

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين:

الموضوع الأول:

التمرين الأول: (05 نقاط)

- (U_n) و (V_n) متتاليتان معرفتان كما يلي: $U_0 = 1$ و $V_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n :
- $$V_{n+1} = \frac{U_n + 4V_n}{5} \quad \text{و} \quad U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3}$$
- (1) من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $W_n = U_n - V_n$
- (أ) بين أن المتتالية (W_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول
- (ب) أكتب عبارة W_n بدلالة n ثم عين نهايتها
- (2) (أ) عبر عن: $U_{n+1} - U_n$ و $V_{n+1} - V_n$ بدلالة W_n
- استنتج اتجاه تغير المتتاليتين (U_n) و (V_n) ثم بين أنهما متجاورتان
- (3) من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر المتتالية (T_n) المعرفة بـ: $T_n = 3U_n + 10V_n$
- (أ) بين أن المتتالية (T_n) ثابتة ثم أحسب نهايتها
- (ب) عين نهاية المتتاليتين (U_n) و (V_n)
- التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $Z^2 - 6Z + 10 = 0$

(2) في المستوي المركب نعتبر النقطتين A و B اللتين لاحتقاهما: $z_A = 3 - i$ و $z_B = 3 + i$ وليكن r الدوران الذي مركزه A و زاوية له $\frac{\pi}{2}$

(أ) أوجد العبارة المركبة للدوران r ثم أوجد لاحقة النقطة C صورة النقطة B بالدوران r

(ب) استنتج طبيعة المثلث ABC

لتكن النقطة $D(1; 1)$ وليكن العدد المركب $L = \frac{z_A - z_D}{z_B - z_D}$

(3) (أ) أكتب العدد المركب L على الشكل الجبري ثم المثلثي والأسّي.

(ب) أحسب العدد $(\frac{L}{\sqrt{2}})^{2018}$

(ج) عين قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون $(\frac{L}{\sqrt{2}})^n$ حقيقيا

التمرين الثالث: (04 نقاط)

في الفضاء المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. نعتبر النقط :

$$E(-3, 4, -1) \text{ و } C(3; -2; -1), (3; 1; 5), A(0; -2; 2)$$

(1) أكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل الذي يشمل النقطة A والشعاع $\overrightarrow{AB}$ ناظمي له

(2) بين أن النقطة C تنتمي إلى المستوي (P) ثم استنتج طبيعة المثلث ABC

$$\begin{cases} x = t + m \\ y = 2t - 2 \\ z = t + m + 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \text{ و } m \in \mathbb{R} \quad (3) \text{ نعتبر المستوي } (Q) \text{ تمثيله الوسيطى:}$$

أ) تحقق أن النقطة A تنتمي الى المستوي (Q)

ب) بين أن الشعاع $\vec{n}(1, 0, -1)$ ناظمي للمستوي (Q)

(4) عين تمثيلا وسيطيا لمستقيم تقاطع المستويين (P) و (Q)

(5) بين أن المستقيم (AE) عمودي على المستوي (ABC)

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء الأول: لتكن الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = ax + \frac{b}{1+e^x}$ حيث a, b عدنان حقيقيان ثابتان

-أحسب $h'(x)$ ثم عين العددين الحقيقيين a, b حيث: $h(1) = \frac{e}{1+e}$ و $h'(0) = \frac{5}{4}$

الجزء الثاني: لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x - \frac{1}{1+e^x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. الوحدة $4cm$

1- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) > 0$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3- أ) بين أن المستقيمين المعرفين بـ: $(\Delta_1): y = x$ و $(\Delta_2): y = x - 1$ مستقيمان مقاربان للمنحني (C_f) .

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيمان (Δ_1) و (Δ_2)

4- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(-x) + f(x) = -1$. ثم فسر النتيجة بيانيا

5- أكتب معادلة للمماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0

6- أ) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا حقيقيا وحيدا α حيث: $0 < \alpha < 0.5$

ب) تحقق أن $\frac{1}{\alpha} = 1 + e^\alpha$ ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$

7- أنشئ كلا من (Δ_1) و (Δ_2) و (C_f) . (نقبل أن المنحني (C_f) يقبل $A(0; -\frac{1}{2})$ نقطة انعطاف)

8- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة: $m = \frac{1}{1+e^x}$

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (4 نقاط)

يحتوي صندوق على 8 كريات بيضاء و n كرية سوداء بحيث $(n \geq 2)$ لانفرق بينها باللمس. نسحب من هذا الصندوق كرتين .

نفرض أن سحب كرية بيضاء يعطي ربح نقطة وسحب كرية سوداء يفقد نقطتين .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع النقط المحصل عليها

(1) نعتبر السحب على التوالي مع اعادة الكرية المسحوبة قبل السحب الموالي

(أ) عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتمال له

(ب) أحسب بدلالة n الأمل الرياضي $E(X)$

(ت) هل توجد قيمة لـ n حتى يكون $E(x) = 0$

(2) نفرض أن السحب في آن واحد

أ- عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X

ب- أحسب بدلالة n الأمل الرياضي $E(X)$

التمرين الثاني: (4 نقاط)

(1) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة C كثير الحدود $P(z)$ حيث: $P(z) = z^3 - 5z^2 + 11z - 15$

(أ) تحقق أن $P(3) = 0$.

(ب) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد مركب z : $P(z) = (z - 3)(z^2 + az + b)$

(ت) حل في C المعادلة: $P(z) = 0$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ ، نعتبر النقط : A, B, C و D

ذات اللواحق: $Z_A = 1 + 2i$ ، $Z_B = 1 - 2i$ ، $Z_C = 1 + 3i$ ، $Z_D = 5 - i$ ،

(أ) اكتب العدد $\frac{Z_D - Z_C}{Z_B - Z_A}$ على شكله الجبري و الأسّي .

(ب) استنتج نسبة و زاوية التشابه المباشر S الذي يحول A إلى C و يحول B إلى D .

(ت) احسب ω لاحقة النقطة Ω مركز التشابه المباشر S ، ثم تحقق أن عبارته المركبة هي: $Z' = (1 + i)Z +$

2

(3) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z بحيث: $Z = 1 + 2i + e^{i\theta}$ ($\theta \in \mathbb{R}$)

(أ) بين أن C نقطة من (E)

(ب) عين طبيعة المجموعة (E) وعناصرها المميزة

(ت) استنتج طبيعة المجموعة (E') صورة المجموعة (E) بالتشابه المباشر S وعناصرها المميزة.

التمرين الثالث : (05 نقاط)

(U_n) متتالية معرفة بحدها $U_0 = 0$ و $U_1 = 3$ و من اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+2} = \frac{3}{2}U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3 : n \text{ عدد طبيعي}$$

(2) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس

(أ) مثل المستقيمين (T) و (D) اللذين معادلتهم على الترتيب

$y = x$ و $y = \frac{1}{2}x + 3$ ثم مثل على محور الفواصل الحدود U_0, U_1, U_2, U_3 دون حسابها

(ب) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (U_n) و تقاربها

(3) (أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_n < 6$. ماذا يمكن القول عن المتتالية (U_n) ؟

(ب) ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة

(4) نعتبر المتتالية (V_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي n بـ : $V_n = U_n - 6$

(أ) برهن أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(ب) عبر عن كل من U_n و V_n بدلالة n . ثم احسب نهاية U_n

(ج) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

التمرين الرابع : (07 نقاط)

الجزء الاول : لتكن الدالة g المعرفة على $]2, +\infty[$ كما يلي : $g(x) = x^2 - 4x + 3 + \ln(x - 2)$

أ - احسب نهايات الدالة g عند 2 و $+\infty$.

ب - ادرس اتجاه تغير الدالة g على $]2, +\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها

ج - احسب $g(3)$ ، ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$

الجزء الثاني : نعتبر الدالة f المعرفة على $]2, +\infty[$ بـ : $f(x) = x - 3 - \frac{\ln(x-2)}{x-2}$

(Cf) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. الوحدة $2cm$

(1) احسب نهايات الدالة f عند 2 و $+\infty$.

(2) بين أنه من أجل كل x من $]2, +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-2)^2}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

(3) أ - بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x - 3$ هو مقارب مائل للمنحنى (Cf) عند $+\infty$.

ب - ادرس وضعية المنحنى (Cf) بالنسبة للمستقيم (D) .

(4) أنشئ كلا من المستقيم (D) و المنحنى (Cf)

(5) احسب بـ cm^2 مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (Cf) و المستقيم (D) والمستقيمين الذين

معادلتهم : $x = 3$ و $x = 5$

بالتوفيق للجميع في يكالوريا 2018

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (05 نقط)

(1) حلّ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $(z + \sqrt{3} - 3i)(z^2 - 6z + 12) = 0$.
(2) يُنسب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \bar{u}, \bar{v})$. نعتبر النقاط A, B, C التي لواحقتها على الترتيب $z_A = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 3 - i\sqrt{3}$ ، $z_C = -\sqrt{3} + 3i$.

أ- أكتب كلاً من z_A و z_C و $\frac{z_C}{z_A}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث OAC .

ب- أحسب $\left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^{1439} - \left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^{2018}$ (تعلّل النتيجة النهائية على الشكل الجبري).

(3) لكن النقطة D نظيرة C بالنسبة إلى محور الفواصل بين أن المستقيمين (AD) و (BC) متعامدان

(4) عيّن نسبة و زاوية التشابه المباشر S الذي مركزه $E(3 - \sqrt{3}, 0)$ ويحول النقطة A إلى النقطة C

(5) بيّن أن النقاط A, O, E, C تنتمي إلى دائرة واحدة يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها.

التمرين الثاني: (03 نقط)

كيس A يحتوي على 6 قريصات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس تحمل الأرقام التالية: 1، 2، 2، 2، 4، 4

و كيس B يحتوي على 4 قريصات متماثلة لا نفرق بينها عند اللمس تحمل الأرقام التالية: 0، 1، 2، 4.

نحب قريصة رقمها x من الكيس A ثم قريصة رقمها y من الكيس B .

1/ احسب احتمال الحصول على رقمين متساويين ($x = y$)

2/ ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل ثنائية (y, x) العدد x^y .

أ- عين قيم المتغير العشوائي X ، ثم بين أن: $P(X = 4) = \frac{5}{24}$ واحسب: $P(X \leq 4)$

ب- عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم تحقق أن أمله الرياضي يساوي $\frac{209}{8}$

التمرين الثالث: (04 نقط)

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = \frac{1}{12}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{6}$.

أ) $u_n = -\frac{7}{12}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{2}{3}$ ، ب) المتتالية (u_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$ ، ج) (u_n) متباعدة

2. في المستوي المركب المستوي المركب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

أ- التحويل T الذي كتابته المركبة $z' = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z$ دوران زاويته $-\frac{\pi}{4}$ ومركزه O .

ب- مجموعة القطر $M(z)$ حيث $\arg(z-i) = -\frac{\pi}{4}$ هي المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = -x + 1$.

3. الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

أ- المستوي (P) الذي معادلته: $x + y - z + 1 = 0$ والمستقيم (d) الذي يشمل النقطة $A(2; 1; -1)$ و $\vec{u} = 1; -1; 1$ شعاع توجيه له لا يشتركان في أية نقطة.

ب- معادلة المستوي (Q) الذي يشمل مبدأ المعلم O ويوازي المستوي (P) هي: $x - y + z = 0$.

التمرين الرابع: (08 نقط)

1- f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$.

و (C_f) المنحني المثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $1 - \frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{1 + e^{-x}}$. ثم بين أن f دالة فردية.

1. أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. أ. بين أنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}$ ، $f'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)^2$ ، ثم استنتج جدول تغيرات f على $\mathbb{R}^+$.

ب. استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x ، $1 - \frac{2}{e^x + 1} \leq \frac{1}{2}x$.

4. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x \right) \right]$ ثم فسر النتيجة بيانياً.

5. ارسم المستقيم (Δ) الذي معادلته له $y = -\frac{1}{2}x + 1$ والمنحني (C_f) .

6. أ. بين أن الدالة $x \mapsto \ln(e^{-x} + 1)$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto -\frac{1}{e^x + 1}$ على $\mathbb{R}$.

ب. احسب مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) والمستقيمت التي معادلتها على الترتيب: $y = 0$ ، $x = -1$ ، و $x = 0$.

Π - المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 1 - \frac{2}{e^{u_n} + 1}$.

1. إذا علمت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > 0$ ، بين أن $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$.

2. استنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة على $\mathbb{N}$.

3. بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_n \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n$ ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقط)

1. ليكن $P(z) = z^3 + z^2 - 4z + 6$ كثير حدود للمتغير المركب z حيث :
- (1) بين أنه ، من أجل كل عدد مركب z ، $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$.
 - (2) تحقق أن $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$ ، ثم استنتج جذرا آخر له .
 - (3) حل ، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$.
 - II) نعتبر في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس ، القطر A ، B و C التي لاحقاً : $z_A = -1$ ، $z_B = 1+i$ و $z_C = \overline{z_B}$ على الترتيب .

1) التحويل القطبي S يرفق بكل نقطة $M(z)$ من المستوي القطبي $M'(z')$ حيث : $z' = (1+i)z + i$

أ - ما طبيعة التحويل S ؟ عين عناصره المميزة .

- ب- لتكن M نقطة تختلف عن A . ما طبيعة المثلث AMM' ؟
- 2) n عدد طبيعي و M_n نقطة من المستوي تختلف عن A ، لاحقاً العدد المركب z_n .
 نضع : $M_0 = O$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $M_{n+1} = S(M_n)$.
 أ- أثبت أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $z_n = (1+i)^n - 1$.
 ب- عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها تكون القطر O ، A و M_n في استقامة

التمرين الثاني: (04 نقط)

- في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ من الفضاء نعتبر القطر :
- $A(-1; 3; 2)$ ، $B(1; 4; 4)$ ، $C(0; 4; 2)$ ، $D(1; 0; 2)$ و $E(-9; -4; -1)$
- 1/ بين أن القطر A ، B و C تعين مستويًا (ABC) يطلب تعيين معادلته الديكارتية

2/ نعتبر المستقيم (Δ) المعروف بالتمثيل الوسيطى :

$$\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 3t - 4 \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- أ- تحقق أن القطر D و المستقيم (Δ) تعين مستويًا (P) يطلب تعيين تمثيل وسيطى له
- ب- استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (P)
- ج- بين أن المستويين (ABC) و (P) متعامدان
- 3/ أ- تحقق أن تقاطع المستويين (P) و (ABC) هو المستقيم (D) الذي يقبل الجملة التالية :

$$\begin{cases} x = -7 + 2\alpha \\ y = -8 + 3\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

تمثيل وسيطى له .

- ب- تحقق من أن القطر E لا تنتمي إلى (P) و لا تنتمي للمستوي (ABC)
- ج - أوجد المسافة بين القطر E و المستقيم (D) بطريقتين مختلفتين.

التمرين الثالث: (05 نقط)

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[-1; 2]$ كما يلي : $f(x) = \frac{2-2x}{x-3}$ و (C) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب

إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ الوحدة $2cm$

1- أ - ادرس تغيرات الدالة f على المجال $[-1; 2]$.

ب - استنتج انه إذا كان $x \in [-1; 2]$ فإن $f(x) \in [-1; 2]$

2, 1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = \frac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$

أ - استعمل (C) والمستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ لتمثيل الحدود $u_3 ; u_2 ; u_1 ; u_0$ للمتتالية (u_n) دون حسابا

ب - أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربا ؟

2, أ - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-1 < u_n < 2$.

ب - بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً . ماذا تستنتج ؟

3, نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n ، كما يلي : $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n - 2}$

أ - بين أن المتتالية (v_n) هندسية يعلب تعيين أساسها وحدها الأول.

ب - أكتب v_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$. استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

التمرين الرابع: (07 نقط)

الجزء الأول : نعتبر الدالة العددية المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ حيث : $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2 + 1}$

1- ادرس تغيرات الدالة g .

2- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $0,5 < \alpha < 0,6$ يحقق : $g(\alpha) = 0$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني : نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ :
$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

نرمز بـ (C) للمنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ وحدة الطول $5cm$

1- أ) احسب نهاية $x.f(x)$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ ، ب) استنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ و فسر النتيجة بيانياً.

2- أ) أثبت أن : $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}$ ثم استنتج حصراً للعدد $f(\alpha)$

ب) بين أنه من أجل كل $x \in]0; +\infty[$ فإن : $f'(x) = g(x)$

ج) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ أعط تفسيراً هندسياً للنتيجة .

د) بين أن : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ماذا تعني هذه النتيجة بالنسبة للدالة f ؟

3- شكل جدول تغيرات الدالة f

4- أرسم بعناية المنحني (C) الممثل للدالة f

الامتحان التدريبي الأول في مادة الرياضيات

المدة: 3 ساعات

المستوى: الثالثة علوم تجريبية

على المترشح الاختيار بين التمرين الأول والثاني وحل جميع التمرينات المتبقية .

التمرين الأول: (04 نقاط) اختياري

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. نعتبر النقط $A(1, 2, 0)$ ، $B(3, 1, -1)$ و $C(2, 4, -3)$.

للجزء الأول

- (1) أثبت أن النقط A ، B و C نعين مستوياً (P) . ثم أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (P) .
- (2) أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) الذي يشمل المبدأ و يعامد المستوي (P) .
- (3) لتكن $D(4, 4, 4)$ نقطة من الفضاء.
 - (أ) تحقق أن $D(4, 4, 4)$ تنتمي إلى (Δ) .
 - (ب) أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.
 - (ج) أحسب قيمة تقريبية إلى 10^{-2} لقيس الزاوية BDC .

للجزء الثاني

لتكن (Φ) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء حيث

$$\begin{cases} x = 1 + 2e^t \\ y = 1 - 3e^t \\ z = 1 + e^t \end{cases}$$

حيث t عدد حقيقي و e أساس اللوغاريتم النيبيري. و ليكن (T) مستقيماً من الفضاء له التمثيل الوسيط

$$\begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} \text{ حيث } \lambda \text{ عدد حقيقي.}$$

- (1) عيّن طبيعة (Φ) وعناصرها المميزة.
- (2) لتكن M نقطة كيفية من (Φ) و N نقطة كيفية من (T) . عيّن إحداثيات النقطتين M و N بحيث تكون المسافة بين (Φ) و (T) أصغر ما يمكن.

التمرين الثاني: (04 نقاط) اختياري

صندوق يحتوي على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و كل الكرات متماثلة و غير متمايزة عند اللمس. نجري سلسلة من السحبات : في كل سحبة نأخذ عشوائياً كرة من الكيس ، إذا كانت سوداء نتوقف عن السحب و إذا كانت بيضاء لا نعيدها إلى الكيس و نسحب كرة أخرى وهكذا. أخرى و نسجل لونها و ننهي التجربة.

- (1) (أ) أحسب احتمال كل من الأحداث التالية :

A "الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء".

B "الكرة المسحوبة في المرة الثانية سوداء".

ب) استنتج حساب الاحتمال لكي لا تجري السحبة الثالثة.

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد السحبات التي أجريناها.

أ) أعط قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضي

ب) احسب التباين والانحراف المعياري.

التمرين الثالث: (04 نقاط) لجبري

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ: $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{3u_n + 4}$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.

(2) أ- بين أن $u_{n+1} - u_n = \frac{-3(u_n)^2 + 3}{3u_n + 4}$

ب- بين أن (u_n) متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) نعتبر المتتالية $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ: $t_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$

أ- تحقق أن $1 - t_n = \frac{2}{u_n + 1}$ ثم استنتج أن $1 - t_n > 0$

ب- بين أن $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ ثم عبر عن (t_n) بدلالة n و استنتج (u_n) بدلالة n

ج- عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (t_n)$

د- أحسب الجداء $P_n = t_0 \times t_1 \times \dots \times t_n$

التمرين الرابع: (05 نقاط) لجبري

(1) نعتبر كثير الحدود $P(z)$ للمتغير المركب z المعرفة بـ $P(z) = z^3 - 15z^2 + 81z - 175$.

أ) أحسب $P(7)$ ثم حلل $P(z)$ إلى جداء عاملين.

ب) حل، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $P(z) = 0$.

(2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A, B و C التي

لواحقها $z_A = 4 - 3i, z_B = 4 + 3i$ و $z_C = 7$ على الترتيب.

أ- علم النقط A, B و C .

ب- تحقق أن $z_A - z_C = i(z_B - z_C)$

ج) ما طبيعة المثلث ABC ؟

(3) ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة $\Omega(4)$ ويحول النقطة C إلى النقطة B .

أ) أكتب العبارة المركبة للدوران R .

ب) أوجد z_D لاحقة النقطة D صورة النقطة B بالدوران R ، ثم علمها.

ج) ما طبيعة الرباعي $ACBD$ ؟

4) لتكن (Ψ) مجموعة النقط M ، ذات اللاحقة z ، من المستوي المركب حيث يكون $\frac{z - z_B}{z - z_C}$ تخيلياً

صرفاً جزؤه التخيلي موجب.

أ) حدد طبيعة (Ψ) .

ب) أنشئ (Γ) صورة (Ψ) بالدوران R .

التمرين الخامس: (07 نقاله) اجباري

أ. الجدول التالي يمثل جدول تغيرات الدالة h المعرفة $\mathbb{R}$ ب: $h(x) = x^3 - x^2 - x - 1$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$	
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$-\infty$	$-\frac{22}{27}$	-2	$+\infty$	

1- أحسب $h(1.84)$ (تعطى النتيجة مدورة إلى 10^{-2})

2- استنتج إشارة $h(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x

II. لتكن g دالة عددية معرفة على المجال $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ ب: $g(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} + \ln(x^2 - 1)$

(1) أحسب نهايات الدالة g بجوار أطراف مجموعة تعريفها.

(2) بين أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ أن $g'(x) = \frac{2}{x^2 - 1} h(x)$ ثم استنتج اتجاه

تغير الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-2.11 < \alpha < -2.10$

(4) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

III. لتكن f دالة عددية معرفة على $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ ب: $f(x) = e^x \ln(x^2 - 1)$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس للمستوي. (الوحدة على محور الفواصل $1cm$ وعلى محور الترتيب $6cm$)

(1) أحسب نهايات الدالة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها. ثم فسر النتائج هندسياً.

(2) أثبت أن $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) إثبت أن $f(\alpha) = \frac{2\alpha e^\alpha}{1 - \alpha^2}$. ثم عين حصراً $f(\alpha)$

(4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين β و λ حيث $-1.42 < \beta < -1.41$ و $1.41 < \lambda < 1.42$

(5) أنشئ (C_f)

(6) ناقش، بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة، ذات المجهول الحقيقي x ، حيث

$$\ln(x^2 - 1) - e^{-x}(m - 1) = 0$$

الإجابة النموذجية

التمرين الأول: (04 نقاط)

الجزء الأول:

(1) لدينا $\overrightarrow{AB}(2, -1, -1)$ و $\overrightarrow{AC}(1, 2, -3)$ وهما غير مرتبطان خطياً إذن النقط A ، B و C ليست في استقامية، إذن فهي تُعَيّن مستويًا (P) .

(2) ليكن $\vec{n}(a, b, c)$ ناظماً لـ (P) إذن
$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} 2a - b - c = 0 \\ a + 2b - 3c = 0 \end{cases} \text{ ومنه } a = c$$
 إذن بأخذ

$a = 1$ نجد أن $b = c = 1$ ومنه $\vec{n}(1, 1, 1)$ ناظم لـ (P) .

معادلة المستوي (P) من الشكل $x + y + z + d = 0$ ، وبما أن $A \in (P)$ فإن $d = -3$ ، وعليه تكون $x + y + z - 3 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوي (P) .

(3) المستقيم (Δ) الذي يشمل المبدأ ويُعامد المستوي (P) هو مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء التي تُحقق

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \text{ مع } \overrightarrow{OM} = t\vec{n} \text{ أي } t \in \mathbb{R} \text{ أي } t \in \mathbb{R}$$

(4) (أ) إحداثيات النقطة D تُحقق التمثيل الوسيطى للمستقيم (Δ) (نجد أن $t = 4$) ومنه $D \in (\Delta)$.

(ب) لدينا $AB = \sqrt{6}$ ، $AC = BC = \sqrt{14}$ ، ومنه المثلث ABC متقايس الساقين رأسه C ، لتكن H

المسقط العمودي للنقطة C على الضلع $[AB]$ ، حسب مبرهنة فيثاغورس نجد أن $HC = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ ، وعليه

$$S_{ABC} = \frac{AB \times HC}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ هي مساحة المثلث } ABC$$

لدينا من جهة أخرى $d(D, (P)) = 3\sqrt{3}$ ومنه يكون حجم رباعي الوجوه $ABCD$ هو

$$V_{ABCD} = \frac{S_{ABC} \times d(D, (P))}{3} = \frac{15}{2}$$

(ج) لدينا من جهة $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = DB \times DC \times \cos BDC$ حيث $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = -37$ ومنه

$$\cos BDC = \frac{\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC}}{DB \times DC} = 0,85 \text{ إذن } BDC = 30,79^\circ$$

الجزء الثاني:

$$(1) \text{ نضع } k = e^t \text{ إذن } k > 0 \text{ من أجل كل عدد حقيقي } t, \text{ ومنه } \begin{cases} x = 1 + 2e^t \\ y = 1 - 3e^t \\ z = 1 + e^t \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 1 - 3k \\ z = 1 + k \end{cases}, k > 0$$

ومنه (Φ) هي نصف مستقيم مبدؤه $E(1,1,1)$ و $\vec{u}(2,-3,1)$ شعاع توجيه له.

(2) بما أن $M \in (\Phi)$ و $N \in (T)$ فإن $M(1+2e^t, 1-3e^t, 1+e^t)$ و $N(2-\lambda, \lambda, 1+\lambda)$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \text{ حتى تكون المسافة بين } (\Phi) \text{ و } (T) \text{ أصغر ما يمكن يجب أن يكون}$$

حيث $\vec{u}(2,-3,1)$ و $\vec{v}(-1,1,1)$ شعاعا توجيه لـ (Φ) و (T) على الترتيب.

$$\text{لدينا } \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \text{ تكافئ } \begin{cases} 3\lambda + 4e^t - 2 = 0 \\ -4\lambda - 14e^t + 5 = 0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} \lambda = \frac{4}{13} \\ t = \ln\left(\frac{7}{26}\right) \end{cases} \text{ ومنه يكون لدينا}$$

$$M\left(\frac{20}{13}, \frac{5}{26}, \frac{33}{26}\right) \text{ و } N\left(\frac{22}{13}, \frac{4}{13}, \frac{17}{13}\right)$$

التمرين الثاني: (04 نقاط) لختياري

$$(1) \quad P(A) = \frac{C_4^1}{C_7^1} = \left[\frac{4}{7}\right]$$

لكي يتحقق الحدث يجب :

أن نسحب في المرة الأولى كرة بيضاء و لا تعاد إلى الكيس [و] نسحب في المرة الثانية كرة سوداء

$$\text{إذن : } P(B) = \frac{C_3^1}{C_7^1} \times \frac{C_4^1}{C_6^1} = \left[\frac{2}{7}\right]$$

ب) لكي لا نجري السحب الثانية يجب أن نتوقف إما عند السحب الأولى [أو] عند السحب الثانية أي : "نسحب كرة سوداء في المرة الأولى [أو] نسحب كرة سوداء في المرة الثانية".

$$\text{إذن الاحتمال لكي لا نجري السحب الثالثة هو : } P(A) + P(B) = \frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \left[\frac{6}{7}\right]$$

(2) القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي : 1 و 2 و 3 و 4.

$$\text{ـ يتحقق الحدث } X=1 \text{ إذا سحبنا في المرة الأولى كرة سوداء : } P(X=1) = P(A) = \left[\frac{4}{7}\right]$$

ـ يتحقق الحدث $X=2$ إذا سحبنا في المرة الأولى كرة بيضاء و لم نعدّها إلى الكيس ثم سحبنا كرة سوداء

$$\text{إذن : } P(X=2) = P(B) = \left[\frac{2}{7}\right]$$

ـ يتحقق الحدث $X=3$ إذا سحبنا في المرة الأولى كرة بيضاء و لم نعدّها إلى الكيس ثم سحبنا

في المرة الثانية كرة بيضاء و لم نعدّها إلى الكيس ثم سحبنا في المرة الثالثة كرة سوداء.

$$P(X=3) = \frac{C_3^1}{C_7^1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} \times \frac{C_4^1}{C_5^1} = \frac{4}{35} \quad \text{إذن :}$$

- يتحقق الحدث $X=4$ إذا سحبنا في المرة الأولى كرة بيضاء و لم نعدّها إلى الكيس ثم سحبنا في المرة الثانية كرة بيضاء و لم نعدّها إلى الكيس ثم سحبنا في المرة الثالثة كرة بيضاء و لم نعدّها إلى الكيس ثم سحبنا في المرة الرابعة كرة سوداء
إذن :

$$P(X=4) = \frac{C_3^1}{C_7^1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} \times \frac{C_1^1}{C_5^1} \times \frac{C_4^1}{C_4^1} = \frac{1}{35}$$

- نلخص النتائج في الجدول التالي :

X_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{35}$

✓ - الأمل الرياضي $E(X)$:

$$E(X) = 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{4}{7} + 3 \times \frac{4}{35} + 4 \times \frac{1}{35} = \frac{76}{35}$$

✓ التباين $V(X)$:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \left(1 \times \frac{4}{7} + 4 \times \frac{2}{7} + 9 \times \frac{4}{35} + 16 \times \frac{1}{35}\right) - \left(\frac{76}{35}\right)^2 = \frac{112}{35} - \frac{5776}{1225} = \frac{1506}{1225}$$

✓ الانحراف المعياري $\sigma(X)$:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 3,50$$

التمرين الثالث: (04 نقاط) اجباري

$$u_0 = 3 \text{ و } u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} \quad \text{المُعرّفة بـ } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المتتالية}$$

(1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.
الشرط الأول

لنتأكد من صحة $P(0)$ لدينا $u_0 = 3$ تكافئ : $u_0 > 1$ ومنه $P(0)$ صحيحة.

الشرط الثاني

لنفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي

$$u_{n+1} > 1$$

$$u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} = f(u_n) \quad \text{نلاحظ أن } u_n > 1 \text{ حسب فرضية التراجع}$$

تكافئ: $f(u_n) > f(1)$ و تكافئ $u_{n+1} > 1$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة. $P(n)$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه ن أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.

(4) أ- من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} - u_n = \frac{4u_n + 3 - 3(u_n)^2 - 4u_n}{3u_n + 4} = \frac{-3(u_n)^2 + 3}{3u_n + 4}$$

ب- بين أن (u_n) متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة

من البرهان بالتراجع لدينا $u_n > 1$ ومن جهة أخرى $3u_n + 4 > 0$ فالإشارة من إشارة البسط، أي أن $-3(u_n)^2 + 3 = 0$ تكافئ $u_n = 1$ أو $u_n = -1$ ومن جهة أخرى $u_n > 1$ أي أن (u_n) متناقصة. بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو 1.

$$(3) \quad (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المُعرَّفة بـ: } t_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$

أ- التحقق أن $1 - t_n = \frac{2}{u_n + 1}$: من أجل كل عدد طبيعي n :

$$1 - t_n = 1 - \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{u_n + 1 - u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{2}{u_n + 1}$$

الاستنتاج أن $1 - t_n > 0$ من البرهان بالتراجع لدينا $u_n > 1$ تكافئ $u_n + 1 > 0$ تكافئ

$$\frac{2}{u_n + 1} > 0$$

ب- $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ معناه أن $t_{n+1} = \frac{1}{7} t_n$

لدينا $t_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ تكافئ

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} - 1}{\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} + 1} = \frac{\frac{4u_n + 3 - 3u_n - 4}{3u_n + 4}}{\frac{4u_n + 3 + 3u_n + 4}{3u_n + 4}} = \frac{u_n - 1}{7u_n + 7} = \frac{1}{7} \left(\frac{u_n - 1}{u_n + 1} \right) = \frac{1}{7} t_n$$

ومنه (t_n) هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ و حدها الأول $t_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{1}{2}$

عبارة t_n بدلالة n : $t_n = t_0 \times q^n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} \right)^n$

عبارة u_n بدلالة n : لدينا $t_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ تكافئ $t_n(u_n + 1) = u_n - 1$ تكافئ

$u_n(t_n - 1) + t_n + 1 = 0$ تكافئ $t_n u_n + t_n - u_n + 1 = 0$ تكافئ $t_n(u_n + 1) - u_n + 1 = 0$

$$u_n = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} \right)^n + 1}{-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} \right)^n + 1} \text{ تكافئ } u_n = \frac{t_n + 1}{-t_n + 1}$$

ج- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (t_n) = 0$ لأن $-1 < q < 1$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 1$.

د- حساب الجداء $P_n = t_0 \times t_1 \times \dots \times t_n = t_0 \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - (\frac{1}{7})^{n+1}}{1 - \frac{1}{7}} \right) = \frac{7}{12} (1 - (\frac{1}{7})^{n+1})$

التمرين الرابع: (05 نقالها اجباري)

(1) لدينا $P(7) = 0$ ، باستخدام خوارزمية القسمة الإقليدية نجد أن $P(z) = (z-7)(z^2 - 8z + 25)$

ب) لدينا $P(z) = 0$ يكافئ $(z-7)(z^2 - 8z + 25) = 0$ يكافئ $\begin{cases} z-7=0 \dots \dots \dots (1) \\ z^2 - 8z + 25 = 0 \dots (2) \end{cases}$

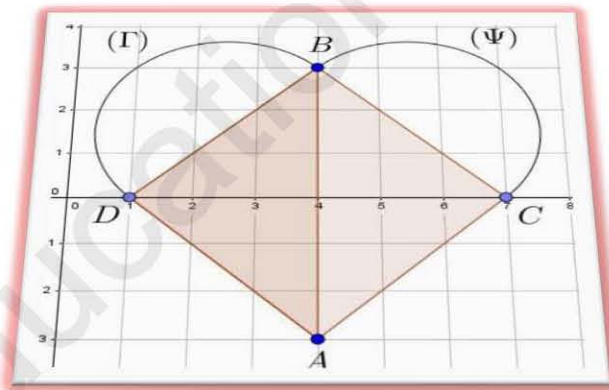
من المعادلة (1) نجد أن $z = 7$.

المعادلة (2) من الدرجة الثانية، نحلها باستخدام المميز Δ حيث $\Delta = -36$ ، إذن فهي تقبل حلين مترافقين

هما $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 4 - 3i$ و $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 4 + 3i$ ، وعليه مجموعة حلول المعادلة

$P(z) = 0$ هي $S = \{1, 4 - 3i, 4 + 3i\}$.

(2) (i) التعليل موضح في الرسم المرفق.



ب) لدينا من جهة $z_A - z_C = -3 - 3i$ ومن جهة أخرى $-i(z_B - z_C) = -3 - 3i$ إذن

$z_A - z_C = -i(z_B - z_C)$

ج) لدينا $z_A - z_C = i(z_B - z_C)$ ومنه $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = i$ ، كذلك لدينا $\left| \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \right| = |i| = 1$ أي أن

$AC = BC$ ، كذلك لدينا $\arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ، ومنه

$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ ، وعليه يكون المثلث ABC قائم في C ومتقايس الساقين.

(3) (i) العبارة المركبة للدوران R من الشكل $z' = az + b$

لدينا $\begin{cases} z_{\Omega} = az_{\Omega} + b \dots (1) \\ z_B = az_C + b \dots (2) \end{cases}$ ، بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نحصل على $z_B - z_{\Omega} = a(z_C - z_{\Omega})$ و

منه $a = i$ إذن $b = 4 - 4i$ ، و عليه العبارة المركبة للدوران R هي $z' = iz + 4 - 4i$.

(ب) لدينا $z_D = iz_B + 4 - 4i$ و منه $z_D = 7$.

(ج) المثلث ABC قائم في C و متقايس الساقين و $z_D - z_B = z_A - z_C$ أي $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA}$ إذن الرباعي $ACBD$ مربع .

(4) العدد $\frac{z - z_B}{z - z_C}$ تخيلي صرف جزؤه التخيلي موجب يعني أن $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أي أن

$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ، و عليه (Ψ) هي نصف دائرة قطرها $[BC]$ باستثناء النقطتين B و C و الزاوية

MBC موجهة في الاتجاه الموجب .

التمرين الخامس: (07 نقالها لجباري)

أ. الجزء الأول:

1- لدينا $h(1.84) = 0$ (النتيجة مدورة إلى 10^{-2})

2- اشارة $h(x)$ موضحة في الجدول

x	$-\infty$	1.84	$+\infty$
$h(x)$	-	0	+

ب. الجزء الثاني:

لتكن g دالة عددية معرفّة على المجال $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ $g(x) = \frac{2x}{x^2 - 1} + \ln(x^2 - 1)$.

(1) حساب نهايات الدالة g بجوار أطراف مجموعة تعريفها.

نهاية الدالة g بجوار $-\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} + \ln(x^2 - 1) = +\infty$

نهاية الدالة g بجوار $+\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} + \ln(x^2 - 1) = +\infty$

نهاية الدالة g بجوار -1 $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + (x^2 - 1)\ln(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = -\infty$

نهاية الدالة g بجوار 1 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + (x^2 - 1)\ln(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = +\infty$

(5) الدالة g قابلة للإشتقاق على $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ ودالتها المشتقة

$$g'(x) = \frac{2x^2 - 1 - 2x(2x)}{x^2 - 1^2} + \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{2x^3 - x^2 - x - 1}{x^2 - 1^2} = \frac{2}{x^2 - 1^2} h(x)$$

وبما ان $\frac{2}{x^2 - 1} > 0$ من أجل كل x من المجال $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ فإن إشارة $g'(x)$ من إشارة

$h(x)$ ومنه الدالة g متزايدة تماماً على $]1, 82; +\infty[$ و متناقصة تماماً على $]-\infty; -1[\cup]1, 82[$. وجدول تغيراتها هو:

x	$-\infty$	-1	1	$1,82$	$+\infty$
$g'(x)$	-			-	+
$g(x)$	$+\infty$		$+\infty$	$2,91$	$+\infty$

(3) الدالة g مستمرة ورتيبة تماماً متناقصة تماماً على المجال $]-2,11; -2,10[$ ، ولدينا

$g(-2,11) \times g(-2,10) < 0$ ، ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α ، حيث $-2,11 < \alpha < -2,10$.

(4) إشارة $g(x)$ موضحة في الجدول.

x	$-\infty$	α	-1	1	$+\infty$
$g(x)$	+		-		+

III. لتكن f دالة عددية معرفّة على $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ بـ $f(x) = e^x \ln(x^2 - 1)$

(1) حساب نهايات الدالة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها، وتفسير النتائج هندسياً.
نهاية الدالة f بجوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \ln(x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1)e^x \times \frac{\ln(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)} = 0$$

المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مستقيم مقارب أفقي للمنحني (C_f) بجوار $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \ln(x^2 - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} e^x \ln(x^2 - 1) = -\infty$$

المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ مستقيم مقارب عمودي للمنحني (C_f) .

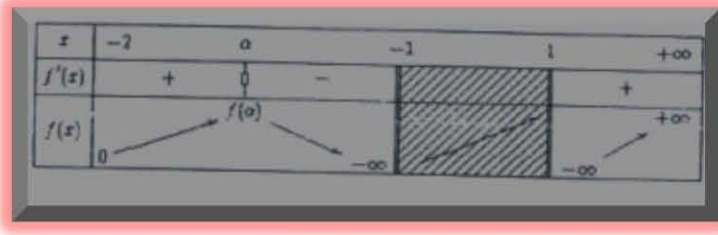
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} e^x \ln(x^2 - 1) = -\infty$$

المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مستقيم مقارب عمودي للمنحني (C_f) .

(2) الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ ودالتها المشتقة $f'(x) = g(x) \times e^x$ وبما ان $e^x > 0$

من أجل كل x من المجال $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ فإن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ومنه الدالة f متزايدة

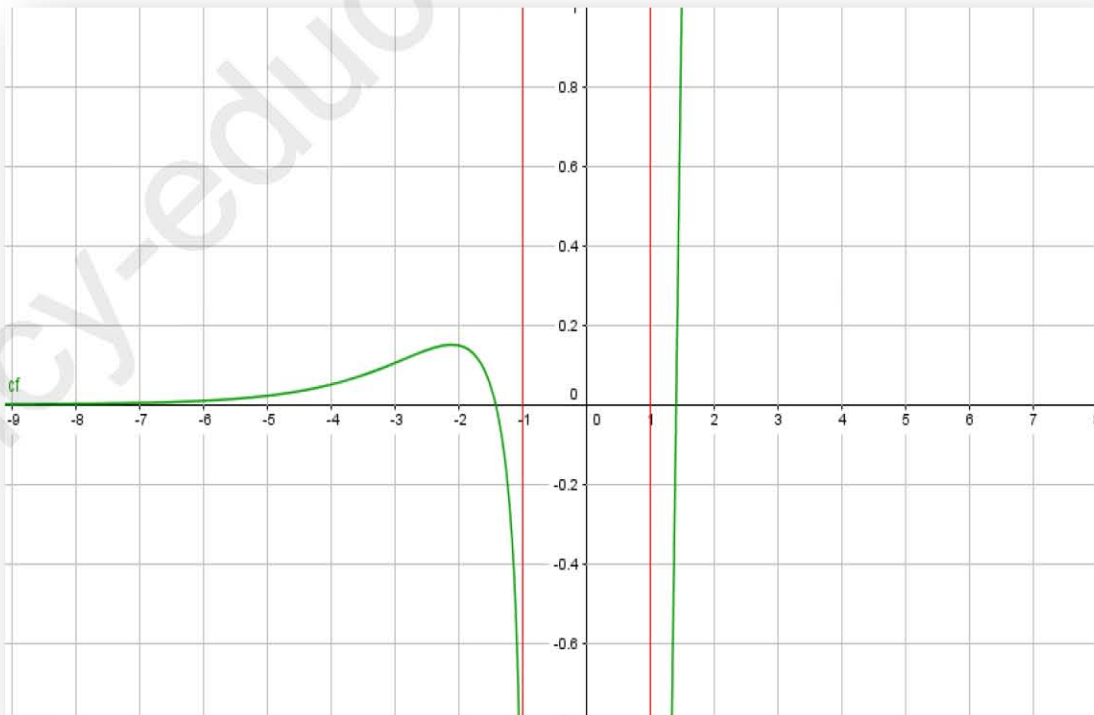
تماماً على $]-\infty; \alpha[\cup]1; +\infty[$ و متناقصة تماماً على $]\alpha; -1[$. وجدول تغيراتها هو



(3) لدينا $g(\alpha) = 0$ ومنه $\ln(\alpha^2 - 1) = -\frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1}$ ومنه إثبت أن $f(\alpha) = e^\alpha \ln(\alpha^2 - 1) = \frac{2\alpha e^\alpha}{1 - \alpha^2}$ حصرنا $f(\alpha)$ لدينا $-2,10 < \alpha < -2,11$ ومنه $-4,20 < 2\alpha < -4,22$ وكذلك $0,121 < e^\alpha < 0,122$ وكذلك $-0,514 < 2\alpha e^\alpha < -0,508$ ومن جهة أخرى $\frac{1}{-3,41} < \frac{1}{1 - \alpha^2} < \frac{1}{-3,45}$ ومنه $-3,45 < 1 - \alpha^2 < -3,41$ ومنه $4,41 < \alpha^2 < 4,45$ $0,146 < f(\alpha) < 0,151$

(4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين λ و β حيث $-1,42 < \beta < -1,41$ و $1,41 < \lambda < 1,42$ الدالة f مستمرة ورتيبة تماماً متناقصة تماماً على المجال $]-1,42; -1,41[$ ، ولدينا $f(-1,41) \times f(-1,42) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً β ، حيث $-1,42 < \beta < -1,41$.
 (5) الدالة f مستمرة ورتيبة تماماً متزايدة تماماً على المجال $]1,41; 1,42[$ ، ولدينا $f(1,41) \times f(1,42) < 0$ ، ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً λ ، حيث $1,41 < \lambda < 1,42$.

(5) أنشئ (C_f)



(6) المناقشة، بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة، ذات المجهول الحقيقي x ، حيثُ
 $\ln(x^2 - 1) = e^{-x}(m - 1)$ يكافئ $\ln(x^2 - 1) - e^{-x}(m - 1) = 0$
 $e^x \ln(x^2 - 1) = (m - 1)$ يكافئ $e^x \times \ln(x^2 - 1) = e^x \times e^{-x}(m - 1)$
 $f(x) = (m - 1)$ ، مناقشة أفقية هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم المتحرك الأفقي ذو المعادلة
 $y = m - 1$

- $m - 1 < 0$ تكافئ $m < 1$ حلين مختلفين أحدهما موجب والآخر سالب
- $m - 1 = 0$ تكافئ $m = 1$ حلين مختلفين أحدهما β والآخر λ .
- $0 < m - 1 < f(\alpha)$ تكافئ $1 < m < f(\alpha) + 1$ حلين سالبين وحل موجب .
- $m - 1 = f(\alpha)$ تكافئ $m = f(\alpha) + 1$ حل مضاعف سالب وحل موجب.
- $m - 1 > f(\alpha)$ تكافئ $m > f(\alpha) + 1$ حل موجب.

2018

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

الجامعة العراقية

الامتحان التدريبي الثاني في مادة الرياضيات

المدة: 3 ساعات

المستوى: الثالثة علوم تجريبية

على المترشح الاختيار بين التمرين الأول والثاني وحل جميع التمرينات المتبقية.

التمرين الأول: (04 نقاط) اختياري

يحتوي صندوق على 10 كرات منها 5 كرات حمراء و 3 كرات خضراء و كرتين بيضاء، نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربعة كرات من الصندوق.

(5) أحسب عدد الحالات الممكنة

(6) احسب الاحتمالات التالية:

(أ) ثلاث كرات من نفس اللون

(ب) كرة على الأقل بيضاء

(ت) كرتين على الأكثر خضراء.

(7) نعتبر الحدث A : "من بين الكرات الأربعة المسحوبة توجد كرة بيضاء واحدة فقط"نعتبر الحدث B : "من بين الكرات الأربعة المسحوبة توجد بالضبط ثلاث كرات من نفس اللون"بين أن $p(A) = \frac{8}{15}$ وأن $p(B) = \frac{19}{70}$.(8) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات البيضاء المسحوبة.(أ) عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون الاحتمال له.

(ب) أحسب الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري.

التمرين الثاني: (04 نقاط) اختياري

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل:

(1) المستقيم الذي تمثيله الوسيط $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t \\ z = 3t - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ يوازي المستقيم الذي معادلته الديكارتية

$$x + 2y + z - 3 = 0$$

(2) المستويات (P) : $x - 2y + 3z = 3$ و (P') : $2x + 3y - 2z = 6$ و (P'') : $4x - y + 4z = 12$ لا تتقاطع في أي نقطة.

(3) نعتبر النقط $A(-1, 0, 2)$, $B(1, 4, 0)$ و $A(3, -4, -2)$ المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي

$$x + z = 1$$

(4) نعتبر النقط $A(-1, 1, 3)$, $B(2, 1, 0)$ و $A(4, -1, 5)$ النقطة C مرجح النقطتين A و B .

التمرين الثالث: (04 نقاط) اجباري

لتكن h دالة عددية معرفّة على المجال $]0, +\infty[$ بـ $h(x) = \frac{4x-1}{x+2}$. وليكن (C_h) تمثيلها البياني في

معلم متعامد ومتجانس للمستوي. (أنظر الملحق) وليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

(1) نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفّة بـ: $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$ و $u_0 = 5$

أ- مثل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على حامل محور الفواصل دون حسابها مبرزاً خطوط الرسم

ب- أعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية وتقاربها (u_n)

(2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

(3) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ: $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

هـ- بين أن (v_n) حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

و- عبر عن (v_n) بدلالة n ثم استنتج (u_n) بدلالة n . عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$.

(4) أحسب الجداء $P_n = e^{u_0} \times e^{u_1} \times e^{u_2} \times \dots \times e^{u_n}$

التمرين الرابع: (05 نقالها) إجباري

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$

(1) لتكن النقطة M' ذات اللاحقة z' صورة النقطة M ذات اللاحقة z بالدوران R الذي مركزه Ω

ذات اللاحقة z_ω وزاويته θ بحيث $\Omega M = \Omega M'$ و $(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) = \theta + 2k\pi$ و $k \in \mathbb{Z}$.

أ- عين طولاً وعمدة العدد المركب $\frac{z' - z_\omega}{z - z_\omega}$

ب- أكتب z' بدلالة z و θ و z_ω .

(2) حل، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $z^2 - 4\sqrt{3}z + 16 = 0$

(3) نعتبر النقط A, B التي لواحقتها $z_A = 2\sqrt{3} - 2i, z_B = 2\sqrt{3} + 2i$ على الترتيب.

أ- أكتب z_A و z_B على الشكل الأسّي

ب- بين أن المثلث OAB متقايس الأضلاع

(4) لتكن النقطة C ذات اللاحقة $z_C = -8i$ والنقطة D صورة النقطة C بالدوران الذي مركزه O

وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

ج- علم النقط A, B, C و D .

د- تحقق أن للاحقة النقطة D هي $z_D = 4\sqrt{3} + 4i$

هـ- بين أن النقطة D صورة النقطة B بالتحاكي الذي مركزه O ثم بين أن المثلث OAD قائم في A

التمرين الخامس: (07 نقالها) إجباري

1. لتكن g دالة عددية معرفّة على المجال $]0, +\infty[$ بـ $g(x) = e + \frac{\ln x}{x}$. وليكن (C_g) تمثيلها

البياني في معلم متعامد ومتجانس للمستوي. $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

2- حل في المجال $]0, +\infty[$ المعادلة $g(x) = e$

3- أحسب $g\left(\frac{1}{e}\right)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0, +\infty[$

I. نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + ex + e$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس للمستوي.

(3) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ فسّر هندسياً النتائج.

(4) أ- بين أنه من أجل كل x من المجال $]0, +\infty[$ أن $f'(x) = g(x)$.

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(5) عين معدلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 1. ثم أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)

(6) أنشئ Δ و (C_f) .

(7) ناقش، بيانياً، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة، ذات المجهول الحقيقي x ،

حيث $(\ln x)^2 - 2x(m - e) = 0$

وزارة التربية والتعليم
مركز الدراسات والبحوث

الملحق



2018
بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم
مركز الدراسات والبحوث

الإجابة النموذجية

التمرين الأول: (04 نقاط)

1- الحالات الممكنة لسحب 4 كرات في أن واحد هي : $C_{10}^4 = \frac{10!}{4! 10-4!} = 210$

2- i- حدث D "حادث الحصول على 3 كرات حمراء و 1 كرة لونها آخر"
أو 3 كرات خضراء و 1 كرة لونها آخر

$$P(D) = \frac{C_5^3 \times C_5^1 + C_3^3 \times C_7^1}{210} = \frac{1 \times 7 + 10 \times 5}{210} = \frac{57}{210} = \frac{19}{70}$$

E "حادث الحصول على 2 كرة على الأقل بيضاء" معناه 2 كرة بيضاء و 2 كرات لونها آخر أو 3 كرات بيضاء و 1 كرة لونها آخر

$$P(E) = \frac{C_2^2 \times C_8^2 + C_2^1 \times C_8^3}{56} = \frac{1 \times 28 + 8 \times 56}{56} = \frac{464}{56} = \frac{58}{7}$$

F "حادث الحصول على 3 كرات على الأكثر خضراء" معناه 3 كرات خضراء و 1 كرة لونها آخر أو 2 كرات خضراء و 2 كرات لونها آخر

$$P(F) = \frac{C_3^3 \times C_7^1 + C_3^2 \times C_7^2 + C_3^1 \times C_7^3}{210} = \frac{1 \times 7 + 3 \times 21 + 3 \times 35}{210} = \frac{140}{210} = \frac{4}{3}$$

3- نعتبر الحدث A : "من بين الكرات الأربعة المسحوبة توجد 2 كرة بيضاء واحدة فقط"

$$p(A) = \frac{C_8^2 \times C_2^1}{210} = \frac{28 \times 2}{210} = \frac{56}{210} = \frac{8}{15}$$

نعتبر الحدث B : "من بين الكرات الأربعة المسحوبة توجد بالضبط 3 كرات من نفس اللون"

معناه 3 كرات حمراء و 1 كرة لونها آخر أو 3 كرات خضراء و 1 كرة لونها آخر

$$p(B) = p(D) = \frac{19}{70}$$

4- تعيين قيم X : $X = 0, 1, 2$

$$P(X = 0) = \frac{C_8^4}{210} = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 1) = P(A) = \frac{8}{15}$$

استنتاج : $P(X = 2) = ?$ أو يمكن حسابها بنفس الطريقة السابقة أي كراتين بيضاء و 2 كرات لونها آخر

$$\text{لدينا: } P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$$

$$P(X=2) = 1 - P(X=1) - P(X=3)$$

$$P(X=2) = \frac{2}{15}$$

X_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

ج- حساب الامل الرياضي والتباين والانحراف المعياري :

$$E(X) = \left(0 \times \frac{1}{3}\right) + \left(1 \times \frac{8}{15}\right) + \left(2 \times \frac{2}{15}\right) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

ت- حساب التباين والانحراف المعياري :

$$V(X) = \sum_{i=1}^3 X_i^2 \times P_i - E(X)^2 = \frac{96}{225}$$

$$\delta = \sqrt{V(X)} = 0,65 \quad \text{الانحراف المعياري}$$

التمرين الثاني: (04 نقاط) اختياري

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل :

$$(1) \quad \text{المستقيم الذي تمثيله الوسيطى } \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t \\ z = 3t - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{يوازي المستوى الذي معادلته الديكارتيّة}$$

$$(P) \quad x + 2y + z - 3 = 0. \quad \text{صحيح لأن شعاع توجيه المستقيم } (D) \text{ و الشعاع الناظم للمستوى } (P)$$

$$\text{متعامدان } \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \text{ ومنه المستقيم } (D) \text{ يوازي المستوى } (P)$$

$$(2) \quad \text{المستويات } (P): x - 2y + 3z = 3 \text{ و } (P'): 2x + 3y - 2z = 6 \text{ و } (P''): 4x - y + 4z = 12 \text{ لا تقاطع}$$

$$\text{في أي نقطة. خطأ لأن الشعاع } \vec{n_1} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ الناظم للمستوى } (P_1) \text{ و الشعاع } \vec{n_2} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ الناظم للمستوى}$$

$$(P_2). \text{ أي أن الشعاعان } \vec{n_1} \text{ و } \vec{n_2} \text{ غير مرتبطين خطيا إذن المستويين } (P_1) \text{ و } (P_2) \text{ يتقاطعان وفق مستقيم}$$

$$(D) \quad \text{تمثيله الوسيطى } \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{8}{5}t + \frac{24}{5} \\ z = -\frac{7}{5}t + \frac{21}{5} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{و بتعويض القيم في معادلة } (P_3) \text{ نجد أنها محققة و}$$

$$\text{بالتالي المستويات الثلاث متقاطعة وفق مستقيم } (D).$$

3) نعتبر النقط $A(-1, 0, 2)$, $B(1, 4, 0)$ و $A(3, -4, -2)$ المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي

$x + z = 1$ صحيح لأن الشعاعين $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ غير مرتبطين خطيا و عليه النقط تشكل

مستويا (ABC) و بتعويض احداثياتها في المعادلة نجدها محققة .

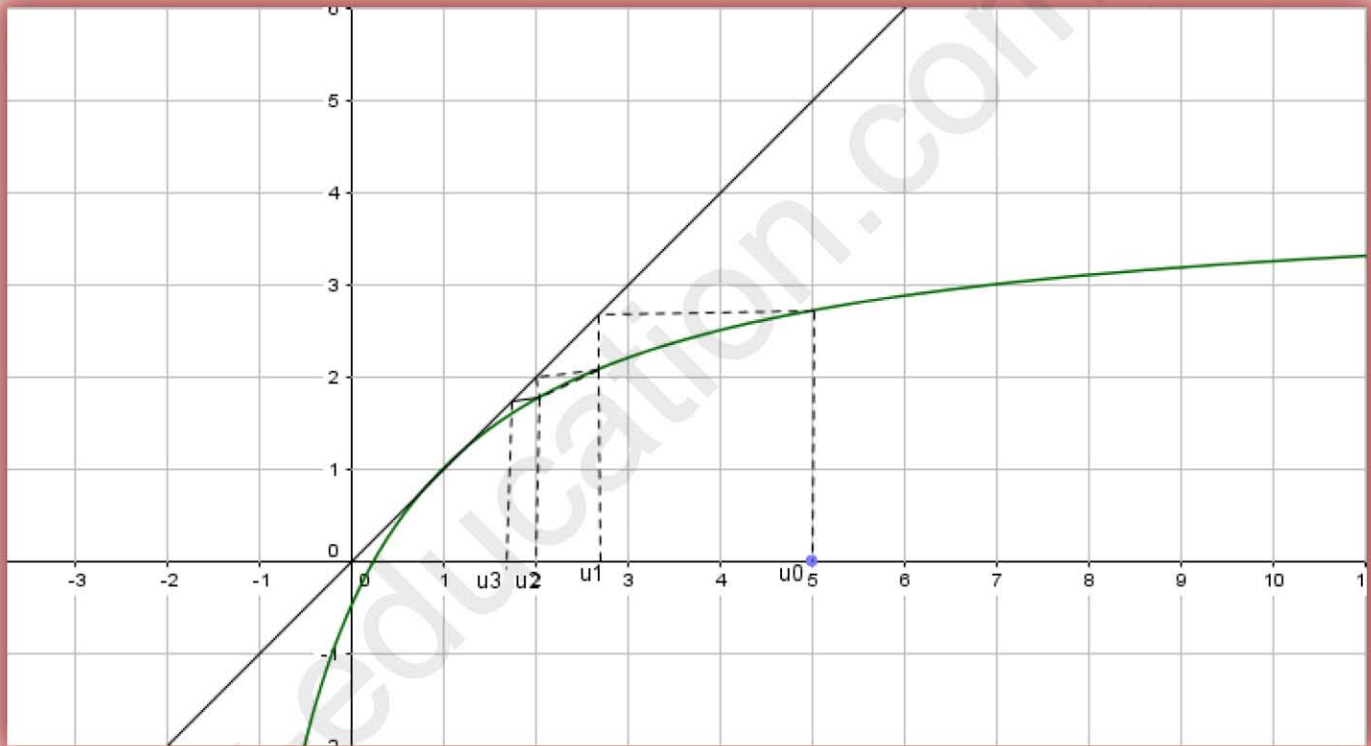
4) نعتبر النقط $A(-1, 1, 3)$, $B(2, 1, 0)$ و $A(4, -1, 5)$ النقطة C مرجح النقطتين A و B .

خطأ لأن الشعاعين $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ غير مرتبطين خطيا و عليه النقط A و B ليست في إستقامية، إذن لا

يمكن للنقطة C أن تكون مرجح النقطتين A و B .

التمرين الثالث: (04 نقاط) اجباري

1- أ- تمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 على حامل محور الفواصل



ب- التخمين $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ إذن من الواضح أن المتتالية u_n متناقصة تماما بما أن المتتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة نحو نقطة تقاطع .

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ: $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$ و $u_0 = 5$

5) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$. الشرط الأول

لنتأكد من صحة $P(0)$ لدينا $u_0 = 5$ تكافئ : $u_0 > 1$ ومنه $P(0)$ صحيحة.

الشرط الثاني

لنفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي

$$u_{n+1} > 1$$

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} = f(u_n) \text{ نلاحظ أن } u_n > 1 \text{ حسب فرضية التراجع}$$

تكافئ: $f(u_n) > f(1)$ و تكافئ $u_{n+1} > 1$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة. $P(n)$ ومنه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإنه نأجل كل عدد طبيعي n فإن $u_n > 1$.

ب- أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{4u_n - 1 - (u_n)^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{-(u_n)^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2}$$

$$\text{نلاحظ أن } u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 2} < 0 \text{ المتتالية } u_n \text{ متناقصة تماما.}$$

$$(3) \text{ نعتبر المتتالية } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المعرفة بـ: } v_n = \frac{1}{u_n - 1}$$

$$\text{أ- } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ حسابية معناه أن } v_{n+1} - v_n = r$$

$$\text{لدينا } v_n = \frac{1}{u_n - 1} \text{ تكافئ } v_n = \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n + 2}} = \frac{1}{\frac{3u_n - 3}{u_n + 2}} = \frac{u_n + 2}{3u_n - 3}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3u_n + 2}{3u_n - 3} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 2 - 3}{3u_n - 3} = \frac{1}{3} \left(\frac{u_n - 1}{u_n - 1} \right) = \frac{1}{3}$$

$$\text{ومنه } (v_n) \text{ حسابية أساسها } \frac{1}{3} \text{ وحدها الأول } v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ب- عبارة } v_n \text{ بدلالة } n : v_n = v_0 + nr = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{7}\right)n$$

$$\text{استنتج } (u_n) \text{ بدلالة } n \text{ لدينا: } v_n = \frac{1}{u_n - 1} \text{ تكافئ } v_n(u_n - 1) = 1 \text{ تكافئ}$$

$$u_n = \frac{1 + v_n}{v_n} = \frac{1}{v_n} + 1 = \frac{1}{\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{7}\right)n} + 1 = \frac{28}{4n + 7} + 1$$

$$\text{تعين } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 1 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n) = +\infty$$

$$P_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times e^{v_2} \times \dots \times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n} = e^{\frac{(n+1)(v_0 + v_n)}{2}} \text{ حساب الجداء (4)}$$

التمرين الرابع: (05 نقاط) لجباري

$$(1) \text{ أ- بما أن } \Omega M = \Omega M' \text{ فإن } |z' - z_\Omega| = |z - z_\Omega| \text{ ومنه } \left| \frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} \right| = 1$$

$$\text{كذلك } \arg \left(\frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} \right) = (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta + 2k\pi$$

$$\text{ب- لدينا } \frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = e^{i\theta} \text{ ومنه } \frac{z' - z_\Omega}{z - z_\Omega} = e^{i\theta} \text{ ومنه } z' = e^{i\theta} z + 1 - e^{i\theta} z_\Omega$$

(2) أ) المعادلة من الدرجة الثانية، نحلها باستخدام المميز Δ حيث $\Delta = -16 = 16i^2$ ، إذن فهي تقبل حلين

$$\text{متراقتين هما } z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 2\sqrt{3} - 2i \text{ و } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 2\sqrt{3} + 2i \text{، وعليه مجموعة}$$

$$S = \{2\sqrt{3} - 2i, 2\sqrt{3} + 2i\} \text{ هي حلول المعادلة}$$

$$(3) \text{ أ) لدينا } |z_1| = |z_2| = 4 \text{ ومنه الشكل الأسّي للعدد } z_A \text{ هو } z_A = 4e^{\frac{\pi}{6}i} \text{ وبما أن } z_A = \overline{z_B} \text{ فإن } z_B = 4e^{-\frac{\pi}{6}i}.$$

$$\text{ب) لدينا } \frac{z_A - z_O}{z_B - z_O} = e^{\frac{\pi}{3}i} \text{ وعليه يكون المثلث } OAB \text{ متقايس الأضلاع.}$$

(4) أ) التمثيل موضح في الرسم.

$$\text{ب) لدينا } z_D = e^{\frac{2\pi}{3}i} z_C = 4\sqrt{3} + 4i$$

$$\text{ج) لدينا } z_D = e^{\frac{2\pi}{3}i} z_C = 4\sqrt{3} + 4i = 2z_B \text{ ومنه النقطة } D \text{ صورة النقطة } B \text{ بالتحاكي الذي } O \text{ مركزه ونسبته } 2$$

$$\text{د) لدينا } \frac{z_O - z_A}{z_D - z_A} = -\frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\frac{\pi}{2}i} \text{ وهو عدد تخيلي صرف وعليه يكون المثلث } OAD \text{ قائم في } A.$$

التمرين الخامس (07 نقالها) لجباري

أ. الجن الأول

$$1- \text{ لدينا } g \text{ دالة عددية مُعرّفة على المجال }]0, +\infty[\text{ بـ } g(x) = e + \frac{\ln x}{x}$$

حساب نهايات الدالة g بجوار أطراف مجموعة تعريفها.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = e + \infty \text{ بجوار } g \text{ نهاية الدالة}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty \text{ بجوار } g \text{ نهاية الدالة}$$

الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ ودالتها المشتقة هي :

$$g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

ومنه الدالة g متزايدة تماماً على $]0; e[$ و متناقصة تماماً على $]e; +\infty[$. وجدول تغيراتها هو:

x	0	e	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$\frac{1+e^2}{e}$	e

(2) حل في المجال $]0, +\infty[$ المعادلة $g(x) = e$ يكافئ $x = 1$

(3) أحسب $g\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ ومنه إشارة $g(x)$ على المجال $]0, +\infty[$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

١١. نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + ex + e$

(1) حساب نهايات الدالة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها. وتفسير النتائج هندسياً.

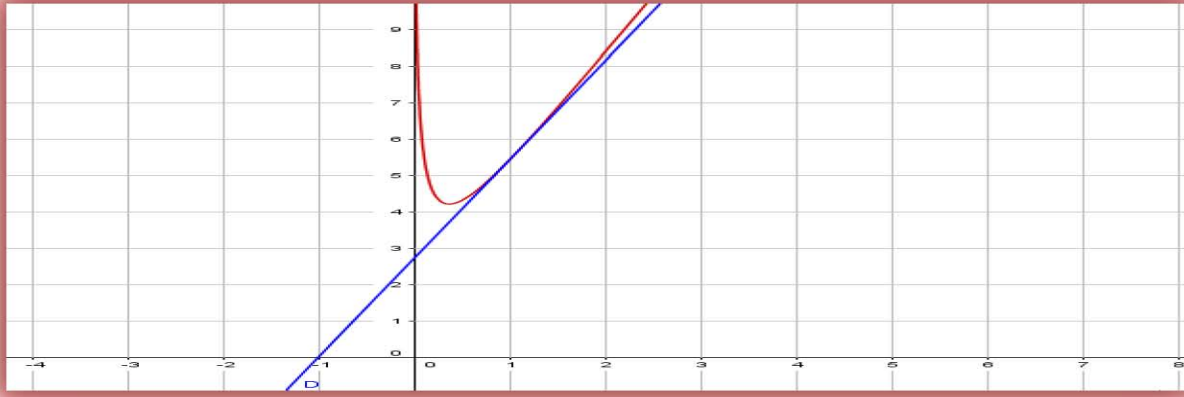
نهاية الدالة f بجوار $+\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ونهاية الدالة f بجوار 0 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

(2) الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0, +\infty[$ ودالتها المشتقة $f'(x) = g(x)$ وبما أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$. وجدول تغيراتها هو

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{3+2e}{e}$	$+\infty$

(3) معادلة المماس (Δ) هي $y = ex + e$ لداسة الوضع النسبي ندرس إشارة $\frac{1}{2}(\ln)^2$ أي أن المنحنى (C_f) فوق المستقيم (Δ) من أجل كل $x > 0$

(4) أنشئ (C_f)



(5) المناقشة، بيانيًا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة، ذات المجهول الحقيقي x ، حيث $(\ln(x))^2 - 2x(m - e) = 0$ يكافئ $(\ln(x))^2 = 2x(m - e)$ يكافئ $\frac{1}{2}(\ln(x))^2 + ex = xm$ يكافئ $\frac{1}{2}(\ln(x))^2 = x(m - e)$ مناقشة دورانية هي $f(x) = xm + e$ ، يكافئ $\frac{1}{2}(\ln(x))^2 + ex + e = xm + e$ فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم المتحرك الدوراني ذو المعادلة $y = mx + e$

- $m < e$ تكافئ لا توجد حلول
- $m = e$ حل مضاعف موجب .
- $m > e$ حل مضاعف موجب

2018

بسم الله الرحمن الرحيم

بسم الله الرحمن الرحيم

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقاط)

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ: $u_0 = \frac{3}{2}$ و $u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1}$

(1) برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1 < u_n < 2$.

(2) بين أن (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) نعتبر المتتالية $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بـ: $t_n = \ln(u_n - 1)$

أ- بين أن $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ ثم عبر عن t_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n

ب- عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (t_n)$.

ج- أحسب الجداء $P_n = t_0 \times t_1 \times \dots \times t_n$

التمرين الثاني: (4 نقاط)

(1) حل، في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$. ثم أكتب الحلول على الشكل الأسّي.

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقطة A ، التي لاحقتها

$$z_A = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

عين z_B لاحقة النقطة B التي تنتمي للمحور التخيلي بحيث يكون المثلث OBA متقايس الأضلاع.

(3) ليكن R الدوران الذي مركزه النقطة O وزاويته $-\frac{\pi}{3}$.

أ) أكتب العبارة المركبة للدوران R .

ب) أوجد $z_{A'}$ لاحقة النقطة A' صورة النقطة A بالدوران R .

(4) (T) مجموعة النقط M ، ذات اللاحقة z ، من المستوي المركب بحيث: $|iz - 2 - i| = |\bar{z} + 3i|$.

عين طبيعة المجموعة (T) ثم أنشئها.

التمرين الثالث: (5 نقاط)

صندوق يحتوي على 4 كرات حمراء و كرتين سوداوين. الكرات متماثلة

و لا نفرق بينها باللمس. نسحب عشوائيا على التوالي ودون ارجاع كرتين من الصندوق.

(1) أحسب احتمال كل من الحوادث التالية : A_0 " لم نسحب أي كرات سوداء "

A_1 " سحب كرة سوداء بالضبط . "

A_2 " سحب كرتين سوداوين . "

(2) بعد السحب الأول بقيت في الصندوق 4 كرات ، نجري سحباً آخر على التوالي ودون ارجاع ، نعتبر

الحوادث التالية : B_0 " لم نسحب أي كرات سوداء عند السحب الثاني . "

B_1 " سحب كرة سوداء بالضبط في السحب الثاني . "

B_2 " سحب كرتين سوداوين عند السحب الثاني . "

(أ) أحسب $P(B_0)$ ، $P_{A_1}(B_0)$ ، $P_{A_2}(B_0)$ واستنتج $P(B_0)$

(ب) اذا علمت أنه عند السحب الثاني حصلنا على كرة سوداء بالضبط ، فما هو احتمال الحصول على كرة سوداء بالضبط عند السحب الأول .

(3) نسحب عشوائياً 3 كرات من الصندوق في آن واحد . نعتبر المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

(أ) أعط قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضي.

(ب) احسب التباين والانحراف المعياري.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I. لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ $g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln(x)$.

(1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α يحقق $1 < \alpha < 2$

(3) استنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل x من $]0, +\infty[$.

II. لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2 \ln x}{x^2 + x}$ وليكن (C_f) تمثيلها

البياني في معلم متعامد للمستوي . وحدة الطول : محور الفواصل $1 \text{ cm} \rightarrow 1$ ، محور الترتيب $1 \text{ cm} \rightarrow 5$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ فسر هندسياً النتائج.

(2) أ- بين أنه من أجل كل x من المجال $]0, +\infty[$ أن : $f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} g(x)$

ب - استنتج اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) عين معدلة المماس (Δ) عند النقطة ذات الفاصلة 1

(4) أنشئ (Δ) و (C_f) . تعطى $f(\alpha) = 0,4$

(5) ناقش ، بيانياً ، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ، ذات المجهول الحقيقي x ،

حيث $x^2 + x + 2 \ln x = m(x^3 + x^2)$

انتمى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

صندوق U_1 يحتوي على 4 كرات تحمل الرقم 2 وكرتين تحملان الرقم 1 و صندوق U_2 يحتوي على 3 كرات حمراء و 4 كرات خضراء الكرات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس. نسحب عشوائيا كرة من الصندوق U_1 .

(1) أحسب احتمال كل من الحوادث التالية:

"A الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1."

"B الكرة المسحوبة تحمل الرقم 2."

(2) نعتبر التجربة التالية نسحب كرة من الكيس U_1 إذا كانت تحمل الرقم 1 نسحب كرة من U_2 و

إذا كانت تحمل الرقم 2 نسحب كرتين في ان واحد من U_2

" B_0 " أحسب احتمال الحصول على كرة حمراء."

" B_1 " أحسب احتمال الحصول على كرتين حمراء."

(3) نسحب عشوائيا 3 كرات من الصندوق U_2 وفي آن واحد و نعتبر المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

(أ) أعط قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و أحسب أمله الرياضياتي.

(ب) احسب التباين والانحراف المعياري.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس. نعتبر النقط $A(2,1,3)$ ، $B(-3,-1,7)$ و $C(3,2,4)$.

(1) أثبت أن النقط A ، B و C تعين مستويا وحيدا (ABC) .

(2) ليكن (Δ) المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيط $t \in \mathbb{R}$
$$(\Delta) \begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

بين أن المستقيم (Δ) يُعامد المستوي (ABC) ، ثم أكتب معادلة ديكرتية للمستوي (ABC) .

(3) نسمي H النقطة المشتركة بين (Δ) و (ABC) .

بين أن H هي مرجح الجملة المثقلة $(A,-2);(B,-1);(C,2)$

(4) نعتبر $(T_1), (T_2)$ مجموعتي النقط من الفضاء والتي تحقق:

$$(T_1): (-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC})(\vec{MB} - \vec{MC}) = 0 \text{ و } (T_2): \|-2\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \sqrt{29}$$

عين طبيعة كل من المجموعتين $(T_1), (T_2)$ ، ثم عين طبيعة تقاطعهما.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر في مايلي النقط A ، B و C التي لواحقتها $z_A = 4 - 3i$ ، $z_B = 4 + 3i$ و $z_C = 7$ على الترتيب عين الاقتراح الصحيح مع التعليل من بين الاقتراحات التالية:

(1) المعادلة $z^3 - 15z^2 + 81z - 175 = 0$ للمتغير المركب z حيث $z_0 = 7$ حلا لها تقبل ثلاث حلول هي:
 (أ) $S = \{7, 4 - 3i, 4 + 3i\}$ (ب) $S = \{7, -4 - 3i, -4 + 3i\}$ (ج) $S = \{-7, 4 - 3i, 4 + 3i\}$

(2) العدد $\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right)^{2018}$ يساوي:

(أ) 1 (ب) 0 (ج) -1 .

(3) لدينا $z_A - z_C = i(z_B - z_C)$ المثلث ABC

(أ) قائم في C (ب) قائم في C ومتساوي الساقين (ج) متساوي الساقين .

(4) العبارة المركبة للدوران R الذي مركزه w ذات اللاحقة $z_w = 4$ ويحول النقطة C إلى النقطة B فإن العبارة المركبة لهذا التحويل :

(أ) $z' = iz + 4 - 4i$ (ب) $z' = 2iz + 3 - 4i$ (ج) $z' = iz + 3 - 4i$

(5) (T) مجموعة النقط M ، ذات اللاحقة z ، من المستوي المركب حيث يكون $\frac{z - z_B}{z - z_C}$ تخيلياً صرفاً جزؤه

التخيلي موجب هي :

(أ) المستقيم (AB) (ب) دائرة قطرها $[AB]$ (ج) هي نصف دائرة قطرها $[BC]$ باستثناء النقطتين B و C

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1. لتكن g دالة عددية معرفّة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2 - (2x + 1)e^{2x}$.

(1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيد α بحيث $0,1 < \alpha < 0,3$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II. لتكن f دالة عددية معرفّة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 2x - 1 - xe^{2x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس للمستوي.

(1) أحسب نهايات الدالة f بجوار أطراف مجموعة تعريفها. ثم فسر النتائج هندسيا.

(2) أثبت أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f ، وشكّل جدول تغيراتها.

(3) أثبت أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x - 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) ، ثم أدرس الوضع النسبي

لـ (C_f) و (Δ) .

(4) بين أن $f(\alpha) = -1 + \frac{4\alpha^2}{2\alpha + 1}$ ، جد حصر لـ $f(\alpha)$ ثم أنشئ (C_f) و (Δ) .

(5) بين أن الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $H(x) = \frac{1}{4}(2x - 1)e^{2x}$ ، دالة أصلية لـ $x \rightarrow xe^{2x}$ ، ثم

أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمتين $y = 2x - 1$ و $x = 0$ و $x = 1$

انتهى الموضوع الثاني

بالتوفيق في شهادة البكالوريا

لمادة المادة

الاستاذ : بالعبيدي محمد العربي

امتحان البكالوريا التجريبي رقم 01

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول:التمرين الأول: (04 نقاط)الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ؛ نعتبر النقط: $A(-2; -1; 3)$ ، $B(1; 3; 5)$ ،

$$C\left(2; -\frac{1}{2}; -4\right) \text{ و } D(2; -2; -3) \text{ والمستقيم } (\Delta) \text{ المعروف بتمثيله الوسيطى: } \begin{cases} x = 1+t \\ y = -2t \\ z = 3-6t \end{cases} \text{ و } t \in \mathbb{R}$$

1 عین تمثیلا وسیطیا للمستقیم (AB) .2 بین أن (Δ) و (AB) لیساً من نفس المستوي.3 (P) مستوي يوازي (Δ) ويشمل (AB) .أ- بین أن الشعاع $\vec{n}(2; -2; 1)$ شعاع ناظمي للمستوي (P) .ب- استنتج معادلة ديكرتية للمستوي (P) .ج- بین أن المسافة بين نقطة كيفية M من (Δ) والمستوي (P) مستقلة عن موضع M .4 تحقق أن النقطة D تنتمي إلى المستقيم (Δ) وأن النقطة C تنتمي إلى المستوي (P) .أ- بین أن المثلث ABC قائم في A ، و أحسب مساحته.ب- أحسب حجم رباعي الوجوه $ABCD$.التمرين الثاني: (04 نقاط)

g الدالة المعرفة على المجال $]-2; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = x - \ln(x+2)$ والمثلة بمنحنيا (C) في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس (الشكل في الورقة الملحقة)

1 احسب $g(-1)$ ، بقراءة بيانية حدد اتجاه تغير الدالة g 2 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = g(u_n)$ أ) مثل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 مستعينا بالمنحنى (C) (التمثيل على الورقة الملحقة)ب) برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -1$ ج) بين أن المتتالية (u_n) متناقصةد) استنتج أن المتتالية (u_n) مقاربة، أحسب نهايتها

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_0 = 0$ و $v_n = \ln[(u_0+2)(u_1+2)\cdots(u_{n-1}+2)]$ ، $n \geq 1$

أ) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3 - u_n$ ب) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_0+2)(u_1+2)\cdots(u_{n-1}+2)$

الصفحة 1 من 4

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- 1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ ، المعادلة ذات المجهول z : $z^2 + z + 1 = 0$
- 2) في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، نعتبر النقط A, B, C, D و F ذات اللواحق: $z_A = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_B = \overline{z_A}$, $z_C = -2$, $z_D = -2 + 2\sqrt{3}i$ و $z_F = \overline{z_D}$ على الترتيب.
 - أ) أكتب z_A و z_B على الشكل المثلثي، ثم علم النقط A, B, C, D و F . ب) ما طبيعة المثلث ABC ؟
 - 3) ليكن $\mathcal{R}$ الدوران الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث: $z' + 2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z + 2)$ أ) عين مركز وزاوية الدوران $\mathcal{R}$. ب) بين أن لاحقة النقطة E صورة النقطة D بالدوران $\mathcal{R}$ هي: $z_E = 1 + \sqrt{3}i$
 - ج) أكتب العدد $\frac{z_F - z_E}{z_D - z_E}$ على الشكل الجبري، ثم استنتج أن المستقيمين (ED) و (EF) متعامدان
 - 4) لكل عدد مركب z يختلف عن E ، نرفق العدد المركب z' حيث: $z' = \frac{z - z_C}{z - z_E}$ و لتكن (Γ_1) مجموعة النقط M ذات اللواحق z بحيث يكون z' عددا تخيليا صرفا - عين و أنشئ المجموعة (Γ_1) .
 - 5) أ) لتكن G مرجح الجملة $\{(A, |z_A|); (B, |z_B|); (C, |z_C|)\}$ حدد z_G لاحقة النقطة G .
 (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي حيث: $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$
 ب) تحقق أن C تنتمي إلى (Γ_2) ، ثم عين طبيعة المجموعة (Γ_2) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$) ولتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب: $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$
- الجزء 01: لتكن g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ب: $g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$
- 1) أدرس تغيرات الدالة g ، ثم شكل جدول التغيرات
 - 2) أثبت أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ وتحقق أن: $0,35 \leq \alpha \leq 0,36$ ثم إستنتج إشارة $g(x)$
- الجزء 02: 1) أحسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.
- 2) أحسب $f'(x)$ و استنتج تغيرات الدالة f
 - 3) أثبت أن: $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$ ، و استنتج حصر $f(\alpha)$
 - 4) أثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب لـ (C_f) بجوار $+\infty$ ، و حدد وضعية (C_f) بالنسبة لـ (Δ)
 - 5) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.
 - 6) أرسم (Δ) ، (T) و (C_f)
 - 7) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m بحيث تقبل المعادلة $-m - 1 + (x^2 + 2)e^{-x} = 0$ حل وحيد موجب.
 - 8) جد الأعداد الحقيقية a, b و c بحيث تكون الدالة $h(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$: دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة المعرفة ب: $x \mapsto (x^2 + 2)e^{-x}$
 - 9) جد مساحة الحيز $A(\alpha)$ المحدد بـ (C_f) المستقيم (Δ) والمستقيمين ذي المعادلتين $x = 0$ و $x = \alpha$.

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (05 نقاط)

- 1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 6z + 12 = 0$.
- 2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B لاحقاً على الترتيب: $z_B = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_A = 3 - i\sqrt{3}$.
 أ) بَيِّن أنه يوجد دوران r مركزه O ويحول A إلى B ، ماهي زاويته؟. إستنتج طبيعة المثلث OAB .
 ب) عَيِّن لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث OAB .
 3) (C) هي مجموعة القطر M ذات اللاحقة z حيث: $z = z_G + 2e^{i\theta}$ ، $(\theta \in \mathbb{R})$.
 أ) ما طبيعة (C) ؟ وما هي عناصرها المميزة؟.
 ب) أنشئ النقطة E من (C) حيث: $(\vec{u}; \overrightarrow{GE}) = \frac{\pi}{6}$.
 ج) بَيِّن أن: $z_E = 2 + \sqrt{3} + i$ ، ثم بَيِّن أن: $\arg(z_E) = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$.
 د) إستنتج القيمة المضبوطة لكل من: $\cos(\frac{\pi}{12})$ و $\sin(\frac{\pi}{12})$.

التمرين الثاني: (4 نقاط)

- (u_n) المتتالية العددية المعرفة ب: $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n$.
- 1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n \geq n$ ، إستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- 2) (v_n) المتتالية المعرفة ب: $v_n = u_n - 4n + b$ حيث b عدد حقيقي.
 أ) عين b حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
 ب) أكتب v_n بدلالة n ثم إستنتج u_n بدلالة n . (ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- 3) نضع، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ أحسب S_n بدلالة n ثم بين أن، $S'_n = S_n + (n+1)(2n-8)$.

التمرين الثالث: (4 نقاط)

- نفترض أن لدينا ثلاث أكياس متماثلة، الكيس الأول U_1 يحوي 3 كريات حمراء و 5 كريات سوداء، الكيس الثاني U_2 يحوي كريتين حمراوين وكرية سوداء، أما الكيس الثالث U_3 فيحوي كريتين حمراوين و 3 كريات سوداء (كل الكريات متماثلة ولا نميز بينها في اللمس). نختار كيساً عشوائياً ونسحب منه كرية واحدة:
- 1) أنجز شجرة الاحتمالات الموافقة لمعطيات النص مبرزاً عليها احتمالات الحوادث
 - 2) إذا كانت الكرية المسحوبة حمراء، ما احتمال أن تكون من الكيس U_2 ؟.
 - 3) نضع جميع كريات الأكياس السابقة في صندوق واحد ونسحب منه كريتين في آن واحد. إذا كانت الكريتان المسحوبتان حمراوين يربح اللاعب 13 دج و إذا كانت الكريتان المسحوبتان سوداوين يخسر اللاعب 16 دج. أما إذا كانت الكريتان المسحوبتان من لونين مختلفين يربح اللاعب 3 دج. ليكن X المتغير العشوائي لهذه اللعبة أ- عَيِّن قانون احتمال المتغير العشوائي X .

ب- احسب الأمل الرياضي $E(X)$ لهذه اللعبة ، هل اللعبة عادلة؟

ج- أحسب التباين $V(X)$ و الإنحراف المعياري $\delta(X)$ للمتغير العشوائي X .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

الجزء الأول: g الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ ب :

$g(x) = 2x \ln x - x - 1$ المنحنى (C) المقابل هو التمثيل

البياني للدالة g في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد

و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ المنحنى (C) يقبل مماسا موازيا لمحور

الفواصل عند النقطة التي فاصلتها $\frac{1}{\sqrt{e}}$ و (Δ) هو المماس لـ (C) في

النقطة التي فاصلتها 1

(1) بقراءة بيانية:

أ، حدد $g'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ ، $g(1)$ و $g'(1)$ ، ثم عين معادلة للمماس (Δ) ، ب، شكل جدول تغيرات الدالة g .

(2) أ، علل وجود عدد حقيقي α حيث: $2 < \alpha < 2,1$ و $g(\alpha) = 0$ ، ب، إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$

$$\begin{cases} f(x) = x^2(\ln x - 1) - x ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
 الجزء الثاني: f الدالة العددية المعرفة على $]0; +\infty[$ ب :

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أ، بين أن الدالة f مستمرة عند الصفر من اليمين

ب، بين أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = -1$ ، إستنتج أن الدالة f تقبل الاشتقاق من اليمين، ثم أكتب معادلة نصف المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة O من اليمين .

(2) أ، أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب، بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ، $f'(x) = g(x)$ وشكل جدول تغيرات f

(3) بين أن $f(\alpha) = -\left(\frac{\alpha^2 + \alpha}{2}\right)$ ، ثم إستنتج حصر لـ $f(\alpha)$

(4) ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته $y = -x$

أ، أدرس الوضعية النسبية لـ (Δ) و (C_f) . ب، أنشئ (Δ) و (C_f) . نأخذ: $f(3,55) \approx 0$

(5) F الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ ب : $F(x) = \frac{x^3}{9}(3 \ln x - 4)$

أ، أحسب $F'(x)$ ، ثم إستنتج دالة أصلية للدالة $h: x \mapsto x + f(x)$ على $]0; +\infty[$.

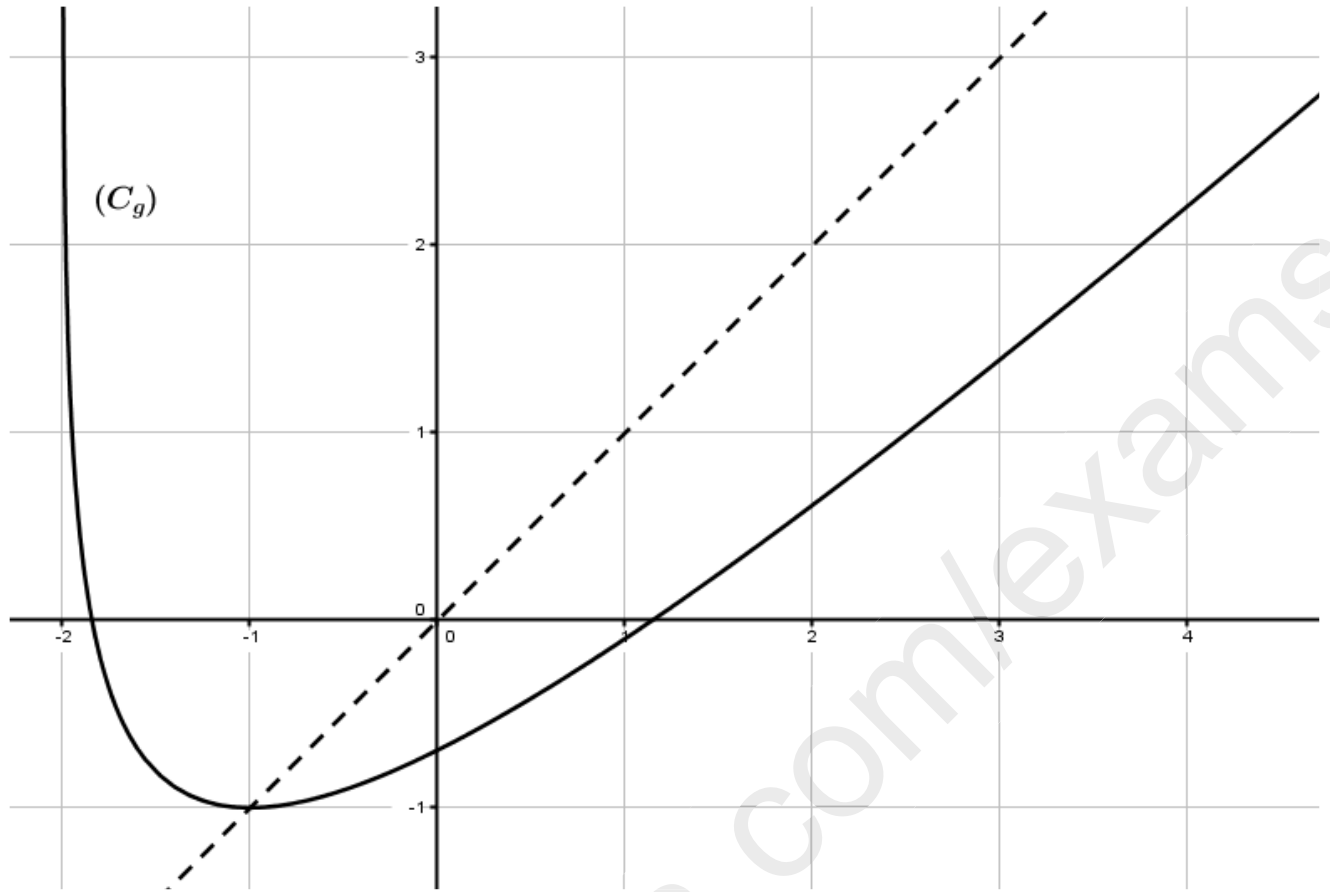
ب، بين أن مساحة حيز المحدد بـ (C_f) و (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = e$ و $x = 1$ تساوي $A = \frac{e^3 - 4}{9}$

القسم :

اللقب :

الاسم :

الورقة الملحقة :

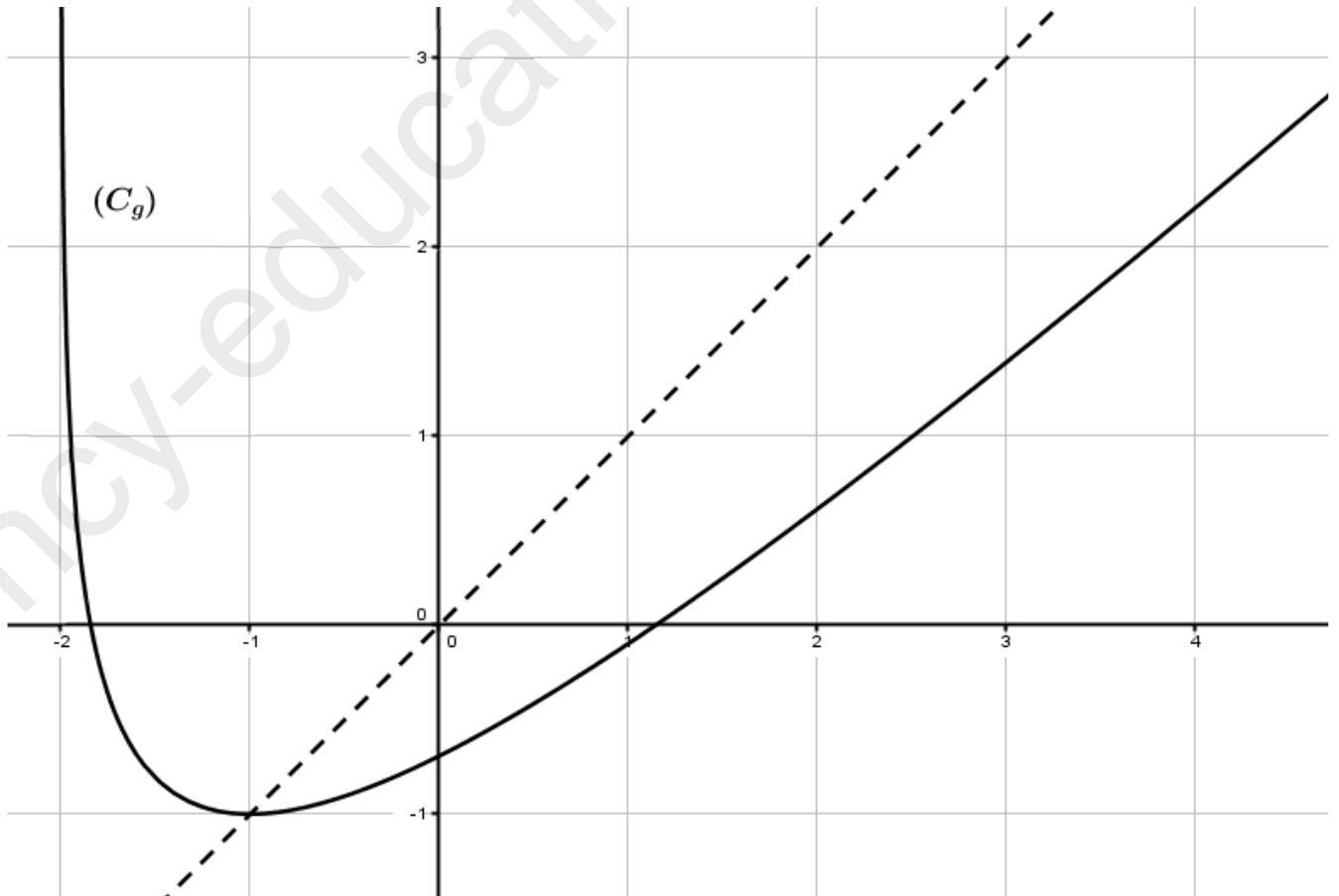


القسم :

اللقب :

الاسم :

الورقة الملحقة :



على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : 04 نقاط

- يحتوي كيس على 4 كرات بيضاء تحمل الأرقام 0, 1, 1, 2 و 4 كرات حمراء تحمل الأرقام 1, 1, 2, 2 .
نسحب عشوائيا في ان واحد 3 كرات من الكيس .
(1) أحسب عدد الحالات الممكنة للسحب .
(2) أحسب احتمال الحصول على :
أ - ثلاث كرات من نفس اللون .
ب - ثلاث كرات تحمل نفس الرقم .
ت - ثلاث كرات أرقامها مختلفة مثنى مثنى .
(3) ليكن المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 1 .
أ - عين قانون احتمال المتغير العشوائي X .
ب - أحسب الأمل الرياضي .
ت - أحسب التباين والإخلاف المعياري .

التمرين الثاني : 04 نقاط

- (1) حل في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z التالية : $(z^2 + 3)(z^2 - 6z + 21) = 0$
(2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ النقط : $A; B; C$ و D التي لواحقتها على الترتيب : $z_A = \sqrt{3}i$; $z_B = -\sqrt{3}i$; $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$; $z_D = \overline{z_C}$
- بين أن النقط $A; B; C$ و D تنتمي الى نفس الدائرة (C) التي مركزها Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = 3$ يطلب تعيين نصف قطرها .
(3) لتكن النقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة لمبدأ المعلم O .
أ - بين أن : $(z_C - z_B) = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_E - z_B)$ ثم إستنتج طبيعة المثلث BEC .
ب - بين انه يوجد دوران R مركزه النقطة B و يحول النقطة E إلى النقطة C . يطلب تعيين زاويته .
(4) نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :
$$z' + i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}(z + i\sqrt{3})$$

أ - عين طبيعة S و عناصره المميزة .
ب - عين طبيعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z والتي تحقق : $z = 3 + 2\sqrt{3}e^{i\theta}$ حيث θ عدد حقيقي
ت - عين طبيعة (E') صورة (E) بالتحويل S وعناصرها الهندسية .

نعتبر (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0 = 4$ والعلاقة التراجعية : $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n - 1}$.

$$(1) \quad f(x) = \frac{x^2}{2x-1} \quad \text{كما يلي : } [1; +\infty[$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوى المنسوب الى معلم متعامد $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

أ- أعد رسم الشكل على ورقة الاجابة ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 (دون حسابها موضحا خطوط الإنشاء)
ث- ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها.

ج- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n > 1$.

$$(2) \quad \text{نعتبر المتتالية } (v_n) \text{ المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كما يلي : } v_n = \ln\left(1 - \frac{1}{u_n}\right)$$

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول

ب- أكتب v_n بدلالة n . ثم إستنتج أن : $u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}}$ تحقق من صحة تخمينك حول اتجاه التغير و التقارب.

التمرين الرابع : 07 نقاط

الجزء الأول : لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = 2 - x + e^x$

1- أدرس تغيرات الدالة g . ثم شكل جدول تغيراتها.

2- إستنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x) > 0$.

الجزء الثاني : لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x + (x-1)e^{-x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. الوحدة $\|\vec{i}\| = 2cm$.

1- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, فسر النتيجةين بيانيا.

- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب للمنحنى (C_f) مجوار $+\infty$.

- أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = e^{-x} \cdot g(x)$.

أ- إستنتج اتجاه تغير الدالة f . ثم شكل جدول تغيراتها.

ب- بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف ω يطلب تعيين إحداثياتها.

ت- أكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند نقطة الإنعطاف.

ث- بين أن المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,30 \leq \alpha \leq 0,40$.

3- أنشئ (T) , (Δ) والمنحنى (C_f) .

4- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $x - f(x) = f'(x) - 1 - e^{-x}$.

- أحسب مساحة للحيز المستوي S_α المحدد بالمنحنى (C_f) , و المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين

الموضوع الثاني

التمرين الأول : 04 نقاط

لدينا U_1 , U_2 و U_3 ثلاث صناديق .

يحتوي الصندوق U_1 على 4 كرات حمراء و 3 كرات خضراء و يحتوي الصندوق U_2 على كرتين حمراويتين و 4 كرات خضراء و يحتوي الصندوق U_3 على كرتين حمراويتين و 3 كرات خضراء .

نسحب من أحد الصناديق عشوائيا كرة واحدة .

- (1) أنشئ شجرة الإحتمالات التي تنمذج هذه الوضعية.
- (2) ماهو إحتمال سحب كرة خضراء من الصندوق U_2 .
- (3) أحسب إحتمال سحب كرة خضراء .
- (4) علما أن الكرة المسحوبة خضراء ما هو إحتمال أنها من الصندوق U_2 ؟

التمرين الثاني : 05 نقاط

في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$, نعتبر النقط A , B و C التي لاحقاتها $z_A = 2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$, $z_C = \overline{z_B}$ على الترتيب .

1. أ. أنشئ النقط A , B و C .

ب. أكتب كل من z_C , z_B و $\frac{z_B}{z_C}$ على الشكل الاسي . إستنتج طبيعة المثلث OBC .

2- اثبت أن نوع الرباعي $OBAC$ هو معين .

3- لتكن (γ) مجموعة النقط $M(Z)$ من المستوى حيث : $|z| = |z - 2|$ عين ثم أنشئ المجموعة (γ) .

11- f تحويل نقطي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z حيث $z \neq z_A$, النقطة M' ذات اللاحقة z'

$$\text{حيث : } z' = \frac{-4}{z-2}$$

1. أ- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z' = z$

ب- استنتج صورتى النقطتين B , C بواسطة التحويل f .

$$2. \text{ أثبت أن : } |z' - 2| = \frac{2|z|}{|z - 2|}$$

3. بين أنه عندما تمسح النقطة M المجموعة (γ) , فان النقطة M' تمسح دائرة (C) يطلب تعيين مركزها و نصف قطرها , ارسم الدائرة (C) .

التمرين الثالث : 04 نقاط

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. نعتبر النقط $A(-2; 2; -1)$, $B(1; -2; 1)$, $C(-1; 4; -1)$

1- بين أن النقط A , B , C تعين مستويا .

- تحقق أن $\vec{n}(2; -1; -5)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) . ثم إستنتج معادلة ديكارتية له .

2- ليكن المستوي (P) ذي المعادلة الديكارتية $2x - y + z - 3 = 0$.

أ) بين أن المستويين (P) و (ABC) متعامدان .

ب) أوجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) تقاطع المستويين (P) و (ABC) .

- ت) أحسب المسافة بين النقطة $F(1;-2;0)$ وكل من المستويين (ABC) و (P) ثم إستنتج $d(F;(\Delta))$
- 3- عين (E) مجموعة النقط M من الفضاء حيث : $d(M;(P)) = \sqrt{5} \times d(M;(ABC))$.

التمرين الرابع : 07 نقاط

الجزء الأول : لتكن الدالة g المعرفة على $[1; +\infty[$ كما يلي : $g(x) = 1 - x + \ln(2x)$

- 1) أدرس تغيرات الدالة g . ثم شكل جدول تغيراتها .
 - 2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $[1; +\infty[$ حلا وحيدا α . ثم بين أن : $1 + \ln(2\alpha) = \alpha$
 - 3) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 + \ln(2u_n)$.
- في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$, نسمي (C_h) منحنى الدالة $h(x) = 1 + \ln(2x)$
- أ- بين كيفية إنشاء المنحنى (C_h) من خلال التمثيل البياني للدالة المرجعية : $x \mapsto \ln x$.
 - ب- بإستعمال المنحنى (C_h) مثل على حامل محور الفواصل الحدود : u_0, u_1, u_2, u_3 .
 - ت- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.
 - ث- إستنتج إجهاد تغير المتتالية (u_n) وتقاربها . عين نهايتها .

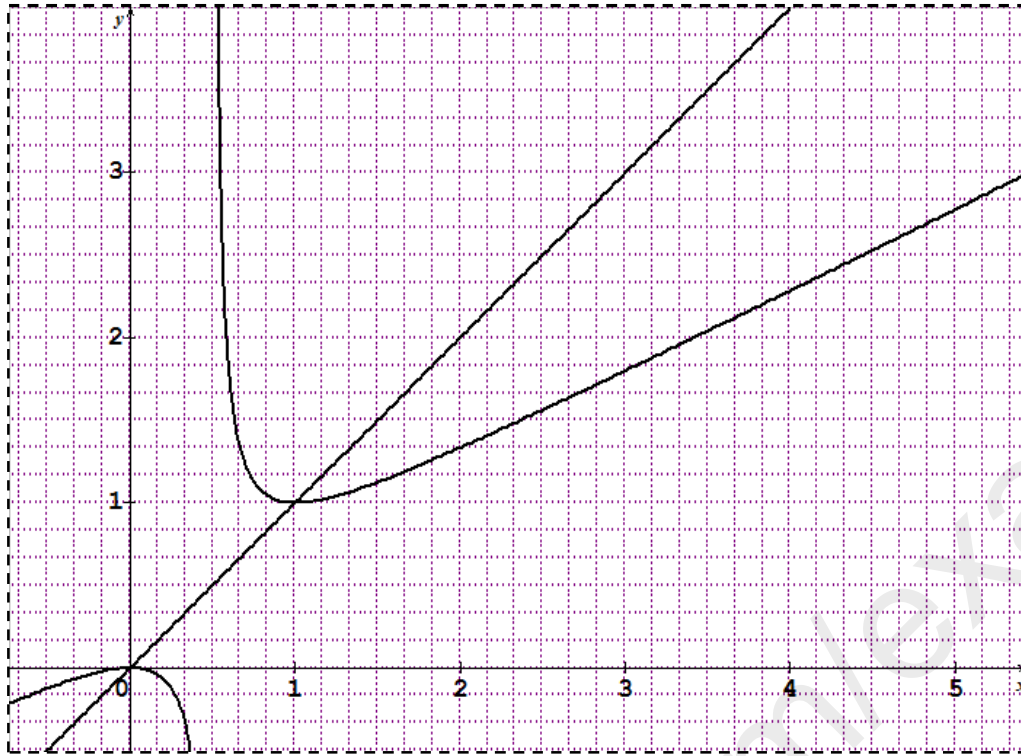
الجزء الثاني : لتكن الدالة f المعرفة على $[1; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = (x-1)e^{1-x}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$. الوحدة $\|\vec{i}\| = 2cm$.

- 1- من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$ نضع : $F(x) = \int_1^x f(t) dt$.
- 2- بين أنه من أجل كل $x \geq 1$ فإن : $f(x) \geq 0$ ثم إستنتج أن الدالة F متزايدة على المجال $[1; +\infty[$.
- 3- بإستعمال المكاملة بالتجزئة , أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$ فإن : $F(x) = 1 - xe^{1-x}$.
- 4- بين أن المعادلة $F(x) = \frac{1}{2}$ تكافئ المعادلة : $1 + \ln(2x) = x$.
- 5- λ عدد حقيقي أكبر من أو يساوي 1 . نسمي S_λ جزء المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) , ومحور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=\lambda$. عين العدد λ بحيث يكون $S_\lambda = 2 . cm^2$.

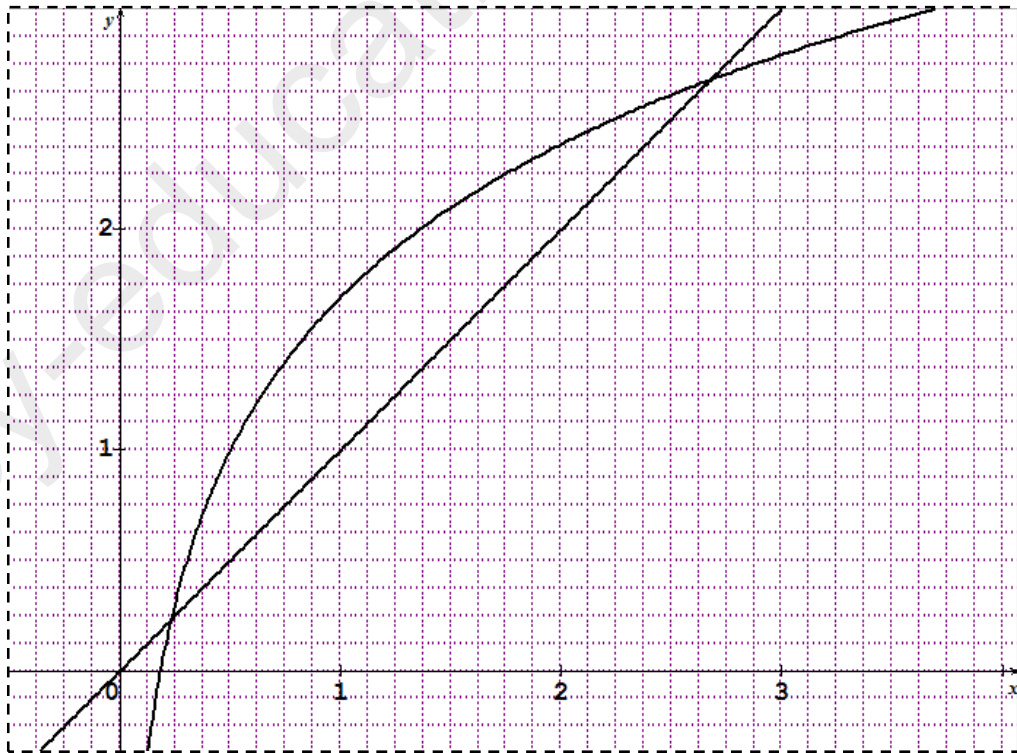
إنتهى الموضوع الثاني

خاص بالتمرين الثالث - الموضوع الأول :



الإسم واللقب : قسم :

خاص بالتمرين الرابع - الموضوع الثاني :



الإسم واللقب : قسم :

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول: (5 نقاط)

يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و 5 كرات حمراء (لا نميز بينها عند اللمس) .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من هذا الصندوق

1) نعتبر الحادثتين التاليتين :

A : (الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون) .

B : (الحصول على ثلاث كرات مختلفة مثنى مثنى) .

بين أن :

$$P(B) = \frac{3}{11}$$

$$P(A) = \frac{3}{44}$$

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط بكل سحابة لثلاث كرات بعدد الألوان التي تحملها :

أ) حدد القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X

ب) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X وأسب الأمل الرياضي $E(X)$

التمرين الثاني : (5 نقاط)

نعتبر في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ النقطتين A و B لاحقتها $\vec{z}_A = 4 + 2i$ و $\vec{z}_B = 3 - i$

1) أكتب على الشكل الجبري ثم على الشكل المثلثي العدد المركب $\frac{\vec{z}_B - \vec{z}_A}{\vec{z}_B}$

1 من 6

E) إستنتج طبيعة المثلث ABO

2) نعتبر التحويل النقطي R في المستوي الذي يرفق بكل نقطة M لاحقتها $\vec{z}$ النقطة M' لاحقتها $\vec{z}'$ والذي

يحول النقطة A إلى B ويحول النقطة B إلى O .

(ج) بيّن أنّ العبارة المركبة للتحويل النقطة R هي: $z' = -iz + 1 + 3i$.

(د) عيّن طبيعة التحويل R وعناصره المميزة.

(أ) عيّن z_C لاحقة النقطة C صورة النقطة O بالتحويل R .

(أ) إستنتج طبيعة الرباعي $ABOC$.

(أ) عيّن مجموعة النقط M من المستوي لاحقتها z حيث: $|z - 4 - 2i| = |z|$.

(ج) من أجل $z \neq 2 + i$ نضع: $L = \frac{z' - 2 - i}{z - 2 - i}$ بيّن أنّ: $L = -i$.

(د) عيّن قيم العدد الطبيعي n بحيث يكون L^n عدداً حقيقياً.

(أ) بيّن أنّ: $(z' - 2 - i)^2 + (z - 2 - i)^2 = 0$.

التمرين الثالث: (6 نقاط)

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]1, +\infty[$ حيث: $g(x) = x^2 - 2x - 4 \ln(x-1)$ (حيث $\ln$: اللوغاريتم النيبيري)

(Γ) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل المقابل.

(1) بقراءة بيانية للمنحنى (Γ) عيّن عدد حلول المعادلة: $g(x) = 0$.

(2) أحسب $g(2)$ ثم بين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $2,87 < \alpha < 2,88$.

(3) إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $]1, +\infty[$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $]1, +\infty[$ حيث: $f(x) = x - 3 + \frac{4 \ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$.

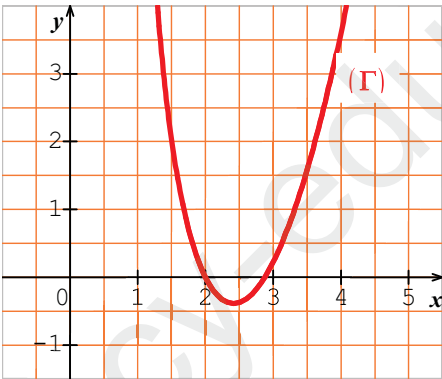
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسر النتيجة بيانياً ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

(ج) (2) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x - 3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

(د) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

(ج) (3) بيّن أنّه من أجل كل x من $]1, +\infty[$ لدينا: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$.



٤) إستنتج إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

4) أرسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) (نأخذ : $f(\alpha) = 3,9$)

5) لتكن الدالة h المعرفة على $]1, +\infty[$ كما يلي : $h(x) = [\ln(x-1)]^2$

٢) أحسب $h'(x)$ ؛ ثم إستنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1, +\infty[$

٤) أحسب التكامل $\int_2^5 f(x) dx$ ؛ ثم فسر النتيجة بيانياً .

التمرين الرابع : (4 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على N كما يلي : $u_0 = e$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

حيث : e هو أساس اللوغاريتم النيبيري .

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $v_n = \ln u_n$:

١) بيّن أنّ (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول .

٤) أكتب v_n بدلالة n ؛ ثم إستنتج عبارة u_n بدلالة n

2) من أجل كل عدد طبيعي n ؛ نضع : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ؛ $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$

٢) أثبت أنّ : من أجل كل عدد طبيعي n : $P_n = e^{S_n}$

٤) أكتب عبارة S_n بدلالة n ؛ ثم إستنتج عبارة P_n بدلالة n

١) عيّّن نهاية المتتالية (S_n) ؛ إستنتج نهاية المتتالية (P_n)

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد متجانس. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

ليكن (P_1) المستوي الذي معادلته: $-2x + y + z - 6 = 0$ و (P_2) المستوي الذي معادلته: $x - 2y + 4z - 9 = 0$.
(1) أثبت أن: (P_1) و (P_2) متعامدان.

(2) ليكن (D) المستقيم المعرف بالتمثيل الوسيط: $\begin{cases} x = 2t - 7 \\ y = 3t - 8 \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

أثبت أن المستقيم (D) هو تقاطع المستويين (P_1) و (P_2) .
(3) لتكن M_t نقطة كيفية من المستقيم (D) إحداثياتها $M_t(2t - 7, 3t - 8, t)$ ولتكن A النقطة التي إحداثياتها $A(-9, -4, -1)$.
ولتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(t) = AM_t^2$.
(4) أكتب $f(t)$ بدلالة t .

(5) أدرس اتجاه تغير الدالة f ؛ إستنتج قيمة للعدد الحقيقي t_0 التي من أجلها تكون المسافة AM أصغر.

ثم عيّن إحداثيات النقطة $I = M_{t_0}$.

(6) أثبت أن النقطة I هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) .

(7) (D) والعمودي على المستقيم AM الذي يشمل (Q) عيّن معادلة ديكرتية للمستوي (Δ) .

التمرين الثاني: (3 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 9$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$.

ولتكن المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث: $v_n = u_n + 6$.

(1) بيّن أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

(2) أكتب v_n بدلالة n ؛ ثم إستنتج عبارة u_n بدلالة n .

(3) نعتبر المجموعين S_n و S'_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ و $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

أحسب S_n بدلالة n ثم إستنتج S'_n بدلالة n .

(2) نعرف المتتالية (w_n) بـ: من أجل كل عدد طبيعي n لدينا: $w_n = \ln(v_n)$ (حيث: $\ln$ اللوغاريتم النيبيري).

(3) بيّن أن (w_n) متتالية حسابية يُطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

(4) أحسب بدلالة n المجموع: $S''_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$; إستنتج النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} S''_n$.

التمرين الثالث : (6 نقاط)

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

تعطى النقط A ; B ; C ; D التي لواحقتها $\mathcal{Z}_A = -2$; $\mathcal{Z}_B = 2$; $\mathcal{Z}_C = -1+i$; $\mathcal{Z}_D = 1-3i$.

(1) أثبت أن D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A,5); (B,3); (C,-6)\}$.

(2) عيّن مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة $\mathcal{Z}$ حيث: $|\mathcal{Z}+2| = |\mathcal{Z}+1-i|$.

(3) أكتب العدد المركب $\frac{\mathcal{Z}_D - \mathcal{Z}_B}{\mathcal{Z}_C - \mathcal{Z}_B}$ على الشكل الآسي ثم إستنتج طبيعة المثلث BCD .

(4) أكتب العدد المركب $\frac{\mathcal{Z}_D - \mathcal{Z}_A}{\mathcal{Z}_C - \mathcal{Z}_A}$ على الشكل الآسي.

(5) إستنتج أن D هي صورة C بتحويل نقطي f يُطلب تعيين طبيعته وعناصره المميزة.

(6) إستنتج $|\mathcal{Z}_A - \mathcal{Z}_B|$ حيث B هي صورة B بالتحويل f ثم أحسب عندئذ مساحة المثلث ABB' .

(7) لتكن النقطة Ω ذات اللاحقة $\mathcal{Z}_\Omega = -\frac{1}{2}$. عيّن العبارة المركبة للتحاكي h الذي مركزه Ω ويحول D إلى C .

التمرين الرابع : (7 نقاط)

لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 - e^{2x} - 2x e^{2x}$.

(1) عيّن نهاية الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

(2) أدرس إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

(3) أحسب $g(0)$ ثم إستنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(4) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = x + 3 - x e^{2x}$.

نسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

٢) عيّن نهاية الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.

٣) بيّن أنّ المنحني (C_f) يقبل مقارب مائل (Δ) يُطلب تعيين معادلة له.

٤) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

٥) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x) = g(x)$.

٦) إستنتج إتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

٧) بيّن أنّ (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين فاصلتهما α و β حيث: $-3,5 < \alpha < -3$ و $0,5 < \alpha < 1$.

٨) أرسم المستقيم (Δ) والمنحني (C_f) .

٩) دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $h(x) = \frac{1+3x-e^{\frac{2}{x}}}{x}$.

١٠) بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

١١) أحسب $h'(x)$ ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة h وشكل جدول تغيراتها.

وفق الله الجميع

متمنين منكم الدعاء خالص الدعاء

على المترشح أن يختار موضوعا واحدا من الموضوعين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4 نقاط)

(u_n) متتالية معرفة على $\square$ بـ $u_0 = -1$ ، $u_1 = \frac{1}{2}$ و من أجل كل n من $\square$: $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

و لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\square$ بـ: $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

1) أ - اثبت أن (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول.

ب - اكتب بدلالة n عبارة الحد العام v_n .

ج - احسب بدلالة n المجموع: $s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ثم حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$.

2) نضع من أجل كل n من $\square$: $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

أ - اثبت أن (w_n) حسابية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول.

ب - اكتب بدلالة n عبارة الحد العام w_n ثم عين أصغر عدد طبيعي n الذي يحقق: $e^{w_n} > 2018$

التمرين الثاني: (4 نقاط)

يضم كيس خمس كرات بيضاء مرقمة من 1 إلى 5 وثلاث كرات حمراء مرقمة من 6 إلى 8 وكرتين خضراوين تحملان الرقمين 9 و 10 (الكرات لا نفرق بينها عند اللمس). نسحب عشوائيا كرتين من الكيس في آن واحد.

1) ما احتمال وقوع الحوادث التالية: A "الكرتان المسحوبتان تحملان رقمين فرديين" .

B "الكرتان المسحوبتان من نفس اللون" و C "الكرتان المسحوبتان من لونين مختلفين"

هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟

2) ما احتمال سحب رقم زوجي على الأقل ؟

3) ما احتمال سحب كرتين تحملان رقمين فرديين علما أنهما من لونين مختلفين ؟

4) ما هو عدد الكرات البيضاء الممكن إضافتها إلى الكيس حتى يكون عدد الحالات الممكنة يساوي 120 ؟

التمرين الثالث: (5 نقاط)

(I) نعتبر الأعداد المركبة: $z_1 = \frac{-\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ، $z_2 = -1 - i$ و $z_3 = z_1 \times z_2$

(1) اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسّي ثم استنتج الشكل الأسّي لعدد z_3 .

(2) اكتب z_3 على الشكل الجبري ثم استنتج القيم المضبوطة لـ: $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$

(II) ليكن كثير الحدود: $p(z) = |z|^2 - 3(z - \bar{z}) - 13 + 12i$ حيث: $z = x + iy$ و x و y عدنان حقيقيان.

(1) اكتب $p(z)$ على الشكل الجبري.

(2) عين (E) مجموعة النقط $M(x; y)$ حتى يكون $p(z)$ تخيلي صرف.

(III) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ النقط A ، B حيث:

$z_A = z_1$ و $z_B = z_2$ و f تحويل نقطي مركزه المبدأ و يحول النقطة A إلى B .

(1) بين أن التحويل f دوران .

(2) حدد صورة (E) بالتحويل f .

التمرين الرابع: (7 نقاط)

(I) g دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x - 1 + \ln x$

(1) بين أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

(2) احسب $g(1)$ ثم حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x}$

(1) أ - بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$.

ب - بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

ج - بين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ثم شكل جدول تغيرات f .

(2) ليكن (Γ) المنحنى الممثل للدالة $\ln$ في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

أ - بين أن المنحنى (Γ) مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب - ادرس الوضعية النسبية بين المنحنيين (Γ) و (C_f) .

ج - احسب $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ثم ارسم المنحنيين (Γ) و (C_f) في نفس المعلم .

(3) عين قيم العدد الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x) = f(m)$ حلين متميزين .

(4) احسب التكامل $I = \int_1^e [\ln x - f(x)] dx$ ثم فسر النتيجة بيانيا .

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

- الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. و لكن المستويين (P) و (Q) الذين معادلتيهما
- $$x + 2y - z + 1 = 0 \text{ و } -x + y + z = 0 \text{ على الترتيب و } A \text{ نقطة حيث } A(0; 1; 1).$$
- (1) اثبت أن المستويين (P) و (Q) متعامدان .

$$(2) \text{ برهن أن المستويين } (P) \text{ و } (Q) \text{ متقاطعان وفق المستقيم } (\Delta) \text{ ذو تمثيل وسيطي}$$

$$(t \in \mathbb{R}) : \begin{cases} x = -\frac{1}{3} + t \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}$$

- (3) احسب المسافة بين A و كل من المستويين (P) و (Q) .
- (4) استنتج المسافة بين النقطة A و المستقيم (Δ) .

التمرين الثاني: (4 نقاط)

- (1) ليكن كثير الحدود: $p(z) = z^3 - 3z^2 + 3z - 9$
- أ - تحقق أن 3 جذر لكثير الحدود $p(z)$.
- ب - حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $p(z) = 0$.
- (2) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ النقط A, B, C, D
- و F حيث: $z_A = 3$ و $z_B = i\sqrt{3}$ و $z_C = -i\sqrt{3}$ و $z_D = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ و $z_F = 1 - i\sqrt{3}$
- أ - ما طبيعة المثلث ABC ؟
- ب - اوجد z_E لاحقة النقطة E صورة D بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{3}$.
- ج - احسب $\frac{z_F}{z_E}$ و استنتج أن المستقيمين (OE) و (OF) متعامدان.
- د - عين z_G لاحقة النقطة G حتى يكون الرباعي $OEGF$ مربعاً.

التمرين الثالث: (4 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية حدودها موجبة حيث : $u_1 = 1$ و $n \in \mathbb{N}^*$ ، $(u_{n+1})^2 = 2u_n$

(1) أحسب u_2 ، u_3 ، u_4 (تعطى النتائج على شكل قوى العدد 2)

(2) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$ $v_n = \ln u_n - \ln 2$: (يرمز $\ln$ الى دالة اللوغاريتم النيبيري)

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب أساسها و حدها الاول .

ب - اكتب بدلالة n عبارة الحد العام لكل من u_n و v_n .

ج- أحسب $\lim v_n$ ثم $\lim u_n$

(3) أ - بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $e^{v_n} = \frac{u_n}{2}$

ب - احسب الجداء : $p = \frac{u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n}{2^n}$

التمرين الرابع: (8 نقاط)

(I) لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x و المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = e^{-x} + x$

(1) أدرس تغيرات الدالة g .

(2) استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $1 + xe^x > 0$

(II) لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $f(x) = \ln(e^{-x} + x)$

و ليكن (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1- تحقق من اجل كل x حقيقي فان : $f(x) = \ln(1 + xe^x) - x$

2- أدرس تغيرات الدالة f

3- بين أن المستقيم $y = -x$: (Δ) مقارباً للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$ ، ثم أدرس وضعيته بالنسبة لـ (C_f)

4- لتكن دالة عددية لمتغير حقيقي x معرفة على المجال $]0, +\infty[$ بـ : $h(x) = f(x) - \ln x$

أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$

ب- أدرس إشارة العبارة $h(x)$

ج- فسر النتائج السابقة بيانياً بين المنحنى (C_f) و منحنى دالة اللوغاريتم النيبيري

5- أرسم بعناية المنحنى (C_f)

على المترشح ان يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول : (5 ن)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة $(z-2)[z^2 - 2(2+\sqrt{3})z + 8 + 4\sqrt{3}] = 0$

(2) نعتبر النقط A, B, C من المستوي المنسوب الى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لواقتها على الترتيب :

$$z_C = 2 + \sqrt{3} - i, \quad z_B = 2 + \sqrt{3} + i, \quad z_A = 2$$

(أ) اكتب على الشكل الأسى العدد $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$ واستنتج طبيعة المثلث ABC ثم أنشئ النقط A, B, C

(ب) برهن أن النقطة C هي صورة النقطة B بالدوران r الذي مركزه المبدأ O وزاويته $\frac{-\pi}{6}$

(ج) استنتج عمدة للعدد z_B ثم عين القيم المضبوطة لكل من $\cos \frac{\pi}{12}$ و $\sin \frac{\pi}{12}$ $\left[(1+\sqrt{3})^2 = 4+2\sqrt{3} \right]$

(3) نقطة M من المستوي $(M \neq O)$ لاحتقتها $z = ke^{i\theta}$ حيث $k > 0$ و $\theta \in \mathbb{R}$
 M_1 صورة النقطة M بالدوران r و M' نظيرة M_1 بالنسبة إلى حامل محور الفواصل

(أ) أثبت أن z' لاحقة النقطة M' تساوي $ke^{i(\frac{\pi}{6}-\theta)}$

(ب) * عين قيم θ التي تحقق $z' = z$

* استنتج مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تكون من أجلها $z' = z$

التمرين الثاني: (4 ن)

أ - (u_n) متتالية عددية معرفة على N كما يلي : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \geq n$

(2) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

ب - (v_n) متتالية عددية معرفة على N كما يلي : $v_n = u_n - n + 1$

(1) برهن أن المتتالية (v_n) هندسية ثم اكتب v_n و u_n بدلالة n .

(2) احسب قيمة المجموع : $S_n = v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_{n-1}^2$ بدلالة n .

(3) احسب قيمة المجموع : $K_n = (u_0)^2 + (u_1 - 1)^2 + (u_2 - 2)^2 + \dots + (u_{n-1} - n + 1)^2$ بدلالة n .

التمرين الثالث: (4 ن)

تتكون مجموعة أشخاص من ثمانية رجال وأربع نساء من بينهم رجل واحد اسمه علي وإمرأة واحدة اسمها فاطمة نريد تكوين لجنة مكونة من ثلاث أعضاء لهم نفس المهام

(1) احسب احتمال كل من الأحداث التالية

A "تكوين لجنة تضم 3 رجال"

B "تكوين لجنة تضم رجلا وإمرأتين"

C "تكوين لجنة تضم علي"

D "تكوين لجنة تضم إما علي وإما فاطمة"

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل إختيار بعدد الرجال في اللجنة المكونة

(أ) عين القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله

(ب) احسب الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X .

التمرين الرابع: (7 ن)

(أ) g دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = (2-x)e^x - 2$

(1) أدرس تغيرات الدالة g .

(2) * بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر $1.5 < \alpha < 1.6$

* عين إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

(ب) f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

(1) برهن أن الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$

(2) بين أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند القيمة 0 ثم أكتب معادلة المماس (Δ) لـ (C) عند المبدأ 0

(3) (أ) برهن أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ وفسر النتيجة بيانيا ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \neq 0$: $f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(e^x - 1)^2}$

(ج) تحقق من أن : $f(\alpha) = \alpha(2 - \alpha)$ ثم أوجد حصرا لـ $f(\alpha)$ وشكل جدول تغيرات الدالة f

(4) - احسب $f(x) + x^2$ واستنتج وضعية (C) بالنسبة إلى (Γ) الذي معادلته : $y = -x^2$

- بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x^2 = 0$ وفسر النتيجة بيانيا

(5) ارسم (Δ) و (Γ) ثم أنشئ المنحنى (C)

(6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = f(m)$

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (5 ن)

$P(z)$ كثير الحدود في C معرف بـ $P(z) = z^3 - (2\sin\theta + i\cos\theta)z^2 + (1 + i\sin 2\theta)z - i\cos\theta$ ، $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(1) بين أن المعادلة $P(z) = 0$ تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يطلب تعيينه.

(2) عين العددين الحقيقيين α و β حيث $P(z) = (z - i\cos\theta)(z^2 + \alpha z + \beta)$ ثم حل في C

المعادلة $P(z) = 0$ حيث z_1 هو الحل الذي جزؤه التخيلي سالب و z_2 الحل الثالث

(3) أكتب بدلالة θ الشكل الأسّي للأعداد z_0 ، z_1 و z_2 .

(ب) نعتبر النقط A ، B ، C من المستوي المنسوب الى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ لواحقها على الترتيب:

$$z_C = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ و } z_B = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ ، } z_A = \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

(1) علم النقط A ، B ، C ثم عين طبيعة المثلث ABC .

(2) برهن أن المبدأ O مرجع الجملة $\{(A, 2), (B, 1), (C, -1)\}$

(3) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي λ مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة Z

$$\text{حيث : } 2MA^2 + MB^2 - MC^2 = \lambda$$

التمرين الثاني: (4 ن)

لعبة تعتمد على رمي كرة داخل دلو من بين مجموعة اللاعبين لدينا

$$\frac{5}{6} \text{ لاعبين باليد اليمنى و } \frac{1}{6} \text{ لاعبين باليد اليسرى}$$

إحتمال وضع الكرة داخل الدلو بالنسبة للاعبين باليد اليمنى هو $\frac{1}{4}$ و بالنسبة للاعب لليد اليسرى هو $\frac{1}{2}$

(1) نختار لاعبا ونسمي الحادثين

G "لاعب باليد اليسرى"

S "اللاعب يضع الكرة داخل الدلو"

أ - أحسب إحتمال الحادث $G \cap S$

ب - أحسب إحتمال الحادث S

ج - أحسب إحتمال الحادث أن يكون اللاعب باليد اليمنى علما أنه وضع الكرة داخل الدلو

(2) في هذا السؤال نسمي عمر اللاعب باليد اليمنى أنه يرمي كرتين واحدة بعد الأخرى (بفرض الرمييتين مستقلتين)

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رميتين بعدد الكرات داخل الدلو المكونة

(أ) عين القيم الممكنة التي يأخذها المتغير العشوائي X ثم عرف قانون إحتماله.

(ب) أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X

التمرين الثالث: (4 ن)

لكل سؤال توجد إجابة واحدة فقط صحيحة حددها مع التعليل
في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

(أ) لتكن (Γ) مجموعة النقط $M(x, y, z)$ من الفضاء والتي تحقق: $(2x + y - z - 1)^2 + (x + y - z)^2 = 0$

المجموعة (Γ) هي : (1) مستقيم (2) مستوي (3) سطح كرة

(ب) (D) و (D') مستقيمان معرفان وسيطيا بـ $(D): \begin{cases} x=1 \\ y=1+2k, k \in \mathbb{R} \\ z=1+k \end{cases}$ و $(D'): \begin{cases} x=3-2\lambda \\ y=7-4\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z=2-\lambda \end{cases}$

(D) و (D') هما مستقيمان : (1) متوازيان (2) متقاطعان (3) ليسا من نفس المستوي

(ج) (S) سطح كرة مركزها $w(1, 1, 0)$ ونصف قطرها 2

تقاطع (S) مع (D) هو : (1) مجموعة خالية (2) نقطة (3) نقطتين

(د) A و B نقطتان متميزتان من الفضاء

مجموعة النقط M من الفضاء حيث $MA^2 - MB^2 = 0$ هي : (1) مستقيم (2) مستوي (3) سطح كرة

التمرين الرابع: (7 ن)

(أ) g دالة عددية معرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ : $g(x) = -x + \ln(x+1)$

(1) أدرس تغيرات الدالة g .

(2) استنتج إشارة $g(x)$. ثم بين أنه من أجل كل $x \in [0, +\infty[$ فإن $x \ln(x+1) > 0$.

(II) f دالة عددية معرفة على $] -\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ و (C) تمثيلها البياني في

مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(0; \vec{i}, \vec{j})$

(1) بين أن الدالة f فردية.

(2) احسب : $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(3) بين أنه من أجل كل $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ فإن $f'(x) = \frac{x^2-3}{x^2-1}$ ثم شكل جدول تغيرات على المجال $]1, +\infty[$

(4) برهن أن المستقيم (D) الذي معادلته: $y = x$ مقارب للمنحنى (C) ثم أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم

(D) (لاحظ أن $\frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$ ، $x \in]1, +\infty[$)

(5) أرسم المستقيم (D) ثم أنشئ المنحنى (C) .

(6) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $\int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx = 5 \ln 5 - 6 \ln 3$

- استنتج مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C) و المستقيمتين : $y = x$ ، $x = 2$ ، $x = 4$.

(III) (u_n) متتالية عددية معرفة على $N - \{0, 1\}$ كما يلي: $u_n = f(n) - n$

(1) برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة

(2) أحسب قيمة المجموع: $S_n = u_2 + u_3 + \dots + u_n$ بدلالة n .

(3) برهن أنه من أجل كل $n \in N - \{0, 1\}$ و $0 < u_n < \frac{2}{n-1}$ ثم عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

بالتوفيق ...

الموضوع 01

التصحيح النموذجي للبكالوريا التجريبي دورة ماي 2018

التنقيط

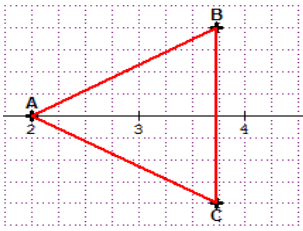
(الأعداد المركبة)

تصحيح التمرين الأول (05 نقاط)

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $(z-2)[z^2-2(2+\sqrt{3})z+8+4\sqrt{3}]$: -----

لدينا : $\begin{cases} z-2=0 \\ z^2-2(2+\sqrt{3})z+8+4\sqrt{3}=0 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} z=2 \\ z^2-2(2+\sqrt{3})z+8+4\sqrt{3}=0 \end{cases}$ أي : $\Delta=4i^2$: أي : $\sqrt{\Delta}=2i$ و منه : $z_1=2$ ، $z_2=2+\sqrt{3}+i$ ، $z_3=2+\sqrt{3}-i$.

(2) أ) كتابة على الشكل الأسّي العدد $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$: -----



لدينا : $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A} = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = 1+\sqrt{3}i = e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $\left| \frac{z_B-z_A}{z_C-z_A} \right| = 1$: أي : $\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ و $AB=AC$ و $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ و منه المثلث ABC متقايس الأضلاع .

ب) برهان أن C هي صورة B بالدوران r : -----

لدينا : $r: z' = e^{-\frac{\pi}{6}} z$ و $r(B)=C$ يكافئ $z_C = e^{-\frac{\pi}{6}} z_B$ أي : $z_C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)(2+\sqrt{3}+i)$ و منه : $z_C = 2+\sqrt{3}-i$. إذن C هي صورة B بالدوران r .

(ج) إستنتاج عمدة للعدد z_B و تعيين القيمة المضبوطة لـ $\sin \frac{\pi}{12}$ و $\cos \frac{\pi}{12}$: -----

لدينا : $z_C = e^{-\frac{\pi}{6}} z_B$ أي : $\overline{z_B} = e^{\frac{\pi}{6}} z_C$ و $(z_C = \overline{z_B})$: أي : $\frac{\overline{z_B}}{z_B} = e^{\frac{\pi}{6}}$ أي : $-\theta - \theta = -\frac{\pi}{6}$ أي : $-2\theta = -\frac{\pi}{6}$ و منه : $\arg(z_B) = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$.

القيمة المضبوطة لـ $\sin \frac{\pi}{12}$ و $\cos \frac{\pi}{12}$: لدينا $z_B = (\sqrt{2} + \sqrt{6}) \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$ ، نطبق الشكل الجبري

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} \\ \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases} .$$

مع الشكل المثلثي نجد :

(3) أ) إثبات أن z' تساوي $ke^{i(\frac{\pi}{6}-\theta)}$: -----

لدينا : $r(M)=M'$ معناه $z_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)z$ و لدينا : $z' = \overline{z_1}$ و منه : $z' = ke^{i(\frac{\pi}{6}-\theta)}$.

ب) تعيين قيمة θ التي تحقق $z' = z$: -----

$$z' = z \text{ معناه : } \theta = \frac{\pi}{12} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

- مجموعة النقط M من المستوي التي تكون من أجلها $z' = z$ هي مستقيم ما عدا النقطة O وزاوية

ميله هي $\frac{\pi}{12}$.

التنقيط	تصحيح التمرين الثاني (04 نقاط)
	(أ) 1) برهان بالتراجع أنه من أجل كل $u_n \geq n : n \in \mathbb{N}$ نضع : $P(n) : u_n \geq n$ المرحلة 1: من أجل $n=0$ لدينا $u_0=0$ أي : $u_0 \geq 0$ و منه $P(0)$ محققة . المرحلة 2: نفرض صحة $P(n)$ و نبرهن صحة $P(n+1)$ من أجل كل عدد طبيعي n. أي نفرض أن $u_n \geq n$ صحيحة و نبين أن $u_{n+1} \geq n+1$. - لدينا فرضا أن : $u_n \geq n$ ، أي : $3u_n - 2n + 3 \geq n + 3$ ، و منه : $u_{n+1} \geq n+1$. و أخيرا الخاصية $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي n . 2) إستنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$: لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ ، و نعلم أن : $u_n \geq n$ و منه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ، حسب النهايات بالمقارنة . 3) بيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما : من أجل كل عدد طبيعي n ندرس إشارة الفرق : $u_{n+1} - u_n$: لدينا : $u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3 = 2(u_n - n) + 3 > 0$ لأن : $(u_n - n \geq 0)$ ، و منه فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$. (ب) 1) بيان أن (v_n) متتالية هندسية : لدينا : $v_n = u_n - n + 1$ ، أي : $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 1 = 3u_n - 2n + 3 - n = 3(u_n - n + 1) = 3v_n$ إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=3$ ، و حدها الأول : $v_0=1$. التعبير عن u_n و v_n بدلالة n : - عبارة v_n : $v_n = v_0 \times q^n$ ، أي : $v_n = 3^n$. - عبارة u_n : $u_n = v_n + n - 1$ ، أي : $u_n = 3^n + n - 1$. 2) حساب المجموع S_n : $S_n = v_0^2 + (v_0^2 q^2) + \dots + v_0^2 (q^2)^{n-1}$ ، أي : $S_n = v_0^2 [1 + (q^2) + (q^2)^2 + \dots + (q^2)^{n-1}]$ ، أي : $S_n = [1 + (9) + (9)^2 + \dots + (9)^{n-1}]$ و منه : $S_n = \frac{9^n - 1}{8}$ (متتالية هندسية أساسها 9 و حدها الأول 1) 3) حساب قيمة المجموع K_n : لدينا : $v_n = u_n - n + 1$ ، أي : $v_n - 1 = u_n - n$ و منه : $K_n = (v_0 - 1)^2 + (v_1 - 1)^2 + \dots + (v_n - 1)^2$ و منه : $K_n = S_n + n - 3^n + 1$. (بعد الحساب و التبسيط)

التنقيط	تصحيح التمرين الثالث (04 نقاط)
	- أولا نحسب عدد الإمكانيات : $C_{12}^2 = 66$. 1) حساب إحتمال الحوادث : - إحتمال تكوين لجنة تضم 3 رجال : $P(A) = \frac{C_8^3}{220} = \frac{56}{220}$. - إحتمال تكوين لجنة تضم رجلا و امرأتين : $P(B) = \frac{C_8^1 \times C_4^2}{220} = \frac{8 \times 6}{220} = \frac{48}{220}$. - إحتمال تكوين لجنة تضم علي : $P(A) = \frac{C_1^1 \times C_{11}^2}{220} = \frac{1 \times 55}{220} = \frac{55}{220}$. - إحتمال تكوين لجنة تضم إمّا علي و إمّا فاطمة : $P(D) = \frac{(C_1^1 \times C_{10}^2) + (C_1^1 \times C_8^2)}{220} = \frac{45 + 28}{220} = \frac{73}{220}$.

(2) أ) تعيين القيم الممكنة لـ X ، ثم تعيين قانون الاحتمال :
 $X = \{0;1;2;3\}$ ، هي قيم المتغير العشوائي X .

- قانون الاحتمال :

$$P(X=2) = \frac{C_8^2 \times C_4^1}{C_{12}^3} = \frac{112}{220} , P(X=1) = \frac{C_8^1 \times C_4^2}{C_{12}^3} = \frac{48}{220} , P(X=0) = \frac{C_4^3}{C_{12}^3} = \frac{4}{220}$$

$$P(X=1) = \frac{C_8^3}{C_{12}^3} = \frac{56}{220}$$

(ب) حساب الانحراف المعياري لـ X :
 - نحسب أولاً الأمل الرياضي : بعد الحساب نجد : $E(X) = 2$
 ثانياً نحسب التباين : بعد الحساب نجد : $V(X) = 0,54$
 ثالثاً نحسب الانحراف المعياري : $\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0,54} = 0,73$

التنقيط

(الدالة الأسية)

تصحيح التمرين الرابع (07 نقاط)

الجزء الأول:

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة g :
 الدالة g قابلة للإشتقاق على $[0; +\infty[$ و دالتها المشتقة هي:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	0,7	-2

$g'(x) = (1-x)e^x$. و منه الإشارة من إشارة $(1-x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -2$$

(3) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$:
 $g(0) = 0$ ، و الدالة g مستمرة و متناقصة تماماً على $[1,5; 1,6]$
 و لدينا ، $g(1,5) \times g(1,6) < 0$ و بالتالي حسب نظرية القيم المتوسطة فإنه يوجد حلاً α من $[1,5; 1,6]$ حيث $g(\alpha) = 0$.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	0 -

(4) إشارة $g(x)$:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1} ; x \neq 0 \\ 0 ; x = 0 \end{cases}$$

(1) بيان أن الدالة f مستمرة $\mathbb{R}$:
 لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ ، و منه f مستمرة عند 0 ، إذن فهي مستمرة على $\mathbb{R}$.

(ب) بيان أن الدالة f تقبل الإشتقاق عند 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 = f'(0) , \text{ و منه الدالة } f \text{ قابلة للإشتقاق عند } x_0 = 0 .$$

- معادلة المماس $(\Delta): y = x : (\Delta)$.

(3) أ) :

- حساب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ، و منه (C) يقبل مستقيم مقارب أفقي $(y = 0)$.

- حساب : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) : \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

(ب) بيان أنه من أجل كل $x \neq 0$: $f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(e^x - 1)^2}$:

$$f'(x) = \frac{2x(e^x - 1) - x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{2xe^x - 2x - x^2 e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{x(2e^x - 2 - x e^x)}{(e^x - 1)^2} = \frac{x[(2-x)e^x - 2]}{(e^x - 1)^2} = \frac{x \cdot g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

(ج)

التحقق أن $f(\alpha) = \alpha(2-\alpha)$: لدينا $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{e^\alpha - 1}$ ، أي : $(2-\alpha)e^\alpha - 2 = 0$ ، أي :

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\frac{2}{2-\alpha} - 1} = \frac{\alpha^2}{\frac{2-2+\alpha}{2-\alpha}} = \frac{\alpha^2(2-\alpha)}{\alpha} = \alpha(2-\alpha) : \text{ إذن ، } e^\alpha = \frac{2}{2-\alpha}$$

حصر $f(\alpha)$: $0,6 < f(\alpha) < 0,8$.

(ب) إستنتاج إتجاه تغير الدالة f ، و تشكيل جدول تغيراتها :
نلخص إشارة $f'(x)$ في الجدول المقابل :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	-
$f(x)$				

- جدول التغيرات

(ج) حساب : $f(x) + x^2$ ، واستنتاج وضعية (C) بالنسبة للمنحني

(Γ) الذي معادلته $y = -x^2$:
لدينا : $f(x) + x^2 = \frac{x^2}{e^x - 1} + x^2 = \frac{x^2 + x^2 e^x - x^2}{e^x - 1} = \frac{x^2 e^x}{e^x - 1}$

الوضعية : نلاحظ أن الإشارة من إشارة $(e^x - 1)$.
و عليه نلخص الوضعية في الجدول التالي :

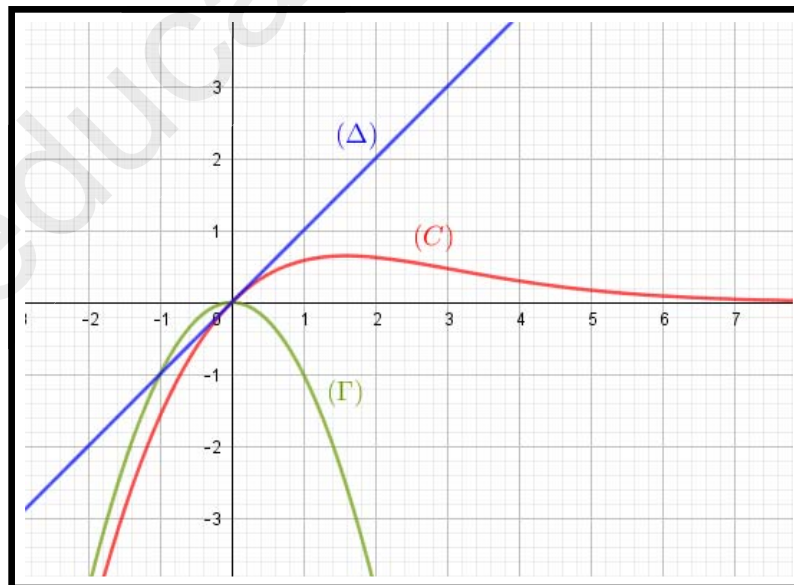
- بيان أن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + x^2 = 0$ و تفسر هندسيا :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + x^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^x}{e^x - 1} = 0$$

التفسير الهندسي : المنحني (C) و (Γ) متقاربان

عند $-\infty$.

(5) رسم Δ و (Γ) ثم إنشاء (C) :



- (6) المناقشة البيانية ، لعدد و إشارة حلول المعادلة $f(x) = f(m)$: -----
لدينا : $f(m) = M$ ، لنضع $f(x) = f(m)$:
- لما $M = f(\alpha)$ ، أي : $m = \alpha$ ، و منه للمعادلة حل مضاعف هو $x = \alpha$.
- لما $M \in]0; f(\alpha)[$ ، أي : $m \in]0; \alpha[\cup]\alpha; +\infty[$ ، و منه للمعادلة حلان موجبان .
لما $M = 0$ ، أي : $m = 0$ ، و منه المعادلة تقبل حلا معدوما .
لما $M \in]-\infty; 0[$ ، أي : $m \in]-\infty; 0[$ ، و منه المعادلة تقبل حلا سالبا .

كتابة الاستاذ : بلقاسم عبدالرزاق

ثانوية : محمادي أحمد – العناصر –
الموسم الدراسي : 2018/2017

مديرية التربية بولاية برج بوعريريج
امتحان البكالوريا التجريبي للتعليم الثانوي

الشعبة : الثالثة علوم التجريبية

المدة : 3 سا و 30 د

اختبار في مادة الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط) :

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$ ؛ نعتبر النقط :

$$D(-1;4;0) \text{ و } C(0;3;-1); B(2;0;-1), A(1;1;0)$$

(1) أثبت أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع ثم بين أن المعادلة ديكرتية للمستوي (ABC) هي $3x + 2y + z - 5 = 0$.

(2) عين معادلة ديكرتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيم (AB) و يُعَامِد المستوي (ABC) .

(3) عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم المار من النقطة $H(-2;0;-3)$ و العمودي على المستوي (Q)

(4) أكتب معادلة ديكرتية لسطح الكرة S الذي مركزه H و مماس للمستوي (ABC) ثم أدرس تقاطع سطح الكرة S و المستقيم (CD) .

التمرين الثاني (5 نقاط) :

$$1/ \text{ حل في مجموعة الأعداد المركبة } C : (z - \sqrt{3})(z^2 - \sqrt{3}z + 1) = 0$$

2/ المستوي المركب منسوب إلى معلم $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ ، لتكن A, B, C نقط لواحقها على الترتيب:

$$z_C = \bar{z}_A, \quad z_B = \sqrt{3}, \quad z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

أثبت أن $z_A^{1962} + z_C^{2016} = 0$ ثم عين قيم العد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقي موجب

(3) أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(4) عين z_E لاحقة النقطة E صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$ ؛ ثم بين أن

النقط $A ; C$ و E في استقامية .

(5) عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{z - z_A}{z - z_C}$ تخيليا صرفا ؛ $(z \neq z_C)$.

التمرين الثالث (4 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = \frac{1}{4}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$.

(1) عين العددين الحقيقيين a ، b حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 4}$. ثم برهن بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $-2 < u_n < 1$.

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؛ ثم استنتج أن (u_n) متقاربة

(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$.

بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول . أكتب v_n و u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(4) ثم أحسب المجموع : $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{5}{v_1} + \frac{5^2}{v_2} + \dots + \frac{5^n}{v_n}$.

التمرين الرابع (7 نقاط):

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$

1- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ ؛ $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة g .

2- ادرس إشارة $g(x)$. (لاحظ أن $g(1)=0$)

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$. وليكن (C) منحناها البياني في المستوي السابق .

1- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا .

2- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3- أنشئ المنحنى (C) .

4- بين أن الدالة $h : x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $\ln(x)$ على $]0, +\infty[$ ؛ ثم باستعمال التكامل بالتجزئة

بين أن $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$.

5- أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$.

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الاول (5 نقاط) :

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 10 = 0$.
استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z حيث : $(\bar{z} + 2)^2 - 6(\bar{z} + 2) + 10 = 0$
- (2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B, C, D لاحقاتها
 $z_D = 1 - i$ و $z_C = 1 + i$ و $z_B = 3 + i$ و $z_A = 3 - i$
عين الكتابة المركبة للدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$
- (3) النقطة التي لاحقتها $z_E = 7 - 3i$ و F صورتها بالدوران r ؛ تحقق أن لاحقة F هي $z_F = 5 + 3i$
عين لاحقة النقطة H صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{AE}$
- (4) مثل النقط A, B, E, F, H و عين بدقة طبيعة الرباعي $AEHF$
- (5) عين المجموعة (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $z = 1 - i + ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ وذلك عندما k يسمح $\mathbb{R}^*$.
عين المجموعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z - 1 - i| = |z - 1 + i|$.

التمرين الثاني (4 نقاط) :

يحتوي كيس على 7 كرات منها 3 بيضاء تحمل الأرقام : 1, 2, 2 و أربعة حمراء تحمل الأرقام 1, 2, 2, 1

- (1) نسحب كرة واحدة من الكيس.
أ – ما احتمال الحصول على كرة تحمل الرقم 1.
ب – إذا كانت الكرة المسحوبة تحمل الرقم 1 فما هو احتمال أن يكون لونها أحمر
- (2) نسحب على التوالي كرتين من الكيس دون ارجاع .
أ – ما احتمال الحصول على كرتين تحمل كل منها رقماً فردياً
ب – ما احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون
ج – ما احتمال أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين 3

التمرين الثالث (4 نقاط) :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي : $u_0 = 2$ ومن من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$

- (1) احسب : u_1 و u_2 ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_n \leq 4$
- (2) بين أن (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة .

$$(3) \text{ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : 4 - u_{n+1} \leq \frac{4 - u_n}{2}$$

$$(4) \text{ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : 0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ ثم احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n .$$

التمرين الرابع (7 نقاط) :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1- عين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد

$$\sqrt{3} \text{ حل للمعادلة } f(x) = 0 .$$

$$2- \text{ نضع } a=1, b=0, c=-3$$

أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

3- أكتب معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x=0$ ثم عين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل .

4- أرسم (T) و (C_f) .

5- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن $f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

6- أحسب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=1$ و $x=3$

7- m وسيط حقيقي ؛ ناقش بيانها وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$.

انتهى الموضوع الثاني

التصحيح المفصل للاختبار التجريبي للشعبة العلوم التجريبية ماي 2017

الموضوع الأول

التمرين الأول (4 نقاط) :

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(\vec{k}; \vec{j}; \vec{i}; \vec{0})$ ؛ نعتبر النقط :

$$A(1; 1; 0), B(2; 0; -1), C(0; 3; -1) \text{ و } D(-1; 4; 0)$$

(1) اثبات أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع معناه ان $\vec{AD} = \vec{BC}$ و لدينا $\vec{AD}(-2; 3; 0)$ و $\vec{BC}(-2; 3; 0)$ و منه محققة

اثبات أن المعادلة ديكارتية للمستوي (ABC) هي $3x + 2y + z - 5 = 0$ لنبين أن النقط الثلاثة تنتمي إلى هذا المستوي

$$3(1) + 2(1) + (0) - 5 = 0 \text{ محققة و منه } A \text{ تنتمي إلى هذا المستوي .}$$

$$3(2) + 2(0) + (-1) - 5 = 0 \text{ محققة و منه } B \text{ تنتمي إلى هذا المستوي .}$$

$$3(0) + 2(3) + (-1) - 5 = 0 \text{ محققة و منه } C \text{ تنتمي إلى هذا المستوي .}$$

$$\text{و منه المعادلة الديكارتية للمستوي (ABC) هي } 3x + 2y + z - 5 = 0.$$

(2) تعين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيم (AB) و يُعامد المستوي (ABC) :

ليكن شعاع الناظيمي للمستوي (Q) هو $\vec{n}(a; b; c)$ و الشعاع الناظيمي للمستوي (ABC) هو $\vec{n}(3; 2; 1)$ و $\vec{AB}(1; -1; -1)$

لدينا (Q) يحوي المستقيم (AB) و يُعامد المستوي يعني أن $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$ و $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$ أي أن

$$\begin{cases} a - b - c = 0 \dots (1) \\ 3a + 2b + c = 0 \dots (2) \end{cases} \text{ بالجمع نجد } b = -4a \text{ بالتعويض في المعادلة (1) نجد } a + 4a - c = 0$$

و منه $c = 5a$ بوضع $a = 1$ نجد أن $\vec{n}'(1; -4; 5)$ و منه معادلة (Q) هي من الشكل

$$x - 4y + 5z + d = 0 \text{ و هو يشمل النقطة } A \text{ نعوض إحداثياتها في المعادلة الديكارتية نجد}$$

$$1 - 4(1) + 5(0) + d = 0 \text{ و منه } d = 3 \text{ معادلة (Q) هي } x - 4y + 5z + 3 = 0$$

(3) تعين تمثيلا وسيطيا للمستقيم المار من النقطة $H(-2; 0; -3)$ و العمودي على المستوي (Q)

$$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = -4t \\ z = 5t - 3 \end{cases} \text{ حيث } M(x; y; z) \text{ هو مجموعة النقط}$$

(4) كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة S الذي مركزه H و مماس للمستوي (ABC) هو مجموعة النقط

$$d(H; ABC) = \frac{|3(-2) + 2(0) + (-3) - 5|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \sqrt{14} \text{ نحسب } HM = d(H; ABC) \text{ حيث } M(x; y; z)$$

$$\text{و منه } (x+2)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 14 \text{ بالتبسيط نجد } x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6z - 1 = 0$$

دراسة الوضع النسبي بين سطح الكرة S و المستقيم (CD)

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t + 3 \\ z = t - 1 \end{cases} \text{ لدينا } \vec{CD}(-1; 1; 1) \text{ و منه نعوض في المعادلة}$$

الديكارتية للسطح S نجد $t^2 + (t+3)^2 + (t-1)^2 - 4t + 6(t-1) - 1 = 0$ و منه $3t^2 + 6t + 3 = 0$ و هذا يكافئ

$t^2 + 2t + 1 = 0$ و منه للمعادلة حل مضاعف هو $t = -1$ إذن سطح الكرة يتقاطع مع المستقيم في نقطة أي انه مماس للسطح في النقطة $K(1; 2; -2)$.

التمرين الثاني (5 نقاط) :

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة C : $(z - \sqrt{3})(z^2 - \sqrt{3}z + 1) = 0$ يكافئ $z - \sqrt{3} = 0$ او

$$z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0 \text{ أي } z = \sqrt{3} \text{ ونحسب المميز للمعادلة الثانية } \Delta = -1 \text{ للمعادلة حلين هما}$$

$$S = \left\{ \sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i; \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right\} \text{ مجموعة الحلول هي } z' = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ و } z'' = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

(2) المستوي المركب منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، لتكن A ، B و C نقط لواحقتها على الترتيب:

$$z_C = \bar{z}_A, \quad z_B = \sqrt{3}, \quad z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

اثبات أن $z_A^{1962} + z_C^{2016} = 0$ نكتب العددين على الشكل الأسّي $z_A = e^{-i\frac{\pi}{6}}$ و $z_C = e^{i\frac{\pi}{6}}$ ومنه

$$z_A^{1962} = e^{-327\pi i} = \cos(-327\pi) + i \sin(-327\pi) = -1 \text{ ومنه } z_A^{1962} = \left(e^{-i\frac{\pi}{6}} \right)^{1962}$$

و $z_C^{2016} = \left(e^{i\frac{\pi}{6}} \right)^{2016}$ ومنه $z_C^{2016} = e^{336\pi i} = \cos(336\pi) + i \sin(336\pi) = +1$ ومنه $-1 + 1 = 0$

تعيين قيم العد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C} \right)^n$ حقيقي موجب

لدينا مما سبق و حسب دستور موفر

$$\left(\frac{z_A}{z_B} \right)^n = \left(e^{-\frac{\pi i}{3}} \right)^n = e^{-\frac{n\pi i}{3}} = \cos\left(\frac{-n\pi}{3} \right) + i \sin\left(\frac{-n\pi}{3} \right) = \cos\left(\frac{n\pi}{3} \right) - i \sin\left(\frac{n\pi}{3} \right)$$

يكون عددا حقيقيا موجب يعني ان $\cos\left(\frac{n\pi}{3} \right) = 1$ و $\sin\left(\frac{n\pi}{3} \right) = 0$ أي ان $\frac{n\pi}{3} = 2\pi k$ و k عدد طبيعي و منه

نجد $n = 6k$ و k عدد طبيعي

(3) كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي لدينا

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{-\frac{\pi i}{3}}$$

استنتاج طبيعة المثلث ABC بما أن $\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = 1$ و $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) = \frac{\pi}{3} + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}$ فإن المثلث

ABC متقايس الأضلاع .

(4) تعيين z_E لاحقة النقطة E صورة B بالتشابه المباشر S الذي مركزه A ونسبته 2 وزاويته $\frac{\pi}{3}$

$$z_E = 2e^{\frac{\pi}{3}i} z_B + \left(1 - 2e^{\frac{\pi}{3}i}\right) z_A \text{ و منه}$$

$$z_E = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3}) + (1 - 1 - i\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \text{ ومنه}$$

$$z_E = \sqrt{3} + 3i - i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$z_E - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = 2i \text{ لدينا في استقامية } E \text{ و } C \text{ ؛ } A \text{ أثبات أن النقط}$$

$$z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = i \text{ ومنه } z_E - z_A = 2(z_C - z_A) \text{ أي ان}$$

$$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC} \text{ ومنه النقط } A \text{ ؛ } C \text{ و } E \text{ في استقامية.}$$

$$(5) \text{ تعين مجموعة النقط } M \text{ ذات اللاحقة } z \text{ بحيث يكون } \frac{z - z_A}{z - z_C} \text{ تخيليا صرفا (} z \neq z_C \text{)}$$

$$\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \text{ و هذا يعني أن } \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ ومنه}$$

$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = 0 \text{ ومنه مجموعة النقط } M \text{ هي الدائرة ذات القطر } [AC].$$

التمرين الثالث (4 نقاط)

$$u_n \text{ لتكن } (u_n) \text{ متتالية معرفة بـ } u_0 = \frac{1}{4} \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}$$

$$(1) \text{ تعيين العددين الحقيقيين } a, b \text{ حتى يكون من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = a + \frac{b}{u_n + 4} \text{ بالقسمة الاقليدية نجد}$$

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 12 - 10}{u_n + 4} = 3 - \frac{10}{u_n + 4} \text{ ومنه } a = 3, b = -10$$

$$\text{البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : -2 < u_n < 1$$

$$\text{لدينا } u_0 = \frac{1}{4} \text{ ومنه } -2 < u_0 < 1 \text{ محققة}$$

$$\text{نفرض أن } -2 < u_n < 1 \text{ ونبرهن أن } -2 < u_{n+1}$$

الطريقة الأولى :

$$\text{نبرهن أن } -2 < u_{n+1} \text{ أي } 2 + u_{n+1} > 0$$

$$2 + u_{n+1} = 2 + 3 - \frac{10}{u_n + 4} = \frac{5u_n + 12 - 10}{u_n + 4} = \frac{5u_n + 2}{u_n + 4}$$

$$\text{نبرهن أن } u_{n+1} < 1 \text{ أي } u_{n+1} - 1 < 0$$

$$u_{n+1} - 1 = 3 - \frac{10}{u_n + 4} - 1 = \frac{2u_n + 8 - 10}{u_n + 4} = \frac{2u_n - 2}{u_n + 4} = 2\left(\frac{u_n - 1}{u_n + 4}\right)$$

$$\text{ومنه } -2 < u_{n+1} < 1 \text{ إذن من أجل عدد طبيعي } n \text{ فإن } -2 < u_n < 1$$

الطريقة الثانية :

$$\text{لدينا الدالة المرفقة هي } f \text{ حيث } f(x) = \frac{3x+2}{x+4} \text{ و دالتها المشتقة هي } f'(x) = \frac{10}{(x+4)^2}$$

و منه f متزايدة على المجال $[-2;1]$.

$-2 < u_n < 1$ و منه نجد $f(-2) < f(u_n) < f(1)$ كون أن f متزايدة أي ان $-2 < u_{n+1} < 1$ و منه من أجل عدد طبيعي n فإن $-2 < u_n < 1$

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4} - u_n = \frac{3u_n + 2 - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4} = \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n + 4} = -\frac{(u_n - 1)(u_n + 2)}{u_n + 4}$$
و منه المتتالية متزايدة .

استنتاج أن (u_n) متقاربة : بما ان المتتالية متزايدة و محدودة من الاسفل فهي متقاربة .
(3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$.

تبين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول لدينا

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2}{1 - u_{n+1}} = \frac{\frac{3u_n + 2}{u_n + 4} + 2}{1 - \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}} = \frac{3u_n + 2 + 2u_n + 8}{u_n + 4 - 3u_n - 2} = \frac{5u_n + 10}{-2u_n + 2} = \frac{5}{2} \left(\frac{u_n + 2}{1 - u_n} \right) = \frac{5}{2} v_n$$

$$v_0 = \frac{u_0 + 2}{1 - u_0} = \frac{\frac{1}{4} + 2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{9}{3} = 3$$

و حدها الأول $\frac{5}{2}$ و هندسية أساسها (v_n)

$$v_n = 3 \left(\frac{5}{2} \right)^n$$

كتابة v_n و u_n بدلالة n :

$$v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n} \text{ أي ان } v_n - u_n v_n = u_n + 2 \text{ و منه } u_n + u_n v_n = v_n - 2 \text{ أي ان } u_n(1 + v_n) = v_n - 2$$

$$u_n = \frac{v_n - 2}{1 + v_n} = \frac{3 \left(\frac{5}{2} \right)^n - 2}{1 + 3 \left(\frac{5}{2} \right)^n}$$

منه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \left(\frac{5}{2} \right)^n - 2}{1 + 3 \left(\frac{5}{2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \left(\frac{5}{2} \right)^n}{3 \left(\frac{5}{2} \right)^n} = 1$$

حساب

$$S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{5}{v_1} + \frac{5^2}{v_2} + \dots + \frac{5^n}{v_n}$$

(4) حساب المجموع : بوضع $t_n = \frac{5^n}{v_n} = \frac{5^n}{3 \left(\frac{5}{2} \right)^n} = \frac{2^n}{3}$ و منه (t_n) متتالية هندسية

$$S_n = t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n = t_0 \left(\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \right) = \frac{1}{3} (2^{n+1} - 1)$$

و منه $t_0 = \frac{1}{v_0} = \frac{1}{3}$ و حدها الأول 2 و أساسها

التمرين الرابع (7 نقاط) :

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$

1- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x^2} = \frac{(x-1)^2}{x^2} \quad \text{و} \quad g(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln(x)$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة g مما سبق نجد أن $g'(x) \geq 0$ و منه الدالة g متزايدة على $]0, +\infty[$.

2- دراسة إشارة $g(x)$ بما أن $g(1) = 0$ و الدالة g متزايدة على $]0, +\infty[$ نتلخص الإشارة في الجدول الموالي

x	0	1	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	—	0	+

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$. وليكن (C) منحناها البياني في المستوي السابق .

1- اثبات أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ نضع $t = \sqrt{x}$ و منه $\lim_{x \rightarrow +\infty} (t) = +\infty$ و منه

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(t)}{t} \right] = 0 \quad \text{لان} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(x)]^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(t^2)]^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{2\ln(t)}{t} \right]^2 = 0$$

$$\text{حساب} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 + \frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x} \right] = +\infty$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x} - \frac{2}{x} \right] = 0$$

التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ ؛ لدينا

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + x - \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) \right)^2 - 2 = x + \frac{1}{x} - (-\ln x)^2 - 2 = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2 = f(x)$$

حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ؛ و منه المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقارب عموديا معادلته $x = 0$.

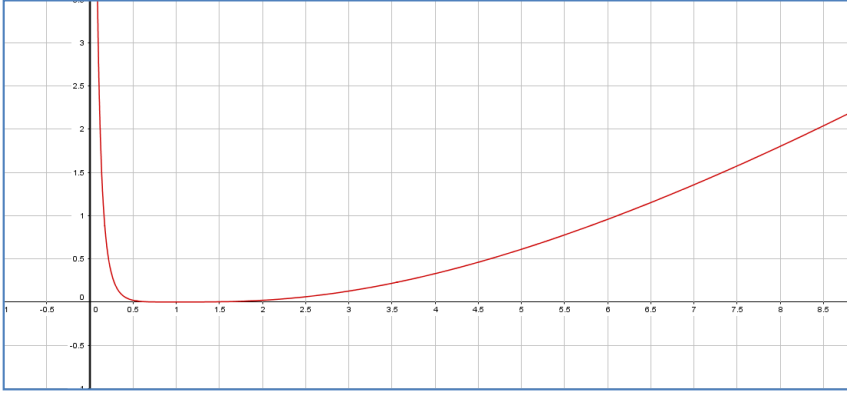
2- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ بالحساب $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$ و منه

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x}(\ln x) = \frac{x^2 - 1 - 2x \ln x}{x^2} = \frac{x - \frac{1}{x} - 2\ln x}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
-----	---	---	-----------

$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$



3- رسم المنحنى (C) :

4- بين أن الدالة $h : x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x)$ على $]0, +\infty[$

$$h'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x \text{ محققة}$$

باستعمال التكامل بالتجزئة

$$\text{تبين أن } \int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2 \text{ بوضع } u'(x) = 1 \text{ و } v(x) = (\ln x)^2 \text{ و منه } u(x) = x \text{ و } v'(x) = \frac{2}{x}(\ln x)$$

$$\text{و منه } u'(x) = 1 \text{ و } \int_1^e u'(x) \cdot v(x) dx = \left[x (\ln(x))^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln(x) dx = e - 2 \left[x \ln x - x \right]_1^e = e - 2$$

5- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = e$ و $x = 1$

$$\int_1^e f(x) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 + \ln(x) - 2x \right]_1^e - e + 2 \text{ و منه } \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left[x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2 \right] dx$$

$$\int_1^e f(x) dx = \frac{e^2}{2} + 1 - 2e + \frac{3}{2} - e + 2 = \left(\frac{e^2}{2} - 3e + \frac{9}{2} \right) u.a$$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول (5 نقاط) :

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 10 = 0$ نحسب المميز $\Delta = -4$ للمعادلة حلين هما $z' = 3 + i$ و $z'' = 3 - i$

استنتاج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة ذات المجهول z حيث : $(\bar{z} + 2)^2 - 6(\bar{z} + 2) + 10 = 0$ مما سبق نجد أن للمعادلة تكافئ $\bar{z} + 2 = 3 - i$ أو $\bar{z} + 2 = 3 + i$ أي أن $\bar{z} = 1 - i$ أو $\bar{z} = 1 + i$ و منه $z = 1 + i$ أو $z = 1 - i$ هما حلّى المعادلة الأخيرة

(2) المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، النقط A, B, C, D لاحقاًتها

$$z_D = 1 - i \text{ و } z_C = 1 + i \text{ و } z_B = 3 + i \text{ و } z_A = 3 - i$$

تعيين الكتابة المركبة للدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$: هي $z' - z_A = i(z - z_A)$ أي $z' - 3 + i = i(z - 3 + i)$ و

$$\text{منه } z' = iz + 2 - 4i$$

(3) النقطة التي لاحقها $z_E = 7 - 3i$ و F صورتها بالدوران r

التحقق أن لاحقة F هي $z_F = 5 + 3i$ لدينا $z_F = iz_E + 2 - 4i = i(7 - 3i) + 2 - 4i = 7i + 3 + 2 - 4i = 5 + 3i$ محققة

تعيين لاحقة النقطة H صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AE}$ أي $z_H - z_F = z_E - z_A$ و منه $z_H = z_F + z_E - z_A = 5 + 3i + 7 - 3i - 3 + i = 9 + i$

(4) تمثيل النقاط A, B, E, F, H

تعيين بدقة طبيعة الرباعي $AEHF$ متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة و فيه ضلعان متجاورتان متقايسان فهو مربع .

(5) تعيين المجموعة (Γ) مجموعة النقاط M ذات

اللاحقة z حيث : $z = 1 - i + ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ وذلك عندما

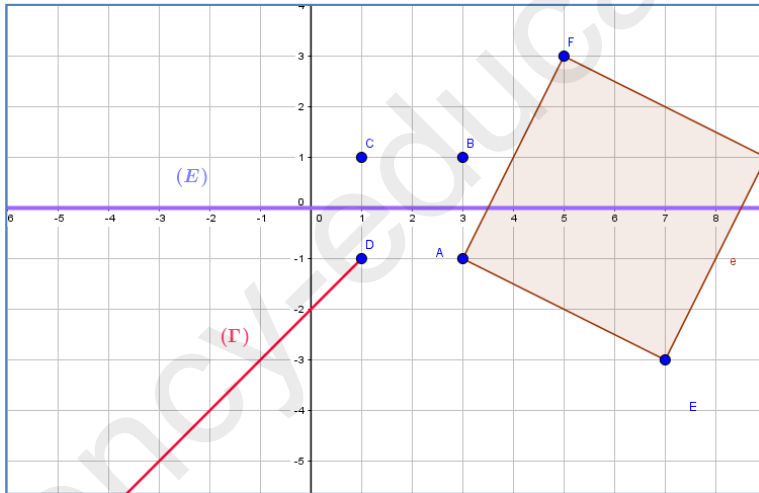
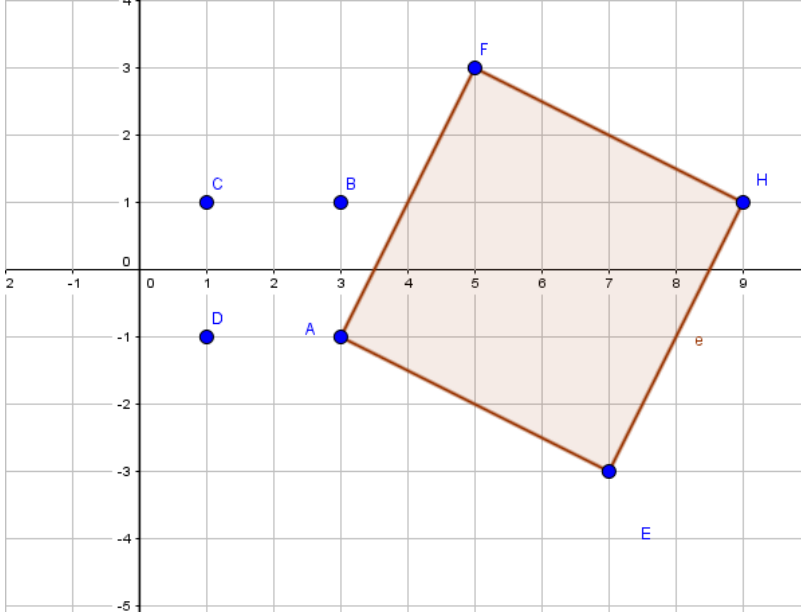
k يسمح $\mathbb{R}^*$ لدينا $z = 1 - i + ke^{-i\frac{\pi}{4}}$ يعني أن

$$z - (1 - i) = ke^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$\arg[z - (1 - i)] = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\left(\overrightarrow{0I}; \overrightarrow{DM}\right) = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \text{ و } k \text{ عدد صحيح}$$

مجموعة النقاط هي نصف مستقيم $[DM)$ و الذي معامل توجيهه -1 أي موازي للمنصف الثاني ذي المعادلة $(y = -x)$



تعيين المجموعة (E) مجموعة النقاط M ذات اللاحقة

z حيث : $|z - 1 - i| = |z - 1 + i|$ تكافئ $CM = DM$

مجموعة النقاط هي محور القطعة المستقيمة $[CD)$.

التمرين الثاني (4 نقاط) :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على N كما يلي : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$

$$(1) \text{ حساب : } u_1 = 5 - \frac{4}{2} = 3 \text{ و } u_2 = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$$

البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 \leq u_n \leq 4$

لدينا $2 \leq u_1 \leq 4$ محققة

نفرض أن $2 \leq u_n \leq 4$ ولنبرهن أن $2 \leq u_{n+1} \leq 4$

$$2 \leq u_n \leq 4 \text{ بالقلب نجد } \frac{1}{2} \geq \frac{1}{u_n} \geq \frac{1}{4} \text{ بالضرب في } -4 \text{ نجد } -2 \leq -\frac{4}{u_n} \leq -1 \text{ بإضافة } 5 \text{ نجد}$$

$$3 \leq 5 - \frac{4}{u_n} \leq 4 \text{ أي ان } 2 \leq 3 \leq u_{n+1} \leq 4 \text{ و منه } 2 \leq u_{n+1} \leq 4 \text{ إذن من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ فإن}$$

$$2 \leq u_n \leq 4$$

(2) تبين أن (u_n) متزايدة : نحسب الفرق

$$u_{n+1} - u_n = 5 - \frac{4}{u_n} - u_n = \frac{5u_n - 4 - u_n^2}{u_n} = \frac{(4 - u_n)(-1 + u_n)}{u_n}$$

الفرق موجب لان $2 \leq u_n \leq 4$ فإن $4 - u_n \geq 0$ و $-1 + u_n \geq 0$ و هو المطلوب .

استنتاج أنها متقاربة : بما المتتالية متزايدة و محدود من الأعلى فهي متقاربة .

$$(1) \text{ البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : 4 - u_{n+1} \leq \frac{4 - u_n}{2}$$

$$\text{لدينا } 4 - u_{n+1} = 4 - 5 + \frac{4}{u_n} = -1 + \frac{4}{u_n} = \frac{-u_n + 4}{u_n} = \frac{1}{u_n}(4 - u_n)$$

$$\text{و بما ان } 2 \leq u_n \leq 4 \text{ بالقلب نجد } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2} \text{ و منه } 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$$

$$(2) \text{ استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : 0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ مما سبق نجد أن } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$$

$$\text{و منه } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n) \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(4 - u_{n-1}) \right] \text{ أي } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^2}(4 - u_{n-1}) \text{ و ها كذا}$$

$$0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^2}(4 - u_{n-1}) \leq \frac{1}{2^2} \left[\frac{1}{2}(4 - u_{n-2}) \right] \text{ أي ان } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^3}(4 - u_{n-2}) \text{ إلى أن}$$

نصل إلى التعميم $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(4 - u_0)$ و منه $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(4 - u_0)$ اي ان

(2) $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ اي ان $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}$ بتعويض نجد $0 \leq 4 - u_{n'} \leq \frac{1}{2^{n'-1}}$ و هو المطلوب .

بحساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ بما أن $0 \leq 4 - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ فحسب الحصر نجد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

التمرين الرابع (7 نقاط) :

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

حيث a ؛ b و c أعداد حقيقية و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس

1- تعيين الأعداد الحقيقية a ؛ b و c بحيث يقبل (C_f) عند النقطة $A(0; -3)$ مماسا معامل توجيهه 3 و العدد

$$\sqrt{3} \text{ حل للمعادلة } f(x) = 0 .$$

$$f(0) = -3 \text{ و هذا يعني } c = -3$$

$$\text{و لدينا } f'(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = [-ax^2 + (2a - b)x + b - c]e^{-x}$$

$$f'(0) = 3 \text{ يعني أن } b - c = 3 ; \text{ و منه } b = 0$$

$$f(\sqrt{3}) = 0 \text{ يعني أن } f(\sqrt{3}) = (3a - 3)e^{-\sqrt{3}} = 0 \text{ و منه } a = 1$$

$$2- \text{ نضع } a = 1, b = 0, c = -3 \text{ تصبح } f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

$$\text{بحساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \text{ لأنه بوضع } x = 2t \text{ نجد}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4t^2}{e^{2t}} \right] = 4 \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{t}{e^t} \right)^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2)e^{-x} = +\infty$$

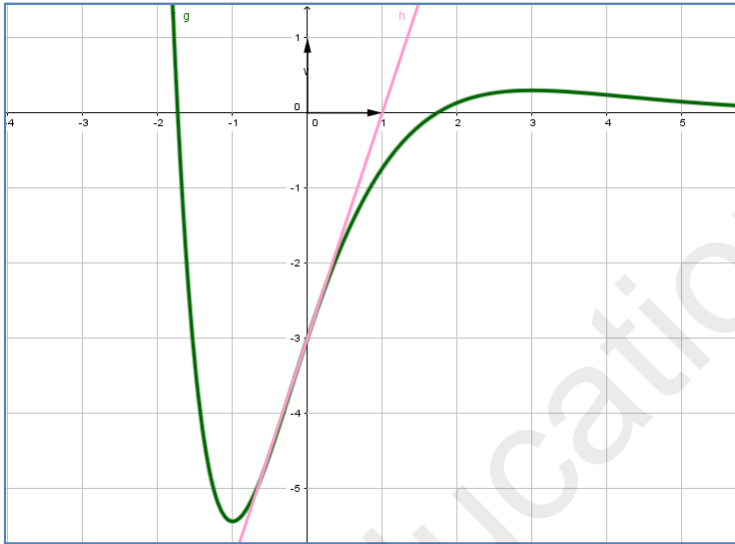
دراسة اتجاه تغير الدالة f : المشتقة : $f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ إشارتها من إشارة $(-x^2 + 2x + 3)$

تتعدم عند العددين 3 و -1 و منه f متناقصة على المجالين $]-\infty; -1]$ و $[3; +\infty[$ متزايدة على المجال $[-1; 3]$

و شكل جدول تغيراتها :

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$-2e$	$\frac{6}{e^3}$	0

- 3- كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$ معادلة المماس هي $y = 3x - 3$
تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل
 $f(x) = 0$ يكافئ $x^2 - 3 = 0$ اي ان $x = \sqrt{3}$ او $x = -\sqrt{3}$ نقطتي التقاطع هما $B(\sqrt{3}; 0)$ و $C(-\sqrt{3}; 0)$



- 4- رسم (T) و (C_f)
5- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ فإن

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$$

$$f(x) = (x^2 - 3)e^{-x} \text{ و } f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$$

$$f''(x) = (x^2 - 4x - 1)e^{-x} \text{ أي ان } f''(x) = (-2x + 2)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x}$$

$$\text{و منه } f(x) + 2f'(x) + f''(x) = (x^2 - 3 - 2x^2 + 4x + 6 + x^2 - 4x - 1)e^{-x} = 2e^{-x}$$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x} \text{ يكافئ } f(x) = -2f'(x) - f''(x) + 2e^{-x} \text{ و منه الدالة الأصلية للدالة } f \text{ هي}$$

$$\text{الدالة } F \text{ حيث } F(x) = -2f(x) - f'(x) - 2e^{-x} \text{ أي } F(x) = -2(x^2 - 3)e^{-x} - (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} - 2e^{-x}$$

$$\text{أي } F(x) = (-x^2 - 2x + 1)e^{-x} \text{ و } F(x) = (-2x^2 + 6)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x} - 2e^{-x}$$

- 6- حساب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = 1$ و $x = 3$ هي

$$A = \int_1^{\sqrt{3}} f(x) dx + \int_{\sqrt{3}}^3 f(x) dx = [-F(x)]_1^{\sqrt{3}} + [F(x)]_{\sqrt{3}}^3 = (4 + 4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} + 2e^{-1} + (-14)e^{-3}$$

$$A = \left[(4 + 4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} + 2e^{-1} + (-14)e^{-3} \right] u.a$$

7- m وسيط حقيقي ناقش بيانها وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$

المعادلة تكافئ $me^x = -(x^2 - 3)$ أي أن $-m = (x^2 - 3)e^{-x}$ يكافئ $-m = f(x)$

حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = -m$

المناقشة

لما $-m < -2e$ أي أن $m > 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول .

لما $-m = -2e$ أي أن $m = 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة و منه للمعادلة حل وحيد سالب .

لما $-3 < -m < -2e$ أي أن $3 < m < 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما سالبان و منه للمعادلة حلين سالبين

لما $-m = -3$ أي أن $m = 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين إحداها فاصلتها معدومة و الأخرى فاصلتها سالبة و منه للمعادلة حلين إحداها معدوم و الآخر سالب .

لما $-3 > -m > 0$ أي أن $0 \leq m < 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة و منه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة .

لما $0 > -m > \frac{6}{e^3}$ أي أن $-\frac{6}{e^3} < m < 0$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلتهما موجبتان و نقطة فاصلتها سالبة و منه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب .

لما $-\frac{6}{e^3} = -m$ أي أن $m = -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة و منه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة

لما $\frac{6}{e^3} > -m > \frac{6}{e^3}$ أي أن $m < -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة فاصلتهما سالبة و منه للمعادلة حل وحيد سالب .

انتهى الموضوع الثاني

اختبار بكالوريا تجريبي شعبة الثالثة علوم تجريبية

الموضوع الأول

التمارين	عناصر الإجابة		التنقيط	
	مجزأة	كاملة		
التمرين الأول	0.25	0.25	(1) اثبات أن الرباعي $ABCD$ متوازي الأضلاع معناه أن $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ و لدينا $\overrightarrow{AD}(-2; 3; 0)$ و $\overrightarrow{BC}(-2; 3; 0)$ و منه محققة	
	0.75	0.75	اثبات أن المعادلة ديكرتية للمستوي (ABC) هي $3x + 2y + z - 5 = 0$ لنبين أن النقط الثلاثة تنتمي إلى هذا المستوي A و B و C	
	0.5	0.5	(2) تعين معادلة ديكرتية للمستوي (Q) الذي يحوي المستقيم (AB) و يُعادم المستوي (ABC) ليكن شعاع الناطيمي للمستوي (Q) هو $\vec{n}(1; -4; 5)$ و منه معادلة (Q) هي $x - 4y + 5z + 3 = 0$	
	0.5	0.5	(3) تعين تمثيلا وسيطيا للمستقيم المار من النقطة $H(-2; 0; -3)$ و العمودي على المستوي	

0.5	(Q)	
	$\begin{cases} x = t - 2 \\ y = -4t : t \in \mathbb{R} \\ z = 5t - 3 \end{cases}$	
0.25	4) كتابة معادلة ديكارتية لسطح الكرة S الذي مركزه H و مماس للمستوي (ABC) نحسب	
0.25	$d(H; ABC) = \frac{ 3(-2) + 2(0) + (-3) - 5 }{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \sqrt{14}$	
0.25	$x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 6z - 1 = 0$	
0.25	دراسة الوضع النسبي بين سطح الكرة S و المستقيم (CD)	
0.25	$\begin{cases} x = -t' \\ y = t' + 3 : t' \in \mathbb{R} \\ z = t' - 1 \end{cases}$	
0.5	التمثيل الوسيطى للمستقيم (CD) و منه نعوض في المعادلة الديكارتية للسطح S نجد $3t'^2 + 6t' + 3 = 0$ و هذا يكافئ $t'^2 + 2t' + 1 = 0$ و منه للمعادلة حل مضاعف هو $t' = -1$ إذن سطح الكرة يتقاطع مع المستقيم في نقطة أي انه مماس للسطح في النقطة $K(1; 2; -2)$.	
5	5	التمرين الثاني
1	1) حلول المعادلة $z = \sqrt{3}$ و نحسب المميز $\Delta = -1$ للمعادلة حلين هما $z' = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ و $z'' = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$	
0.5	2) اثبات أن $z_A^{1962} + z_C^{2016} = 0$ نكتب العددين على الشكل الأسى $z_A = e^{-i\frac{\pi}{6}}$ و $z_C = e^{i\frac{\pi}{6}}$	
0.5	و $z_A^{1962} = e^{-327\pi i} = -1$ و $z_C^{2016} = e^{336\pi i} = 1$ و منه $-1 + 1 = 0$	
0.5	و $z_C^{2016} = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{2016} = 1$	
0.5	تعيين قيم العد الطبيعي n بحيث يكون $\left(\frac{z_A}{z_C}\right)^n$ حقيقي موجب	
0.5	$n = 6k$ و k عدد طبيعي	
0.5	3) كتابة العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسى لدينا $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-\frac{\pi}{3}i}$	
0.5	المثلث ABC متقايس الأضلاع.	
0.5	4) تعيين z_E لاحقة النقطة E : $z_E = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$	
0.5	اثبات أن النقط A ؛ C و E في استقامية لدينا $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC}$ و منه النقط A ؛ C و E في استقامية.	
0.5	5) تعيين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون $\frac{z - z_A}{z - z_C}$ تخيليا صرفا	
1	$\arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_C}\right) = \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}$ يعني أن $(z \neq z_C)$ و هذا يعني أن	

		و منه $\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$ و منه مجموعة النقط M هي الدائرة ذات القطر $[AC]$. $(\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} + \pi k$	
4 ن	0.25	(1) تعيين العددين الحقيقيين a, b : $a = 3, b = -10$ البرهان بالتراجع بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : -2 < u_n < 1$ لدينا $u_0 = \frac{1}{4}$ و منه $-2 < u_0 < 1$ محققة نفرض أن $-2 < u_n < 1$ و لنبرهن أن $-2 < u_{n+1} < 1$ نبرهن أن $-2 < u_{n+1}$ أي $2 + u_{n+1} > 0$ $2 + u_{n+1} = 2 + 3 - \frac{10}{u_n + 4} = \frac{5u_n + 12 - 10}{u_n + 4} = \frac{5u_n + 2}{u_n + 4}$ نبرهن أن $u_{n+1} < 1$ أي $u_{n+1} - 1 < 0$ لان $u_{n+1} - 1 = 3 - \frac{10}{u_n + 4} - 1 = \frac{2u_n + 8 - 10}{u_n + 4} = \frac{2u_n - 2}{u_n + 4} = 2 \left(\frac{u_n - 1}{u_n + 4} \right)$ لان $-2 < u_n < 1$ و منه $u_{n+1} < 1$ و منه $-2 < u_{n+1} < 1$ إذن من أجل عدد طبيعي n فإن $-2 < u_n < 1$ (2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) : $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(u_n + 2)}{u_n + 4}$ الفرق موجب لأن $-2 < u_n < 1$ و منه المتتالية متزايدة. استنتاج أن (u_n) متقاربة : بما ان المتتالية متزايدة و محدودة من الاسفل فهي متقاربة. (3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة كما يلي: من أجل كل عدد طبيعي $n : v_n = \frac{u_n + 2}{1 - u_n}$. تبين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول لدينا $v_{n+1} = \frac{5}{2} v_n$ و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{5}{2}$ و حدها الأول $v_0 = 3$ كتابة v_n و u_n بدلالة n : $v_n = 3 \left(\frac{5}{2} \right)^n$ و منه $u_n = \frac{3 \left(\frac{5}{2} \right)^n - 2}{1 + 3 \left(\frac{5}{2} \right)^n}$ حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ (4) حساب المجموع : $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{5}{v_1} + \frac{5^2}{v_2} + \dots + \frac{5^n}{v_n}$ منه $S_n = \frac{1}{3} (2^{n+1} - 1)$	التمرين الثالث

(I) لتكن الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$

0.5 1- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$:

0.5 استنتاج اتجاه تغير الدالة g مما سبق نجد أن $g'(x) \geq 0$ و منه الدالة g متزايدة على $]0, +\infty[$.

2- دراسة إشارة $g(x)$ بما أن $g(1) = 0$ و الدالة g متزايدة على $]0, +\infty[$ نتلخص الإشارة في الجدول الموالي

0.5	x	0	1	$+\infty$
	إشارة $g'(x)$	—	0	+

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$ اثبات أن

0.5 0-1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ نضع $t = \sqrt{x}$ و منه $\lim_{x \rightarrow +\infty} (t) = +\infty$ و منه

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln(t)}{t} \right] = 0$ لان $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(x)]^2}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{[\ln(t^2)]^2}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{2 \ln(t)}{t} \right]^2 = 0$ (التزايد المقارن).

0.25 حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

0.25 التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$: $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ ؛ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

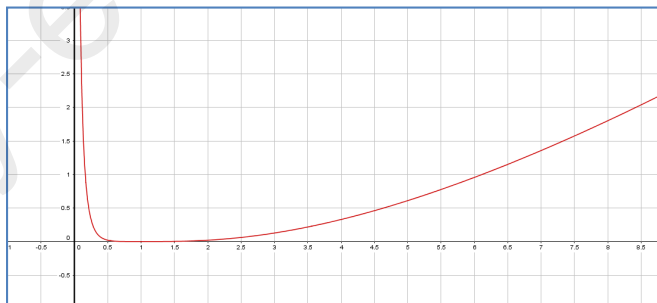
0.25 و منه المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقارب عموديا معادلته $x = 0$.

0.5 2- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ؛

0.5 جدول تغيرات الدالة f :

0.5	x	0	1	$+\infty$
	$f'(x)$	—	0	+
	$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

3- رسم المنحني (C) :



1

4- بين أن الدالة $h : x \mapsto x \ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x)$ على $]0, +\infty[$

محقة $h'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$ باستعمال التكامل بالتجزئة

0.25	تبيين أن $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$ بوضع $u'(x)=1$ و $v(x)=(\ln x)^2$ و منه $u(x)=x$ و
0.75	و $v'(x)=\frac{2}{x}(\ln x)$ و منه $u'(x)=1$ و
1	$\int_1^e u'(x)v(x)dx = \left[x (\ln(x))^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e \ln(x)dx = e - 2 \left[x \ln x - x \right]_1^e = e - 2$ 5- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=e$ و $x=1$ $\int_1^e f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \ln(x) - 2x \right]_1^e - e + 2$ و منه $\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \left[x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2 \right] dx$ $\cdot \int_1^e f(x)dx = \frac{e^2}{2} + 1 - 2e + \frac{3}{2} - e + 2 = \left(\frac{e^2}{2} - 3e + \frac{9}{2} \right) u.a$

الموضوع الثاني

التمارين	عناصر الإجابة	التنقيط
		مجزأة كاملة

0.5

(1) حل المعادلتين في محاسب المميز $\Delta = -4$ للمعادلة حلي هما $z' = 3 - i$ و $z'' = 3 + i$

0.5

استنتاج حلول المعادلة $(\bar{z} + 2)^2 - 6(\bar{z} + 2) + 10 = 0$ مما سبق نجد أن منه $z = 1 + i$ او $z = 1 - i$ هما حلي المعادلة الأخيرة

1

(2) تعيين الكتابة المركبة للدوران r الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$: هي

0.5

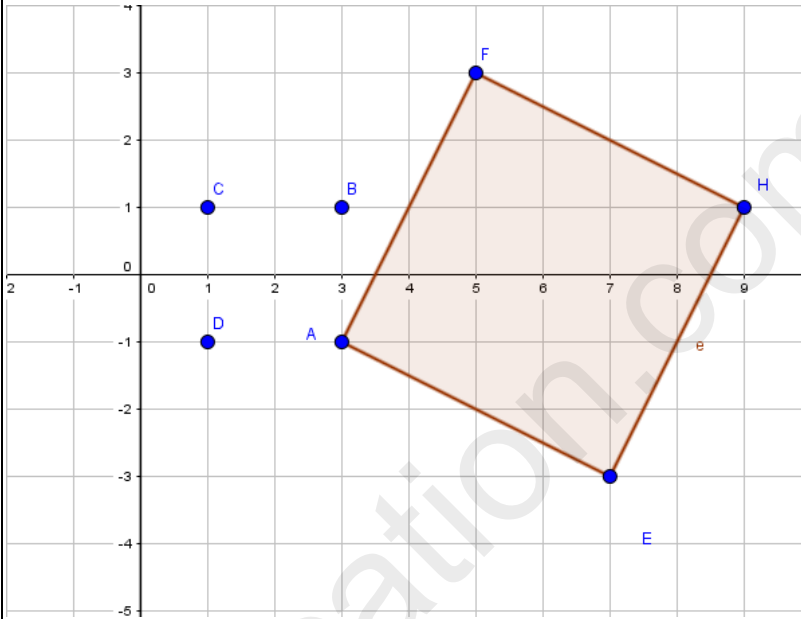
$z' = iz + 2 - 4i$ و منه $z' - 3 + i = i(z - 3 + i)$ أي $z' - z_A = i(z - z_A)$

0.5

(3) التحقق أن لاحقة F هي $z_F = 5 + 3i$ لدينا $z_F = 5 + 3i$ محققة

تعيين لاحقة النقطة H صورة F بالانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{AE}$ أي $z_H = 9 + i$.

0.5



(4) تمثيل النقاط A, B, E, F, H

تعيين بدقة طبيعة

الرباعي

$AEHF$

متوازي أضلاع

فيه زاوية قائمة و

فيه ضلعان

متجاورتان

متقايسان فهو

مربع .

0.5

(5) تعيين المجموعة

(Γ) هي

نصف مستقيم

0.5

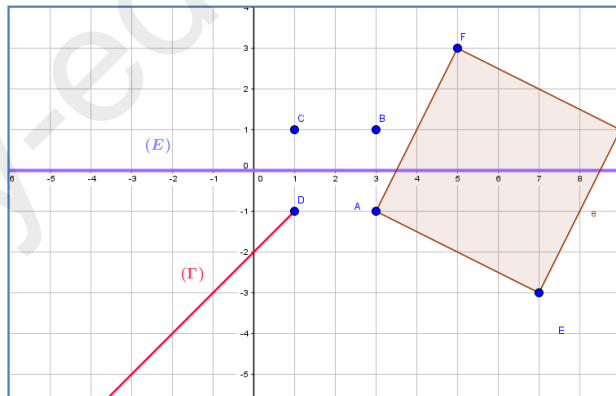
$[DM]$ و الذي معامل توجيهه -1 (أي موازي للمنصف الثاني ذي المعادلة $y = -x$)

تعيين المجموعة (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $|z - 1 - i| = |z - 1 + i|$

تكافئ $CM = DM$ مجموعة النقط

هي محور القطعة المستقيمة $[CD]$

0.5



4

0.5

(1) أ- احتمال الحصول على كرة تحمل الرقم 1 هو $P(A) = \frac{3}{7}$

0.5

ب- B الحادثة للحصول على كرة حمراء $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

التمرين
الثاني:

	0.75	$P_A(B) = \frac{\frac{4}{7} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{7}} = \frac{2}{3}$	
	0.5	2 أ- احتمال الحصول على كرتين تحمل رقما فرديا : $P(c) = \frac{1}{7}$	
	0.5	ب- احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون : $P(D) = \frac{3}{7}$	
	0.25 0.25 0.25	ج- احتمال أن يكون مجموع الرقمين الظاهرين 3 : $P(E) = \frac{3}{14}$	
4	+0.25 0.25	(1) حساب : $u_1 = 5 - \frac{4}{2} = 3$ و $u_2 = 5 - \frac{4}{3} = \frac{11}{3}$ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 2 \leq u_n \leq 4$ لدينا $2 \leq u_1 \leq 4$ محققة نفرض أن $2 \leq u_n \leq 4$ و لنبرهن أن $2 \leq u_{n+1} \leq 4$ $2 \leq u_n \leq 4$ بالقلب نجد $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{u_n} \geq \frac{1}{4}$ بالضرب في -4 نجد $-2 \leq -\frac{4}{u_n} \leq -1$ بإضافة 5 نجد $3 \leq 5 - \frac{4}{u_n} \leq 4$ أي أن $2 \leq 3 \leq u_{n+1} \leq 4$ و منه $2 \leq u_{n+1} \leq 4$ إذن	<u>التمرين</u> <u>الثالث</u>

		من أجل كل عدد طبيعي n فإن $2 \leq u_n \leq 4$. (2) تبين أن (u_n) متزايدة : نحسب الفرق $u_{n+1} - u_n = \frac{(4 - u_n)(-1 + u_n)}{u_n}$ الفرق موجب. استنتاج أنها متقاربة : بما المتتالية متزايدة و محدود من الأعلى فهي متقاربة . 1- البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $4 - u_{n+1} \leq \frac{4 - u_n}{2}$ لدينا $4 - u_{n+1} = \frac{1}{u_n}(4 - u_n)$ و بما أن $2 \leq u_n \leq 4$ بالقلب نجد $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n) \text{ و منه } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ 2- استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ مما سبق نجد أن 0.5 $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n) \text{ و منه}$ $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n) \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(4 - u_{n-1}) \right] \text{ أي}$ $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^2}(4 - u_{n-1}) \text{ و ها كذا}$ $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^2} \left[\frac{1}{2}(4 - u_{n-2}) \right]$ $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^3}(4 - u_{n-2}) \text{ إلى أن نصل إلى التعميم}$ $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(4 - u_0) \text{ و منه } 0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}(4 - u_0) \text{ أي}$ ان (2) $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ أي ان $0 \leq 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2^n}$ بتعويض نجد $0 \leq 4 - u_{n'} \leq \frac{1}{2^{n'-1}} \text{ و هو المطلوب .}$ حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ بما أن $n' = n + 1$ و $0 \leq 4 - u_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ 0.5 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ فحسب الحصر نجد } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$	
7) (نقاط)	1	1- تعيين الأعداد الحقيقية a؛ b و c : $a = -3$ و $a = 1$ و $b = 0$ 2- $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$	التمرين الرابع

:

+0.25
0.25

حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
 دراسة اتجاه تغير الدالة f : المشتقة : $f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x}$ إشارتها
 من إشارة $(-x^2 + 2x + 3)$ تنعدم عند العددين 3 و -1 و منه f متناقصة
 على المجالين $[-\infty; -1]$ و $[3; +\infty[$ متزايدة على المجال $[-1; 3]$
 و شكل جدول تغيراتها :

0.25

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$-2e$	$\frac{6}{e^3}$	0

3- كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$ معادلة

0.5

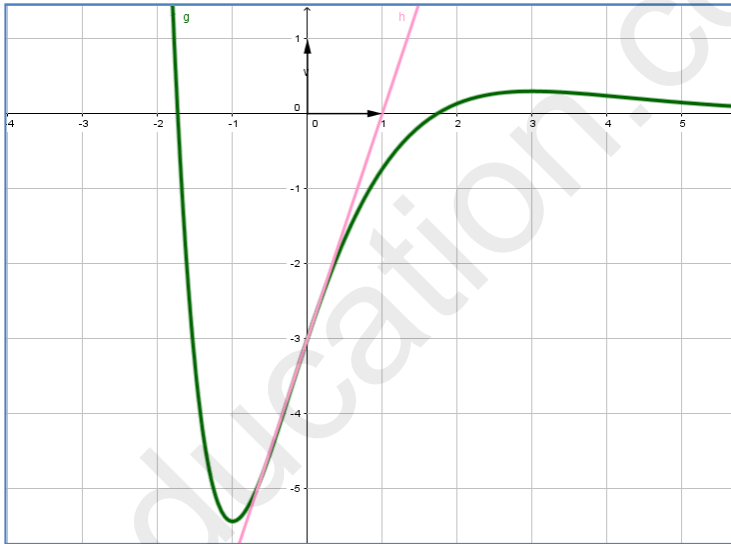
المماس هي $y = 3x - 3$

تعيين إحداثيات نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل

0.5

$f(x) = 0$ يكافئ $x^2 - 3 = 0$. أي ان $x = \sqrt{3}$ او $x = -\sqrt{3}$ نقطتي التقاطع
 هما $B(\sqrt{3}; 0)$ و $C(-\sqrt{3}; 0)$

1



4- رسم (T) و (C_f)

5- تبين أنه من أجل كل

عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$
 فإن

0.5

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x}$$

$$f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} \text{ و } f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$$

$$f''(x) = (-2x + 2)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x}$$

$$f''(x) = (x^2 - 4x - 1)e^{-x}$$

و منه

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = (x^2 - 3 - 2x^2 + 4x + 6 + x^2 - 4x - 1)e^{-x} = 2e^{-x}$$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

$$f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 2e^{-x} \text{ يكافئ } f(x) = -2f'(x) - f''(x) + 2e^{-x} \text{ و } f(x) = -2f'(x) - f''(x) + 2e^{-x}$$

منه الدالة الأصلية للدالة f هي الدالة F حيث $F(x) = -2f(x) - f'(x) - 2e^{-x}$

$$\text{أي } F(x) = -2(x^2 - 3)e^{-x} - (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} - 2e^{-x}$$

0.5	$F(x) = (-2x^2 + 6)e^{-x} + (x^2 - 2x - 3)e^{-x} - 2e^{-x}$ و منه $F(x) = (-x^2 - 2x + 1)e^{-x}$ 6- حساب بوحدة المساحات ، مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 3$ هي $A = \int_1^{\sqrt{3}} -f(x)dx + \int_{\sqrt{3}}^3 f(x)dx = [-F(x)]_1^{\sqrt{3}} + [F(x)]_{\sqrt{3}}^3 = (4 + 4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} + 2e^{-1} + (-14)e^{-3}$	
1	$A = [(4 + 4\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}} + 2e^{-1} + (-14)e^{-3}]u.a$ 7- m وسيط حقيقي ناقش بيانها وحسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $x^2 - 3 + me^x = 0$ المعادلة تكافئ $me^x = -(x^2 - 3)$ أي ان $-m = (x^2 - 3)e^{-x}$ يكافئ	
0.25	$-m = f(x)$ حلها هو إيجاد فواصل نقاط تقاطع المنحني (C_f) المستقيم (Δ_m) ذو المعادلة $y = -m$ المناقشة	
0.75	لما $-m < -2e$ أي ان $m > 2e$ نلاحظ ان (Δ_m) و (C_f) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول . لما $-m = -2e$ أي ان $m = 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب. لما $-m > -2e$ أي ان $3 < m < 2e$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما سالبان ومنه للمعادلة حلين سالبين لما $-m = -3$ أي ان $m = 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين إحداها فاصلتها معدومة و الأخرى فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين إحداها معدوم و الآخر سالب . لما $-m > -3$ أي ان $0 \leq m < 3$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة . لما $-m > 0$ أي ان $-\frac{6}{e^3} < m < 0$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في ثلاثة نقاط نقطتان فاصلتهما موجبتان و نقطة فاصلتها سالبة ومنه للمعادلة حلين موجبان و حل سالب . لما $-m = \frac{6}{e^3}$ أي أن $m = -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتين فاصلتهما مختلفان في الإشارة ومنه للمعادلة حلين مختلفان في الإشارة لما $-m > \frac{6}{e^3}$ أي ان $m < -\frac{6}{e^3}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة فاصلتهما سالبة ومنه للمعادلة حل وحيد سالب .	

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

ثانوية الحاج ميلود عبد الحميد

مديرية التربية لولاية الشلف

وزارة التربية الوطنية

دورة: جوان 2018

إمتحان البكالوريا التجريبي

المدة: 03 ساعات

إختبار في مادة: الرياضيات

الشعبة: علوم تجريبية

على كل مترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ،
 $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ،
نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n$ ،
(1) أحسب u_1 و v_1 .

(2) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ ، ثم عبّر عن الحد العام v_n بدلالة n .

(3) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$ ، ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ثم أحسب S_n

التمرين الثاني: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس المباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 3 - i\sqrt{3}$ و $z_C = -\sqrt{3} + 3i$.
(1) أكتب العدد z_A على الشكل الأسّي ثم إستنتج الشكل الأسّي للعدد z_B .

(2) عدد طبيعي n ، L_n هو العدد المركب المعروف بما يلي : $L_n = \left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^n + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^n$ ، أحسب L_n بدلالة n

ثم إستنتج قيمة L_{2018} يكتب على الشكل الجبري .

(3) تحقق أن : $z_C = i z_A$ ثم إستنتج طبيعة المثلث OAC .

(4) لتكن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث :

$$\arg(3 + i\sqrt{3} - z) - \arg(-\sqrt{3} + 3i - z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

مع $k \in \mathbb{Z}$ ، تحقق أن النقطة O تنتمي إلى (Γ) ثم عين طبيعتها .

(5) نعتبر النقطة D ذات اللاحقة $z_D = \overline{z_C}$ ، بين أن المستقيمين (AD) و (BC) متعامدان .

(6) لتكن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 3 - \sqrt{3}$ ، التشابه المستوي المباشر الذي مركزه E ويحول النقطة A

إلى النقطة C . عين نسبة وزاوية التشابه S ، ثم إستنتج أن النقط A ، E و O تنتمي إلى نفس

الدائرة $(\mathcal{C})$ يطلب تعيين عناصرها .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

يحتوي صندوق على خمس كرات بيضاء ، ثلاث كرات حمراء وكرتين سوداوين متشابهة لانفرق بينها باللمس .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربع كرات من الصندوق . نعتبر الحدثين التاليين :

A : " الحصول على كرة حمراء واحدة فقط " B : " الحصول على كرة بيضاء على الأقل "

(1) بين أن : احتمال الحدث A $P(A) = \frac{1}{2}$ ثم أحسب $P(B)$ احتمال الحدث B.

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل مخرج عدد الكرات الحمراء المسحوبة .
(أ) عين قيم المتغير العشوائي X .

(ب) بين أن : $P(X=0) = \frac{1}{6}$ و $P(X=2) = \frac{3}{10}$.

(ج) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضي .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = 2 + (x-2)e^{-x+2}$.

(1) ادرس تغيرات الدالة g .

(2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث ، $1.14 < \alpha < 1.15$.

(3) إستنتج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في $\mathbb{R}$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = 2x - 1 - (x-1)e^{-x+2}$.

نسمي $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(2) بين أن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) (أ) بين أن : $f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2}{\alpha - 2}$ ثم إستنتج حصر $f(\alpha)$.

(ب) بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب مائل للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$ ثم أدرس الوضع

النسبي للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (Δ) .

(ج) بين أن المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب كتابة معادلة ديكارتية له .

(د) أحسب $f(0)$ و $f(2)$ ثم أنشئ (Δ) ، (T) و $(\mathcal{C}_f)$.

(4) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية :

$$(E): 2m - 1 - (x-1)e^{-x+2} = 0$$

III. لتكن H الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $H(x) = (ax+b)e^{-x+2}$ حيث a و b عدنان حقيقيان .

(أ) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h المعرفة بـ : $h(x) = (x-1)e^{-x+2}$ على $\mathbb{R}$.

(ب) ليكن λ عددا حقيقيا حيث ، $\lambda > 1$ و $A(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيم

(Δ) والمستقيمين الذين معادلتيهما : $x = \lambda$ و $x = 1$.

أحسب المساحة $A(\lambda)$ بدلالة λ ثم أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$.

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الاول : (04.5 نقطة)

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 2}$

- (1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n < 2$.
- (2) أدرس رتبة المتتالية (u_n) . هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟
- (3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$
(أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول ثم عبر عن v_n بدلالة n .
(ب) إستنتج عبارة u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- (ج) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$ ، أحسب S_n بدلالة n .
- (4) (أ) بيّن أنّ : $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{2}{3}|u_n - 2|$ من أجل كل عدد طبيعي n .
(ب) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $|u_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ثم إستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(-1; 3; 1)$ ، $B(0; 5; 0)$ ، $E(-3; 4; 0)$ ، المستوي (Q) ذو المعادلة $2x - y + z - 2 = 0$ و سطح الكرة (S) التي مركزها النقطة A وتمس المستوي (Q) .

- (1) بيّن أنّ نصف قطر سطح الكرة (S) هو $\sqrt{6}$ و أكتب معادلة لـ (S) ثم جد إحداثيات نقطتي تقاطع (S) وحامل محور الترتيب.
- (2) أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ويعامد (Q) ثم إستنتج إحداثيات النقطة H نقطة تماس (Q) و (S) .
- (3) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q') الموازي للمستوي (Q) ويمس (S) .
- (4) α عدد حقيقي ، $M(x; y; z)$ نقطة من الفضاء و (P_α) المستوي المعروف بـ : $\overline{BM} \cdot \overline{EH} = \alpha$.
(أ) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P_α) .
(ب) تحقق أنّ A هي منتصف القطعة $[EH]$ ثم عين قيمة α التي من أجلها يكون (P_α) مستويا محوريا للقطعة $[EH]$.

التمرين الثالث : (04.5 نقطة)

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $(z - 4)(z^2 - 4z + 8) = 0$.
- (2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C ، D و E التي لواقعها على الترتيب : $z_A = 2 - 2i$ ، $z_B = 4$ ، $z_C = \overline{z_A}$ ، $z_D = -z_A$ و $z_E = -6 - 2i$.
(أ) أكتب العدد المركب $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ على الشكل الأسّي ، ثم إستنتج أنّ النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المستوي المباشر S الذي مركزه النقطة A ، يطلب تعيين نسبة وزاوية التشابه S .
(ب) تحقق أنّ النقطة D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A; 1), (B; -2), (C; 2)\}$.
(ج) (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $|(1+i)z + 4| = 8$

تحقق أن النقطة A تنتمي إلى (Γ) ، ثم عيّن طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة .
 (د) تحقق أن $S(D) = E$ ، ثم بيّن أن الدائرة (Γ') التي مركزها E ونصف قطرها AE هي صورة (Γ) بالتشابه S .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I. نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي : $g(x) = -x - \ln x$.

- (1) ادرس تغيرات الدالة g .
- (2) بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]0; +\infty[$ ثم تحقق أن : $0.56 < \alpha < 0.57$.
- (3) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x من المجال $]0; +\infty[$.

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{-1 + (x-1)\ln x}{x}$.

نسمي $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

- (2) بيّن أن : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

- (3) أ) بيّن أن : $f(\alpha) = 1 - \alpha - \frac{1}{\alpha}$ ثم إستنتج حصرًا لـ $f(\alpha)$.

ب) (γ) هو المنحني الممثل للدالة $\ln$ في المعلم السابق . أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x)$ ، فسّر النتيجة بيانياً

ثم أدرس الوضع النسبي للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة إلى (γ) .

ج) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني $(\mathcal{C}_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 1.

د) أحسب $f(2)$ و $f(e)$ ثم أنشئ (T) ، (γ) و $(\mathcal{C}_f)$.

- (4) A هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (γ) و $(\mathcal{C}_f)$ والمستقيمين اللذين معادلتها : $x = \alpha$ و

$$x = e$$

أحسب بـ cm^2 المساحة A وبدلالة α ثم تحقق أن : $A = \frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}$ ثم عيّن حصرًا للمساحة A .

إنتهى الموضوع الثاني

النقطة مجزأة	التصحيح
04 نقاط	التمرين الاول :
	لدينا : $u_0 = 2$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ و $v_n = u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n$
2×0.25	(1) حساب u_1 و v_1 : $u_1 = \frac{1}{4}u_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 = 1$ و $v_1 = u_1 - \left(\frac{3}{4}\right)^1 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$
0.75	(2) تبين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$: (v_n) هندسية يعني $v_{n+1} = v_n \times q$ لدينا : $v_{n+1} = u_{n+1} - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{4}\left(u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) + \frac{2}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ أي $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{4}v_n$ ومنه : $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$ ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول $\frac{1}{4}$ $v_n = u_0 - \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 2 - 1 = 1$
0.5	- التعبير عن الحد العام v_n بدلالة n : لدينا : $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ إذن : $v_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$
0.5	(3) إستنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$: لدينا : $v_n = u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n$ ومنه $u_n = v_n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$ وبالتالي : $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$
0.25	حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$: لأن $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \end{cases}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 0$
	لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ تبين أن : $S_n = \frac{16}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n - 3\left(\frac{3}{4}\right)^n$

0.25	لدينا : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $u_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n$ نضع : $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ و منه $u_n = v_n + a_n$ حيث (a_n) متتالية هندسية حدها الاول $a_0 = 1$ وأساسها $\frac{3}{4}$ إذن : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = v_0 + a_0 + v_1 + a_1 + \dots + v_n + a_n$ أي $S_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + (a_0 + a_1 + \dots + a_n) = v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} + a_0 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}}$ ومنه أي $S_n = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} + 1 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{1}{4}}$ $S_n = \frac{4}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + 4 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n + 4 - 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n$ وبالتالي : $S_n = \frac{16}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n$
0.25	حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$: لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{16}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n - 3 \left(\frac{3}{4}\right)^n \right) = \frac{16}{3}$ لأن $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \end{cases}$ أي $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{16}{3}$
05 نقاط	التمرين الثاني :
0.5	لدينا : $z_A = 3 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 3 - i\sqrt{3}$ و $z_C = -\sqrt{3} + 3i$. 1) كتابة العدد z_A على الشكل الأسّي ثم إستنتاج الشكل الأسّي للعدد z_B : لدينا : $z_A = 3 + i\sqrt{3}$ حساب الطويلة : $z_A = 3 + i\sqrt{3} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 3} = 2\sqrt{3}$ تعيين عمدة للعدد z_A : نضع $\theta_A = \arg(z_A)$ إذن : $\begin{cases} \cos \theta_A = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_A = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases}$ ومنه $\theta_A = \frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ الشكل الأسّي للعدد z_A هو : $z_A = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ إستنتاج الشكل الأسّي للعدد z_B : $z_B = \overline{z_A} = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$

$$(2) \text{ لدينا : العدد المركب } L_n = \left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^n + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^n$$

حساب L_n بدلالة n :

$$L_n = \left(\frac{z_A}{2\sqrt{3}}\right)^n + \left(\frac{z_B}{2\sqrt{3}}\right)^n = \left(\frac{2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}}\right)^n + \left(\frac{2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}}\right)^n = e^{i \times n \frac{\pi}{6}} + e^{-i \times n \frac{\pi}{6}} : \text{ لدينا}$$

$$\text{ومنه : } L_n = e^{i \frac{n\pi}{6}} + e^{-i \frac{n\pi}{6}} = \cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6} + \cos \left(-\frac{n\pi}{6}\right) + i \sin \left(-\frac{n\pi}{6}\right)$$

$$\text{أي } L_n = e^{i \frac{n\pi}{6}} + e^{-i \frac{n\pi}{6}} = \cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6} + \cos \frac{n\pi}{6} - i \sin \frac{n\pi}{6}$$

$$\text{وبالتالي : } L_n = 2 \cos \frac{n\pi}{6}$$

إستنتاج قيمة L_{2018} :

$$L_{2018} = 2 \cos \left(\frac{2018\pi}{6}\right) = 2 \cos \left(336\pi + \frac{2\pi}{6}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{إذن } L_{2018} = 1$$

(3) التحقق أن $z_C = i z_A$ ثم إستنتاج طبيعة المثلث OAC :

$$\text{لدينا : } i z_A = i(3 + i\sqrt{3}) = 3i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} + 3i = z_C$$

$$\text{أي } z_C = i z_A$$

إستنتاج طبيعة المثلث OAC :

$$\text{لدينا : } z_C = i z_A \text{ ومنه } \frac{z_C}{z_A} = i \text{ أي } \frac{z_C - z_O}{z_A - z_O} = i$$

$$\text{إذن لدينا : } \left| \frac{z_C - z_O}{z_A - z_O} \right| = |i| = 1 \text{ و } \arg \left(\frac{z_C - z_O}{z_A - z_O} \right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{وبالتالي : } OC = OA \text{ و } (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) = \frac{\pi}{2}$$

ومنه المثلث OAC قائم ومتساوي الساقين

(4) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث :

$$k \in \mathbb{Z} \text{ مع } \arg(3 + i\sqrt{3} - z) - \arg(-\sqrt{3} + 3i - z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

التحقق أن النقطة O تنتمي إلى (Γ) ثم تعيين طبيعتها :

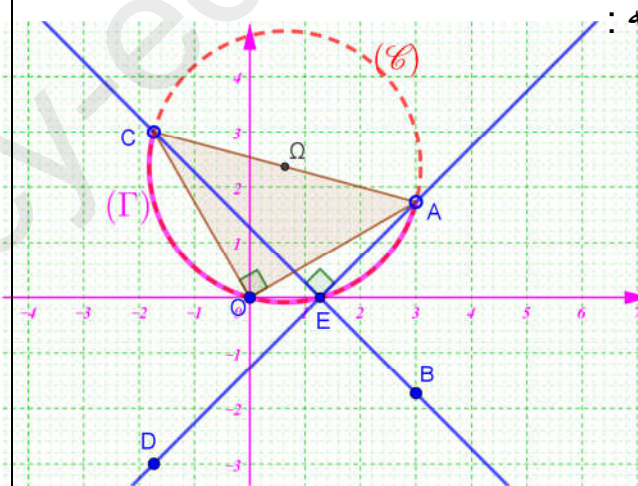
$$O \text{ تنتمي إلى } (\Gamma) \text{ يعني } \arg(3 + i\sqrt{3} - z_O) - \arg(-\sqrt{3} + 3i - z_O) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\text{لدينا : } \arg(3 + i\sqrt{3} - z_O) - \arg(-\sqrt{3} + 3i - z_O) = \arg(3 + i\sqrt{3}) - \arg(-\sqrt{3} + 3i)$$

$$\text{أي } \arg(-\sqrt{3} + 3i - z_O) - \arg(3 + i\sqrt{3} - z_O) = \arg(z_A) - \arg(z_C) = \arg(z_A) - \arg(i \times z_A)$$

$$\text{ومنه : } \arg(-\sqrt{3} + 3i - z_O) - \arg(3 + i\sqrt{3} - z_O) = \arg(z_A) - \arg(z_A) - \arg(i) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{ومنه } O \in (\Gamma)$$

0.5	تعيين طبيعة (Γ): يعني $\arg(3+i\sqrt{3}-z)-\arg(-\sqrt{3}+3i-z)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ومنه $\arg\left(\frac{z_A-z}{z_C-z}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ أي $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) = -\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$ وبالتالي مجموعة النقط (Γ) هي نصف الدائرة التي أحد أقطارها القطعة $[AC]$ والتي تشمل النقطة O ماعدا النقطتين A و C
0.5	5) تبيان أن المستقيمين (BC) و (AD) متعامدان: لدينا: $\frac{z_D-z_A}{z_C-z_B} = \frac{\overline{z_C-z_A}}{i z_A-z_A} = \frac{-i \overline{z_A-z_A}}{i z_A+i^2 z_A} = \frac{-(z_A+i z_A)}{i(z_A+i z_A)} = -\frac{1}{i} = i$ ومنه: $\arg\left(\frac{z_D-z_A}{z_C-z_B}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$ يعني $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$ وبالتالي: المستقيمان (BC) و (AD) متعامدان
0.5 2×0.25	6) تعيين نسبة وزاوية التشابه S: لدينا: العبارة المركبة للتشابه S من الشكل: $z' = az + b$ ولدينا: $\begin{cases} S(A) = C \\ S(E) = E \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} z_C = a z_A + b \\ z_E = a z_E + b \end{cases}$ وبالتالي $a = \frac{z_C - z_E}{z_A - z_E} = \frac{-\sqrt{3}+3i-3+\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}-3+\sqrt{3}} = \frac{3i-3}{i\sqrt{3}+\sqrt{3}} = \frac{3(-1+i)}{\sqrt{3}(1+i)} \times \frac{1-i}{1-i}$ ومنه: $a = \frac{3(-1+i)}{\sqrt{3}(1+i)} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2i = i\sqrt{3}$ إذن: $a = i\sqrt{3}$ نسبة التشابه S: $k = a = i\sqrt{3} = \sqrt{3}$ وزاوية التشابه S: $\theta = \arg(a) = \frac{\pi}{2}$
0.5	إستنتاج أن النقط A, E, O, C تنتمي إلى نفس الدائرة (e): لدينا: $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) = -\frac{\pi}{2}$ و $(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}) = \frac{\pi}{2}$ ومنه: مثلثان قائمان AOC و AEC. وبالتالي النقط A, E, O, C تنتمي إلى نفس الدائرة (e) التي مركزها Ω منتصف القطعة $[AC]$ ونصف قطرها $r = O\Omega = \overrightarrow{z_\Omega} = \left \frac{z_C + z_A}{2} \right = \left \frac{iz_A + z_A}{2} \right$ $r = \frac{ z_A(1+i) }{2} = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}$ 

04 نقاط		التمرين الثالث											
2×0.5		لدينا : صندوق على خمس كرات بيضاء ، ثلاث كرات حمراء وكرتين سوداوين نسحب عشوائيا وفي آن واحد أربع كرات من الصندوق.											
		(1) تبين أن : $P(A)=\frac{1}{2}$											
		$P(A)=\frac{C_3^1 \times C_7^3}{C_{10}^4} = \frac{3 \times 35}{210} = \frac{105}{210} = \frac{1}{2}$											
		حساب $P(B)$: $P(B)=\frac{C_5^1 \times C_5^3 + C_5^2 \times C_5^2 + C_5^3 \times C_5^1 + C_5^4}{C_{10}^4} = \frac{5 \times 10 + 10 \times 10 + 10 \times 5 + 5}{210}$ $P(B)=\frac{205}{210}$ أي											
0.75		(2) أ) تعيين قيم المتغير العشوائي X : قيم X هي $\{0;1;2;3\}$											
2×0.5		ب) تبين أن : $P(X=0)=\frac{1}{6}$ و $P(X=2)=\frac{3}{10}$:											
		لدينا : $P(X=2)=\frac{C_3^2 \times C_7^2}{C_{10}^4} = \frac{3 \times 21}{210} = \frac{3}{10}$ و $P(X=0)=\frac{C_3^0 \times C_7^4}{C_{10}^4} = \frac{1 \times 35}{210} = \frac{1}{6}$											
0.75		ج) قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X معرف بالجدول : <table><tr><td>x_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>$P(X=x_i)$</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{3}{10}$</td><td>$\frac{1}{30}$</td></tr></table> لدينا : $P(X=1)=\frac{C_3^1 \times C_7^3}{C_{10}^4} = \frac{3 \times 35}{210} = \frac{1}{2}$ و $P(X=3)=\frac{C_3^3 \times C_7^1}{C_{10}^4} = \frac{1 \times 7}{210} = \frac{1}{30}$		x_i	0	1	2	3	$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$
x_i	0	1	2	3									
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$									
0.5		حساب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X : $E(X)=0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = 1.2$											
07 نقاط		التمرين الرابع :											
		I. لدينا $g(x)=2+(x-2)e^{-x+2}$ المعرفة على $\mathbb{R}$											
2×0.25		(1) دراسة تغيرات الدالة g : - حساب النهايات :											
		$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)e^{-x+2} = -\infty \end{cases}$ لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2+(x-2)e^{-x+2}) = -\infty$											
		$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{e^{x-2}} = 0$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2+(x-2)e^{-x+2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{x-2}{e^{x-2}} \right) = 2$											
0.25		حساب المشتقة : $g'(x)=(3-x)e^{-x+2}$ أي $g'(x)=e^{-x+2}+(x-2)(-e^{-x+2})=(1-x+2)e^{-x+2}=(3-x)e^{-x+2}$											

0.25	دراسة إشارة المشتقة : $g'(x) = 0$ يعني $(3-x)e^{-x+2} = 0$ ومنه $3-x=0$ لأن $e^{-x+2} \neq 0$ أي $x=3$ جدول إشارة المشتقة : <table border="1"> <tr> <td>$x \in$</td> <td>$-\infty$</td> <td>3</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$3-x$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>$g'(x)$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> </table> جدول تغيرات الدالة g : <table border="1"> <tr> <td>$x \in$</td> <td>$-\infty$</td> <td>3</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$g'(x)$</td> <td>+</td> <td>0</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td>$g(x)$</td> <td>$-\infty$</td> <td>$2-e^{-1}$</td> <td>2</td> </tr> </table>	$x \in$	$-\infty$	3	$+\infty$	$3-x$	+	0	-	$g'(x)$	+	0	-	$x \in$	$-\infty$	3	$+\infty$	$g'(x)$	+	0	-	$g(x)$	$-\infty$	$2-e^{-1}$	2
$x \in$	$-\infty$	3	$+\infty$																						
$3-x$	+	0	-																						
$g'(x)$	+	0	-																						
$x \in$	$-\infty$	3	$+\infty$																						
$g'(x)$	+	0	-																						
$g(x)$	$-\infty$	$2-e^{-1}$	2																						
0.25	(2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.14 < \alpha < 1.15$: الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $[1.14; 1.15]$ ولدينا : $\begin{cases} g(1.14) = 2 + (1.14 - 2)e^{-1.14+2} = -0.03 \\ g(1.15) = 2 + (1.15 - 2)e^{-1.15+2} = 0.01 \end{cases}$ أي $g(1.14) \times g(1.15) < 0$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.14 < \alpha < 1.15$.																								
0.25	(3) إستنتاج إشارة $g(x)$ عندما يتغير x في $\mathbb{R}$: <table border="1"> <tr> <td>$x \in$</td> <td>$-\infty$</td> <td>α</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$g(x)$</td> <td>-</td> <td>0</td> <td>+</td> </tr> </table> $g(x) < 0$ إذا كان $x \in]-\infty; \alpha[$ $g(x) = 0$ إذا كان $x = \alpha$ $g(x) > 0$ إذا كان $x \in]\alpha; +\infty[$	$x \in$	$-\infty$	α	$+\infty$	$g(x)$	-	0	+																
$x \in$	$-\infty$	α	$+\infty$																						
$g(x)$	-	0	+																						
	II. لدينا الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = 2x - 1 - (x-1)e^{-x+2}$																								
2×0.25	(1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$: لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2x - 1 - (x-1)e^{-x+2}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[2x \left(1 - \frac{1}{2x} - \left(\frac{x-1}{2x} \right) e^{-x+2} \right) \right] = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x - 1 - (x-1)e^{-x+2}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[2x - 1 - \frac{x-1}{x-2} \times \frac{x-2}{e^{x-2}} \right] = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{-x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{x-1}{x-2}}_{=1} \times \underbrace{\frac{x-2}{e^{x-2}}}_{=0} = 0$																								
0.25	(2) تبين أن : من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$: لدينا : $f'(x) = 2 - [e^{-x+2} - (x-1)e^{-x+2}] = 2 - (2-x)e^{-x+2} = 2 + (x-2)e^{-x+2} = g(x)$																								

	جدول تغيرات الدالة f: <table><tr><td>$x \in$</td><td>$-\infty$</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>- 0 +</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$</td><td>$f(\alpha)$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	$x \in$	$-\infty$	α	$+\infty$	$f'(x)$		- 0 +		$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$				
$x \in$	$-\infty$	α	$+\infty$														
$f'(x)$		- 0 +															
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$														
0.5	(3) أ) تبيان أنّ : $f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2}{\alpha - 2}$ ثمّ إستنتاج حصر لـ $f(\alpha)$: لدينا : $f(\alpha) = 2\alpha - 1 - (\alpha - 1)e^{-\alpha + 2}$ لدينا : $g(\alpha) = 0$ و منه $2 + (\alpha - 2)e^{-\alpha + 2} = 0$ أي $e^{-\alpha + 2} = -\frac{2}{\alpha - 2}$ إذن : $f(\alpha) = 2\alpha - 1 - (\alpha - 1)\left(\frac{-2}{\alpha - 2}\right) = 2\alpha - 1 + \frac{2\alpha - 2}{\alpha - 2} = 2\alpha - 1 + 2 + \frac{2}{\alpha - 2}$ إذن $f(\alpha) = 2\alpha + 1 + \frac{2}{\alpha - 2}$																
0.25	حصر $f(\alpha)$: $1.14 - 2 < \alpha - 2 < 1.15 - 2$ $-0.86 < \alpha - 2 < -0.85$ $\frac{2}{-0.85} < \frac{2}{\alpha - 2} < \frac{2}{-0.86}$ $-2.35 < \frac{2}{\alpha - 2} < -2.32$ وبالتالي $3.28 - 2.35 < 2\alpha + 1 + \frac{2}{\alpha - 2} < 3.30 - 2.32$ أي $0.93 < f(\alpha) < 0.98$																
0.5	ب) تبيان أنّ المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$: لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x - 1 - (x - 1)e^{-x + 2} - (2x - 1)]$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-(x - 1)e^{-x + 2}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{x - 1}{x - 2} \times \frac{x - 2}{e^{x - 2}}\right] = 0$ أي المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$ دراسة الوضعية النسبية للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ) : ندرس إشارة الفرق $f(x) - y = -(x - 1)e^{-x + 2}$ <table><tr><td>$x \in$</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$x - 1$</td><td></td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>$f(x) - y$</td><td></td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td>الوضع النسبي</td><td></td><td>(C_f) فوق (Δ)</td><td>(C_f) تحت (Δ)</td></tr></table>	$x \in$	$-\infty$	1	$+\infty$	$x - 1$		0	+	$f(x) - y$		0	-	الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)
$x \in$	$-\infty$	1	$+\infty$														
$x - 1$		0	+														
$f(x) - y$		0	-														
الوضع النسبي		(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)														
0.5	ج) تبيان أنّ المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) : (T) يوازي المستقيم (Δ) يعني معامل توجيه (T) يساوي 2 أي $f'(x) = 2$ إذن : $2 + (x - 2)e^{-x + 2} = 2$ و منه $(x - 2)e^{-x + 2} = 0$																

وبالتالي $x = 2$

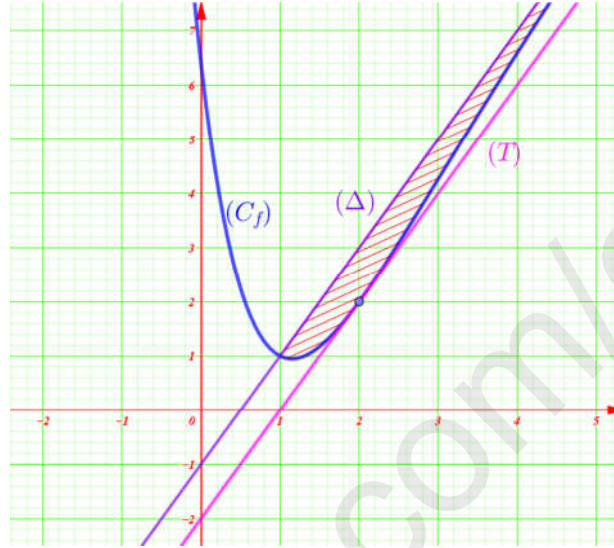
كتابة معادلة المماس (T) :

أي $y = f'(2)(x-2) + f(2) = 2(x-2) + 2 = 2x - 2$ $(T): y = 2x - 2$

(د) حساب $f(0)$ و $f(2)$ ثم إنشاء (Δ) ، (T) و (C_f) :

$$f(0) = 2 \times 0 - 1 - (0-1)e^{2-0} = -1 + e^2 \approx 6.39$$

$$f(2) = 2 \times 2 - 1 + (2-1)e^{2-2} = 2$$



0.75

(4) مناقشة حلول المعادلة: $(E): 2m - 1 - (x-1)e^{-x+2} = 0$

(E) تكافئ $-1 - (x-1)e^{-x+2} = -2m$

تكافئ $2x - 1 - (x-1)e^{-x+2} = 2x - 2m$

ومنه $f(x) = 2x - 2m$

حلول المعادلة هي فواصل النقاط المشتركة بين (C_f) والمستقيم ذي المعادلة $y = 2x - 2m$ الموازي لكل من (Δ) و (T) .

- إذا كان $-2m \in]-\infty; -2[$ أي $m \in]1; +\infty[$ فإن المعادلة ليس لها حل.

- إذا كان $-2m = -2$ أي $m = 1$ فإن المعادلة لها حل وحيد موجب.

- إذا كان $-2m \in]-2; -1[$ أي $m \in]\frac{1}{2}; 1[$ فإن المعادلة تقبل حلين موجبين.

- إذا كان $-2m \in]-1; -1+e^2[$ أي $m \in]\frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{e^2}{2}[$ فإن المعادلة لها حل موجب.

- إذا كان $-2m = -1+e^2$ أي $m = \frac{1}{2} - \frac{e^2}{2}$ فإن المعادلة لها حل معدوم.

- إذا كان $-2m \in]-1+e^2; +\infty[$ أي $m \in]-\infty; \frac{1}{2} - \frac{e^2}{2}[$ فإن المعادلة لها حل وحيد سالب.

0.75

0.25	III. لدينا : $H(x) = (ax+b)e^{-x+2}$ (أ) تعيين العددين الحقيقيين a و b بحيث تكون الدالة H دالة أصلية للدالة h المعرفة بـ : $h(x) = (x-1)e^{-x+2}$ على $\mathbb{R}$: لدينا : $H'(x) = a \times e^{-x+2} + (ax+b)(-e^{-x+2}) = (a-ax-b)e^{-x+2}$ $H'(x) = (a-b-ax)e^{-x+2}$ H دالة أصلية للدالة h يعني $H'(x) = h(x)$ أي $(a-b-ax)e^{-x+2} = (x-1)e^{-x+2}$ بالمطابقة نجد : $\begin{cases} -a = 1 \\ a-b = -1 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases}$ أي $H(x) = -xe^{-x+2}$
0.25	(ب) حساب $A(\lambda)$: في المجال $[1; \lambda]$ المنحني $(\mathcal{C}_f)$ يقع تحت المستقيم (Δ) ومنه $A(\lambda) = \int_1^\lambda (2x-1-f(x)) dx = \int_1^\lambda (x-1)e^{2-x} dx = [H(x)]_1^\lambda$ إذن : $A(\lambda) = H(\lambda) - H(1) = -\lambda e^{2-\lambda} + e$
0.25	حساب $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$: $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\lambda e^{2-\lambda} + e) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\lambda}{e^\lambda} \times e^2 \right) + e = e$

انتهى تصحيح الموضوع الأول

تصحيح الموضوع الثاني

التصحيح

التمرين الاول

العلامة مجزأة

04.5 نقطة

لدينا : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 2}$

(1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $1 \leq u_n < 2$:

نسمي $P(n)$ هذه الخاصية .

1- من أجل $n = 0$ لدينا :

$u_0 = 1$ و $1 \leq 1 < 2$ ومنه $1 \leq u_0 < 2$ أي $P(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$.

2- نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن على صحة $P(n+1)$.

لدينا : $1 \leq u_n < 2$ فرضا .

ومنه : $3 \leq u_n + 2 < 4$

إذن : $\frac{1}{4} < \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{3}$

ومنه $-\frac{8}{3} \leq -\frac{8}{u_n + 2} < -\frac{8}{4}$

لأن : $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 2} = 4 - \frac{8}{u_n + 2}$

وبالتالي : $4 - \frac{8}{3} \leq 4 - \frac{8}{u_n + 2} < 4 - \frac{8}{4}$

إذن : $4 - \frac{8}{3} \leq 4 - \frac{8}{u_n + 2} < 4 - \frac{8}{4}$

أي $\frac{4}{3} \leq u_{n+1} < 2$ وبالتالي $1 \leq u_{n+1} < 2$ ومنه $P(n+1)$ صحيحة .

3- حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .

(2) دراسة رتبة المتتالية (u_n) :

ندرس إشارة الفرق : $u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{u_n + 2} - u_n = \frac{4u_n - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2}$

أي $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n - u_n^2}{u_n + 2} = \frac{u_n(2 - u_n)}{u_n + 2}$

جدول إشارة الفرق :

$u_n \in$	1	2
u_n	+	
$2 - u_n$	+	
$u_n + 2$	+	
$u_{n+1} - u_n$	+	

وبالتالي : $u_{n+1} - u_n > 0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

دراسة تقارب المتتالية (u_n) :

(u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .

0.5

0.25 × 2

0.25

0.5	(3) من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$ (أ) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية : (v_n) متتالية هندسية يعني $v_{n+1} = v_n \times q$ لدينا : $v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2}{\frac{4u_n}{u_n + 2}} = 1 - \frac{2(u_n + 2)}{4u_n} = \frac{4u_n - 2u_n - 4}{4u_n} = \frac{2u_n - 4}{4u_n} = \frac{2}{4} \times \frac{u_n - 2}{u_n}$ ومنه : $v_{n+1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{u_n} \right) = \frac{1}{2} v_n$ أي (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = 1 - \frac{2}{u_0} = 1 - \frac{2}{1} = -1$
0.25	التعبير عن v_n بدلالة n : $v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$
0.5	(ب) إستنتاج عبارة u_n بدلالة n : لدينا : $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$ ومنه $\frac{2}{u_n} = 1 - v_n$ أي $u_n = \frac{2}{1 - v_n}$ وبالتالي : $u_n = \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n}$
0.25	حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x} = 2$
0.5	(ج) حساب S_n بدلالة n : لدينا : $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$ ولدينا : $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{2} (1 - v_n)$ ومنه : $S_n = \frac{1}{2} (1 - v_0) + \frac{1}{2} (1 - v_1) + \dots + \frac{1}{2} (1 - v_n) = \frac{1}{2} (n+1) - \frac{1}{2} (v_0 + v_1 + \dots + v_n)$ أي $S_n = \frac{1}{2} (n+1) - \frac{1}{2} \left(v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} (n+1) - \frac{1}{2} \times \left(-1 \times 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) \right)$ أي $S_n = \frac{1}{2} (n+1) + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) = \frac{1}{2} n + \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ أي $S_n = \frac{1}{2} n + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$
	(4) تبيان أن : $u_{n+1} - 2 \leq \frac{2}{3} u_n - 2$ من أجل كل عدد طبيعي n : لدينا : $u_{n+1} - 2 = \frac{4u_n}{u_n + 2} - 2 = \frac{4u_n - 2u_n - 4}{u_n + 2} = \frac{2u_n - 4}{u_n + 2} = \frac{2(u_n - 2)}{u_n + 2}$ ومنه $u_{n+1} - 2 = \left \frac{2(u_n - 2)}{u_n + 2} \right = 2 \times \left \frac{u_n - 2}{u_n + 2} \right = \frac{2}{ u_n + 2 } \times u_n - 2 = \frac{2}{u_n + 2} \times u_n - 2$ لأن $3 \leq u_n + 2 < 4$

0.5	ولدينا : $1 \leq u_n < 2$ ومنه $3 \leq u_n + 2 < 4$ إذن $\frac{1}{4} < \frac{1}{u_n + 2} \leq \frac{1}{3}$ وبالتالي : $u_{n+1} - 2 \leq \frac{2}{3} \times u_n - 2$
0.5	(ب) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ لدينا : $u_{n+1} - 2 \leq \frac{2}{3} u_n - 2$ من أجل كل عدد طبيعي n. $u_1 - 2 \leq \frac{2}{3} u_0 - 2$ ومنه : $u_2 - 2 \leq \frac{2}{3} u_1 - 2$ $\vdots$ $u_n - 2 \leq \frac{2}{3} u_{n-1} - 2$ أي $u_1 - 2 \times u_2 - 2 \times \dots \times u_n - 2 \leq \frac{2}{3} u_0 - 2 \times \frac{2}{3} u_1 - 2 \times \dots \times \frac{2}{3} u_{n-1} - 2$ بالإختزال نجد : $u_n - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ من أجل كل عدد طبيعي n
0.25	إستنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$: لدينا : $u_n - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ومنه $-\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq u_n - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ولدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^n \right] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 2) = 0$ حسب مبرهنة الحصر . إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$
04 نقاط	التمرين الثاني
	لدينا : $A(-1; 3; 1)$ ، $B(0; 5; 0)$ ، $E(-3; 4; 0)$ والمستوي (Q) ذو المعادلة $2x - y + z - 2 = 0$
0.5	(1) بين أن نصف قطر سطح الكرة (S) هو $\sqrt{6}$: (S) مركزها النقطة A وتمس المستوي (Q) يعني $R = \sqrt{6}$ ومنه $R = d(A; (Q)) = \frac{ 2x_A - y_A + z_A - 2 }{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{ 2(-1) - 3 + 1 - 2 }{\sqrt{6}} = \frac{ -6 }{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$
0.5	كتابة معادلة لـ (S) : هي من الشكل : $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = R^2$ أي $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 6$
	إيجاد إحداثيات نقطتي تقاطع (S) وحامل محور الترتيب :
2×0.25	هي حل الجملة : $\begin{cases} (t-3)^2 = 4 \\ x=0 \\ y=t \\ z=0 \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 6 \\ x=0 \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$ $(t-3)^2 = 4$ يكافئ $t-3=2$ أو $t-3=-2$ يكافئ $t=5$ أو $t=1$

	حامل محور الترتيب يقطع (S) في النقطتين $F(0;1;0)$ و $F'(0;5;0)$
0.5	(2) كتابة تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة A ويعامد (Q): الشعاع الناظمي للمستوي (Q) هو توجيهه للمستقيم (Δ) وهو $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $M(x; y; z)$ نقطة من (Δ) يعني $\vec{AM} \parallel \vec{u}$ ومنه $\vec{AM} = \lambda \vec{u}$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$ أي $\begin{cases} x+1=2\lambda \\ y-3=-\lambda \\ z-1=\lambda \end{cases}$ ومنه جملة تمثيل وسيطي للمستقيم (Δ) هي $\begin{cases} x=2\lambda-1 \\ y=-\lambda+3 \\ z=\lambda+1 \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R})$
0.5	إستنتاج إحداثيات النقطة H نقطة تماس (Q) و (S): H هي النقطة المشتركة بين (Δ) و (Q). إحداثيات H هي حل للجملة $\begin{cases} x=2\lambda-1 \\ y=-\lambda+3 \\ z=\lambda+1 \\ 2x-y+z-2=0 \end{cases}$ إذن $2(2\lambda-1)-(-\lambda+3)+\lambda+1-2=0$ أي $6\lambda-6=0$ ومنه $\lambda=1$ إذن إحداثيات H : $\begin{cases} x=2(1)-1=1 \\ y=-1+3=2 \\ z=1+1=2 \end{cases}$ أي $H(1;2;2)$
0.5	(3) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (Q') الموازي للمستوي (Q) والمماس لـ (S): (Q') يوازي (Q) يعني للمستوي (Q') معادلة من الشكل : $2x-y+z+d=0$ لحساب d نعوض بإحداثيات النقطة H' نظيرة النقطة H بالنسبة إلى مركز سطح الكرة (S). إذن إحداثيات النقطة H' هي : $\begin{cases} x_{H'}=2x_A-x_H=2 \times (-1)-1=-3 \\ y_{H'}=2y_A-y_H=2 \times 3-2=4 \\ z_{H'}=2z_A-z_H=2 \times 1-2=0 \end{cases}$ أي $H'(-3;4;0)$ أي $E(-3;4;0)$ بالتعويض في معادلة (Q') نجد : $2(-3)-4+0+d=0$ أي $d=10$ ومنه معادلة (Q') هي $2x-y+z+10=0$
0.5	(4) لدينا : (P_α) المستوي المعروف بـ : $\vec{BM} \cdot \vec{EH} = \alpha$. (أ) كتابة معادلة ديكارتية للمستوي (P_α): لدينا : $\vec{EH} \begin{pmatrix} 1+3 \\ 2-4 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $\vec{BM} \begin{pmatrix} x \\ y-5 \\ z \end{pmatrix}$ $\vec{BM} \cdot \vec{EH} = \alpha$ يكافئ $4x-2(y-5)+2z=\alpha$ ومنه $4x-2y+2z+10-\alpha=0$ معادلة للمستوي (P_α)

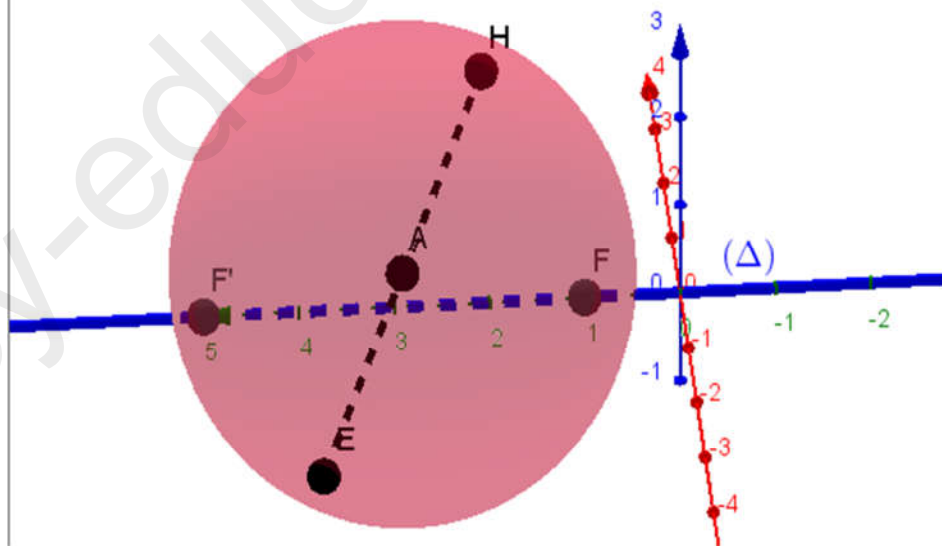
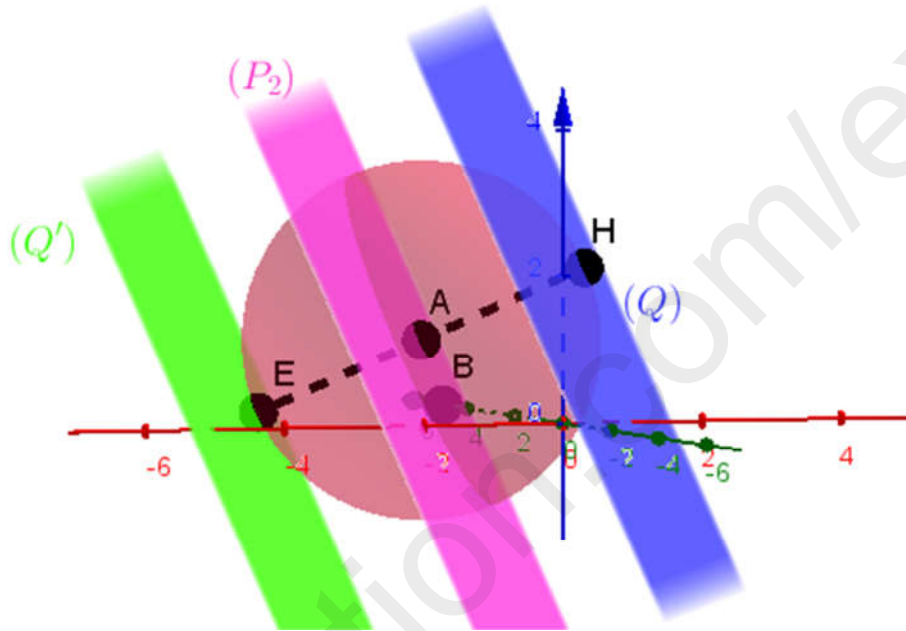
0.25

ومنه A هي منتصف القطعة $[EH]$ $\frac{y_E + y_H}{2} = \frac{4+2}{2} = 3 = y_A$

$$\frac{z_E + z_H}{2} = \frac{0+2}{2} = 1 = z_A$$

0.25

ومنه : $4(-1) - 2(3) + 2 \times 1 + 10 - \alpha = 0$ أي $\alpha = 2$



04.5 نقطة	التمرين الثالث
4×0.25	(1) الحل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z : $(z-4)(z^2-4z+8)=0$: $(z-4)(z^2-4z+8)=0 \quad \text{تكافئ} \quad z-4=0 \quad \text{أو} \quad z^2-4z+8=0$ $z-4=0$ يعني $z=4$ حل المعادلة $z^2-4z+8=0$: حساب المميز : $\Delta=(-4)^2-4\times 8=16-32=-16=(4i)^2$ المعادلة تقبل حلين متمايزين هما : $z_1=\frac{4-4i}{2}=2-2i$ $z_2=2+2i$ مجموعة حلول المعادلة : $S=\{4; 2-2i; 2+2i\}$
0.5	(2) لدينا $z_E=-6-2i$ و $z_D=-z_A$ ، $z_C=\overline{z_A}$ ، $z_B=4$ ، $z_A=2-2i$ (أ) كتابة العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسّي: لدينا : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{2+2i-2+2i}{4-2+2i}=\frac{4i}{2+2i}\times\frac{2-2i}{2-2i}=\frac{8i+8}{8}=1+i$ أي $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=1+i$ ومنه $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$
0.75	إستنتاج أن النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المستوي المباشر S الذي مركزه النقطة A ، يطلب تعيين نسبة وزاوية التشابه S : لدينا : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ومنه $\frac{AC}{AB}=\sqrt{2}$ و $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})=\frac{\pi}{4}$ وبالتالي النقطة C هي صورة النقطة B بالتشابه المستوي المباشر S الذي مركزه النقطة A ونسبته $k=\sqrt{2}$ وزاويته $\theta=\frac{\pi}{4}$
0.5	(ب) التحقق أن النقطة D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1), (B;-2), (C;2)\}$: لدينا : $1-2+2=1\neq 0$ ومنه مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1), (B;-2), (C;2)\}$ موجود لاحقته هي z_D $\frac{z_A-2z_B+2z_C}{1-2+2}=\frac{2-2i-8+4+4i}{1}=-2+2i=z_D$ ومنه D هي مرجح الجملة المثقلة $\{(A;1), (B;-2), (C;2)\}$
0.25	(ج) (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $(1+i)z+4 =8$ التحقق أن النقطة A تنتمي إلى (Γ) : $A\in(\Gamma)$ يعني $(1+i)z_A+4 =8$ لدينا : $(1+i)z_A+4 = (1+i)(2-2i)+4 = 4+4 = 8 =8$ ومنه $A\in(\Gamma)$

تعيين طبيعة المجموعة (Γ) وعناصرها المميزة:

0.5

لدينا : $|z + 4| = 8$ يكافئ $\left| (1+i) \left(z + \frac{4}{1+i} \right) \right| = 8$

أي $|1+i| \times \left| z + \frac{4}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} \right| = 8$ ومنه $\sqrt{2} \times |z + 2 - 2i| = 8$

إذن $|z - (-2 + 2i)| = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ وبالتالي $|z - z_D| = 4\sqrt{2}$

أي $DM = 4\sqrt{2}$ ومنه (Γ) هي دائرة مركزها النقطة D ونصف قطرها $R = 4\sqrt{2}$

(د) التحقق أن $S(D) = E$:

0.5

لدينا : $\frac{z_E - z_A}{z_D - z_A} = \frac{-6 - 2i - 2 + 2i}{-2 + 2i - 2 + 2i} = \frac{-8}{-4 + 4i} = \frac{-8(-4 - 4i)}{(-4 + 4i)(-4 - 4i)} = \frac{32(1+i)}{16+16}$

ومنه $\frac{z_E - z_A}{z_D - z_A} = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

وبالتالي : $S(D) = E$

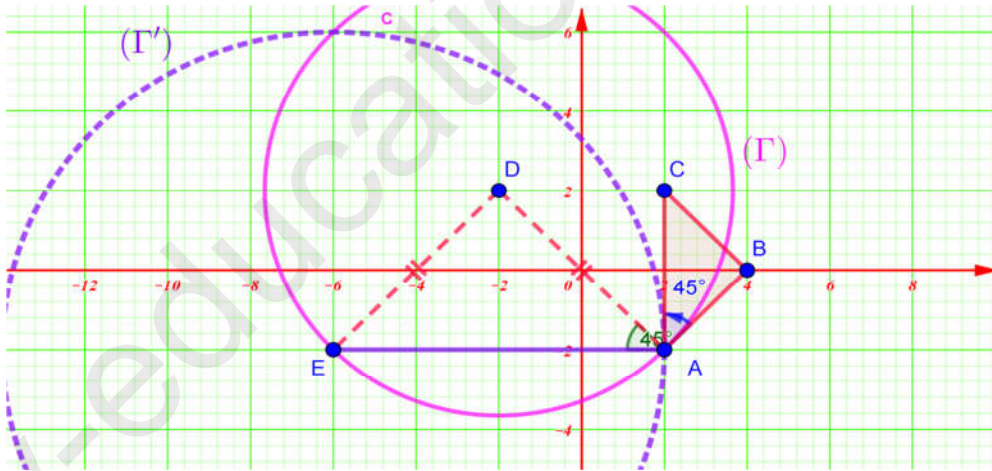
تبيان أن الدائرة (Γ') التي مركزها E ونصف قطرها AE هي صورة (Γ) بالتشابه S :

0.5

(Γ) هي الدائرة التي مركزها النقطة D ونصف قطرها $AD = R = 4\sqrt{2}$

صورتها هي الدائرة (Γ') التي مركزها $E = S(D)$ ونصف قطرها $R' = \sqrt{2}AD = AE$

لأن $\frac{AE}{AD} = \sqrt{2}$



07 نقاط		التمرين الرابع										
		I. لدينا : $g(x) = -x - \ln x$ و $D_g =]0; +\infty[$										
2×0.25		(1) دراسة تغيرات الدالة g : - حساب النهايات : $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x - \ln x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(-1 - \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty$										
2×0.25		- حساب المشتقة : $g'(x) = -1 - \frac{1}{x} = \frac{-x-1}{x} = -\left(\frac{x+1}{x}\right)$ - دراسة إشارة المشتقة : من أجل $x \in]0; +\infty[$ لدينا : $-\left(\frac{x+1}{x}\right) < 0$ ومنه $g'(x) < 0$ وبالتالي الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$										
0.25		- جدول تغيرات الدالة g : <table><tr><td>$x \in$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td></td><td>-</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>$+\infty$</td><td>$-\infty$</td></tr></table>		$x \in$	0	$+\infty$	$g'(x)$		-	$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$
$x \in$	0	$+\infty$										
$g'(x)$		-										
$g(x)$	$+\infty$	$-\infty$										
0.75		(2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$: الدالة g مستمرة ورتيبة تماما على المجال $]0; +\infty[$ وصورة المجال $]0; +\infty[$ بالدالة g هو المجال $]-\infty; +\infty[$ و 0 موجود في المجال $]-\infty; +\infty[$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$. التحقق أن $0.56 < \alpha < 0.57$: لدينا : $g(0.56) = -0.56 - \ln 0.56 = 0.02$ $g(0.57) = -0.57 - \ln 0.57 = -0.01$ أي $g(0.56) \times g(0.57) < 0$ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.56 < \alpha < 0.57$										
0.25		(3) إستنتاج إشارة $g(x)$: <table><tr><td>$x \in$</td><td>0</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td></td><td>+</td><td>-</td></tr></table>		$x \in$	0	α	$+\infty$	$g(x)$		+	-	
$x \in$	0	α	$+\infty$									
$g(x)$		+	-									
		II. لدينا : $f(x) = \frac{-1 + (x-1)\ln x}{x}$ معرفة على $D_f =]0; +\infty[$										
0.25		(1) حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} [-1 + (x-1)\ln x] = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1 + (x-1)\ln x}{x} = +\infty$										

0.25	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + (x-1)\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} + \left(\frac{x-1}{x} \right) \times \ln x \right] = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ لأنّ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right) \times \ln x = +\infty$												
0.25	(2) تبين أنّ $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$: لدينا : $f'(x) = \frac{\left[\ln x + (x-1) \times \frac{1}{x} \right] \times x - (-1 + (x-1)\ln x)}{x^2}$ $f'(x) = \frac{x \ln x + x - 1 + 1 - x \ln x + \ln x}{x^2}$ ومنه $f'(x) = \frac{x + \ln x}{x^2}$ أي $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$												
0.5	جدول تغيرات الدالة f : <table><tr><td>$x \in$</td><td>0</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>- 0 +</td><td></td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>$+\infty$ $f(\alpha)$</td><td>$+\infty$</td></tr></table>	$x \in$	0	α	$+\infty$	$f'(x)$		- 0 +		$f(x)$		$+\infty$ $f(\alpha)$	$+\infty$
$x \in$	0	α	$+\infty$										
$f'(x)$		- 0 +											
$f(x)$		$+\infty$ $f(\alpha)$	$+\infty$										
0.25	(3) أ) تبين أنّ $f(\alpha) = 1 - \alpha - \frac{1}{\alpha}$: لدينا : $f(\alpha) = \frac{-1 + (\alpha-1)\ln \alpha}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha} + \frac{(\alpha-1)\ln \alpha}{\alpha}$ ولدينا : $g(\alpha) = 0$ ومنه $-\alpha - \ln \alpha = 0$ أي $\ln \alpha = -\alpha$ وبالتالي : $f(\alpha) = -\frac{1}{\alpha} + \frac{(\alpha-1)(-\alpha)}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha} + (\alpha-1)(-1) = 1 - \alpha - \frac{1}{\alpha}$ أي $f(\alpha) = 1 - \alpha - \frac{1}{\alpha}$ حصر $f(\alpha)$:												
0.25	لدينا : $0.56 < \alpha < 0.57$ ومنه $\frac{1}{0.57} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{0.56}$ أي $1.75 < \frac{1}{\alpha} < 1.78$ ومنه $-1.78 < -\frac{1}{\alpha} < -1.75$ و $-0.57 < -\alpha < -0.56$ إذن $1 - 0.57 - 1.78 < 1 - \alpha - \frac{1}{\alpha} < 1 - 0.56 - 1.75$ ومنه وبالتالي $-1.35 < f(\alpha) < -1.31$												

ب) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$:

لدينا :

0.25

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-1 + (x-1)\ln x}{x} - \ln x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + x \ln x - \ln x - x \ln x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right) = 0 \text{ أي}$$

التفسير الهندسي :

المنحني (γ) منحنى مقارب للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$.

دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) بالنسبة إلى (γ) :

$$\text{ندرس إشارة الفرق } f(x) - \ln x = \frac{-1 - \ln x}{x}$$

0.5

$x \in$	0	α	$+\infty$	
$f(x) - \ln x$		+	0	-
الوضع النسبي				

ج) كتابة معادلة المماس (T) عند النقطة ذات الفاصلة 1 :

0.5

$$(T): y = 1 \times (x-1) - 1 = x - 2$$

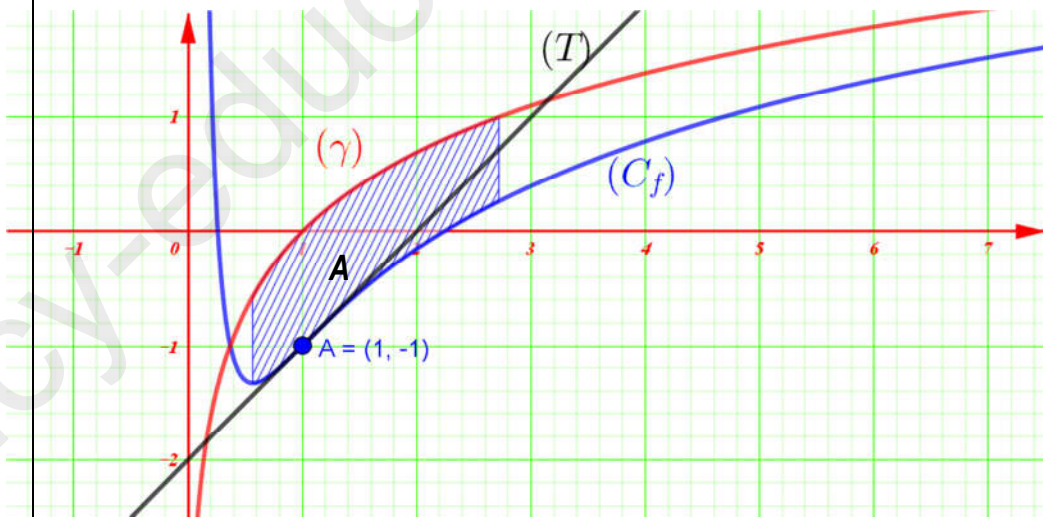
$$(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$\text{إذن } (T): y = x - 2$$

د) حساب $f(2)$ ، $f(e)$ والرسم :

$$f(2) = -0.15 \text{ ، } f(e) = 0.26$$

0.75



0.5	(5) حساب المساحة A : $A = \int_{\alpha}^e [\ln x - f(x)] dx = \int_{\alpha}^e \left[\ln x - \frac{-1 + x \ln x - \ln x}{x} \right] dx = \int_{\alpha}^e \left[\frac{x \ln x + 1 - x \ln x + \ln x}{x} \right] dx$ $A = \int_{\alpha}^e \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) dx = \left[\ln x + \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_{\alpha}^e \text{ أي } \text{ومنه :}$ $A = \int_{\alpha}^e \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \right) dx = \left[\ln e + \frac{1}{2} (\ln e)^2 \right] - \left[\ln \alpha + \frac{1}{2} (\ln \alpha)^2 \right] = \left(\frac{3}{2} - \ln \alpha - \frac{1}{2} (\ln \alpha)^2 \right) us$ وبالتالي $A = \frac{1}{2} (3 - 2 \ln \alpha - (\ln \alpha)^2) cm^2$
0.25	التحقق أن : $A = \frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}$ لدينا : $A = \frac{3 - 2 \ln \alpha - (\ln \alpha)^2}{2}$ و $\ln \alpha = -\alpha$ ومنه $A = \frac{3 - 2(-\alpha) - (-\alpha)^2}{2} = \frac{3 + 2\alpha - \alpha^2}{2} = \frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}$ وبالتالي $A = \frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2}$
0.25	تعيين حصر لـ A : لدينا : $0.56 < \alpha < 0.57$ ومنه $1.56 < 1 + \alpha < 1.57$ و $-0.57 < -\alpha < -0.56$ ومنه $2.43 < 3 - \alpha < 2.44$ إذن $\frac{1.56 \times 2.43}{2} < \frac{(1+\alpha)(3-\alpha)}{2} < \frac{1.57 \times 2.44}{2}$ وبالتالي $1.90 < A < 1.92$

انتهى تصحيح الموضوع الثاني

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

$$(1) \begin{cases} \bar{a} - \bar{b} = 1 + 3i \\ a + ib = -1 + 3i \end{cases} : \text{عينا العدد المركبين } a \text{ و } b \text{ علما أن } :$$

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب : $a = 3 + i$ و $b = 2 + 4i$ ، و نفرض الإنسحاب T الذي شعاعه $\vec{AB}$.

(أ) عينا لاحقة النقطة C صورة O بالإنسحاب T .

(ب) أحسب العدد $\frac{z_c - z_A}{z_B}$ ، ثم أكتبه على الشكل الأسّي .

- ماذا تستنتج بالنسبة للقطعتين $[AC]$ و $[OB]$ ؟

(ج) إستنتج مما سبق طبيعة الرباعي $OABC$ ، ثم عينا لاحقة E مركز تناظر الرباعي $OABC$.

(3) نعتبر التشابه المباشر S الذي مركزه O و يحول B إلى C :

(أ) أعط الكتابة المركبة للتشابه المباشر S .

(ب) ماهي صورة النقطة A بالتشابه S ؟

(ج) نضع : $S^4 = S \circ S \circ S \circ S$

- أعط الكتابة المركبة للتحويل S^4 ، و ما طبيعة هذا التحويل ؟

التمرين الثاني: (04 نقاط)

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

f الدالة المعرفة على $[0; +\infty[$: $f(x) = \frac{6x + 5}{x + 2}$ ، و ليكن (C_f)

المنحني الممثل لها، (Δ) هو المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (أنظر الشكل المقابل)

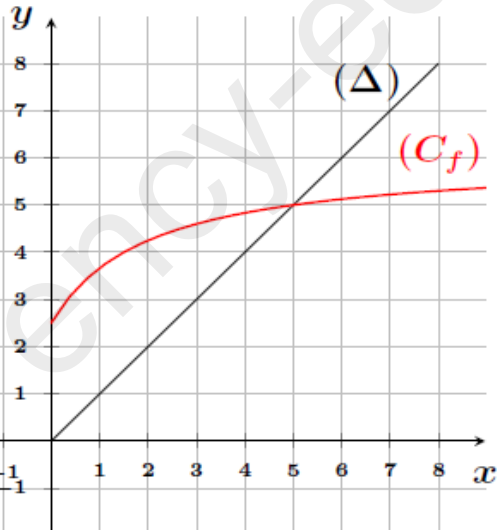
(I) تحقق أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$.

(II) (u_n) متتالية معرفة بحددها الأول $u_0 = 1$

و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) (أ) أنقل الشكل المقابل ثم مثل على محور الفواصل الحدود u_3, u_2, u_1, u_0

(ب) ضع تخمينا حول إتجاه تغير المتتالية (u_n) و تقاربها .



(2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : 1 \leq u_n \leq 5$.

(3) أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) ، هل هي متقاربة ؟ .

(4) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n : v_n = \frac{u_n - 5}{u_n + 1}$.

(أ) بيّن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها و حدّها الأوّل .

(ب) عبّر عن v_n ثمّ عن u_n بدلالة n .

(ج) ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟ .

(5) أحسب المجموع S_n حيث : $S_n = \frac{1}{u_0 + 1} + \frac{1}{u_1 + 1} + \dots + \frac{1}{u_n + 1}$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(I) يحتوي و عاء على n كرة بيضاء ، حيث : $(n \geq 2)$ و 5 كرات حمراء و 3 كرات خضراء ، نسحب عشوائيا و في آن واحد كرتين من الوعاء :

(1) ما إحتمال سحب كرتين بيضاوين ؟ .

(2) نسمي $p(n)$ إحتمال سحب كرتين من نفس اللون .

(أ) بيّن أن : $p(n) = \frac{n^2 - n + 26}{(n + 8)(n + 7)}$.

(ب) أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(n)$ ، ثمّ فسّر النتيجة المحصّل عليها .

(II) فيما يلي نعتبر $n = 4$ ، يأتي لاعب و يقوم بنفس التجربة الأولى : في البداية يدفع 30DA إذا وجد في السحب الكرتين من نفس اللون يكسب 40DA ، و إذا وجدتهما من لونين مختلفين يكسب 5DA .

نسمي الربح الجبري للاعب الفرق بين المبلغ المدفوع أوّلا و المبلغ الذي يكسبه ، و ليكن المتغيّر العشوائي X هو الربح الجبري للاعب :

(1) ما هي القيم الممكنة للمتغيّر العشوائي X ؟ .

(2) أكتب قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X ، ثمّ أحسب أمله الرياضي .

(III) فيما يلي نعتبر $n = 2$ ، نسحب من الوعاء عشوائيا كرتين على التوالي و بدون إرجاع :

(1) شكل شجرة الإحتمالات التي تتمزج التجربة .

(2) أحسب إحتمال الحوادث التالية :

A : " سحب كرتين من نفس اللون " ، B : " سحب كرة خضراء واحدة على الأقل " .

(3) نفرض أنّ الكرة في السحبة الأولى كانت خضراء ، ما إحتمال أن تكون حمراء في السحبة الثانية ؟ .

التمرين الرابع: (08 نقاط)

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x + 2 - e^x$.

(1) أدرس تغيّرات الدالة g على $[0; +\infty[$ ، و عيّّن نهاية g عند $+\infty$.

(2) (أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على $[0; +\infty[$.

(ب) تحقّق أن : $1,14 < \alpha < 1,15$.

(ج) إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من المجال $[0; +\infty[$.

(II) نعرّف على المجال $[0; +\infty[$ الدالة f كما يلي : $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$ ، و ليكن (C_f) منحناها البياني في المستوي

المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$.

ب) إستنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

(2) أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{e^x \times g(x)}{(xe^x + 1)^2}$.

ب) إستنتج إتجاه تغيّر الدالة f على $[0; +\infty[$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

(ج) بيّن أنّ : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

(3) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

(4) أ) تحقّق أنّه من أجل كل x من $[0; +\infty[$: $f(x) - x = \frac{(x + 1) \times u(x)}{xe^x + 1}$ ، حيث : $u(x) = e^x - xe^x - 1$.

ب) أدرس إتجاه تغيّر الدالة u على $[0; +\infty[$ ، ثمّ إستنتج إشارة $u(x)$.

(ج) إستنتج من الأسئلة السابقة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (T) .

(د) أرسم كلا من (T) و المنحني (C_f) ، الوحدة : $4cm$.

(III) 1) عيّن دالة أصلية F للدالة f على المجال $[0; +\infty[$.

(2) أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحدّد بالمنحني (C_f) و المماس (T) و محور الترتيب و المستقيم ذو المعادلة $x = 1$.

إنتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

- (1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $(z - i)(z^2 + 2z + 2) = 0$
- (2) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. النقط A, B, C و D لواحقتها:
- $z_D = 1 - 2i$ ، $z_C = -1 - i$ ، $z_B = 2$ ، $z_A = i$
- (أ) تحقق أن النقطة D مرجح الجملة $\{(A; 1); (B; -1); (C; -1)\}$.
- (ب) أكتب العدد $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_C}$ على الشكل الأسّي، ثم فسر النتيجة هندسياً.
- (ج) أكتب العدد المركب $-4 + 4i$ على الشكل الأسّي، ثم أحسب $(-4 + 4i)^{2018}$.
- (3) من أجل كل نقطة $M(z)$ من المستوي تختلف عن B ، نرفق النقطة $M'(z')$ حيث: $z' = \frac{iz - 4 + 2i}{z - 2}$.
- (أ) تحقق أن: $z' - i = \frac{-4 + 4i}{z - 2}$.
- (ب) بين أن: $AM' \times BM = 4\sqrt{2}$ و $(\vec{u}; \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}; \overrightarrow{BM}) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.
- (4) (Γ) هي مجموعة النقط M من المستوي بحيث: $\arg(z' - i) = \frac{\pi}{4}$.
- تحقق أن النقطة E ذات اللاحقة $z_E = 2 + i$ تنتمي إلى (Γ) ، ثم عين طبيعة المجموعة (Γ) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ: $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1}$.
- (1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 2$.
- (2) أدرس رتبة المتتالية (u_n) .
- (3) إستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة. ما هي نهايتها؟
- (4) (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$.
- (ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 2 - u_n \leq (\frac{4}{5})^n$ ، ثم عين نهاية المتتالية (u_n) من جديد.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر المستوي (P) معادلته: $2x + y - 2z + 4 = 0$.
- و النقط $A(3; 2; 6)$ ، $B(1; 2; 4)$ ، $C(4; -2; 5)$.
- (1) (أ) بين أن النقط A ، B و C تعين مستويًا.
- (ب) تحقق أن (P) هو المستوي (ABC) .
- (2) (أ) بين أن المثلث ABC قائم.
- (ب) أكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (Δ) المار بالنقطة O و العمودي على (P) .

(ج) النقطة K هي المسقط العمودي للنقطة O على (P) ، أحسب الطول OK .

(3) النقطة G هي مرجح الجملة $\{(O;3);(A;1);(B;1);(C;1)\}$

(أ) أحسب إحداثيات النقطة G .

(ب) أحسب المسافة بين النقطة G و المستوي (P) .

(4) (Γ) هي مجموعة النقط $M(x;y;z)$ من الفضاء حيث : $\|3\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 5$

(أ) عيّن طبيعة المجموعة (Γ) و عناصرها المميزة .

(ب) ما طبيعة $(\Gamma) \cap (P)$ ؟ .

(ج) أحسب حجم رباعي الوجوه $GABC$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

(I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $g(x) = x^3 - x - 2\ln x + 3$.

(1) (أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$.

(ب) عيّن نهايات الدالة g عند 0 و عند $+\infty$.

(2) (أ) أدرس اتجاه تغيّر الدالة g و شكل جدول تغيّراتها .

(ب) إستنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل $x \in]0; +\infty[$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي : $f(x) = x - 1 + \frac{x-1+\ln x}{x^2}$.

(C) هو المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً .

(2) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

(3) بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$ ، ثم حدّد وضعية المنحني (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

(4) أدرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكل جدول تغيّراتها .

(5) أكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C) عند النقطة $A(1;0)$.

(6) أرسم كلا من (Δ) ، (T) و المنحني (C) .

(7) لتكن (d_m) عائلات المستقيمات المعرفة بـ : $y = mx - m$ ، حيث m وسيط حقيقي

(أ) تحقق أنّ جميع المستقيمات (d_m) تمر بالنقطة A .

(ب) عيّن قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = mx - m$ حلان متمايزان .

(III) (1) باستعمال التكامل بالتجزئة ، بيّن أنّ : $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e}$.

(2) أحسب بـ $u.a$ مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحني (C) و (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتهما :

$x = e$ و $x = 1$ (يجب تقديم القيمة المضبوطة لمساحة الحيز) .

إنتهى الموضوع الثاني



20462601812018

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

دورة : ماي 2018

الشعبة : علوم تجريبية

مديرية التربية لولاية غرداية

المقاطعة رقم 1 لولاية غرداية

امتحان البكالوريا التجريبي

المدة : 03 سا و 30 د

اختبار في مادة : الرياضيات

على الطالب أن يختار أحد الموضوعين التاليين :
الموضوع الأول :

التمرين الأول: (04 نقاط)

- يحتوي صندوق على كرتين بيضاويين وأربع كرات سوداء.
- (I) نسحب على التوالي أربع كرات من هذا الصندوق بإرجاع الكرة المسحوبة.
- (1) أحسب عدد الإمكانات الكلية لهذه التجربة.
- (2) أحسب في كل حالة من الحالتين التاليتين احتمال الحصول على:
- (I) ثلاث كرات سوداء وكرة بيضاء بهذا الترتيب.
- (ب) ثلاث كرات سوداء وكرة بيضاء.
- (II) عدد طبيعي غير معدوم. نسحب على التوالي n كرة من هذا الصندوق بإرجاع الكرة المسحوبة.
- نرمز بالرمز P_n إلى احتمال الحصول على كرة بيضاء واحدة فقط في السحب n .
- (1) أحسب P_1 ، P_2 و P_3 .
- (2) (I) بين أن $P_n = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.
- (ب) أكتب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = P_1 + P_2 + \dots + P_n$
- (ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. نعتبر النقط $A(-2; 0; 1)$ ، $B(1; 2; -1)$ و $C(-2; 2; 2)$.
- (1) (I) أحسب الجداء السلمي $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ ثم الطولين AB و AC .
- (ب) عين قياسا بالدرجات مدورا إلى الوحدة للزاوية $\widehat{BAC}$.
- (ج) استنتج أن النقط A ، B و C ليست على استقامة.
- (د) أثبت أن: $2x - y + 2z + 2 = 0$ معادلة ديكرتية للمستوي (ABC)
- (2) لتكن (P_1) و (P_2) المستويين ذي المعادلتين $x + y - 3z + 3 = 0$ و $x - 2y + 6z = 0$ على الترتيب.
- بين أن المستويين (P_1) و (P_2) متقاطعين في مستقيم (Δ) له تمثيل وسيطي :
- $$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t ; (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$$

(3) بين ان المستقيم (Δ) و المستوي (ABC) متقاطعان ثم حدد إحداثيات نقطة تقاطعهما.

(4) ليكن (S) سطح الكرة ذات المركز $\Omega(1; -3; 1)$ ونصف القطر $r = 3$.

(ا) أعط معادلة ديكارتية لـ (S) .

(ب) حدد تقاطع (S) مع المستوي (ABC) .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(ا) a و b عدنان حقيقيان.

(1) انشر الجداء $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

(2) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^3 + 8 = 0$

(II) نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$ النقط A ، B و D

التي لواحقها: $z_D = 1 + \sqrt{3}i$ ، $z_B = 1 - \sqrt{3}i$ ، $z_A = -2$

(1) علم النقط A ، B و D .

(2) (ا) أكتب على الشكل الأسّي العدد المركب α حيث: $\alpha = \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}$

(ب) استنتج نوع المثلث ABD .

(ج) أكتب معادلة للدائرة (C) المحيطة بالمثلث ABD .

(3) لتكن C مرجح الجملة $\{(A, -1), (B, 1), (D, 1)\}$

(ا) عين z_C لاحقة النقطة C ثم حدد مع التبرير طبيعة الرباعي $ABCD$.

(ب) أحسب قياسا بالرديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DO})$ ثم استنتج الوضع النسبي للمستقيم (DC) و الدائرة (C) .

(4) لتكن (I) مجموعة النقط M التي لواحقها z حيث: $\arg(\bar{z} + 2) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$

• تحقق أن النقطة B تنتمي إلى المجموعة (I) ثم حدد (I) .

(5) الدوران R الذي مركزه النقطة D ويحول النقطة A إلى النقطة B .

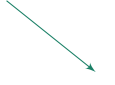
(ا) أكتب العبارة المركبة للدوران R .

(ب) تحقق أن: $R(B) = C$ ثم استنتج صورة المثلث ABD بالدوران R .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(ا) a و b عدنان حقيقيان و h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ كمايلي: $h(x) = ax + b - \ln|x|$

جدول تغيرات الدالة h كالتالي:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$h'(x)$	+	-	0	+
$h(x)$				

(1) أحسب $h'(x)$ بدلالة a .

(2) بين أن $a = 2$ و $b = -1$.

(3) (أ) بين أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}[$
(ب) بقراءة لجدول تغيرات الدالة h شكل جدول إشارة $h(x)$.

(II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{1}{2}x \ln(x)^2 & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

(C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أدرس استمرارية الدالة f عند القيمة 0

(2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f عند 0 ثم فسر النتيجة هندسيا.

(3) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

(4) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f'(x) = h(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة $f(x)$.
(ب) شكل جدول تغيرات الدالة f .

(5) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيينها.

(6) تحقق أن $f(\alpha) = \alpha - \alpha^2$ ثم استنتج حصر للعدد $f(\alpha)$.

(7) ارسم في المجال $[\frac{-3}{2}, \frac{5}{2}]$ المنحنى (C_f) .

(8) (أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة أوجد الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto x \ln x$ على المجال $]0, +\infty[$
و التي تنعدم عند 1.

(ب) احسب S مساحة الحيز المستوي تحت المنحنى (C_f) والمحصور بين المستقيمين اللذين معادلتهما
• $x = 2$ و $x = 1$

الموضوع الثاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ كمايلي: $f(x) = \frac{3x-1}{2x}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

كما هو موضح في الشكل (1) . وليكن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$

$$(1) \quad \begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} \quad (U_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N} \text{ كمايلي:}$$

(ا) مثل الحدود U_0, U_1, U_2 و U_3 على محور الفواصل مبرزاً خطوط الإنشاء.

(ب) خمن اتجاه تغير وتقارب المتتالية (U_n) .

(ج) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $U_n > 1$ ثم بين أن (U_n) متناقصة .

(د) استنتج ان المتتالية (U_n) مقاربة .

$$(2) \quad (ا) \text{ اثبت انه من اجل كل عدد طبيعي } n \text{ فان: } U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$$

(ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n فان $U_n - 1 \leq (\frac{1}{2})^n$ ثم استنتج نهاية المتتالية (U_n) .

$$(3) \text{ لتكن } (V_n) \text{ متتالية معرفة على } \mathbb{N} \text{ كمايلي: } V_n = \frac{U_n - 1}{2U_n - 1}$$

(ا) بين أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين اساسها وحدها الأول.

(ب) احسب المجموع S_n بدلالة n حيث: $S_n = \frac{V_0 - 1}{U_0} + \frac{V_1 - 1}{U_1} + \frac{V_2 - 1}{U_2} + \dots + \frac{V_n - 1}{U_n}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

ثلاث صناديق A, B, C ، يحوي كل منها 10 كريات متماثلة بحيث:

الصندوق A : يحوي كريتين حمراوتين و 8 كريات خضراء .

الصندوق B : يحوي 3 كريات حمراء و 7 كريات خضراء .

الصندوق C : يحوي 4 كريات حمراء و 6 كريات خضراء .

نأخذ عشوائياً أحد الصناديق ونسحب منه كرية واحدة عشوائياً .

(1) شكل شجرة الاحتمالات لهذه الوضعية.

(2) مااحتمال أن تكون الكرية المسحوبة حمراء .

(3) مااحتمال أن تكون الكرية المسحوبة حمراء و من الصندوق الأول.

(4) إذا كانت الكرية المسحوبة حمراء،فماهو احتمال أن تكون قد سحبت من الصندوق الأول.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $z^2 + \alpha z + 4 = 0 \dots (I)$

(1) عين العدد الحقيقي α حتى يكون العدد $(\sqrt{3} + i)$ حلاً للمعادلة (I) ثم استنتج الحل الآخر .

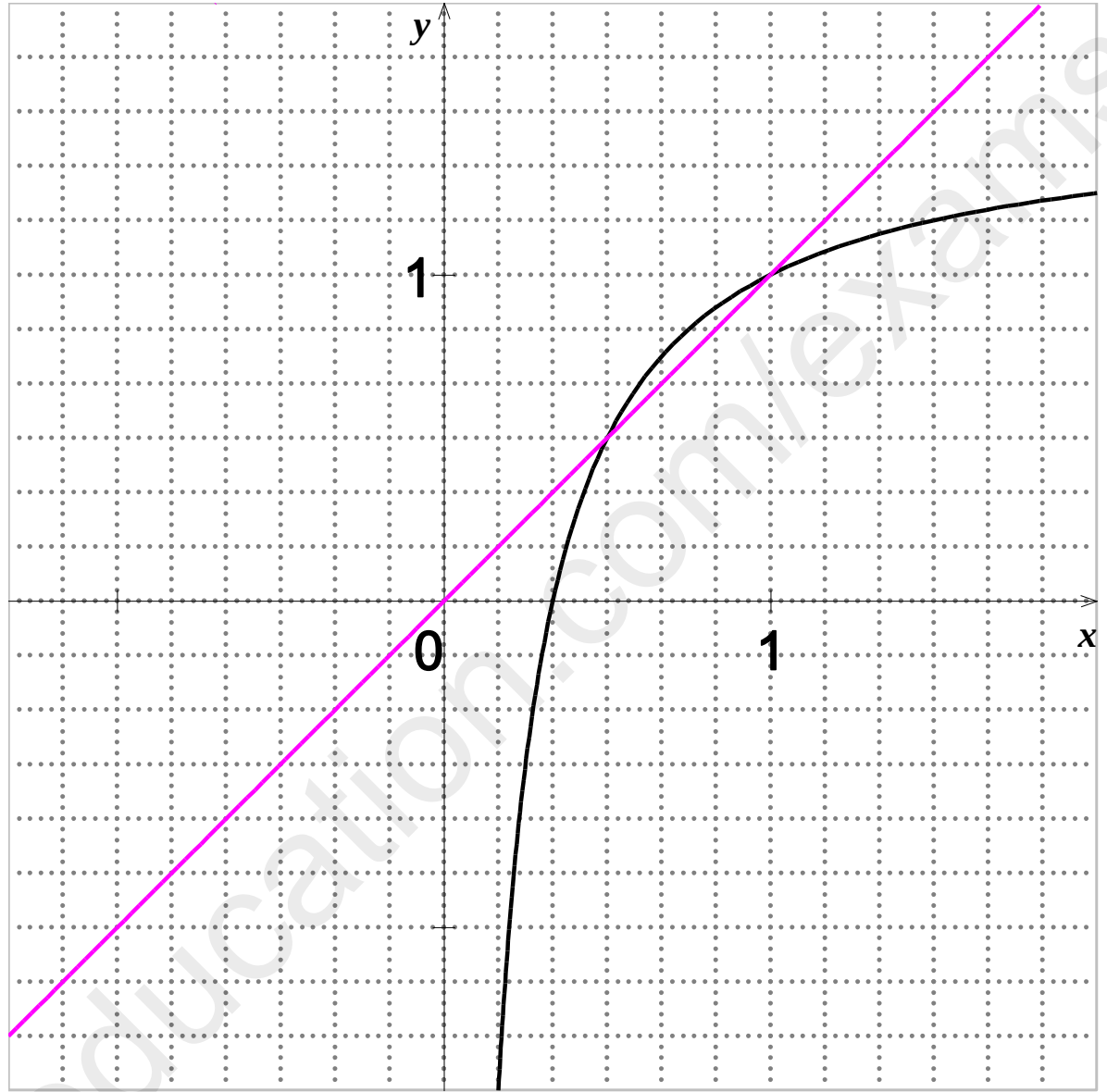
(2) في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد متجانس $(O; \vec{OI}; \vec{OJ})$.

نعتبر النقط A, B, C, D صور الأعداد المركبة: $z_A = \sqrt{3} + i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ ، $z_C = i$ و $z_D = -z_A$.

- (ا) أكتب كل من: z_A ، z_B ، z_C و z_D على الشكل الأسّي.
- (ب) لتكن المجموعة (Ω) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق:
- $$\mathbb{R} \text{ تمسح } \theta, z = 2e^{i\theta}$$
- أثبت أن النقط A ، B و D تنتمي للمجموعة (Ω) .
 - عين المجموعة (Ω) ثم أنشئها.
- (3) (ا) عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه A ويحول B إلى C محددا نسبته وزاويته.
- (ب) حدد طبيعة المثلث ABC ثم احسب مساحته .
- (ج) بين أن مساحة المثلث ACC' صورة المثلث ABC بالتشابه S هي $\frac{3}{4}\sqrt{3}(ua)$
- (4) لتكن (E) مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z التي تحقق:
- $$\arg(z^2 + 3) = \arg(z + i\sqrt{3}) + 2k\pi \dots (II)$$
- (ا) بين أن (II) تكافئ: $\arg(z - i\sqrt{3}) = 2k\pi$.
- (ب) إستنتج طبيعة المجموعة (E) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- (ا) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = e^x + 2 - x$
- (1) ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
- (2) استنتج إشارة الدالة g على $\mathbb{R}$.
- (II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x + (x - 1)e^{-x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم السابق.
- (1) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (2) (ا) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = e^{-x}g(x)$.
- (ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
- (3) أثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $(+\infty)$ ثم ادرس الوضع النسبي لهما.
- (4) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.
- (5) أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) الذي يوازي المستقيم (Δ) .
- (6) (ا) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.
- (ب) أرسم (Δ) ، (T) و (C_f) .
- (7) (ا) بين أن الدالة $x \mapsto -xe^{-x}$ دالة أصلية للدالة $x \mapsto (x - 1)e^{-x}$ على المجال $[1, +\infty[$.
- (ب) احسب S_α مساحة المستوي المحصور بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما $x = \alpha$ و $x = 1$.
- (ج) احسب $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} S_\alpha$.
- (8) ناقش حسب قيم الوسيط m عدد وإشارة حلول المعادلة $\frac{x-1}{e^x} = m$



الشكل 1

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

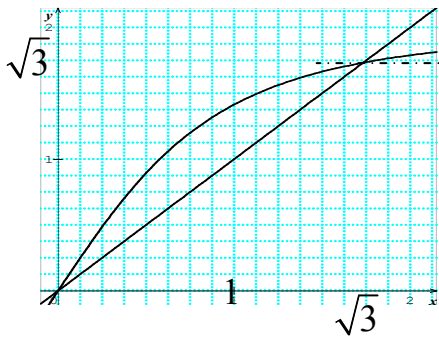
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

- الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
- نعتبر النقط $A(3;0;6)$ ، $B(0;0;6)$ و $C(0;-12;0)$ و ليكن (P) ، (P') مستويان معرفان بمعادلتيهما الديكارتية على الترتيب $2y + z - 6 = 0$ ، $y - 2z + 12 = 0$.
- (1) أ) عين تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) .
- ب) احسب الجداء السلمي $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ و استنتج طبيعة المثلث ABC .
- (2) اثبت أن (P) و (P') متعامدان و متقاطعان وفق المستقيم (AB) ، احسب المسافة بين النقطة O و المستقيم (AB) .
- (3) تحقق أن C تنتمي إلى المستوي (P') ، و بين أن $ABCO$ رباعي وجوه ثم احسب حجمه .
- (4) عين معادلة ديكارتية للمستوي (Q) المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ ، استنتج تقاطع المستويات الثلاثة (P) ، (P') و (Q) .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

- نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $p(z) = z + \frac{7}{z}$ حيث z غير معدوم .
- (1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $p(z) = 4$.
- (2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقطتين A ، B التي لاحقتهما على الترتيب $z_A = 2 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 2 - i\sqrt{3}$.
- أ) اكتب العددين : $z_A - 1$ و $z_B - 1$ على الشكل الأسّي و اثبت أن العدد : $\left(\frac{z_A - 1}{2}\right)^{2018} + \left(\frac{z_B - 1}{2}\right)^{2018}$ حقيقي .
- ب) هل توجد قيم للعدد الطبيعي n بحيث يكون : $(z_A - 1)^n$ تخيلي صرف .
- (3) عين و أنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث : $k \in \mathbb{Z}$; $\text{Arg}\left(\frac{z - z_A}{\bar{z} - z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
- (4) أ) بين أنه يكون العدد $p(z)$ حقيقي إذا و فقط إذا كان : $(z \cdot \bar{z} - 7) \cdot (z - \bar{z}) = 0$.
- ب) استنتج (F) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z بحيث يكون العدد $p(z)$ حقيقيا .



التمرين الثالث: (04 نقاط)

- (1) الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C) للدالة f المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ و (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- بين أنه إذا كان $x \in [1, \sqrt{3}]$ فإن $f(x) \in [1, \sqrt{3}]$.

- (2) لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = f(u_n)$.
(أ) انقل الشكل و مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 على محور الفواصل دون حسابها مبرزاً خطوط الرسم - ضع تخميناً حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) .

- (ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$.

- (ج) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - \sqrt{u_n^2 + 1})}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$ ، استنتج أن (u_n) متزايدة و متقاربة .

- (3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$.
(أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

- (ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n ، أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

- (4) أحسب p_n بدلالة n حيث : $p_n = \frac{(u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n)^2}{(3 - u_0^2)(3 - u_1^2) \dots (3 - u_n^2)}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- نعتبر f دالة عددية f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$ ، (C_f) تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- (1) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- (ب) استنتج أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) و ادرس وضعيتهما النسبية .

- (2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$ ثم احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

- (ب) استنتج أن المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = -x + \ln 2$ مقارب مائل لـ (C_f) و ادرس وضعيتهما النسبية .

- (3) ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها ثم ارسم (Δ) ، (Δ') و المنحنى (C_f) .

- (4) ليكن (d_m) المستقيم ذو المعادلة حيث m وسيط حقيقي .

- (أ) بين أن جميع المستقيمات (d_m) تشمل من نقطة ثابتة $A(\frac{1}{2} \ln 2 ; \frac{1}{2} \ln 2)$.

- (ب) ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد نقط تقاطع المستقيم (d_m) و المنحنى (C_f) .

- (5) نضع : $I = \int_2^3 (f(x) - x) dx$.

- (أ) فسّر العدد I هندسياً ، ثم بين أن $0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-2x} dx$... (لاحظ أن $x \in [0 ; +\infty[$; $\ln(x+1) \leq x$)

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيسان U_1 و U_2 على كرات بيضاء ، حمراء و كرات سوداء كما مبينة في الجدول المقابل

الكيس \ الكرات	بيضاء B	حمراء R	سوداء N
U_1	3	5	7
U_2	1	2	12

- حيث أن كل الكرات لا نفرق بينها عند اللمس .
 أ) نسحب كرتين في آن واحد من الكيس U_1 .
 - احسب احتمال الحوادث التالية :

A : سحب كرتين من نفس اللون ، B : سحب كرة واحدة بيضاء فقط ، C : سحب كرتين مختلفتين في اللون .

ب) نعيد الكرات المسحوبة إلى الكيس U_1 و نرمي زهرة نرد متجانسة ذات ستة أوجه مرقمة من 1 إلى 6 .
 إذا حصلنا على رقم أكبر تماما من 4 ، نسحب كرة واحدة من الكيس U_1 و إلاّ نسحب كرة واحدة من U_2
 1) شكل شجرة احتمال موافقة لهذه الوضعية .

2) ما احتمال سحب كرة حمراء .

3) إذا سحبنا كرة حمراء ما احتمال أن تكون من الكيس U_1 .

4) ليكن سحب كرة بيضاء يعطي ربح بـ 50 نقطة ، سحب كرة حمراء خسارة بـ 30 نقطة و سحب كرة سوداء يعطي 0 نقطة . إذا كان X متغير عشوائي يرفق عند سحب كرة قيمة الربح أو الخسارة المحصل عليها .
 • عين قانون الاحتمال لـ X و احسب أمله الرياضيائي ، هل اللعبة عادلة .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A, B, C, D و E .

التي لواحقها على الترتيب $z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_B = \sqrt{3}e^{i\frac{-\pi}{2}}$ ، $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ ، $z_D = \bar{z}_C$ ، $z_E = -z_D$
 1) أ) بين أن النقط A, B, C, D و E تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = 3$
 يطلب تعيين نصف قطرها .

ب) أنشئ النقط A, B, C, D و E .

2) اثبت أن : $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$ ثم استنتج طبيعة المثلث BEC .

3) بين أنه يوجد دوران r مركزه B و يحول النقطة E إلى C ، يطلب تعيين زوايته .

4) نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z'

حيث : $z' + i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}(z + i\sqrt{3})$.

- عين طبيعة التحويل S و حدد عناصره المميزة ثم استنتج الطبيعة و العناصر المميزة للتحويل النقطي ros .

5) أ) عين و أنشئ (E) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق : $|(1+i)z - \sqrt{3} + i\sqrt{3}| = \sqrt{2}$.

ب) عين و أنشئ المجموعة (E') صورة (E) بالتحويل S .

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

(1) احسب الحدود u_1 و u_2 .

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 1$.

(3) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة و عين نهايتها .

(4) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

(أ) احسب v_0 ; v_1 ; v_2 ، ضع تخمين حول طبيعة المتتالية (v_n) .

(ب) بين أن (v_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها .

(ت) اكتب v_n بدلالة n و استنتج u_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(ث) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = v_0(u_0 - 1) + v_1(u_1 - 1) + \dots + v_n(u_n - 1)$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

أ. g دالة عددية معرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = x - \frac{1}{x} - 2 \ln x$ ،

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$ فإن : $g'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2}$ ، استنتج اتجاه تغير الدالة g .

(1) احسب $g(1)$ ثم ادرس إشارة $g(x)$ من أجل كل x من المجال $]0, +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ ؛ $f(\frac{1}{x}) = f(x)$.

استنتج $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و فسر النتيجة هندسيا .

(2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$ فإن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f .

(3) شكل جدول تغيرات f .

(4) انشئ المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في المعلم السابق .

(5) أ) بين أن الدالة $h: x \mapsto \frac{x^2}{2} + \ln x - x(\ln x)^2 + 2x \ln x - 4x$ هي دالة أصلية للدالة f على $]0, +\infty[$.

ب) أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = e$.

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 8 كرات لا نميز بينها عند اللمس منها: 4 كرات بيضاء تحمل الأرقام: 0، 1، 1، 2. و 4 كرات حمراء تحمل الأرقام: 1، 1، 2، 2. (1) نسحب ثلاث كرات في آن واحد من هذا الكيس.

❖ أحسب احتمال الحوادث التالية:

A: "الكرات المسحوبة تحمل نفس الرقم".
B: "الكرات المسحوبة من نفس اللون".

C: "الكرات المسحوبة أرقامها مختلفة مثنى مثنى".

(2) X هو المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكرات التي تحمل رقم 1.

❖ أكتب قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم أحسب أمله الرياضي.

❖ أحسب التباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X .

التمرين الثاني: (04.5 ن)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\square$ بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3}$.

1. أنشئ في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ المنحنى (C_f) الممثل للدالة f المعرفة على $\square$ حيث:

$$f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \quad \text{والمستقيم } (\Delta) \text{ ذو المعادلة } y = x$$

(1) مثل على حامل محور الفواصل الحدود $u_0; u_1; u_2$ باستعمال الرسم السابق ودون حساب الحدود.

(أ) ضع تخميننا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) وتقاربها

(ب) برهن بالتراجع أنه ومن أجل كل عدد طبيعي n أن: $1 \leq u_n < 4$

(ت) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على N بالعلاقة: $v_n = u_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي غير معدوم

(أ) عين قيمة α حتى تكون (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 .

(ب) نضع $\alpha = -4$

- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

- تحقق من صحة تخمينك حول تقارب المتتالية (u_n) .

- أحسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\square$ ، المعادلة ذات المجهول Z : $(Z - 2i)(Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4) = 0$.

(2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط A, B, C و D ذات الإحداثيات $Z_A = \sqrt{3} - i$ ؛ $Z_B = \sqrt{3} + i$ ؛ $Z_C = 2i$ و $Z_D = -\sqrt{3} - i$ على الترتيب.

أ - تحقق أن النقط A, B, C و D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها O يطلب تعيين نصف قطرها.

ب - علم بدقة النقط A, B, C و D .

ج - اكتب العدد $\frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$ على الشكل الأسّي، ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .

(3) عين العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي يحول O إلى A ويحول C إلى D ، ثم عين عناصره المميزة.

(4) لتكن النقطة G مرجح النقط A, B, C المرفقة بالمعاملات $1, -1, 2$ على الترتيب.

أ - عين إحداثي النقطة G .

ب - بين أن (Γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 8$

هي الدائرة التي مركزها G ونصف قطرها 1 .

ج - عين طبيعة (Γ') صورة (Γ) بالتشابه المباشر S محددا عناصرها المميزة.

التمرين الرابع: (7 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\square$ بـ: $f(x) = 1 - x^2 e^x$ ، و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ حيث: وحدة الطول $1cm$.

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ وفسر النتيجة هندسيا.

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = -x(x+2)e^x$ ، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. بين أن المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف. يطلب تعيين إحداثيتهما.

4. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0,7 < \alpha < 0,8$

5. عين معادلة للمماس (T) للمنحنى (C) في النقطة التي فاصلتها -1 .

6. h الدالة المعرفة على $\square$ بـ: $h(x) = \frac{1}{e} + x e^x$

أ. أدرس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $h(x) \geq 0$.

ب. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) - \left(\frac{1}{e}x + 1\right) = -xh(x)$ ، ثم استنتج وضعية (C) بالنسبة لـ (T) .

7. G الدالة المعرفة على $\square$ بـ: $G(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ حيث a, b و c أعداد حقيقية ثابتة .

أ. عين الأعداد الحقيقية a, b و c حتى تكون الدالة G أصلية للدالة $x^2 e^x$ على $\square$.

ب. أحسب بالسنتيمتر المربع مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = 1$ ، $x = -2$ و $x = 0$.

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط: $A(2;0;1)$ ، $B(3;2;0)$ ، $C(-1;-2;2)$.
- 1- أ. بين أن النقط A ، B و C تعين مستويا ،
 ب. بين أن الشعاع $\vec{n}(0;1;2)$ ناظمي للمستوي (ABC) ، ثم أكتب معادلة ديكرارتيه له .
 2- ليكن المستوي (p) الذي معادلته: $x + 2y - z + 7 = 0$.
 أ. تحقق من أن المستويين (ABC) و (p) متعامدين .
 ت. عين تمثيلا وسطيا للمستقيم (Δ) مستقيم تقاطع المستويين (ABC) و (p) .
 3- لتكن (φ_k) مجموعة النقط M من الفضاء والتي تحقق: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = k$ ، حيث k عدد حقيقي .
 أ. عين إحداثيات النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$.
 ب. عين قيمة k التي يكون من أجلها (φ_k) هو المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.
 ت. أدرس تقاطع المستويات الثلاثة (ABC) ، (p) ، (φ_{-3}) .
 4- عين بعد النقطة I عن المستقيم (Δ) .

التمرين الثاني: (04.5 نقطة)

- 1 (أ) حل في المجموعة $\square$ المعادلة ذات المجهول z ، $z^2 - 6z + 21 = 0 \dots (I)$.
- 2 (ب) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب $z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_B = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ ، $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ و $z_D = \overline{z_C}$.
 أ) بين أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها Ω ذات اللاحقة $z_\Omega = 3$ ويطلب تعيين نصف قطرها .
 ب) لتكن النقطة E نظيرة النقطة D بالنسبة إلى المبدأ O ، بين أن $\frac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{i(\frac{\pi}{3})}$ ، ثم استنتج طبيعة المثلث BEC .
 3) استنتج أنه يوجد دوران r مركزه B ويحول النقطة E إلى C ، يطلب تعيين زوايته .
 4) نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث:

$$z' + i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}(z + i\sqrt{3})$$
 أ) عين طبيعة التحويل S وحدد عناصره المميزة .
 ب) عين (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z التي تحقق: $|z - z_\Omega|^2 = -(z_A - z_B)^2$.
 ج) عين طبيعة المجموعة (Γ') صورة (Γ) بالتحويل S ، محددا عناصرها المميزة .

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = e^2$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} = e^{-\frac{1}{2}} \sqrt{u_n}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n > \frac{1}{e}$.

2. (أ) يبين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(ب) استنتج أن (u_n) متقاربة، ثم أحسب نهايتها.

3. (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $v_n = \frac{1}{2} + \ln \sqrt{u_n}$.

(أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_1 = \frac{3}{2}$.

(ب) أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .

(ج) أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

4) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث $S_n = \frac{1}{1 + \ln u_1} + \frac{1}{1 + \ln u_2} + \dots + \frac{1}{1 + \ln u_n}$.

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة f ذات المتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + 1 + \ln(x+1) - \ln(x+2)$.

(C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى المعلم متعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$ وحدة الطول $2cm$.

1) احسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.

2) بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = 0$. ثم استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

3) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

ثم أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x+1)(x+2)}$.

5) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

6) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي فاصلتها $x = 0$.

7) بين أن المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث: $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$.

8) أنشئ (T) ، (Δ) والمنحنى (C_f) .

9) ناقش بيانها حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = \frac{3}{2}x + m$.

10) أ- بين أن الدالة $F_a: x \rightarrow (x+a)\ln(x+a) - x$ دالة أصلية للدالة $f_a: x \rightarrow \ln(x+a)$ على المجال $]-a; +\infty[$.

ب- احسب مساحة الحيز للمستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = x + 1$ ، $x = 0$ ، $x = 1$.

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (4.50 نقاط)

(1) حل في $\square$ المعادلة $z^2 + 4z + 16 = 0$

(2) في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقط D, C, B, A حيث :

$$z_D = 3\sqrt{3} + 3i, z_C = 4e^{i\frac{\pi}{6}}, z_B = -2 - 2i\sqrt{3}, z_A = -2 + 2i\sqrt{3}$$

(أ) أكتب z_c على الشكل الجبري

(ب) أكتب z_A, z_B, z_D على الشكل المثلثي

(ج) استنتج أن النقط C, B, A تنتمي إلى نفس الدائرة . حدد مركزها ونصف قطرها .

(د) عين زاوية الدوران r الذي مركزه O ويحول A إلى B

(هـ) أكتب $\frac{z_D}{z_A}$ على الشكل الآسي واستنتج نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه O ويحول A إلى D

(3) α عدد حقيقي و G_α مرجح الجملة $\{(A,1), (B,1), (C, e^\alpha)\}$

(أ) بين أن $\overrightarrow{IG}_\alpha = \frac{e^\alpha}{e^\alpha + 2} \overrightarrow{IC}$ حيث I منتصف القطعة $[AB]$

(ب) بين أن $0 < \frac{e^\alpha}{e^\alpha + 2} < 1$ ثم استنتج مجموعة النقط G_α عندما يتغير α في $\square$.

التمرين الثاني: (04 نقط)

يحتوي كيس على 6 كرات حمراء منها 4 كرات تحمل الرقم 1 وإثنتان تحملان الرقم 2 و ثمان كرات خضراء ,

منها 5 كرات تحمل الرقم 1 و ثلاثة تحمل الرقم 2 , لا نميز بينها عند اللمس ,

نسحب كرتين من الكيس في أن واحد.

لتكن الحادثتان : A "سحب كرتين من نفس اللون" و B "سحب كرتين تحملان نفس الرقم" ,

(1) بين أن : $P(A) = \frac{43}{91}$.

(2) احسب : $P(B)$.

(3) علما أن الكرتين المسحوبتين من نفس اللون . ما هو احتمال أن تحملان نفس الرقم ؟

(4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

(أ) حدد قيم X .

(ب) حدد قانون الإحتمال X .

(ج) احسب الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري .

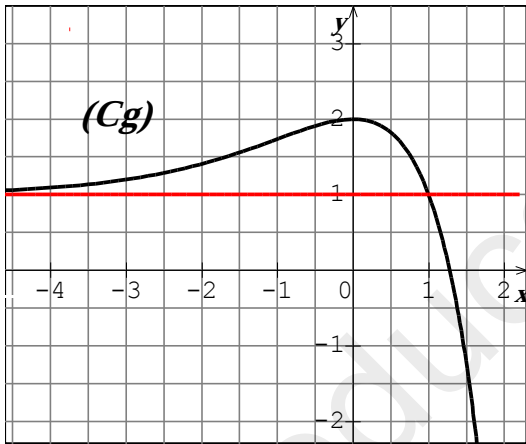
التمرين الثالث: (04 نقط)

لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\square$ بـ : $U_0 = \frac{1}{5}$ و $U_{n+1} = 1 - \frac{1}{2U_n + 1}$

- (1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < U_n < \frac{1}{2}$.
- (2) أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(1-2U_n)}{2U_n + 1}$ ، ثم استنتج اتجاه تغير (U_n) .
ب/ بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ، ثم احسب نهايتها .
- (3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = \frac{5^n U_n}{2U_n - 1}$.
أ/ اثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .
ب/ أكتب عبارة V_n بدلالة n ، ثم بين أن : $U_n = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3}$ واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.
- (4) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} + \dots + \frac{1}{U_n}$

التمرين الرابع: (7.50 نقاط)

I / لتكن g الدالة المعرفة على $\square$ بـ : $g(x) = (1-x)e^x + 1$ ، (C_g) تمثيلها البياني كما في الشكل الموالي



- (1) بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g
- (2) أ) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $+\infty[0$; حلا وحيدا α ، ثم تحقق أن $1,2 < \alpha < 1,3$.
ب) عيّن إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

(3) أثبت أن : $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$.

(4) أ) باستعمال التكامل بالتجزئة عين دالة أصلية للدالة : $x \mapsto (1-x)e^x$

ب) أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_g) والمستقيمات $x=0$ ، $x=\alpha$ ، $y=0$.

ج) بين أن : $A(\alpha) = \frac{-3\alpha + 4}{\alpha - 1} + \alpha$ ثم أحصر $A(\alpha)$.

د) حل بيانيا : $E[g(x)] = 1$ حيث E يرمز إلى دالة الجزء الصحيح

II / لتكن f الدالة المعرفة على $\square$ بـ : $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب

إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$. وحدة الطول 2 cm

(1) احسب كل من : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، ثم $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x]$ فسر النتيجة بيانيا .

(2) أ) اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$.
ب) استنتج اتجاه التغير للدالة f وشكل جدول تغيراتها .

ج) بين أن : $0,2 < f(\alpha) < 0,3$

(3) اكتب معادلة لمماس المنحني في النقطة ذات الفاصلة صفر .

(4) أ) بين أن $f(-\alpha) = -1$ و أنشئ (C_f) .

ب) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة $x - e^{x+m} - e^m = 0$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (05 نقط)

- المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\square$ المعادلة : $z^2 - 6z + 13 = 0$,
- (2) أ) علم النقط D, C, B, A التي لواحقتها : $z_A = i$, $z_B = 2$, $z_C = 3 + 2i$, $z_D = 3 - 2i$.
 ب) عين نسبة وزاوية التشابه الذي مركزه A ويحول B إلى C .
- ج) اكتب العدد المركب : $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسّي واستنتج طبيعة المثلث ABC ,
- د) برهن أن B هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ADC
- (3) تحويل نقطي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة Z النقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث : $z' = (1+i)z + 1$
 أ) عين طبيعة S و عناصره المميزة .
 ب) جد صورة B بواسطة S .
- ج) بين أنه من أجل كل عدد مركب Z حيث $Z \neq i$ فإن : $\frac{Z' - Z}{i - Z} = -i$
- فسر هذه النتيجة بالنسبة إلى المسافات وبالنسبة إلى الزوايا واستنتج طريقة لرسم M انطلاقاً من A و M .
- (4) أ) عين المجموعة (E) للنقط M ذات اللاحقة Z حيث : $|Z - 2| = \sqrt{5}$
 ب) برهن أن : $Z' - Z_C = (1+i)(Z - Z_B)$.
 ج) استنتج أنه لما M تنتمي إلى (E) فإن M' تنتمي إلى دائرة (F) يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها .
- (5) ارسم (E) و (F) في نفس المعلم .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لمكافحة مرض الحصبة الألمانية لقح 30% من تلاميذ ثانوية ما ، وكانت نتائج دراسة إحصائية على هذه الثانوية كما يلي :

- احتمال أن يكون التلميذ مصاباً علماً أنه ملقحاً هو $\frac{1}{16}$.
 - احتمال أن يكون التلميذ ملقحاً علماً أنه مصاباً هو $\frac{3}{14}$.
- يتم اختيار تلميذ واحد من هذه الثانوية بطريقة عشوائية .
 نرمز بـ V إلى الحادثة " التلميذ ملقح " و نرمز بـ M إلى الحادثة " التلميذ مصاب بالمرض " .
- (1) شكل شجرة الاحتمالات .
- (2) احسب $P(V \cap M)$ احتمال أن يكون التلميذ ملقحاً ومصاب بالمرض .
- (3) أثبت أن : $P(M) = \frac{7}{80}$ احتمال التلميذ مصاب بالمرض .
- (4) احسب $P(\bar{V} \cap M)$ احتمال أن يكون غير ملقح ومصاب بالمرض ، ثم استنتج : $P_{\bar{V}}(M)$.
- (5) احسب : $P(\bar{V} \cap \bar{M})$.

التمرين الثالث: (4 نقاط)

الفضاء منسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط

$$C(1, 5, -2), B(7, -1, -2), A(1, -1, 4)$$

- (1) أ) بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع
ب) بين أن الشعاع $\vec{n}(1, 1, 1)$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) , استنتج معادلة ديكرتية له

$$(2) \quad (\Delta) \text{ مستقيم تمثيله الوسيطى: } \begin{cases} x = -2t \\ y = -2 - 2t \\ z = -3 - 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- أ) بين أن (Δ) عمودي على (ABC) ثم عين إحداثيتي النقطة G نقطة تقاطعهما
ب) بين أن G مركز ثقل المثلث ABC
(3) (S) سطح الكرة التي مركزها G وتشمل النقطة A .
أ) أكتب معادلة (S)
ب) أدرس الوضع النسبي لـ (S) و (Δ) مع تحديد المجموعة $(\Delta) \cap (S)$.

التمرين الرابع: (07 نقط)

I) لتكن g الدالة المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $g(x) = x^2 + 3 - 2\ln x$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة g

(2) بين أنه من لكل x من $]0, +\infty[$: $g(x) \geq 4$

II) لتكن f الدالة المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

(1) أ) بين أن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f

(2) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مقارب مائل (Δ) أوجده ثم أدرس الوضع النسبي لـ (Δ) و (C_f)

(3) أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يشمل المبدأ O ، جد معادلة له

ب) أحسب $f(1)$ ثم أنشئ (T) و (C_f) .

جـ) ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة : $f(x) = mx$

$$(4) \quad \text{أ) بين أن } \int_{\sqrt{e}}^e \left(\frac{-1}{2x} + \frac{\ln x}{x} \right) dx = \frac{1}{8}$$

ب) استنتج بالسنتر المربع المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات :

$$x = e, x = \sqrt{e}, y = \frac{1}{2}x$$

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 7 كريات منها ثلاث حمراء تحمل الارقام 1.1.2 و اربعة بيضاء تحمل الارقام 3.2.1.1. نسحب من الكيس كرتين على التوالي وبدون ارجاع .

1- شكل شجرة الاحتمالات الموافقة لهذه الوضعية في الحالتين الاتيتين : باعتماد الوان الكرات . باعتماد الارقام المسجلة .

نعتبر الحوادث التالية: A الحصول على كرتين من نفس اللون . B : الحصول على كرتين مجموعهما ثلاثة

✓ - أحسب $p(A)$ و $p(B)$, وبين ان : $p(A \cap B) = \frac{4}{21}$. هل الحادثين A و B مستقلتان ؟

✓ - علما ان الكرتين لهما نفس اللون ما احتمال ان يكون مجموع رقميهما ثلاثة ؟

✓ - علما ان الكرتين مجموع رقميهما ثلاثة ما احتمال ان يكون لهما نفس اللون ؟

2- ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية السحب مجموع الرقمين المحصل عليهما . عين قيم المتغير العشوائي .

• عرف قانون الاحتمال واحسب امله الرياضي .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A, B, C لواحقتها على الترتيب

$$z_A = \sqrt{3} + i, \quad z_B = 1 + i(\sqrt{3} + 2), \quad z_C = 2i$$

$$-1 \quad \text{بين أن :} \left(\frac{z_A}{z_B - z_C} \right)^{2018} + \left(\frac{z_B - z_C}{z_A} \right)^{2018} = 1$$

2 بين انه يوجد دوران r يحول A الى B ومركزه C يطلب تعيين زاويته . ما طبيعة المثلث ABC ؟

3 D نظيرة B بالنسبة الى C . عين E حتى يكون الرباعي $BEDA$ مربع .

4 (γ) مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $BM^2 + DM^2 = 16$

(γ') مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $BM^2 - DM^2 = 0$

• بين ان $A; B; D; E$ تنتمي الى (γ) ثم عين طبيعة المجموعة (γ) وعناصرها المميزة .

5 عين طبيعة المجموعة (γ') .

• عين تقاطع (γ) و (γ') .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

(Un) متتالية عددية معرفة ب : $U_0 = 0$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{U_n^2 + 3}$

1 برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq U_n \leq 1$

2 بين ان U_n متزايدة تماما ثم استنتج انها متقاربة.

3 V_n متتالية عددية معرفة كمايلي : $V_n = U_n^2 + \alpha$

• عين α حتى تكون V_n متتالية هندسية اساسها $\frac{1}{4}$.

نضع : $\alpha = -1$

أ- اكتب U_n بدلالة n ثم احسب نهايتها.

ب- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = U_0^2 + U_1^2 + \dots + U_n^2$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ كما يلي : $f(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$

(C_f) المنحنى البياني للدالة f في المعلم المتعامد و المتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1 - أحسب النهايات للدالة f على اطراف مجموعة التعريف . ثم فسر النتائج هندسيا.

2 - بين ان الدالة f متزايدة تماما ثم شكل جدول تغيراتها.

3 - احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - e^x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - e^x)$. ماذا تستنتج؟

4 - ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و (Γ) منحنى الدالة $x \mapsto e^x$

5 - نعتبر أن المستقيم (T) ذي المعادلة: $y = 2x + \beta$ و β عدد حقيقي.

• عين قيمة العدد β حتى يكون المستقيم (T) مماسا للمنحنى (C) في النقطة يطلب تعيين إحداثياتها .

6 - أنشئ المماس (T) و المنحنى (Γ) و المنحنى (C_f). في نفس المعلم.

(II) نعتبر المعادلة (E) التالية : $f(x) = m^2$ ، حيث m عدد حقيقي كفي.

عين قيم العدد الحقيقي m بحيث للمعادلة (E) حلان مختلفان في الاشارة.

7 λ عدد حقيقي موجب تماما.

• احسب المساحة $A(\lambda)$ المحددة بالمنحنيين (C_f) و (Γ) والمستقيمين $x=0$ و $x=\lambda$

• عين λ حتى تكون $A(\lambda) = 1$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

الفضاء منسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(1; -2; 4)$ $B(-2; -6; 5)$ $C(-4; 0; -3)$

- 1- احسب $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ ثم استنتج قياس للزاوية BAC مقربة الى الوحدة.
- 2- تحقق من ان المعادلة الديكارتية المستوي ABC : هي $x - y - z + 1 = 0$
- 3- عين احداثيات النقطة O' المسقط العمودي للنقطة O على المستوي (ABC) .
- 4- نسمي H المسقط العمودي ل O على المستقيم (BC) و α العدد الحقيقي حيث : $\overrightarrow{BH} = \alpha \overrightarrow{BC}$

$$\alpha = \frac{\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BC}\|^2}$$

- استنتج العدد الحقيقي α واحداثيات H ثم المسافة بين O والمستقيم (BC) .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A, B, C و D لواحقتها

على الترتيب z_A, z_B, z_C, z_D و z_D حيث : $z_A = i\sqrt{3}$ ، $z_B = \bar{z}_A$ ، $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ ، $z_D = \bar{z}_C$

$$1. \text{ بين أن : } \left(\frac{1+z_A}{2}\right)^{2018} + \left(\frac{1-z_A}{2}\right)^{2018} = -1$$

$$\text{عين قيم العدد طبيعي } n \text{ بحيث : } \left(\frac{1+z_A}{2}\right)^n - \left(\frac{1-z_A}{2}\right)^n = 0$$

2. تحقق أن : $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{z_D - z_B}{z_B - z_C}$ ، ثم استنتج أن النقط A, B, C و D تنتمي الى نفس الدائرة يطلب تعيين عناصرها المميزة.

3. عين طبيعة الرباعي $ABDC$ ، ثم احسب مساحته.

4. f التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z ، النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث :

$$z' = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} (z - z_A) + z_A$$

- عين طبيعة التحويل f و عناصره المميزة.

5. (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z (حيث $z \neq z_B$ و $z \neq z_A$) المعرفة بالعلاقة :

$$\arg(z^2 + 3) = \arg(z + i\sqrt{3}) + 2k\pi \dots (E) \text{ مع } k \in \mathbb{Z}$$

- بين أنه يمكن كتابة العلاقة للمجموعة (Γ) على الشكل $\arg(z - z_A) = 2k\pi$ ، ثم استنتج طبيعة المجموعة (Γ) .



التمرين الثالث: (04 نقاط)

نعتبر المتتاليتين (U_n) و (V_n) المعرفتين كمايلي :

$$\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \frac{4v_n + u_n}{5}, n \in N \end{cases} \quad \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{4u_n + v_n}{5}, n \in N \end{cases}$$

نعتبر المتتالية (W_n) المعرفة كمايلي : $W_n = V_n - U_n$

1- برهن انه من اجل عدد طبيعي n : $W_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$; واحسب نهايتها.

2- اثبت بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $U_n < V_n$.

3- بين ان المتتالية (U_n) متزايدة تماما وان (V_n) متناقصة تماما .

- استنتج ان U_n و V_n متجاورتان ولهما نفس النهاية l .

4- (t_n) متتالية معرفة ب : $t_n = U_n + V_n$

- بين ان t_n متتالية ثابتة ثم استنتج قيمة l .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ كمايلي : $g(x) = x^2 - 2 + \ln x$

✓ ادرس تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

✓ بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.31 < \alpha < 1.32$ ثم حدد اشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ ب : $f(x) = x - e + \frac{1 - \ln x}{x}$.

(C_f) المنحنى البياني للدالة f في المعلم المتعامد و المتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$. (وحدة الطول 2cm)

1- بين انه من اجل عدد حقيقي من المجال $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. ثم شكل جدول تغيراتها.

1. - بين ان : $f(\alpha) = 2\alpha - e - \frac{1}{\alpha}$ ثم استنتج حصر ل $f(\alpha)$.

2. بين ان المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = x - e$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

ادرس الوضعية النسبية بين (Δ) و (C_f).

3. بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) في النقطة يطلب تعيين إحداثياتها .

اكتب المعادلة الديكارتية للمماس (T)

5. انشئ (T) (C_f) و (Δ). في نفس المعلم.

6- نسمي $A(\alpha)$ المساحة المحددة بالمنحنين (C_f) و (Δ) والمستقيمين $x = e$ و $x = \alpha$

بين أن $A(\alpha) = 2(\alpha^2 - 1)^2 \text{ cm}^2$

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول :

التمرين الأول : (04,5 ن)

(1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + 4z + 16 = 0$

(2) في المستوي المركب المزود بمعلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$ لتكن النقط $A ; B ; C$ و D حيث :

$$z_D = 3\sqrt{3} + 3i \text{ و } z_C = 4e^{i\frac{\pi}{6}} ; z_B = -2 - 2i\sqrt{3} ; z_A = -2 + 2i\sqrt{3}$$

أ - اكتب z_C على الشكل الجبري .

ب - اكتب $z_A ; z_B ; z_D$ على الشكل المثلثي .

ج - استنتج أن النقط $A ; B ; C$ تنتمي إلى نفس الدائرة . حدد مركزها ونصف قطرها .

د - عين زاوية الدوران r الذي مركزه O ويحول A إلى B .

- اكتب $\frac{z_D}{z_A}$ على الشكل الاسي ثم استنتج نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه O ويحول A إلى D .

(3) α عدد حقيقي و G_α مرجح الجملة $\{(A,1), (B,1), (C, e^\alpha)\}$

أ - بين أن : $\overline{IG}_\alpha = \frac{e^\alpha}{e^\alpha + 2} \overline{IC}$ حيث I منتصف القطعة $[AB]$.

ب - بين أن : $0 < \frac{e^\alpha}{e^\alpha + 2} < 1$ ثم استنتج مجموعة النقط G_α عندما يتغير α في $\mathbb{R}$.

التمرين الثاني : (04 ن)

يحتوي كيس على 6 كرات حمراء منها 4 كرات تحمل الرقم 1 وإثنتان تحملان الرقم 2 وثمان كرات خضراء ؛ منها

5 كرات تحمل الرقم 1 وثلاثة تحمل الرقم 2 . كل الكرات متماثلة ولا يمكن التمييز بينها باللمس .

نسحب كرتين من الكيس في ن واحد .

لتكن الحادثتان : A " سحب كرتين من نفس اللون " و B " سحب كرتين تحملان نفس الرقم "

(1) بين أن : $P(A) = \frac{43}{91}$.

(2) احسب : $P(B)$.

(3) علما أن الكرتين المسحوبتين من نفس اللون . ماهو احتمال أن تحملان نفس الرقم ؟

(4) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

أ- حدد قيم X .

ب- حدد قانون الاحتمال ل X .

ج - احسب الأمل الرياضي ؛ التباين والانحراف المعياري .

التمرين الثالث (04 ن)

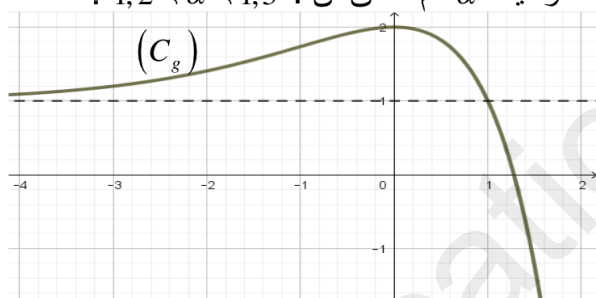
لتكن المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب : $U_0 = \frac{1}{5}$ و $U_{n+1} = 1 - \frac{1}{2U_n + 1}$

- (1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < U_n < \frac{1}{2}$.
- (2) أ - تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(1-2U_n)}{2U_n + 1}$ ثم استنتج اتجاه تغير (U_n) .
ب- بين أن المتتالية (U_n) متقاربة ثم احسب نهايتها.
- (3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = \frac{5^n U_n}{2U_n - 1}$
أ- أثبت أن (V_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
ب - اكتب عبارة V_n بدلالة n ؛ ثم بين أن $U_n = \frac{2^n}{2^{n+1} + 3}$ واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.
- (4) احسب بدلالة n المجموع : $S_n = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} + \dots + \frac{1}{U_n}$.

التمرين الرابع : (7,50 ن)

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x) = (1-x)e^x + 1$ ؛ (C_g) منحناها البياني كما في الشكل :

- (1) بقراءة بيانية شكل جدول تغيرات الدالة g .
- (2) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل في المجال $]0; +\infty[$ حلا وحيدا α ثم تحقق أن : $1,2 < \alpha < 1,3$.
ب- عين إشارة $g(x)$ حسب قيم x .
- (3) اثبت أن : $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$.
- (4) أ- باستعمال التكامل بالتجزئة عين دالة أصلية للدالة : $x \rightarrow (1-x)e^x$
ب- احسب بالسنتر المربع $A(\alpha)$ مساحة الحيز من



المستوي المحدد بالمنحنى (C_g) والمستقيمات التي معادلات لها $x = \alpha$ ؛ $x = 0$ ؛ $y = 0$.

ج - بين أن : $A(\alpha) = \frac{-3\alpha + 4}{\alpha - 1} + \alpha$ ثم احصر $A(\alpha)$.

د - حل بيانيا المعادلة : $E[g(x)] = 1$ حيث E يرمز إلى دالة الجزء الصحيح.

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم

المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. وحدة الطول 2cm.

(1) احسب كل من : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ؛ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ؛ $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x]$ ثم فسر النهاية الأخيرة بيانيا.

(2) أ- اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$.

ب - استنتج اتجاه التغير للدالة f وشكل جدول تغيراتها.

ج - بين أن $0,2 < f(\alpha) < 0,3$.

(3) اكتب معادلة لمماس المنحنى في النقطة ذات الفاصلة 0.

(4) أ- بين أن : $f(-\alpha) = -1$ وأنشيء (C_f) .

ب- m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا عدد وإشارة حلول المعادلة : $x - e^{x+m} - e^m = 0$

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (05 ن)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2 - 6z + 13 = 0$.

(2) أ- علم النقط A ؛ B ؛ C و D التي لواحقها على الترتيب: $z_A = i$ ؛ $z_B = 2$ ؛ $z_C = 3 + 2i$ و $z_D = 3 - 2i$.

ب- عين نسبة وزاوية التشابه المباشر الذي مركزه A ويحول B إلى C .

ج - اكتب العدد المركب: $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ على الشكل الأسّي واستنتج طبيعة المثلث ABC .

د - بين أن النقطة B هي مركز الدائرة المحيطة بالمثلث ADC .

(3) S تحويل نقطي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z' = (1+i)z + 1$.

أ- عين طبيعة S وعناصره المميزة.

ب - جد صورة B بواسطة S .

ج - بين أنه من أجل كل عدد مركب z حيث $z \neq i$ فإن: $\frac{z' - z}{i - z} = -i$.

• فسر هذه النتيجة بالنسبة إلى المسافات وبالنسبة إلى الزوايا واستنتج طريقة لرسم M' انطلاقاً من A و M .

(4) أ- عين المجموعة (E) للنقط M ذات اللاحقة z حيث: $|z - 2| = \sqrt{5}$.

ب - برهن أن: $z' - z_C = (1+i)(z - z_B)$.

ج - استنتج أنه لما M تنتمي إلى (E) فإن M' تنتمي إلى دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

(5) أنشيء (E) و (F) في نفس المعلم.

التمرين الثاني: (04 ن)

لمكافحة مرض الحصبة الألمانية لفتح 30% من تلاميذ ثانوية ما؛ وكانت نتائج دراسة إحصائية على هذه الثانوي كما يلي:

- احتمال أن يكون التلميذ مصاباً علماً أنه ملقحاً هو $\frac{1}{16}$.

- احتمال أن يكون التلميذ ملقحاً علماً أنه مصاباً هو $\frac{3}{14}$.

يتم اختيار تلميذ واحد من هذه الثانوية بطريقة عشوائية.

نرمز ب V إلى الحادثة " التلميذ ملقح "

ونرمز ب M إلى الحادثة " التلميذ مصاب بالمر "

(1) شكل شجرة الاحتمالات.

(2) احسب $P(V \cap M)$ احتمال أن يكون التلميذ ملقحاً ومصاباً بالمر.

(3) اثبت أن : $P(M) = \frac{7}{80}$ احتمال التلميذ مصاب بالمر .

(4) احسب : $P(\bar{V} \cap M)$ احتمال أن يكون غير ملقح ومصاب بالمر ؛ ثم استنتج $P_{\bar{V}}(M)$.

(5) احسب : $P(\bar{V} \cap \bar{M})$.

التمرين الثالث (04 ن)

الفضاء منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقط $A(1, -1, 4)$ ؛ $B(7, -1, -2)$ و $C(1, 5, -2)$

(1) أ- بين أن المثلث ABC متقايس الأضلاع .
ب - بين أن الشعاع $\vec{n}(1, 1, 1)$ ناظمي للمستوي (ABC) ثم استنتج معادلة ديكارتية ل (ABC) .

$$(2) (\Delta) \text{ مستقيم تمثيله الوسيطى } \begin{cases} x = -2t \\ y = -2 - 2t \\ z = -3 - 2t \end{cases} / t \in \mathbb{R}$$

أ- بين أن (Δ) عمودي على المستوي (ABC) ثم عين احدائي النقطة G نقطة تقاطعهما .
ب- بين أن G مركز ثقل المثلث (ABC) .

(3) (S) سطح الكرة التي مركزها G وتشمل النقطة A .
أ - اكتب معادلة لسطح الكرة (S) .
ب - ادرس الوضع النسبي ل (S) و (Δ) مع تحديد المجموعة $(\Delta) \cap (S)$.

التمرين الرابع : (07 ن)

I (لتكن الدالة g المعرفة على $]0, +\infty[$ ب : $g(x) = x^2 + 3 - 2 \ln x$)
(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) بين أنه من أجل كل x من $]0, +\infty[$: $g(x) \geq 4$

II (لتكن الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ ب : $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} + \frac{\ln x}{x}$)

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$

(1) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0, +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$

ب- شكل جدول تغيرات الدالة f .

(2) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) . أوجده ثم ادرس الوضع النسبي ل (C_f) و (Δ) .

(3) أ - بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يشمل المبدأ O . جد معادلة له .

ب - احسب $f(1)$ ثم أنشئ (T) و (C_f) .

ج - ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة $f(x) = mx$

$$(4) \text{ أ - بين أن : } \int_{\sqrt{e}}^e \left(\frac{-1}{2x} + \frac{\ln x}{x} \right) dx = \frac{1}{8}$$

ب - استنتج بالسنتمر المربع المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمت :

$$x = e \text{ و } x = \sqrt{e} \text{ ؛ } y = \frac{1}{2}x$$

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :
الموضوع الأول :

التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي كيس U على 10 كرات لا نفرق بينها عند اللمس ، منها خمس كرات بيضاء و ثلاثة حمراء و كرتان خضراوان ، نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الكيس .
(1) أحسب احتمال كل من الحوادث التالية :

A : " من بين الكرات الثلاثة المسحوبة توجد كرة خضراء واحدة فقط " .
 B : " الكرات الثلاثة المسحوبة من نفس اللون " .

(2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق كل مخرج بعدد الألوان الظاهرة في المخرج .
(أ) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X .

(ب) أحسب الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X .

(3) نعتبر الكيس الأول U و كيس آخر V يحوي كرتين بيضاوين و كرتين حمراوان و كرة خضراء .
نرمي زهرة نرد غير مزيف مرقم من 1 الى 6 ، فإذا ظهر الرقم 6 فنسحب كرة من الكيس الأول U وإلا فنسحب كرة من الكيس V .

(أ) بين أن احتمال سحب كرة بيضاء هو $p(B) = \frac{5}{12}$.

(ب) علما أن الكرة المسحوبة هي بيضاء ، فما احتمال أن تكون من الكيس الثاني V ؟

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) نعتبر المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $U_0 = 3$ ومن أجل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{2}{5}U_n + \frac{6}{5}$.

(أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n - 2 > 0$.

(ب) أدرس اتجاه تعير المتتالية (U_n) ، ماذا تستنتج ؟

(2) (V_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $V_n = U_n + \alpha$ حيث α عدد حقيقي .

(أ) عين قيمة العدد الحقيقي α بحيث تكون (V_n) متتالية هندسية .

(ب) نضع $\alpha = -2$ ، أكتب عبارة V_n بدلالة n .

(ج) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث : $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$.

(3) (W_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $W_n = \ln(V_n)$.

(أ) بين أن المتتالية (W_n) حسابية ، ثم أكتب W_n بدلالة n .

(ب) احسب بدلالة n الجداء P_n حيث $P_n = V_0 \times V_1 \times \dots \times V_n$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

- (1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول المركب z الآتية: $(z-4)(z^2-2z+4)=0$
- (2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
نعتبر النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب: $z_A=4$ ، $z_B=1+i\sqrt{3}$ و $z_C=1-i\sqrt{3}$.
(أ) اكتب العدد المركب $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$ على الشكل الأسّي ثم استنتج طبيعة المثلث ABC .
(ب) عين لاحقة النقطة D صورة B بالدوران R الذي مركزه المبدأ O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$.
(ج) عين طبيعة الرباعي $ABDC$.
(د) بين أن العدد $L = \left(\frac{z_B}{2}\right)^{1439} + \left(\frac{z_C}{2}\right)^{2018}$ تخيلي صرف.
- (3) لتكن (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث: $\arg(z+4\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{3} + k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.
(أ) تحقق أن النقطة A تنتمي إلى (Γ) .
(ب) عين المجموعة (Γ) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- الجزء 1:** لتكن الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كمايلي: $g(x) = -x^2 + 1 - \ln x$.
(1) أدرس إتجاه تغير الدالة g .
(2) أحسب $g(1)$ ، ثم إستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .
- الجزء 2:** نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كمايلي: $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{\ln x}{2x}$.
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، حيث $\|\vec{i}\| = 2cm$.
(1) (أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ وفسر النتيجة هندسياً.
(ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
(2) (أ) تحقق أنه من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$.
(ب) أدرس إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
(3) (أ) بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -\frac{1}{2}x + 3$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .
(ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (D) .
(4) (أ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماساً (T) موازياً للمستقيم (D) عند نقطة يطلب تعيين إحداثياتها.
(ب) أكتب معادلة المماس (T) .
(5) أنشئ في المعلم السابق (T) ، (D) و (C_f) .
(6) (أ) بين أن الدالة: $H: x \mapsto \frac{(\ln x)^2}{2}$ أصلية للدالة $h: x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$.
(ب) احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتهما: $x=1$ و $x=e^2$.

الموضوع الثاني :

التمرين الأول: (04 نقاط)

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(1;2;3)$ ، $B(2;1;3)$ و $C(2;-2;0)$.
- بين أن النقط A ، B و C تشكل مستويا.
 - بين أن معادلة المستوي (ABC) هي $x + y - z = 0$.
 - لتكن $D(1;1;4)$ و $E(4;-4;2)$ نقطتين من الفضاء، أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (DE) .
 - أدرس الوضع النسبي بين المستوي (ABC) والمستقيم (DE) .

التمرين الثاني: (05 نقاط)

- f الدالة المعرفة على المجال $I = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$ كمايلي : $f(x) = \frac{3x-1}{2x}$
- (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، المستقيم ذو المعادلة $y = x$.
- (U_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي :
- $$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$
- مثل على محور الفواصل الحدود U_0 ، U_1 ، U_2 و U_3 مبرزاً خطوط الرسم (وذلك على الوثيقة المرفقة).
 - خمن إتجاه تغير المتتالية (U_n) وتقاربها.
 - برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: U_n > 1$.
 - أدرس إتجاه تغير المتتالية (U_n) ، ماذا تستنتج؟ ثم أحسب نهايتها.
 - بين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$.
 - إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
 - استنتج من جديد نهاية المتتالية (U_n) .
 - (V_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كمايلي : $V_n = \frac{U_n - 1}{2U_n - 1}$.
 - بين أن المتتالية (V_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
 - أكتب عبارة U_n بدلالة n .
 - أحسب بدلالة n المجموع S حيث : $S = \frac{V_0 - 1}{U_0} + \frac{V_1 - 1}{U_1} + \frac{V_2 - 1}{U_2} + \dots + \frac{V_n - 1}{U_n}$.

التمرين الثالث: (04 نقاط)

- عين العددين المركبين z_1 و z_2 حيث :
$$\begin{cases} iz_2 + 2z_1 = 1 + 9i \\ 2z_2 + iz_1 = -2 + 8i \end{cases}$$

- (2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
 نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها $z_A = 1 + 3i$ ، $z_B = 2 + 4i$ و $z_C = 1 + z_A$.
 مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z حيث : $z = z_A + k e^{i\frac{\pi}{4}}$ و k يتغير في $\mathbb{R}^+$.
 (ا) عين عمدة للعدد المركب $z - z_A$ وفسر النتيجة هندسيا .
 (ب) تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (γ) ثم عين بدقة المجموعة (γ) .
 (3) نعتبر التحويل النقطي h الذي يحول النقطة M ذات اللاحقة z إلى النقطة M' ذات اللاحقة z' و المعروف بـ : $z' - z = 3(z_G - z)$.
 (ا) عين z_G لاحقة النقطة G مركز ثقل المثلث ABC .
 (ب) بين أن h تحاكي يطلب تعيين عبارته المركبة و عناصره المميزة .
 (ج) تحقق أن النقطة C هي صورة النقطة H منتصف القطعة $[AB]$ بالتحاكي h .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

- الجزء 1:** نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x) = -4e^{2x} + 17e^x - 4$.
 (1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x) = -4(e^x - 4)\left(e^x - \frac{1}{4}\right)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.
الجزء 2: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كمايلي : $f(x) = \frac{(4x+9)e^x - 4x}{9(1-e^x)}$.
 (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
 (1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f(x) = -\frac{4}{9}x + \frac{e^x}{1-e^x}$.
 (2) عين العددين الحقيقيين a و b بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f(x) = ax + b + \frac{1}{1-e^x}$.
 (3) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف .
 (4) (ا) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$: $f'(x) = \frac{g(x)}{9(1-e^x)^2}$.
 (ب) إستنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .
 (5) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f(-x) = -1 - f(x)$. ماذاستنتج ؟
 (6) (ا) بين أن (Δ_1) و (Δ_2) مستقيمان مقاربان للمنحنى (C_f) معادلتهما على الترتيب : $y = -\frac{4}{9}x$ و $y = -\frac{4}{9}x - 1$.
 (ب) أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لكل من المستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .
 (7) أنشئ (Δ_1) ، (Δ_2) و (C_f) .
 (8) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة : $\frac{e^x}{1-e^x} = m$.
 (9) (ا) عين مساحة الحيز $A(\lambda)$ المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ_2) و المستقيمين اللذين معادلتهما :
 $x = -\ln 4$ و $x = \lambda$ مع $\lambda < -\ln 4$.
 (ب) أحسب $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

متقن عبد السلام حسين عين وسارة

وزارة التربية الوطنية

دورة: ماي 2018

امتحان البكالوريا التجريبية

الشعبة: علوم تجريبية.

المدة: 3 سا و 30 دقيقة

اختبار في مادة: الرياضيات

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

- في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ نعتبر النقطة $A(-2; 8; 4)$ والشعاع $\vec{u}(1; 5; -1)$
- عَيّن تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يشمل A وشعاع توجيهه $\vec{u}$.
 - نعتبر المستويين (P) و (Q) المعرفين بمعادلتيهما على الترتيب: $(P): x - y - z = 7$ و $(Q): x - 2z = 11$.
 أ) بَيّن أنّ المستويين (P) و (Q) يتقاطعان في مستقيم (Δ) يُطلب تعيين تمثيل وسيطي له.
 ب) بَيّن أنّ المستقيمين (d) و (Δ) ليسا من نفس المستوي.
 - H و H' نقطتان من الفضاء حيث: $H(-3; 3; 5)$ و $H'(3; 0; -4)$.
 أ) تحقق أنّ H تنتمي إلى (d) و H' تنتمي إلى (Δ) .
 ب) برهن أنّ المستقيم (HH') عمودي على كل من المستقيمين (d) و (Δ) .
 ج) احسب المسافة بين المستقيمين (d) و (Δ) .
 - عَيّن مجموعة النقط M من الفضاء بحيث: $\vec{MH} \cdot \vec{MH'} = 126$.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

- المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ؛ النقط A, B, C لاحتقاتها:
 $z_A = -1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = -1 - i\sqrt{3}$ و $z_C = 2$ على الترتيب.
 أ) بَيّن أنّ النقط A, B, C تنتمي إلى دائرة (γ) يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها، ثم أنشئ النقط A, B, C .
 ب) بَيّن أنّ $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ، ثم استنتج أنّ B هي صورة A بدوران مركزه C يطلب تعيين زاويته.
- (Γ) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث $z = 2(-1 + e^{i\theta})$ مع $\theta \in \mathbb{R}$.
 أ) بَيّن أنّ (Γ) هي دائرة يطلب تعيين مركزها ω ونصف قطرها.
 ب) تحقق أنّ النقطتين A و B تنتميان إلى (Γ) .
- S التشابه المباشر الذي مركزه O ، نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $-\frac{\pi}{4}$.
 أ) جد الكتابة المركبة للتشابه S .

ب) نسمي D صورة النقطة A بالتشابه S ؛ بَيّن أنّ لاحقة النقطة D هي: $z_D = (\sqrt{3} - 1) + i(\sqrt{3} + 1)$

ج) اكتب z_A ثم z_D على الشكل الأسّي واستنتج القيمتين المضبوطتين لكل من $\cos \frac{5\pi}{12}$ و $\sin \frac{5\pi}{12}$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $I = [0;1]$ بـ: $h(x) = 2x - x^2$.

(1) أ) بين أن الدالة h متزايدة تماما على المجال I .

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال I فإن $h(x)$ ينتمي إلى I .

(2) لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = \frac{3}{7}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = h(u_n)$

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$.

ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة.

(3) لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 1 - u_n$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = v_n^2$.

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = v_0^{2^n}$.

ج) استنتج u_n بدلالة n ؛ ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

(I) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + (1-x)e^{-x+2}$.

(1) ادرس تغيّرات الدالة g .

(2) استنتج أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $g(x) \geq 0$.

(II) الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = x - 1 + xe^{-x+2}$.

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب) بين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$ (حيث f' هي مشتقة الدالة f)

ج) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

(3) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-1)]$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى مستقيمه المقارب المائل (Δ) .

ج) بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) يُطلب كتابة معادلة ديكارتية له.

(4) أ) بين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $0,1 < \alpha < 0,2$.

ب) احسب $f(-1)$ ثم ارسم (T) ، (Δ) و (C_f) .

(5) m وسيط حقيقي، ناقش بيانها وحسب قيم m عدد حلول المعادلة: $xe^{-x+2} - 1 - m = 0$.

(6) أ) بين أن الدالة $x \mapsto (-x-1)e^{-x+2}$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x+2}$ على $\mathbb{R}$.

ب) احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما:

$$x = 2 \text{ و } x = 3.$$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني:

التمرين الأول: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، A ، B ، C و D نقط من المستوي لاحقاتها

على الترتيب: $z_A = 1+i$ ، $z_B = -1+3i$ ، $z_C = -3+i$ و $z_D = 1+5i$.

(1) h التحاكي الذي نسبته 2 ويحول A إلى C ، عيّن z_Ω لاحقة النقطة Ω مركز التحاكي h .

(2) لتكن E مرجح الجملة $\{(A;1), (B;-1), (C;1)\}$ و I منتصف القطعة $[BC]$.

(أ) عيّن z_E و z_I لاحقتي النقطتين E و I على الترتيب.

(ب) عيّن مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق : $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \frac{1}{2} \|\vec{MB} + \vec{MC}\|$

(3) (أ) اكتب العدد المركب $\frac{z_I - z_A}{z_E - z_D}$ على الشكل الأسّي.

(ب) استنتج نسبة وزاوية التشابه S الذي يحول E إلى I ويحول D إلى A .

(4) K نقطة من المستوي تحقق : $z_K - z_D = -2e^{i\frac{\pi}{6}}(z_I - z_A)$

أثبت أن K هي صورة النقطة E بدوران مركزه D يطلب تعيين زاوية له.

(5) عيّن مجموعة النقط M من المستوي ذات اللاحقة z بحيث : $z - 1 - i = \frac{4}{z - 1 + i}$

التمرين الثاني: (05 نقاط)

لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـ: $u_1 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n$

(1) احسب u_2 ، u_3 و u_4 .

(2) (أ) بيّن أنه، من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $u_n > 0$.

(ب) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة.

(ج) احسب نهاية المتتالية (u_n) .

(3) من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نضع $v_n = \frac{u_n}{n}$

(أ) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_1 .

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n = \frac{n}{2^n}$

(4) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بـ: $f(x) = \ln(x) - x \ln 2$

(أ) عيّن نهاية الدالة f عند $+\infty$. (ب) استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الثالث: (04 نقاط)

كيس به خمس كريّات حمراء تحمل الأعداد 2، 2، 2، 2، -2 ، 3 وأربع كريّات خضراء تحمل الأعداد 3، 3، 3، -2 وكرة زرقاء تحمل العدد -1.

نسحب من الكيس بطريقة عشوائية كرتين في آن واحد.

(1) احسب احتمال الحصول على:

أ) كرتين من نفس اللون

ب) كرتين من لونين مختلفين

ج) كرتين تحملان عددين جداولهما سالب.

(2) نعرف من أجل كل سحبة من السحبات السابقة المتغير العشوائي X كما يلي:

- إذا سحبنا كرتين تحملان نفس العدد نرفق له العدد نفسه

- إذا سحبنا كرتين تحملان عددين مختلفين نرفق له العدد الأكبر

أ) عيّن قيم المتغير العشوائي X .

ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ، ثم احسب أمله الرياضي.

التمرين الرابع: (04 نقاط)

لتكن f دالة عددية معرفة على $]-1; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{2x}{x+1} - \ln(x+1)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (وحدة الطول $2cm$)

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-1; +\infty[$: $f'(x) = \frac{1-x}{(x+1)^2}$

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

(3) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

(4) أ) بيّن أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين إحداثياتها.

ب) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $3,9 < \alpha < 4$.

ج) ارسم (T) والمنحنى (C_f) .

(5) ناقش بياننا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) = x - 3m$.

(6) F دالة معرفة على $]-1; +\infty[$ ب: $F(x) = (-3-x)\ln(x+1) + 3x$

أ) بيّن أن F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$.

ب) لتكن $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما

$x = \alpha$ و $x = 0$.

- بيّن أن: $A(\alpha) = 4 \left(\frac{\alpha^2 - 3\alpha}{\alpha + 1} \right) cm^2$ ثم أوجد حصرا لـ $A(\alpha)$.