26$ من مضاعفات 7 كون $y \in \mathbb{Z}$ أي: $x \equiv 26[7]$ و $26 \equiv 5[7]$ حسب خاصية التعدي في الموافقات يكون: $x \equiv 5[7]$ أي: $x = 7k + 5, k \in \mathbb{Z}$ وعند التعويض في المعادلة نجد $7y = 7k + 5 - 26$ أي: $y = k - 3$ ومنه حلول المعادلة (E) : $(x; y) = (7k + 5; k - 3)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

(2)

أ- لدينا $5^0 = 1 \equiv 1[7]$ و $5^1 \equiv 5[7]$ و $5^2 = 25 \equiv 4[7]$ و $5^3 = 125 \equiv 6[7]$ و $5^4 = 625 \equiv 2[7]$ و $5^5 = 3125 \equiv 3[7]$ و $5^6 = 15625 \equiv 1[7]$ والدور 6،

لأجل هذا، إليك الحالات التالية:

• $5^{6k} \equiv 1[7]$ و $5^{6k+1} \equiv 5[7]$ و $5^{6k+2} \equiv 4[7]$ و $5^{6k+3} \equiv 6[7]$ و $5^{6k+4} \equiv 2[7]$ و $5^{6k+5} \equiv 3[7]$ مع $k \in \mathbb{N}$ ، إذن البواقي هي: 1، 5، 4، 6، 2، 3.

ب- لنميز الحالات التالية:

بما سبق لدينا $(x; y) = (7k + 5; k - 3)$ مع: $k \in \mathbb{N}$ ، إذن

$$5^x + 5^y = 5^{7k+5} + 5^{k-3} = 5^k \times 5^{6k+5} + 5^{k-3} \equiv (5^k \times 3 + 5^{k-3})[7]$$

إذن لنبحث عن قيم k حيث $k \geq 3$ وتحقق: $5^k \times 3 + 5^{k-3} \equiv 3[7]$ من أجل هذا نميز الحالات:

- $k = 6m$ أي: $k - 3 = 6m - 3 = 6m' + 3$ ومنه: $5^k \times 3 + 5^{k-3} \equiv 2[7]$ ،
- $k = 6m + 1$ أي: $k - 3 = 6m - 2 = 6m' + 4$ ومنه: $5^k \times 3 + 5^{k-3} \equiv 15[7]$ أي: $5^k \times 3 + 5^{k-3} \equiv 3[7]$ ،
- $k = 6m + 2$ أي: $k - 3 = 6m - 1 = 6m' + 5$ ومنه: $5^k \times 3 + 5^{k-3} \equiv 12[7]$ أي: $5^k \times 3 + 5^{k-3} \equiv 1[7]$ ،
- $k = 6m + 3$ أي: $k - 3 = 6m$ ومنه: $5^k \times 3 + 5^{k-3} \equiv 18[7]$ أي: $5^k \times 3 + 5^{k-3} \equiv 5[7]$ ،
- $k = 6m + 4$ أي: $k - 3 = 6m + 1$ ومنه: $5^k \times 3 + 5^{k-3} \equiv 4[7]$ ،
- $k = 6m + 5$ أي: $k - 3 = 6m + 2$ ومنه: $5^k \times 3 + 5^{k-3} \equiv 9[7]$ أي: $5^k \times 3 + 5^{k-3} \equiv 6[7]$ ،

مع: $m, k, m' \in \mathbb{N}$ إذن القيم المطلوبة هي: $k = 6m + 1$ مع $m \in \mathbb{N}^*$ ،وفي التالي: $(x; y) = (42m + 12; 6m - 2)$ ، $m \in \mathbb{N}^*$.

يقول الشاعر:

أبو عامر النسوي

العلم يأتي كل ذي خفيض ويأبى كل أبي
كالماء ينزل في الوها دليس يصعد في الرؤابي

التمرين 03:

n عدد طبيعي أكبر من 5،

1/ a و b عدداً طبيعيين حيث: $a = n - 2$ و $b = 2n + 3$

أ- ما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b ؟

ب- بين أن العددين a و b من مضاعفات 7 إذا و فقط إذا كان $n + 5$ مضاعفاً للعدد 7،

ج- عين قيم n التي يكون من أجلها $PGCD(a; b) = 7$ ،

2/ نعتبر العددين الطبيعيين p و q حيث:

$$p = 2n^2 - 7n - 15 \quad \text{و} \quad q = n^2 - 7n + 10$$

أ- بين أن كلا من العددين p و q يقبل القسمة على $n - 5$ ،

ب - عين تبعاً لقيم n و بدلالة n : $PGCD(p; q)$.

حل:

1/

أ- نضع $PGCD(a; b) = d$ و منه: $d | n - 2$ و $d | 2n + 3$ أي $d | (2n + 3) - 2(n - 2)$ و منه: $d | 7$

$$PGCD(a; b) \in \{1; 7\}$$

ب- لدينا: $a \equiv 0[7]$ معناه: $n \equiv 2[7]$ تكافئ $n \equiv (2 - 7)[7]$ معناه $n \equiv -5[7]$ أي: $n + 5 \equiv 0[7]$ ، وهذا إثبات للتكافؤ.

و لدينا كذلك: $b \equiv 0[7]$ يكافئ $2n \equiv -3[7]$ معناه $2n \equiv 4[7]$ ، نعلم أن باقي قسمة أي عدد طبيعي على 7 هو: 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6، و منه فالأعداد الطبيعية التي تحقق $2n \equiv 4[7]$ هي: $n \equiv 2[7]$ أي: $n \equiv -5[7]$ معناه: $n + 5 \equiv 0[7]$.

ج- $PGCD(a; b) = 7$ معناه a و b من مضاعفات 7 و حسب ما سبق $n + 5$ مضاعف للعدد 7، نجد القيم المطلوبة: $n + 5 = 7k$ ، $k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ أي: $n = 7k - 5$.

2/ أ/ عند إجراء القسمة الاقليدية نجد: من أجل كل $n \geq 5$ ،

$$\begin{array}{r|l} n^2 - 7n + 10 & n - 5 \\ \hline -(n^2 - 5n) & n - 2 \\ \hline -2n + 10 & \\ \hline -(-2n + 10) & \\ \hline 00 & \end{array} \quad \text{و} \quad \begin{array}{r|l} 2n^2 - 7n - 15 & n - 5 \\ \hline -(2n^2 - 10n) & 2n + 3 \\ \hline 3n - 15 & \\ \hline -(3n - 15) & \\ \hline 00 & \end{array}$$

ب/ مما سبق لدينا: $p = (n - 5)(2n + 3)$ و $q = (n - 5)(n - 2)$ و منه:

$$PGCD(p, q) = PGCD((n - 5)(n - 2), (n - 5)(2n + 3)) = (n - 5) \times PGCD((n - 2), (2n + 3)) = (n - 5) \times PGCD(a, b)$$

و حسب دراسة سابقة:

$$PGCD(a, b) = 7 \quad \text{معناه:} \quad n = 7k - 5, k \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad \text{و في هذه الحالة} \quad PGCD(p, q) = 7(n - 5)$$

و إذا كان $n \neq 7k - 5, k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ يكون: $PGCD(a; b) = 1$ أي: $PGCD(p, q) = n - 5$ ، $n \geq 5$.

التمرين 04:

نعتبر المعادلة ذات المجهولين الصحيحين x و y : (1) $4x - 9y = 319 \dots$ ،

(1) - تأكد أن الثنائية $(82;1)$ حل للمعادلة (1)،

- حل المعادلة (1)،

(2) عين الثنائيات $(a;b)$ الصحيحة حلول المعادلة: $4a^2 - 9b^2 = 319$ ،

(3) استنتج الثنائيات $(x_0; y_0)$ حلول المعادلة (1)، بحيث أن x_0 و y_0 مربعان تامان.

حل:

(1)

* لدينا: $4(82) - 9(1) = 319$ أي الثنائية $(82;1)$ حل للمعادلة (1).

*

لدينا: $4(82) - 9(1) = 319$ و $4x - 9y = 319 \dots (1)$ عند الطرح نجد: $4(x - 82) = 9(y - 1)$ و كون 4 و 9 أوليين فيما

بينهما يكون: $x = 9k + 82, k \in \mathbb{Z}$ و $y = 4k + 1, k \in \mathbb{Z}$.

أو:

لدينا $4x \equiv 319[9]$ أي: $4x \equiv 4[9]$ و منه: $4x = 4[9]$ و لما كان العدان 4 و 9 أوليين فيما بينهما يكون:

$x \equiv 1[9]$ حسب غوص، و منه $x = 9k_1 + 1, k_1 \in \mathbb{Z}$ عند التعويض في المعادلة نجد $4(9k_1 + 1) - 9y = 319$ و منه:

$4 \times 9k_1 + 4 - 319 = 9y$ و بالتالي: $y = 4k_1 - 35$ و منه الحلول المطلوبة: $k_1 \in \mathbb{Z}$ ، $(x; y) = (9k_1 + 1; 4k_1 - 35)$.

(2)

لنبحث على الثنائيات $(a; b)$ من $\mathbb{N}^2$:

لدينا: $4a^2 - 9b^2 = (2a - 3b)(2a + 3b) = 319 = 1 \times 319 = 11 \times 29$ و منه الحالات التالية:

$$\bullet \begin{cases} 2a - 3b = 1 \\ 2a + 3b = 319 \end{cases} \text{ عند الجمع نجد: } 4a = 320 \text{ و منه: } a = 80 \text{ و عند التعويض نجد } 3b = 160 - 1 = 159 \text{ أي: } b = 53,$$

$$\bullet \begin{cases} 2a - 3b = 11 \\ 2a + 3b = 29 \end{cases} \text{ عند الجمع نجد: } 4a = 40 \text{ و منه: } a = 10 \text{ و عند التعويض نجد } 3b = 40 - 11 = 29 \text{ و منه: } b = 3,$$

أي الثنائيات المطلوبة هي: $\{(80, 53), (-80, 53), (80, -53), (-80, -53), (10, 3), (-10, 3), (10, -3), (-10, -3)\}$.

(3)

من (2) لدينا: $(x_0, y_0) \in \{(6400; 2809), (100; 9)\}$.

يقول الشاعر:

هذب النفس بالعلوم لترقى وذو الكل فهي لكل بيت
إنما النفس كالزجاجة والعلم سراج وحكمة الله زيت
فإذا أشرقت فإنك حي وإذا أظلمت فإنك ميت

ابن سينا

التمرين 05:

x عدد طبيعي أكبر تماما من 1 و y عدد طبيعي.

A عدد طبيعي يكتب في نظام التعداد ذي الأساس x بالشكل: $A = \overline{5566}$,

(1) أ/ أنشر العبارة $(5x^2 + 6)(x + 1)$ ثم أوجد علاقة تربط بين x, y إذا علمت أن $A = (5x^2 + 6)(2 + 2y)$,

ب/ احسب y, x إذا علمت أن x عدد أولي أصغر من 12، ثم أكتب تبعا لذلك العدد A في نظام التعداد العشري،

(2) أ/ عين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 584

ب/ عين العددين الطبيعيين a و b حيث: $a > b$ التي تحقق: $\begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases}$

حل:

$A = \overline{5566}$ في النظام ذي الأساس x ، أي: $A = 5x^3 + 5x^2 + 6x + 6$

(1) أ/ لدينا: $(5x^2 + 6)(x + 1) = 5x^3 + 5x^2 + 6x + 6$ ولدينا: $A = (5x^2 + 6)(2 + 2y)$ أي:

$A = (5x^2 + 6)(x + 1) = (5x^2 + 6)(2 + 2y)$ ومنه: $x + 1 = 2 + 2y$ وبالتالي: $2y - x + 1 = 0$ أي $x = 2y + 1$

ب/ x عدد أولي أصغر من 12 أي: $2y + 1 = 2$ أو $2y + 1 = 3$ أو $2y + 1 = 5$ أو $2y + 1 = 7$ أو $2y + 1 = 11$ من

المعادلات السابقة من قبل حلولها في $\mathbb{N}$ أي: $y = 1$ و $x = 3$ أو $y = 2$ و $x = 5$ أو $y = 3$ و $x = 7$ أو $y = 5$ و $x = 11$:

نميز الحالات:

$x = 2^*$ يكون: $A = 78$ ، $x = 3^*$ يكون: $A = 204$ ، $x = 5^*$ يكون: $A = 786$ ، $x = 7^*$ يكون: $A = 2008$ ،

$x = 11^*$ يكون: $A = 7332$

(2) أ/ لتحلل العدد 584 إلى جداء عوامل أولية:

$$\begin{array}{r|l} 584 & 2 \\ 292 & 2 \\ 146 & 2 \longrightarrow 584 = 2^3 \times 73 \\ 73 & 73 \\ 1 & \end{array}$$

و منه الأعداد الطبيعية التي مربعاتها قاسمة لـ 584 هي: 1 و 2،

ب/ لدينا: $\begin{cases} a + b = 32 \\ a^2 + b^2 = 584 \end{cases}$ ليكن $PGCD(a, b) = d$ حيث $d \neq 1$ و منه يوجد a', b' من $\mathbb{Z}$ حيث: $a = da'$ و $b = db'$

مع: $PGCD(a', b') = 1$ و منه: $\begin{cases} d(a' + b') = 32 \\ d^2(a'^2 + b'^2) = 584 \end{cases}$ إذن: $d | 32$ و $d^2 | 584$ و بما سبق نجد: $d = 2$ فنحصل على الجملة:

أي: $\begin{cases} a' + b' = 16 \\ a'^2 + b'^2 = 146 \end{cases}$ أي: $7 + 9 = 10 + 6 = 11 + 5 = 12 + 4 = 13 + 3 = 14 + 2 = 15 + 1 = 16 + 0 = a' + b'$ و بدراسة كل حالة

على حدة نجد القيمتين $(a'; b') = (11; 5)$ و منه: $(a; b) = (22; 10)$.

التمرين 06:

1. a, b, c, d أعداد طبيعية غير معدومة وتحقق: $a = bc + d$

أثبت أن: $PGCD(a; b) = PGCD(b; d)$ ،

2. a, b, n أعداد طبيعية حيث: $a = 3n^3 + 7n^2 + 9n + 12$ و $b = 3n^2 + n + 6$

• بين أن: $PGCD(a; b) = PGCD(n; 6)$

عين تبعا لقيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين a, b .

حل:

1. لدينا $a = bc + d$ و:

* ليكن D قاسما مشتركا بين a, b من العلاقة السابقة يتبين أن D قاسم مشترك بين b, d ، وبالعكس إذا كان D قاسما مشتركا بين b, d فهو قاسم مشترك بين a, b وهذا اعتمادا على العلاقة السابقة دوماً، إذن وجدنا أن مجموعة القواسم المشتركة بين a, b هي نفسها مجموعة القواسم المشتركة بين b, d ، وبالتالي فلها نفس العنصر الأكبر وهذا كاف لكتابة: $PGCD(a; b) = PGCD(b; d)$ ،

2. لنجر القسمة الاقليدية للعدد a على b :

$$\begin{array}{r|l} 3n^3 + 7n^2 + 9n + 12 & 3n^2 + n + 6 \\ - (3n^3 + n^2 + 6n) & n + 2 \\ \hline 6n^2 + 3n + 12 & \\ - (6n^2 + 2n + 12) & \\ \hline n & \end{array}$$

أي: $3n^3 + 7n^2 + 9n + 12 = (3n^2 + n + 6) \times (n + 2) + n$ و من السؤال السابق لدينا: $PGCD(a; b) = PGCD(b; n)$

و لدينا: $3n^2 + n + 6 = n(3n + 1) + 6$ ومنه: $PGCD(a; b) = PGCD(n; 6)$ و . ه . م

• و من المساواة المحصل عليها أخيرا نميز الحالتين:

/* $n = 6k, k \in \mathbb{N}$ و بالتالي: $PGCD(a; b) = PGCD(n; 6) = PGCD(6k; 6) = 6PGCD(k; 1) = 6 \times 1 = 6$ ،

/* $n = 3(2\alpha + 1), \alpha \in \mathbb{N}$ أي: $n = 6\alpha + 3$ و منه:

$$PGCD(a; b) = PGCD(n; 6) = PGCD(3(2\alpha + 1); 6) = 3PGCD(2\alpha + 1; 2) = 3 \times 1 = 3$$

/* n من مضاعفات 2 و ليس من مضاعفات 3 أي: $n = 2(3\beta + 1)$ أو $n = 2(3\beta + 2)$ ، $\beta \in \mathbb{N}$

يمكن ملاحظة أن n ليس من مضاعفات 6، لأن حدوث هذا الأخير يلزم n أن يكون من مضاعفات 3،

$$PGCD(a; b) = PGCD(n; 6) = \begin{cases} PGCD(2(3\beta + 1); 6) = 2PGCD(3\beta + 1; 3) = 2 \\ PGCD(2(3\beta + 2); 6) = 2PGCD(3\beta + 2; 3) = 2 \end{cases}$$

/* n عدد فردي و ليس من مضاعفات 3 أي:

$$PGCD(a; b) = PGCD(n; 6) = 1$$

التمرين 07:

- (1) حل المعادلة التفاضلية: $y' = (\ln 2)y$ ،
 (2) نسمي f الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الذي يحقق $f(0) = 1$ ، عين عبارة $f(x)$ ،
 (3) n عدد طبيعي،
 أ- ادرس بواقي القسمة الاقليدية على 7 للعدد 2^n ،
 ب- استنتج باقي القسمة الاقليدية على 7 للعدد $4 - (2009)$ ،
 (4) أ) احسب، بدلالة n المجموع: $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n)$ ،
 ب) عين قيم العدد الطبيعي n التي يقبل من أجلها S_n القسمة على 7.

حل:

- (1) $y(x) = C e^{(\ln 2)x} = C 2^x$ مع $x \in \mathbb{R}$ ،
 (2) لدينا: $f(0) = 1$ أي: $C = 1$ ومنه: $f(x) = 2^x$ ،
 (3) أ) $2^0 = 1 \equiv 1[7]$ و $2^1 = 2 \equiv 2[7]$ و $2^2 = 4 \equiv 4[7]$ و $2^3 = 8 \equiv 1[7]$ ومنه الحالات:
 • إذا كان $n = 3k$, $k \in \mathbb{N}$ يكون: $2^{3k} \equiv 1[7]$ ،
 • إذا كان $n = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ يكون: $2^{3k+1} \equiv 2[7]$ ،
 • إذا كان $n = 3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$ يكون: $2^{3k+2} \equiv 4[7]$ و بالتالي البواقي هي: $\{1; 2; 4\}$
 ب / لدينا: $4 - (2009) = 2^{2009} - 2^2 = 2^{669 \times 3 + 2} - 2^2 \equiv 0[7]$ و بالتالي الباقي معدوم،
 (4) أ) $S_n = f(0) + f(1) + \dots + f(n) = 1 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ ،
 ب) لدينا: $2^{n+1} - 1 \equiv 0[7]$ معناه: $2^{n+1} \equiv 1[7]$ أي: $n = 3k - 1$, $k \in \mathbb{N}^*$.

التمرين 08:

1. نعتبر المعادلة: (1) $7x + 65y = 2009 \dots$ ، حيث: x, y عدنان صحيحان،
 أ) بين أنه إذا كانت الثنائية (x, y) حلا للمعادلة (1) فإن y مضاعف للعدد 7،
 ب) حل المعادلة (1)،
 2. ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 9،
 3. عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يقبل العدد $2^{6n} + 3n + 2$ القسمة على 9،
 4. نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 2^{6n} - 1$ ،
 أ) تحقق أن u_n يقبل القسمة على 9،
 ب) حل المعادلة: (2) $(7u_1)x + (u_2)y = 126567 \dots$ ، حيث: x, y عدنان صحيحان،
 ج) عين الثنائية $(x_0; y_0)$ حل (2)، حيث x_0 و y_0 عدنان طبيعيين، مع $y_0 \geq 25$.

حل:

- أ) (x, y) حل للمعادلة: (1) $7x + 65y = 2009 \dots$ معناه: $7x = 2009 - 65y = 7(287 - x)$ وكون $287 - x$ من $\mathbb{Z}$ ، يكون $(65y) \equiv 0[7]$ ونعلم أن 7 و 65 أوليان فيما بينهما إذن حسب غوص: $7|y$ أي: y من مضاعفات 7،

ب) مما سبق يمكن كتابة: $y = 7k$, $k \in \mathbb{Z}$ عند التعويض في المعادلة نجد $7x = 2009 - 65 \times 7k$ أي:

$$(x; y) = (287 - 65k; 7k) \quad , k \in \mathbb{Z} \text{ أي الحلول المطلوبة: } , k \in \mathbb{Z}$$

$$2. \quad 2^0 = 1 \equiv 1[9] \text{ و } 2^1 \equiv 2[9] \text{ و } 2^2 \equiv 4[9] \text{ و } 2^3 \equiv 8[9] \text{ و } 2^4 = 16 \equiv 7[9] \text{ و } 2^5 = 32 \equiv 5[9] \text{ و } 2^6 = 64 \equiv 1[9]$$

أي الدور 6، إذن الحالات التالية:

$$2^{6k} \equiv 1[9] \text{ يكون: } n = 6k, k \in \mathbb{N}$$

$$2^{6k+1} \equiv 2[9] \text{ يكون: } n = 6k + 1, k \in \mathbb{N}$$

$$2^{6k+2} \equiv 4[9] \text{ يكون: } n = 6k + 2, k \in \mathbb{N}$$

$$2^{6k+3} \equiv 8[9] \text{ يكون: } n = 6k + 3, k \in \mathbb{N}$$

$$2^{6k+4} \equiv 7[9] \text{ يكون: } n = 6k + 4, k \in \mathbb{N}$$

$$2^{6k+5} \equiv 5[9] \text{ يكون: } n = 6k + 5, k \in \mathbb{N} \text{ و بالتالي البواقي المطلوبة هي } \{1; 2; 4; 8; 7; 5\}$$

3. لدينا التكافؤات $2^{6n} + 3n + 2 \equiv 0[9]$ معناه $3n + 3 \equiv 0[9]$ أي $3n \equiv -3[9]$ يكافئ $3n = 9k - 3$, $k \in \mathbb{Z}$ و منه:

$$n \equiv 2[3] \text{ أي: } n = 3k - 1, k \in \mathbb{N}^*$$

$$4. \text{ نضع من أجل كل عدد طبيعي } n, u_n = 2^{6n} - 1$$

$$\text{أ- لدينا: } 2^{6n} - 1 \equiv (1-1)[9] \text{ أي: } u_n \equiv 0[9] \text{ من أجل كل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

ب- لدينا: $(2) \cdot 126567 \dots + (u_2)y + (7u_1)x = 126567$ و $u_1 = 63$ و $u_2 = 4095$ تصبح المعادلة (2) على النحو:

$$7(63)x + (4095)y = 126567 \text{ أي: } 7x + 65y = 2009 \text{ و قد قمنا بإيجاد حلول هذه المعادلة في السؤال الأول أي:}$$

$$(x; y) = (287 - 65k; 7k) \quad , k \in \mathbb{Z}$$

ج) تعيين الثنائيات $(x_0; y_0)$ حيث: $y_0 \geq 25$ أي: $\begin{cases} 7k \geq 25 \\ 287 - 65k \geq 0 \end{cases} \rightarrow k = 4$ أي الثنائية المطلوبة هي: $\{(27; 28)\}$.

التمرين 09:

(1) نعتبر المعادلة $(E): 2013x - 1962y = 54$ حيث: x و y عدنان صحيحان،

أ) احسب $PGCD(2013; 1962)$ ،

ب) استنتج أن المعادلة (E) تقبل حلولاً،

ج) بين أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) فإن: $x \equiv 0[6]$ ،

د) استنتج حلاً خاصاً $(x_0; y_0)$ حيث: $74 < x_0 < 80$ ثم حل المعادلة (E) ،

(2) نرمز بالرمز d إلى القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث: $(x; y)$ حل للمعادلة (E) ،

أ) ما هي القيم الممكنة للعدد d ،

ب) عين قيم العددين الطبيعيين a و b حيث: $671a - 654b = 18$ و $PGCD(a, b) = 18$.

حل:

1/ لدينا: $(E): 2013x - 1962y = 54$ مع: $x, y \in \mathbb{Z}$ ،

أ/ لنستعمل خوارزمية إقليدس لنعين $PGCD(2013, 1962)$:

$$2013 = 1962(1) + 51$$

$$1962 = 51(38) + 24$$

$$51 = 24(2) + 3$$

$$24 = 3(8)$$

$$PGCD(2013, 1962) = 3 \text{ أي}$$

ب/ لدينا $54 = 18 \times 3$ أي $PGCD(2013; 1962) \mid 54$ و بالتالي المعادلة تقبل حلولاً في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ،

ج/ لنفرض أن الثنائية $(x; y)$ حل للمعادلة (E) أي $k \in \mathbb{Z}$ ، $671x = 654y + 18 = 6(109y + 3) = 6k$ ، $k \in \mathbb{Z}$ ، معناه $671x \equiv 0[6]$ أي $5x \equiv 0[6]$ وكون أن 6 و 5 أوليان فيما بينهما فحسب غوص يكون $x \equiv 0[6]$ ،

د/ استنتاج حل خاص $(x_0; y_0)$ حيث: $74 < x_0 < 80$ أي: $74 < 6k < 80$ معناه $\left(\frac{74}{6} \approx 12.33\right) < k < \left(\frac{80}{6} \approx 13.33\right)$

أي $k = 13$ و منه $x_0 = 78$ بالتعويض في المعادلة نجد: $y_0 = 80$ أي الحل الخاص المطلوب: $(x_0; y_0) = (78; 80)$ ،

حل المعادلة (E) : $\begin{cases} 2013x - 1962y = 54 \\ 2013(78) - 1962(80) = 54 \end{cases}$ بالطرح نجد: $671(x - 78) = 654(y - 80)$ وكون العددين 671 و 654

أوليين فيما بينهما فحسب غوص نستنتج أن $x = 654k + 78$ و $y = 671k + 80$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ،

2/ لدينا $PGCD(x; y) = d$

أ/ نستنتج $\begin{cases} d \mid x \\ d \mid y \end{cases}$ أي $d \mid (671x - 654y)$ أي: $d \mid 18$ و منه فالقيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر هي: $d \in \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$

ب/ تعيين العددين الطبيعيين a, b :

$PGCD(a; b) = 18$ و $671a - 654b = 18$ يوجد a', b' من $\mathbb{Z}$ حيث: $\begin{cases} a = 18a' \\ b = 18b' \end{cases}$ و $PGCD(a'; b') = 1$

$$671 = 654(1) + 17$$

بالتعويض نجد: $671a' - 654b' = 1$ لنبحث عن حل خاص للمعادلة السابقة: $654 = 17(38) + 8$ و منه:

$$17 = 8(2) + 1$$

$$1 = 17 - 8(2) = 17 - 2(654 - 17(38)) = 17(77) - 654(2) = 77(671 - 654) - 654(2) = 671(77) - 654(79)$$

و بالتالي فالحل الخاص: $(a'_0; b'_0) = (77; 79)$ و منه: $\begin{cases} 671a' - 654b' = 1 \\ 671(77) - 654(79) = 1 \end{cases}$ بالجمع $671(a' - 77) = 654(b' - 79)$

و حسب غوص نستنتج أن:

$$a' = 654k' + 77 \rightarrow a = 11772k' + 1386$$

$$b' = 671k' + 79 \rightarrow b = 12078k' + 1422 \text{ حيث: } k' \in \mathbb{N}$$

يقول الشاعر:

خيرُ المحادثِ والجليلِ كتابُ
تخلوبه إنْ مَلَكَ الأصحابُ
لا مفشياً سرّاً إذا استودعته
وتنال منه حكمةٌ وصوابُ

أبو الطيب المتنبي

التمرين 10:

n و p عدنان طبيعيان.

(1) ادرس، حسب قيم n بواقي القسمة الاقليدية على 16 للعدد 5^n ،

(2) نضع: $C_n = 16n + 9$ و $D_p = 5^p$ ،

أ/ بين أنه إذا كان $p = 4k + 2$ حيث: k عدد طبيعي، فإنه يوجد عدد طبيعي n يحقق $C_n = D_p$ ،

ب/ عين n من أجل $p = 6$ ،

(3) f هي الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $f(x) = 5^{4x+2} - 9$ ،

ادرس تغيرات الدالة f ، ثم استنتج إشارة $f(x)$ ،

(4) $(u_n)_n$ المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 5^4 \left(u_n + \frac{9}{16} \right) - \frac{9}{16}$ ،

أ) برهن بالتراجع "لاحظ درس المتتاليات الجزء الثاني" أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = \frac{5^{4n+2} - 9}{16}$ ،

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن u_n عدد طبيعي،

(5) استنتج اتجاه تغير المتتالية $(u_n)_n$.

حل:

$n = 0$ / 1 يكون $5^0 \equiv 1[16]$

$n = 1$ يكون $5^1 \equiv 5[16]$

$n = 2$ يكون $5^2 \equiv 9[16]$

$n = 3$ يكون $5^3 \equiv 13[16]$

$n = 4$ يكون $5^4 \equiv 1[16]$ و منه الدور 4، أي:

* من أجل $n = 4k$ يكون $5^{4k} \equiv 1[16]$ ،

* من أجل $n = 4k + 1$ يكون $5^{4k+1} \equiv 5[16]$ ،

* من أجل $n = 4k + 2$ يكون $5^{4k+2} \equiv 9[16]$ ،

* من أجل $n = 4k + 3$ يكون $5^{4k+3} \equiv 13[16]$ ، حيث $k \in \mathbb{N}$.

و منه بواقي قسمة 5^n على 16 هي: $\{1; 5; 9; 13\}$.

2/ لدينا $C_n = 16n + 9$ و $D_p = 5^p$ ،

أ/ من أجل $p = 4k + 2$ يكون $D_p = 5^{4k+2} \equiv 9[16]$ و بالتالي يوجد n من $\mathbb{N}$ "القسمة الاقليدية" حيث:

$$D_p = 16n + 9 = C_n$$

ب/ لدينا $p = 6 = 4(1) + 2$ يكون $D_p = 5^6 = 976(16) + 9 = C_{976}$ و منه $n = 976$ ،

3/ لدينا $f(x) = 5^{4x+2} - 9$ و $D_f = [0; +\infty[$

دراسة تغيرات الدالة f :

النهايات: * $f(0) = 16$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (5^{4x+2} - 9) = +\infty$

المشتقة:

من أجل كل عدد حقيقي x من $[0; +\infty[$: $f'(x) = (5^{4x+2} - 9)' = (e^{(4x+2)\ln 5})' = 4\ln 5 (5^{4x+2}) > 0$

و منه جدول التغيرات:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	16	$+\infty$

من جدول التغيرات نستنتج:

x	0	$+\infty$
$f(x)$		+

$$\text{لدينا } \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 5^4 \left(u_n + \frac{9}{16} \right) - \frac{9}{16}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ/ من أجل $n = 0$ يكون $u_0 = \frac{5^2 - 9}{16} = \frac{16}{16} = 1$ الخاصية محققة،

* لنفرض صحة الخاصية في الرتبة m أي: $u_m = \frac{5^{4m+2} - 9}{16}$ (فرض التراجع) ولنبرهن صحتها في الرتبة $m+1$ أي:

$$\text{هل } u_{m+1} = \frac{5^{4m+6} - 9}{16} ?$$

$$\text{لدينا } u_{m+1} = 5^4 \left(u_m + \frac{9}{16} \right) - \frac{9}{16} = 5^4 \left(\frac{5^{4m+2} - 9}{16} + \frac{9}{16} \right) - \frac{9}{16} = \frac{5^{4m+6} - 9}{16}$$

فرض التراجع

* الخاصية محققة من أجل كل عدد طبيعي،

ب/ ليكن $n \in \mathbb{N}$ لدينا $u_n = \frac{5^{4n+2} - 9}{16}$ وحسب السؤال 2/أ يوجد $q \in \mathbb{N}$ حيث $5^{4n+2} = 16q + 9$ بالتعويض نجد:

و $u_n = \frac{16q + 9 - 9}{16} = q \in \mathbb{N}$ ولما كان n كيفيا من مجموعة الأعداد الطبيعية فإن المساواة محققة من أجل كل عدد طبيعي،
5/ ليكن $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5^{4m+6} - 9}{16} - \frac{5^{4m+2} - 9}{16} = 5^{4m+2} \left(\frac{5^4 - 1}{16} \right) > 0$$

أو:

وجدنا سابقا أن $u_n = q \in \mathbb{N}$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، مع ملاحظة تعلق العدد الطبيعي n بـ q وكلما كان n كبيرا كان q كبيرا كذلك،
لأن: $5^{4n+2} = 16q + 9$

أي نستنتج من أجل كل $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ مع $n_1 \geq n_2$ يوجد $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ حيث $u_{n_1} = q_1, u_{n_2} = q_2$ و منه:

$$q_1 = \frac{16q_1 + 9 - 9}{16} = u_{n_1} \leq u_{n_2} = \frac{16q_2 + 9 - 9}{16} = q_2 \quad \text{أي: } 16q_1 + 9 = 5^{4n_1+2} \geq 5^{4n_2+2} = 16q_2 + 9$$

و بالتالي فالمتتالية $(u_n)_n$ متزايدة تماما.

أو:

كون الدالة f متزايدة تماما نستنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متزايدة تماما كذلك، لأن: $u_n = \frac{f(n)}{16}$

التمرين 11:

- 1/ عين العدد الطبيعي y_0 الذي يحقق: $51 \times 39 - 41 \times y_0 = 21$ ،
 2/ حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة: $51x - 41y = 21$ ،
 3/ n عدد طبيعي عند قسمته على 51 يكون الباقي 14 و عند قسمته على 41 يكون الباقي 35 ،
 عين أصغر قيمة للعدد a .

حل:

- 1/ تعيين العدد الطبيعي الذي يحقق: $51 \times 39 - 41 \times y_0 = 21$ لدينا $41 \times y_0 = 51 \times 39 - 21$ أي: $y_0 = 48$ ،
 2/ حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة: $51x - 41y = 21$:
 لدينا $\begin{cases} 51x - 41y = 21 \\ 51(39) - 41(48) = 21 \end{cases}$ بالطرح نجد: $\begin{cases} 51(x - 39) = 41(y - 48) \\ PGCD(51, 41) = 1 \end{cases}$ أي الحلول المطلوبة هي: $\begin{cases} x = 41k + 39 \\ y = 51k + 48 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$
 3/ لدينا: $n \in \mathbb{N}$ و $n = 51m + 14$ و $n = 41m' + 35$ يمكن تشكيل المعادلة $51m - 41m' = 21$ التي وجدنا حلولها سابقا
 أي: $\begin{cases} m = 41k + 39 \\ m' = 51k + 48 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ مع العلم أن m و m' من $\mathbb{N}$ ،
 و من معطيات التمرين يمكن وضع التكافؤ: n أصغر عدد طبيعي معناه m و m' أصغر ما يمكن أي: $(m, m') = (39, 48)$ و منه:
 $n = 2003$.

التمرين 12:

- 1/ ليكن a, b عددين طبيعيين غير معدومين حيث a^2 أولي مع b ،
 * أثبت أن a أولي مع b ،
 * عين الزوج (a, b) بحيث: $11a^2 - 49b = 0$ ،
 2/ تعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة: $26x - 17y = 5 \dots (*)$ ،
 * عين الزوج الصحيح (x_0, y_0) حلا للمعادلة $(*)$ بحيث: $x_0 \times y_0 = 77$ ،
 * إذا كان (x, y) حلا للمعادلة $(*)$ فما هي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين x^2 و y^2 ،
 3/ n عدد طبيعي يتكون في نفس الوقت من مجموع سبعة أعداد طبيعية متتالية و مجموع أحد عشر عددا طبيعيا متتالية ،
 عين أصغر قيمة للعدد n .

حل:

- 1/ $a, b \in \mathbb{N}^*$ و a^2 أولي مع b
 * طريقة أولى:
 ليكن d قاسما مشتركا بين a و b معناه $d|a$ و $d|b$ أي $d|a^2$ و $d|b$ و منه $d|PGCD(a^2, b)$ و منه $d|1$ إذن $d=1$ أي a و b أوليان فيما بينهما ،
 * طريقة ثانية:
 لدينا a^2 أولي مع b معناه يوجد $u, v \in \mathbb{Z}$ حيث $a^2(u) + b(v) = 1$ معناه $a(au) + b(v) = 1$ أي a أولي مع b ،
 حسب بيزو ،

* لدينا $11a^2 - 49b = 0$ معناه $11a^2 = 49b \dots (1)$ و منه $PGCD(a^2, b) = 1$ حسب غوص يكون $b | 11$ أي $b \in \{1, 11\}$ فمن أجل:

** $b = 1$ نجد أن المعادلة ذات المجهول a : $11a^2 = 49$ لا تقبل حلول في مجموعة الأعداد الطبيعية،

** $b = 11$ نجد بالتعويض في (1) $a^2 = 49$ أي: $a = 7$ ،

أي الثنائية المطلوبة هي $(a, b) = (7, 11)$ ،

2/ نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة: $(*)$ $26x - 17y = 5$:

* لدينا $x_0 \times y_0 = 77 = 1 \times 77 = 7 \times 11 = 11 \times 7 = 77 \times 1 = (-1) \times (-7) = (-7) \times (-11) = (-11) \times (-7) = (-77) \times (-1)$ ولأجل هذا نميز الحالات:

** $(x_0, y_0) = (1, 77)$ بالتعويض في المعادلة $(*)$ نجد: $26(1) - 17(77) = -1283 \neq 5$ الثنائية مرفوضة،

** $(x_0, y_0) = (7, 11)$ بالتعويض في المعادلة $(*)$ نجد: $26(7) - 17(11) = -5 \neq 5$ الثنائية مرفوضة،

** $(x_0, y_0) = (11, 7)$ بالتعويض في المعادلة $(*)$ نجد: $26(11) - 17(7) = 167 \neq 5$ الثنائية مرفوضة،

** $(x_0, y_0) = (77, 1)$ بالتعويض في المعادلة $(*)$ نجد: $26(77) - 17(1) = 1985 \neq 5$ الثنائية مرفوضة،

يمكن الاكتفاء بهاته الحالات لمعرفة أن الثنائية المطلوبة هي: $(x_0, y_0) = (-7, -11)$ ،

* لنفرض أن الثنائية (x, y) حل المعادلة $(*)$ أي: $26x - 17y = 5$ يكون: $d | (26x - 17y) \rightarrow d | 5$ أي $d | 5$

و بالتالي: $PGCD(x, y) \in \{1, 5\}$ لدينا الحالتان:

** إذا كان $PGCD(x, y) = 1$ معناه $PGCD(x^2, y^2) = 1$ ،

** إذا كان $PGCD(x, y) = 5$ توجد ثنائية صحيحة حيث: $\begin{cases} x = 5x' \\ y = 5y' \\ PGCD(x', y') = 1 \end{cases}$

معناه $PGCD(x^2, y^2) = PGCD(25x'^2, 25y'^2) = 25PGCD(x'^2, y'^2) = 25$

3/ ليكن α و β عددين طبيعيين، لدينا الجملة:

$$\begin{cases} n = \alpha + (\alpha + 1) + (\alpha + 2) + (\alpha + 3) + (\alpha + 4) + (\alpha + 5) + (\alpha + 6) \\ n = \beta + (\beta + 1) + (\beta + 2) + (\beta + 3) + (\beta + 4) + (\beta + 5) + (\beta + 6) + (\beta + 7) + (\beta + 8) + (\beta + 9) + (\beta + 10) \end{cases}$$

أي الجملة: $\begin{cases} n = 7\alpha + 21 = 7(\alpha + 3) \\ n = 11\beta + 55 = 11(\beta + 5) \end{cases}$ و منه: $\begin{cases} 11(\beta + 5) = 7(\alpha + 3) \\ PGCD(11, 7) = 1 \end{cases}$ معناه $\alpha = 11k - 3$ و $\beta = 7k - 5$ مع $k \in \mathbb{Z}^*$

و بالتعويض نجد: $n = 77k$ ، و بالتالي أصغر عدد هو $n = 77$.

التمرين 13:

1/ حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة: $(1) \dots 3x - 2y = 1$ 2/ n عدد طبيعي غير معدوم،أ/ بين أن الزوج $(14n+3, 21n+4)$ حل للمعادلة (1)،ب/ استنتج أن العددين $21n+4, 14n+3$ أوليان فيما بينهما،3/ d هو القاسم المشترك الأكبر للعددين: $2n+1$ و $21n+4$ ،أ/ يبين أن $d=1$ أو $d=13$ ،ب/ بين أن $n \equiv 6[13]$ معناه $d=13$ ،4/ نضع $a = 21n^2 - 17n - 4$ و $b = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$ حيث: n عدد طبيعي مع $n \geq 2$ ،أ/ بين أن العددين a, b قابلان للقسمة على $n-1$ ،ب/ حدد حسب قيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين a, b .

حل:

1/ حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة: $(1) \dots 3x - 2y = 1$ يمكن ملاحظة أن الثنائية $(1,1)$ حل خاص للمعادلة (1)، أي الجملة $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 3(1) - 2(1) = 1 \end{cases}$ بالطرح نجد: $\begin{cases} 3(x-1) = 2(y-1) \\ PGCD(3,2)=1 \end{cases}$ و حسب غوص نجد الحلول المطلوبة: $(x, y) = (2k+1, 3k+1), k \in \mathbb{Z}$ ،2/ $n \in \mathbb{N}^*$:أ/ بالتعويض في المعادلة (1) الثنائية $(14n+3, 21n+4)$ نجد:ب/ من أ/ و حسب بيزو فالعددان الطبيعيان $(14n+3, 21n+4)$ أوليان فيما بينهما،3/ لدينا $PGCD(21n+4, 2n+1) = d$ أي:أ/ $d \mid (42n+21) - (42n+8) = 13$ $\rightarrow d \mid (2n+1) \rightarrow d \mid (42n+21)$ و منه $d \mid 13$ أي: $d \in \{1, 13\}$ ب/ لدينا $21n+4 = 10(2n+1) + (n-6)$ $2n+1 = 2(n-6) + 13$ نستنتج أن:

$$PGCD(21n+4, 2n+1) = PGCD(2n+1, n-6) = PGCD(n-6, 13)$$

و بالتالي: $PGCD(21n+4, 2n+1) = 13$ معناه $PGCD(n-6, 13) = 13$ أي $n-6 = 13k, k \in \mathbb{N}$ و منه:

$$n \equiv 6[13]$$

4/ لدينا: $a = 21n^2 - 17n - 4$ و $b = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$ حيث: n عدد طبيعي مع $n \geq 2$

أ/ باستعمال القسمة الاقليدية مثلاً نجد المطلوب:

$$\begin{aligned} a &= (n-1)(21n+4) \\ b &= (n-1)(28n^2+20n+3) \end{aligned} \quad \text{لأن:}$$

من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ،

$$\begin{array}{r|l}
 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3 & n-1 \\
 \hline
 -(28n^3 - 28n^2) & 28n^2 + 20n + 3 \\
 \hline
 20n^2 - 17n - 3 & \\
 -(20n^2 - 20n) & \\
 \hline
 3n - 3 & \\
 -(3n - 3) & \\
 \hline
 00 &
 \end{array}
 \quad , \quad
 \begin{array}{r|l}
 21n^2 - 17n - 4 & n-1 \\
 \hline
 -(21n^2 - 21n) & 21n + 4 \\
 \hline
 4n - 4 & \\
 -(4n - 4) & \\
 \hline
 00 &
 \end{array}$$

ب / من التحليلين السابقين أمكن كتابة:

$$PGCD(a, b) = PGCD((n-1)(21n+4), (n-1)(28n^2+20n+3)) = (n-1)PGCD((21n+4), (28n^2+20n+3))$$

و من جهة أخرى يمكن ملاحظة أن $28n^2+20n+3 = (2n+1)(14n+3)$ ، و مما سبق لدينا $21n+4$ ، $14n+3$

$$PGCD(a, b) = (n-1)PGCD(21n+4, 2n+1)$$

و من 3 / ب / نستنتج الحالتين:

$$* [13] n \equiv 6 \text{ يكون: } PGCD(21n+4, 2n+1) = 13 \text{ أي: } PGCD(a, b) = 13(n-1)$$

$$* n \neq 13k + 6 \text{ مع } k \in \mathbb{N} \text{ يكون } PGCD(21n+4, 2n+1) = 1 \text{ أي: } PGCD(a, b) = n-1$$

التمرين 14:

n عدد طبيعي، ليكن العددين α و β حيث: $\alpha = n^2 + n$ و $\beta = n + 2$ ،

$$1 / \text{ برهن أن: } PGCD(\alpha, \beta) = PGCD(\beta, n)$$

استنتج القيم الممكنة للعدد $PGCD(\alpha, \beta)$ ،

2 / a, b عددين طبيعيين مكتوبان في نظام التعداد ذي الأساس n ،

$$a = \overline{3520} \text{ و } b = \overline{384}$$

أ / برهن أن العدد $3n+2$ هو قاسم مشترك للعددين a, b ،

ب / استنتج تبعاً لقيم n أن: $PGCD(a, b)$ هو $3n+2$ أو $2(3n+2)$ ،

ج / عيّن α و β إذا علمت أن $PGCD(a, b) = 41$.

حل:

n عدد طبيعي، ليكن العددين α و β حيث: $\alpha = n^2 + n$ و $\beta = n + 2$ ،

$$1 / \text{ لدينا: } \alpha = n^2 + n = n(n+2) - n \text{ و منه } PGCD(\alpha, \beta) = PGCD(\beta, -n) = PGCD(\beta, n)$$

ولدينا كذلك $\beta = n \times (1) + 2$ أي: $PGCD(\alpha, \beta) = PGCD(n, 2)$ لأجل هذا نميز الحالتين:

$$** n \text{ زوجي } PGCD(\alpha, \beta) = 2$$

$$** n \text{ فردي } PGCD(\alpha, \beta) = 1$$

2 / لدينا a, b عددين طبيعيين مكتوبان في نظام التعداد ذي الأساس n أي:

$$a = \overline{3520} = 2n + 5n^2 + 3n^3 \text{ و } b = \overline{384} = 4 + 8n + 3n^2$$

أ / باستعمال القسمة الاقليدية نجد المطلوب:

$$a = (3n+2)(n^2+n)$$

$$b = (3n+2)(n+2)$$

أي $3n+2$ قاسم لكل من a و b ، لاحظ التوضيح:

$$\begin{array}{r|l}
 3n^2 + 8n + 4 & 3n + 2 \\
 \underline{-(3n^2 + 2n)} & n + 2 \\
 6n + 4 & \\
 \underline{-(6n + 4)} & \\
 00 &
 \end{array}
 \quad , \quad
 \begin{array}{r|l}
 3n^3 + 5n^2 + 2n & 3n + 2 \\
 \underline{-(3n^3 + 2n^2)} & n^2 + n \\
 3n^2 + 2n & \\
 \underline{-(3n^2 + 2n)} & \\
 00 &
 \end{array}$$

ب / لدينا:

$$PGCD(a, b) = PGCD((3n+2)(n^2+n), (3n+2)(n+2)) = (3n+2)PGCD((n^2+n), (n+2))$$

نميز الحالتين:

 n ** فردي يكون: $PGCD(\alpha, \beta) = 1$ و منه: $PGCD(a, b) = (3n+2)$ n ** زوجي $PGCD(\alpha, \beta) = 2$ و منه: $PGCD(a, b) = 2(3n+2)$ ج / لدينا $PGCD(a, b) = 41$ معناه $3n+2 = 41$ أي: $n = 13$ بالتعويض في العبارتين α و β نجد: $\alpha = 182$ و $\beta = 15$.

التمرين 15:

1 / ادرس بواقي القسمة الاقليدية 5^n على 7،2 / ادرس بواقي قسمة الاقليدية 5^n على 11،3 / ما هي قيم n بحيث يكون باقي قسمة 5^n على 77 هو 4.

حل:

1 / دراسة بواقي القسمة الاقليدية لـ 5^n على 7:لدينا: $5^0 \equiv 1[7]$ و $5^1 \equiv 5[7]$ و $5^2 \equiv 4[7]$ و $5^3 \equiv 6[7]$ و $5^4 \equiv 2[7]$ و $5^5 \equiv 3[7]$ و $5^6 \equiv 1[7]$

و بالتالي الدور: 6،

$$\begin{cases}
 5^{6k} \equiv 1[7] \\
 5^{6k+1} \equiv 5[7] \\
 5^{6k+2} \equiv 4[7] \\
 5^{6k+3} \equiv 6[7] \\
 5^{6k+4} \equiv 2[7] \\
 5^{6k+5} \equiv 3[7]
 \end{cases}
 \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

و منه: $\{1, 5, 4, 6, 2, 3\}$ و بالتالي فالبواقي المطلوبة هي:

2 / دراسة بواقي القسمة الاقليدية لـ 5^n على 11:لدينا: $5^0 \equiv 1[11]$ و $5^1 \equiv 5[11]$ و $5^2 \equiv 3[11]$ و $5^3 \equiv 4[11]$ و $5^4 \equiv 9[11]$ و $5^5 \equiv 1[11]$

و بالتالي الدور: 5،

$$\begin{cases}
 5^{5k'} \equiv 1[11] \\
 5^{5k'+1} \equiv 5[11] \\
 5^{5k'+2} \equiv 3[11] \\
 5^{5k'+3} \equiv 4[11] \\
 5^{5k'+4} \equiv 9[11]
 \end{cases}
 \quad , \quad k' \in \mathbb{N}$$

و منه: $\{1, 5, 3, 4, 9\}$ و بالتالي فالبواقي المطلوبة هي:

3/ البحث عن قيم n بحيث يكون باقي قسمة 5^n على 77 هو 4 معناه يوجد $k \in \mathbb{N}$ حيث:
 $5^n = 77k + 4 = 7(11k) + 4 = 11(7k) + 4$ وهذا يكفي البحث عن قيم n بحيث يكون باقي قسمة 5^n على كل من 11 و 7 هو 4 و بالرجوع إلى السؤالين السابقين نجد الجملة
 $\begin{cases} n = 6k + 2 \\ n = 5k' + 3 \end{cases}$ أي: $6k - 5k' = 1$ لنبحث عن حلول هاته المعادلة:
 نلاحظ أن الثنائية (1,1) تحقق المعادلة السابقة و منه أمكن كتابة:
 $\begin{cases} 6k - 5k' = 1 \\ 6(1) - 5(1) = 1 \end{cases}$ بالطرح: $\begin{cases} 6(k-1) = 5(k'-1) \\ PGCD(6,5) = 1 \end{cases}$
 و حسب غوص يمكن أن نكتب ببساطة: $\alpha \in \mathbb{N}$, $(k, k') = (5\alpha + 1, 6\alpha + 1)$ و بالتعويض نجد:

$$n = 6(5\alpha + 1) + 2 = 30\alpha + 8, \alpha \in \mathbb{N}$$

التمرين 16:

- نعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة: $29x - 35y = 2 \dots (*)$ ،
 1/ عين الأعداد الصحيحة x بحيث: $29x \equiv 2[35]$ ،
 2/ حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة $(*)$ ،
 3/ ما هو أصغر عدد طبيعي n إذا قسم على 87 كان الباقي 5 و إذا قسم على 105 كان الباقي 11 ،
 4/ احسب القاسم المشترك الأكبر لـ: $(1 + 2005!)$ و $(1 + 2006!)$.

حل:

- لدينا: المعادلة: $29x - 35y = 2 \dots (*)$ مع: $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ،
 1/ المعادلة $29x \equiv 2[35]$ تكافئ $-6x \equiv 2[35]$ معناه $-36x \equiv 12[35]$ أي: $-x \equiv 12[35]$ و منه $k \in \mathbb{Z}$, $x = 35k + 23$ ،
 2/ بتعويض x في المعادلة $(*)$ نجد: $29(35k + 23) - 35y = 2$ أي: $1015k + 667 - 2 = 35y$ و منه $y = 29k + 19$ ،
 وبالتالي الحلول المطلوبة هي: $(x, y) = (35k + 23, 29k + 19)$, $k \in \mathbb{Z}$ ،
 3/ تعيين أصغر عدد طبيعي n إذا قسم على 87 كان الباقي 5 و إذا قسم على 105 كان الباقي 11 معناه
 $\begin{cases} n = 87\alpha + 5 \\ n = 105\beta + 11 \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ معناه المعادلة $87\alpha - 105\beta = 6$ أي: $29\alpha - 35\beta = 2$ حسب ما سبق لدينا
 من الواضح أن أصغر عددين α و β يحققان الجملة السابقة هما: $(\alpha, \beta) = (23, 19)$ ،
 $\begin{cases} \alpha = 35k + 23 \\ \beta = 29k + 19 \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$ ،
 و بالتعويض نجد: $n = 2006$ ،
 4/ يمكن كتابة $1 + 2006! = 2006(1 + 2005!) - 2005$ و بالتالي: $PGCD(1 + 2006!, 1 + 2005!) = PGCD(1 + 2005!, 2005)$ ،
 ولدينا: $1 + 2005! = 2005(2004!) + 1$ و بالتالي: $PGCD(1 + 2005!, 2005) = PGCD(2005, 1) = 1$ ،
 في الأخير: $PGCD(1 + 2006!, 1 + 2005!) = 1$.

التمرين 17:

- 1/ n عدد طبيعي غير معدوم،
 ادرس بواقي قسمة العدد 2^n على 10 ثم استنتج رقم آحاد العدد S حيث: $S = 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{20}$ ،
 2/ ادرس بواقي قسمة العدد 4^n على 7، حسب قيم n ،
 ليكن $\alpha_n = 4^{n+1} - 3n - 4$ ،
 * عين قيم n من $\mathbb{N}$ حيث α_n مضاعف للعدد 7،
 * احسب بدلالة n المجموع: $\beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

حل:

1/ $n \in \mathbb{N}^*$ ،دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 2^n على 10:

$$\begin{cases} 2^{4k} \equiv 6[10] \\ 2^{4k+1} \equiv 2[10] \\ 2^{4k+2} \equiv 4[10] \\ 2^{4k+3} \equiv 8[10] \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}^* \text{ فالدور 4: } 2^5 \equiv 2[10] \text{ و } 2^4 \equiv 6[10] \text{ و } 2^3 \equiv 8[10] \text{ و } 2^2 \equiv 4[10] \text{ و } 2^1 \equiv 2[10]$$

أي البواقي هي: $\{6, 2, 4, 8\}$ ،

نعلم من خواص الأعداد الطبيعية أن باقي قسمة أي عدد على 10 هو رقم آحاد هذا العدد، وبالتالي:

طريقة أولى:

$$\begin{aligned} S &\equiv (2^4 + 2^5 + \dots + 2^{20})[10] \\ S &\equiv (4(6 + 2 + 4 + 8) + 6)[10] \\ S &\equiv 6[10] \end{aligned}$$

و بالتالي باقي القسمة هو 6،

طريقة ثانية:

 S عبارة عن مجموع متتالية هندسية أساسها 2 وبالتالي:

$$S \equiv 6[10] \text{ إذن } S = 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{20} = 2^4 \left(\frac{2^{17} - 1}{2 - 1} \right) = 2^{21} - 2^4 = 2^{4(5)+1} - 2^{4(1)}$$

2/ دراسة بواقي القسمة الاقليدية للعدد 4^n على 7 مع $n \in \mathbb{N}$:

$$4^0 \equiv 1[7] \text{ و } 4^1 \equiv 4[7] \text{ و } 4^2 \equiv 2[7] \text{ و } 4^3 \equiv 1[7] \text{ و بالتالي الدور 3:}$$

$$\begin{cases} 4^{3k} \equiv 1[7] \\ 4^{3k+1} \equiv 4[7] \\ 4^{3k+2} \equiv 2[7] \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N} \text{ ومنه: أي مجموعة البواقي هي: } \{1, 2, 4\}$$

$$\text{لدينا: } \alpha_n = 4^{n+1} - 3n - 4$$

* تعيين قيم n من $\mathbb{N}$ حيث: $\alpha_n \equiv 0[7]$ أي: $(*) 4^{n+1} - 3n \equiv 4[7]$ يمكن الاستعانة بالدراسة السابقة
 و هذا يتميز الحالات:

**** إذا كان: $n = 3k$ نجد: $4^{3k+1} - 9k \equiv 4[7]$ أي: $9k \equiv 0[7]$ وكون 9 و أوليين فيما بينهما يكون $k = 7\alpha, \alpha \in \mathbb{N}$ بالتعويض نجد: $n = 21\alpha$ ،**

**** إذا كان: $n = 3k + 1$ نجد: $4^{3k+2} - 9k - 3 \equiv 4[7]$ أي: $-9k \equiv 5[7]$ ومنه $2k \equiv 2[7]$ و بالتالي: $2(k-1) \equiv 0[7]$ وكون 2 و 7 أوليين فيما بينهما يكون $k = 7\beta + 1$ مع: $\beta \in \mathbb{N}$ ،**

بالتعويض نجد: $n = 3(7\beta + 1) + 1 = 21\beta + 4$

**** إذا كان: $n = 3k + 2$ نجد: $4^{3k+3} - 9k - 6 \equiv 4[7]$ أي: $9k \equiv -9[7]$ ومنه يكون $k = 7\lambda + 6$ بالتعويض نجد: $n = 21\lambda + 20$ مع $\lambda \in \mathbb{N}$**

الخلاصة:

القيم المطلوبة هي $n = 21\alpha$ و $n = 21\beta + 4$ و $n = 21\lambda + 20$ مع $\lambda, \beta, \alpha \in \mathbb{N}$

*** حساب بدلالة n المجموع:**

$$\beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i = 4 \times \sum_{i=1}^n 4^i - \sum_{i=1}^n (3i + 4)$$

مجموع متتالية هندسية

مجموع متتالية حسابية

$$\text{ومن: } \beta_n = 4 \left(4 \times \frac{4^n - 1}{4 - 1} \right) - \left(\frac{n}{2} (7 + 3n + 4) \right) = \frac{16}{3} (4^n - 1) - n \left(\frac{11}{2} + \frac{3}{2}n \right)$$

التمرين 18:

- 1/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 8^n و 9^n على 13،
- 2/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3^{6n+2} - 2 \times 64^{2n+1} + 2 \equiv 0[13]$
- 3/ عين الأعداد الطبيعية n حيث: $3^{6n} - 2001^{2n+1} + 30n - 1 \equiv 0[13]$
- 4/ عين الأعداد الطبيعية n حيث: $8^n - 9^n \equiv 9[13]$
- 5/ حل في $\mathbb{N}$ المعادلة: $15 \times 21^{4n+3} + 5n \equiv 0[13]$

حل:

/1

*** دراسة حسب قيم n بواقي قسمة 8^n على 13:**

لدينا: $8^0 \equiv 1[13]$ و $8^1 \equiv 8[13]$ و $8^2 \equiv 12[13]$ و $8^3 \equiv 5[13]$ و $8^4 \equiv 1[13]$ فالدور 4:

$$\text{و منه البواقي هي: } \{1, 8, 12, 5\}, \quad k \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} 8^{4k} \equiv 1[13] \\ 8^{4k+1} \equiv 8[13] \\ 8^{4k+2} \equiv 12[13] \\ 8^{4k+3} \equiv 5[13] \end{cases}$$

*** دراسة حسب قيم $n \in \mathbb{N}$ بواقي قسمة 9^n على 13:**

لدينا: $9^0 \equiv 1[13]$ و $9^1 \equiv 9[13]$ و $9^2 \equiv 3[13]$ و $9^3 \equiv 1[13]$ فالدور 3:

$$\begin{cases} 9^{3k} \equiv 1[13] \\ 9^{3k+1} \equiv 9[13] \\ 9^{3k+2} \equiv 3[13] \end{cases}, k \in \mathbb{N} \text{ و منه البواقي هي: } \{1, 9, 3\},$$

2/ ليكن $n \in \mathbb{N}$: حسب دراسة سابقة نكتب $[13](9-24+2) \equiv 3^{6n+2} - 2 \times 64^{2n+1} + 2 = 9^{3n+1} - 2 \times 8^{4n+2} + 2 \equiv$ أي:

$$3^{6n+2} - 2 \times 64^{2n+1} + 2 \equiv 0[13] \text{ و . ه . م.}$$

3/ تعيين الأعداد الطبيعية n حيث: $[13]0 \equiv 3^{6n} - 2001^{2n+1} + 30n - 1$

$$\begin{cases} 3^{6n} = 9^{3n} \equiv 1[13] \\ 2001 \equiv -1[13] \rightarrow 2001^{2n+1} \equiv -1[13] \\ 30n - 1 \equiv (4n - 1)[13] \end{cases} \text{ لدينا: نجد: } [13](1+1+4n-1) \equiv 3^{6n} - 2001^{2n+1} + 30n - 1 \text{ و عليه } [13]4n \equiv -1$$

معناه $[13]4n \equiv 12$ أي $[13]4(n-3) \equiv 0$ يكافئ $n = 13k + 3$ مع $k \in \mathbb{N}$.

4/ تعيين الأعداد الطبيعية n حيث: $[13]9 \equiv 8^n - 9^n$

نميز الحالات التالية:

* مع $n = 4k$ و $k \in \mathbb{N}$ وبالتالي $[13](1-9^k) \equiv 8^{4k} - 9^{4k}$ و بالرجوع إلى المطلوب نجد: $[13]9 \equiv 1-9^k$ أي: $[13]8 \equiv -9^k$ و منه $[13]9 \equiv -8[13]$ معناه $[13]9^k \equiv 5$ ، بالرجوع إلى دراسة بواقي قسمة 9^n على 13 نستنتج عدم وجود قيمة لـ k تحقق المطلوب،

* مع $n = 4k + 1$ و $k \in \mathbb{N}$ وبالتالي $[13](8-9^{k+1}) \equiv 8^{4k+1} - 9^{4k+1}$ و بالرجوع إلى المطلوب نجد: $[13]8-9^{k+1} \equiv 9$ أي: $[13]9^{k+1} \equiv 1-9^{k+1}$ و منه $[13]9^{k+1} \equiv -1[13]$ معناه $[13]9^{k+1} \equiv 12$ ، بالرجوع إلى دراسة بواقي قسمة 9^n على 13 نستنتج عدم وجود قيمة لـ k تحقق المطلوب،

* مع $n = 4k + 2$ و $k \in \mathbb{N}$ وبالتالي $[13](12-9^{k+2}) \equiv 8^{4k+2} - 9^{4k+2}$ و بالرجوع إلى المطلوب نجد: $[13]12-9^{k+2} \equiv 9$ أي: $[13]9^{k+2} \equiv 10-9^{k+2}$ و منه $[13]9^{k+2} \equiv -10[13]$ معناه $[13]9^{k+2} \equiv 3$ ، بالرجوع إلى دراسة بواقي قسمة 9^n على 13 نستنتج أن: $k+2=3\alpha+2$ مع $\alpha \in \mathbb{N}$ أي: $k=3\alpha$ و منه قيم n في هاته الحالة: $n=12\alpha+2$ حيث: $\alpha \in \mathbb{N}$

* مع $n = 4k + 3$ و $k \in \mathbb{N}$ وبالتالي $[13](5-9^{k+3}) \equiv 8^{4k+3} - 9^{4k+3}$ و بالرجوع إلى المطلوب نجد: $[13]5-9^{k+3} \equiv 9$ أي: $[13]9^{k+3} \equiv 4-9^{k+3}$ و منه $[13]9^{k+3} \equiv -4[13]$ معناه $[13]9^{k+3} \equiv 9$ ، بالرجوع إلى دراسة بواقي قسمة 9^n على 13 نستنتج أن: $k+3=3\beta+1$ مع $\beta \in \mathbb{N}^*$ وبالتالي: $k=3\beta-2$ و منه قيم n في هاته الحالة: $n=12\beta-5$ حيث: $\beta \in \mathbb{N}^*$

خلاصة:

$$n=12\beta-5 \text{ و } n=12\alpha+2 \text{ مع } \alpha \in \mathbb{N} \text{ و } \beta \in \mathbb{N}^*$$

5/ حل في $\mathbb{N}$ المعادلة: $[13]0 \equiv 15 \times 21^{4n+3} + 5n$

$$\text{لدينا: } \begin{cases} 15 \equiv 2[13] \\ 21 \equiv 8[13] \rightarrow 21^{4n+3} \equiv 8^{4n+3}[13] \rightarrow 21^{4n+3} \equiv 5[13] \\ 5n \equiv 5n[13] \end{cases} \rightarrow 15 \times 21^{4n+3} \equiv 10[13] \text{ و منه هـ}$$

$$\begin{cases} 5(2+n) \equiv 0[13] \\ PGCD(5,13)=1 \end{cases} \text{ يكون } [13]0 \equiv n+2 \text{ و منه } [13]n \equiv 11 \text{ أي الحلول}$$

المطلوب هي: $n=13\lambda+11, \lambda \in \mathbb{N}$.

التمرين 19:

لنعتبر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة: $(*) \quad 409x - 68y = 17 \dots$

1/ أثبت أنه إذا كان الزوج (x_0, y_0) حلاً لـ $(*)$ فإن x_0 مضاعف لـ 17،

2/ عين الزوج (x_0, y_0) حلاً لـ $(*)$ و تحقق: $0 < x_0 < 30$ ،

3/ حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة $(*)$ ،

4/ عين أصغر عدد طبيعي n الذي يحقق:

$$\begin{cases} n \equiv 10[409] \\ n \equiv 27[68] \end{cases}$$

حل:

1/ لنفرض أن الثنائية الصحيحة (x_0, y_0) حل للمعادلة $(*) \quad 409x - 68y = 17 \dots$ معناه $409x_0 - 68y_0 = 17$ أي:

$$\begin{cases} 409x_0 = 17(1 + 4y_0) \\ PGCD(409, 17) = 1 \end{cases} \text{ فحسب غوص نجد: } x_0 = 17k \text{ مع } k \in \mathbb{Z}, \text{ "لاحظ أن } 1 + 4y_0 \in \mathbb{Z}$$

2/ لما كان x_0 من مضاعفات العدد 17، أي $x_0 = 17k$ مع $k \in \mathbb{Z}$ وكون $x_0 \in]0; 30]$ نجد $0 < 17k < 30$ ومنه

$$\frac{0}{17} (=0) < k < \frac{30}{17} (=1,76) \text{ وبالتالي: } x_0 = 17 \text{، بالتعويض في المعادلة } (*) \text{ يكون: } 409(17) - 68y_0 = 17 \text{، ومنه}$$

$$y_0 = 102 \text{، أي الثنائية المطلوبة هي: } (x_0, y_0) = (17, 102)$$

3/ حل في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ المعادلة $(*)$:

$$\begin{cases} 409x - 68y = 17 \\ 409(17) - 68(102) = 17 \end{cases} \text{ وبالطرح: } \begin{cases} 409(x - 17) = 68(y - 102) \\ PGCD(409, 68) = 1 \end{cases} \text{ وحسب غوص نجد:}$$

$$(x, y) = (68k + 17, 409k + 102) \text{، } k \in \mathbb{Z}$$

4/ تعيين أصغر عدد طبيعي n حيث: $\begin{cases} n \equiv 10[409] \\ n \equiv 27[68] \end{cases}$ معناه $\begin{cases} n = 409k + 10 \\ n = 68k' + 27 \end{cases}$ ، $k, k' \in \mathbb{N}$ ومنه المعادلة $(*)$:

$409k - 68k' = 17$ وحسب دراسة سابقة نجد: $(k, k') = (68\alpha + 17, 409\alpha + 102)$ ، $\alpha \in \mathbb{Z}$ وبأخذ $\alpha = 0$ نحصل على المطلوب: $n = 6963$.

يقول الشاعر:

الجاحظ

يطيبُ العيشُ أن تلقىَ حليماً غذاءُ العلمِ والرأي المصيبُ
ليكشفَ عنكَ حيلةَ كلِّ ريبٍ وفضلُ العلمِ يعرفه الأريبُ

التمرين 20:

1/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 7 ،

2/ عين باقي قسمة العدد $(1+10^1+10^2+\dots+10^{2014})$ على 7 ،

3/ نضع:

$$a = 1 + 2 \times 10^3 + 3 \times 10^6 + 4 \times 10^9 + 5 \times 10^{12} + 6 \times 10^{15} + 7 \times 10^{18} + 8 \times 10^{21} + 9 \times 10^{24}$$

ما هو باقي قسمة العدد a على 7 ،

4/ حدد باقي قسمة 111222333444555666777888999 على العدد 7 .

حل:

1/ دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الاقليدية للعدد 3^n على 7:

$$3^0 \equiv 1[7] \text{ و } 3^1 \equiv 3[7] \text{ و } 3^2 \equiv 2[7] \text{ و } 3^3 \equiv 6[7] \text{ و } 3^4 \equiv 4[7] \text{ و } 3^5 \equiv 5[7] \text{ و } 3^6 \equiv 1[7] \text{ فالـدور 6،}$$

$$\text{فالبواقي هي: } \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \text{ و منه } k \in \mathbb{N} \begin{cases} 3^{6k} \equiv 1[7] \\ 3^{6k+1} \equiv 3[7] \\ 3^{6k+2} \equiv 2[7] \\ 3^{6k+3} \equiv 6[7] \\ 3^{6k+4} \equiv 4[7] \\ 3^{6k+5} \equiv 5[7] \end{cases}$$

2/ تعيين باقي قسمة العدد $(1+10^1+10^2+\dots+10^{2014})$ على 7:

$$\text{لدينا } 10^{2015} - 1 = 9 \times \left(\frac{10^{2015} - 1}{9} \right) = 9 \times (1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{2014}) \text{ و } 10 \equiv 3[7] \text{ أي: } 10^{2015} \equiv 3^{2015}[7] \text{ و كون:}$$

$$10^{2015} - 1 \equiv 4[7] \text{ أي: } 10^{2015} \equiv 5[7] \text{ نجد: } 2015 = 6(335) + 5$$

$$3/ \text{لديـنا: } [7] (1 + 2 \times 3^3 + 3^{6(1)+1} + 4 \times 3^{6(1)+3} + 5 \times 3^{6(2)} + 6 \times 3^{6(2)+3} + 3^{6(3)+3} + 2 \times 3^{6(4)}) \equiv a \text{ و منه:}$$

$$[7] (1 + 5 + 3 + 3 + 5 + 1 + 6 + 2) \equiv a \text{ أي: } a \equiv 5[7] \text{ و منه باقي قسمة } a \text{ على 7 هو: 5،}$$

4/ نضع: $b = 111222333444555666777888999$ يمكن كتابة هذا العدد على النحو:

$$\begin{aligned} b = & 9 + 9 \times 10 + 9 \times 10^2 + 8 \times 10^3 + 8 \times 10^4 + \\ & + 8 \times 10^5 + 7 \times 10^6 + 7 \times 10^7 + 7 \times 10^8 + 6 \times 10^9 + \\ & + 6 \times 10^{10} + 6 \times 10^{11} + 5 \times 10^{12} + 5 \times 10^{13} + 5 \times 10^{14} + \\ & + 4 \times 10^{15} + 4 \times 10^{16} + 4 \times 10^{17} + 3 \times 10^{18} + 3 \times 10^{19} + \\ & + 3 \times 10^{20} + 2 \times 10^{21} + 2 \times 10^{22} + 2 \times 10^{23} + 10^{24} + 10^{25} + 10^{26} \end{aligned}$$

نعلم أن $10 \equiv 3[7]$ و ملاحظة: $10^2 \equiv 2[7]$ و $10^3 \equiv 6[7]$ و $10^4 \equiv 4[7]$ و $10^5 \equiv 5[7]$ ومن جهة أخرى لدينا:

$$9 = 6(1) + 3 \text{ و } 10 = 6(1) + 4 \text{ و } 11 = 6(1) + 5 \text{ و } 12 = 6(2) \text{ و } 13 = 6(2) + 1 \text{ و } 14 = 6(2) + 2$$

$$15 = 6(2) + 3 \text{ و } 16 = 6(2) + 4 \text{ و } 17 = 6(2) + 5 \text{ و } 18 = 6(3) \text{ و } 19 = 6(3) + 1 \text{ و } 20 = 6(3) + 2$$

$$21 = 6(3) + 3 \text{ و } 22 = 6(3) + 4 \text{ و } 23 = 6(3) + 5 \text{ و } 24 = 6(4) \text{ و } 25 = 6(4) + 1 \text{ و } 26 = 6(4) + 2 \text{ أي يمكن}$$

$$\text{كتابة: } [7] \left(\begin{aligned} & 2 + 2 \times 3 + 2 \times 2 + 6 + 4 + 5 + 6 \times 6 + 6 \times 4 + 6 \times 5 + 5 + 5 \times 3 + 5 \times 2 \\ & + 4 \times 6 + 4 \times 4 + 4 \times 5 + 3 + 3 \times 3 + 3 \times 2 + 2 \times 6 + 2 \times 4 + 2 \times 5 + 1 + 3 + 2 \end{aligned} \right) \equiv b \text{ و منه:}$$

$$[7] (2 + 6 + 4 + 6 + 4 + 5 + 1 + 3 + 2 + 5 + 1 + 3 + 3 + 2 + 6 + 3 + 2 + 6 + 5 + 1 + 3 + 1 + 3 + 2) \equiv b \text{ أي: } b \equiv 2[7].$$

التمرين 21:

- 1/ ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة العدد 3^n على 5،
 2/ ما هو باقي قسمة العدد 3×1998^{1999} على 5،
 3/ أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $2 \times 4^{6n+3} + 3^{4n-2} + 8$ يقبل القسمة على العدد 5،
 4/ جد الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $2 \times 4^{6n+3} + 3^{4n-2} + 2n^2$ يقبل القسمة على العدد 5.

حل:

- 1/ دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 3^n على 5:
 لدينا $3^0 \equiv 1[5]$ و $3^1 \equiv 3[5]$ و $3^2 \equiv 4[5]$ و $3^3 \equiv 2[5]$ و $3^4 \equiv 1[5]$ فالدور 4، ومنه:

$$\begin{cases} 3^{4k} \equiv 1[5] \\ 3^{4k+1} \equiv 3[5] \\ 3^{4k+2} \equiv 4[5] \\ 3^{4k+3} \equiv 2[5] \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}$$

و منه البواقي: $\{1, 2, 3, 4\}$ ،

- 2/ باقي قسمة العدد 3×1998^{1999} :

- لدينا $1998 \equiv 3[5]$ و منه $3 \times 1998^{1999} \equiv 3^{4(500)}[5]$ أي: $3 \times 1998^{1999} \equiv 1[5]$ وبالتالي فالباقي هو: 1،
 3/ ليكن $n \in \mathbb{N}^*$: $2 \times 4^{6n+3} + 3^{4n-2} + 8 \equiv (-2+4+8)[5]$ أي: $2 \times 4^{6n+3} + 3^{4n-2} + 8 \equiv 0[5]$ و منه القابلية للقسمة،
 4/ إذا كان: $2 \times 4^{6n+3} + 3^{4n-2} + 2n^2 \equiv (-2+4+2n^2)[5]$ يكون $2n^2 \equiv 3[5]$ و منه $n^2 \equiv 4[5]$ و منه $n^2 - 4 \equiv 0[5]$ و منه $(n-2)(n+2) \equiv 0[5]$ أي $n+2 \equiv 0[5]$ أو $n-2 \equiv 0[5]$ أي:
 $n = 5k + 2$ أو $n = 5k + 3$ حيث: $k \in \mathbb{N}$.

من علماء العرب:

السؤال:

اسمه قبل أن يعلن إسلامه شمواثيل بن يهوذا بن أبونحيث، ثم صار بعد إسلامه السموأل بن يحيى بن عباس، وهو عالم رياضياتي ومهندس وطبيب، انتقل مع أسرته من فاس إلى بغداد فترة ثم انتقل إلى بلاد فارس.

عاش السموأل في القرن الأول الهجري، وفي بغداد عكف على دراسة كتاب (الأصول) لإقليدس، وفي دراسة الجبر لأبي كامل شجاع، كما درس الجبر للكرجي حتى بدأ يكوّن آراءه الخاصة في الرياضيات وهو في سن الـ 18، ثم وبدأ بتأليف كتابه الشهير (الباهر في الجبر) وهو في سن الـ 19.

في مدينة مراغة بفارس قضى السموأل بقية عمره، وحينها كانت مراغة قد تبوأ مركزاً علمياً ينافس بغداد، وما إن استقر فيها حتى بدأ في الإنتاج العلمي وتعمق في دراسة الشريعة الإسلامية، فافتتح أن الدين الإسلامي يتوافق مع الحياة القويمية التي يبحث عنها أهل العقول الراجحة.

عرف السموأل أنه واحد من العلماء الموسوعيين لسعة اطلاعه، فلم يكن من الذين يقصرون جهودهم على الموضوع الواحد، ولا يقنعهم التخصص الضيق، بل اجتهد في كافة العلوم، وقد أحاط بالعلوم الرياضية في عصره حتى صار حجة عصره في علمي الجبر والحساب، كما درس الطب على يد ابن ملكا البغدادي حتى أصبح طبيباً ماهراً.