

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي دورة 2025

الشعبة: رياضيات

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 04 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

يحتوي الموضوع على (03) صفحات (من الصفحة 1 من 5 إلى الصفحة 3 من 5)

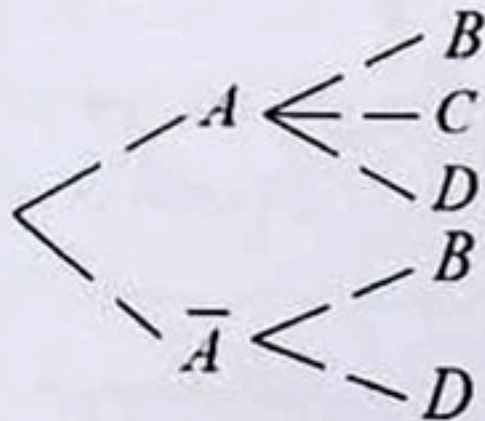
التمرين الأول: (04 نقاط)

يحتوي صندوق U_1 على 12 كرة منها: 3 كرات حمراء ، 4 كرات بيضاء و 5 كرات خضراء
ويحتوي صندوق U_2 على 7 كرات منها: 4 كرات حمراء و 3 كرات بيضاء.
(جميع الكرات متماثلة ولا نفرق بينها باللمس).

نرمي نردا غير مزيف ذا 6 أوجه مرقمة ب: 1 ، 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2

- إذا ظهر الرقم 1 ، نسحب عشوائيا 3 كرات في آن واحد من U_1
- وإذا ظهر الرقم 2 ، نسحب عشوائيا 3 كرات على التوالي من U_2 دون إرجاع.

نعتبر الحوادث:



A : « ظهور الرقم 1 »

B : « الحصول على 3 كرات من نفس اللون »

C : « الحصول على 3 كرات مختلفة الألوان مثلى مثلى »

D : « الحصول على كرتين بالضبط من نفس اللون »

(1) انقل واملأ شجرة الاحتمالات المقابلة.

(2) أ) احسب $P(B)$ ، $P(C)$ ، $P(D)$ ، $P(B \cup C)$ احتمالات الحوادث B ، C ، D ، $B \cup C$ على الترتيب.

ب) بين أن: $P(A \cap \bar{B}) = \frac{41}{66}$

ج) احسب $P_{\bar{B}}(A)$ احتمال سحب 3 كرات من U_1 علما أنها ليست من نفس اللون.

(3) المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لـ 3 كرات كما سبق، عدد الألوان التي تحملها الكرات المسحوبة.

- عين قانون احتمال المتغير العشوائي X ثم احسب أمله الرياضي.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z الآتية:

$$(z^2 + 1)(z^2 - 6z + 13) = 0$$

(2) المستوى المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

A, B, C نقط من المستوى لاحقاتها على الترتيب z_A, z_B, z_C حيث:

$$L = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} \text{ عدد مركب حيث: } z_C = -i, z_B = iz_A, z_A = 2 - 3i$$

(أ) اكتب كلاً من العددين $z_A - z_C$ ، $z_B - z_C$ على الشكل المثلثي.

(ب) عيّن الطويلة وعمدة للعدد المركب L ثم حدّد طبيعة المثلث ABC

(ج) بيّن أن النقط O, A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة التي يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

(د) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع: $S_n = |L| + |L|^2 + \dots + |L|^n$

- احسب بدلالة n المجموع S_n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

(3) z_θ عند مركب حيث: $z_\theta = 1 + \cos(2\theta) - i \sin(2\theta)$ و θ عدد حقيقي يختلف عن $\frac{\pi}{2}$ مع $0 < \theta < \pi$

- بيّن أن $z_\theta = 2 \cos \theta (\cos \theta - i \sin \theta)$ ثم استنتج حسب قيم θ الطويلة وعمدة للعدد z_θ

التمرين الثالث: (05 نقاط)

(1) نعتبر للمعادلة: $(E) \dots 13x - 2y = 35$ ذات المجهولين الصحيحين x و y

(أ) بيّن أنه إذا كانت الثنائية $(x; y)$ حلاً للمعادلة (E) فإن $y \equiv 2[13]$ ثم حلّ المعادلة (E)

(ب) جد كل الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) حيث: $\text{PGCD}(x; y) = 35$

(2) (أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بوالقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 11

(ب) عيّن قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $6n^2 + 1446^{x+y}$ قابلاً للقسمة على 11 والثنائية $(x; y)$ حلّ للمعادلة (E)

(3) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{1\alpha\alpha\beta\beta1}$ في نظام التعداد ذي الأساس 4

ويكتب $\overline{1\alpha\beta13}$ في نظام التعداد ذي الأساس 6

- عيّن α و β ثم اكتب λ في النظام العشري.

(4) a, b عدنان طبيعيان و d قاسمهما المشترك الأكبر.

- حلّ العدد 2025 إلى جُداء عوامل أولية ثم عيّن كل الثنائيات $(a; b)$ حيث: $7(ab)^2 - 3d^4 = 2025$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

(I) 1) g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 1 + xe^x$

- ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم استنتج أنه: من أجل كل عدد حقيقي x ، $1 + xe^x > 0$

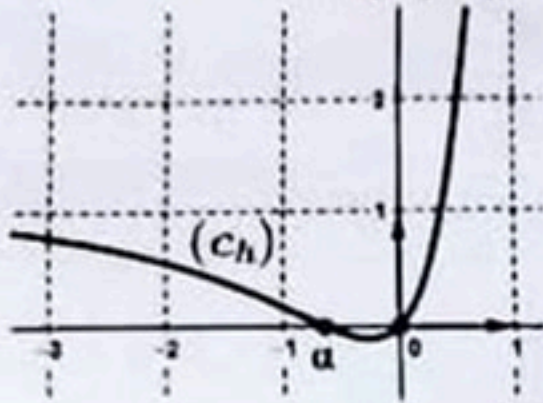
(2) h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = (x^2 + 1)e^{2x} + (x - 2)e^x + 1$

تمثيلها البياني (C_h) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين

فاصلتهما α و 0 ، كما في الشكل المقابل.

(أ) بقراءة بيانية، حدد إشارة $h(x)$ على $\mathbb{R}$

(ب) تحقق أن: $-0,7 < \alpha < -0,6$



(II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x + \frac{2 - 2e^x}{1 + xe^x}$ ، تمثيلها البياني في المستوى

المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (وحدة الطول 2 cm).

(1) (أ) لحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ وبين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

(ب) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = 2x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$

وأن المستقيم (Δ') ذا المعادلة $y = 2x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

(ج) ادرس وضعية كل من (Δ) و (Δ') بالنسبة إلى (C_f)

(2) (أ) بين أنه: من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{2h(x)}{(1 + xe^x)^2}$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

(3) ارسم كلاً من (Δ) ، (Δ') و (C_f) (ناخذ: $f(\alpha) \simeq 0,15$)

(4) (أ) تحقق أنه: من أجل كل عدد حقيقي x ، $1 - \frac{1 - e^x}{1 + xe^x} = \frac{(x+1)e^x}{1 + xe^x}$

(ب) استنتج بالسنتيمتر الفرع حساب A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمت التي

معادلاتها: $y = 2x + 2$ ، $x = 0$ و $x = 1$

(5) k الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $k(x) = f(x^2)$

- دون حساب عبارة $k(x)$ ، حدد اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها.

الموضوع الثاني

يحتوي الموضوع على صفتين (02) (من الصفحة 4 من 5 إلى الصفحة 5 من 5)

التعريف الأول: (04 نقاط)

$$(1) \quad f \text{ الدالة المعرفة على } \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \text{ بـ: } f(x) = \frac{-x^2 + x}{x^2 + 1}$$

- بين أن الدالة f متزايدة تماما.

$$(2) \quad (u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة بـ: } u_0 = -\frac{1}{2} \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = f(u_n)$$

$$(أ) \text{ برهن بالتراجع أنه: من أجل كل عدد طبيعي } n, -1 < u_n \leq -\frac{1}{2}$$

(ب) لرسم اتجاه تغير المتتالية (u_n)

$$(3) \quad (أ) \text{ بين أنه: من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} + 1 \leq \frac{4}{5}(u_n + 1)$$

$$(ب) \text{ استنتج أنه: من أجل كل عدد طبيعي } n, 0 < u_n + 1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{4}{5}\right)^n \text{ ثم احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

$$(4) \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n, \text{ نضع: } S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$- \text{ بين أن: } S_n \leq -2 \left(\frac{4}{5}\right)^n - n + \frac{3}{2} \text{ ثم احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

التعريف الثاني: (04 نقاط)

$$(1) \text{ حل في مجموعة الأعداد المركبة } \mathbb{C} \text{ المعادلة ذات المجهول } z \text{ الآتية: } (iz - 1 + 2i)(z^2 - 4z + 5) = 0$$

(2) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ و A, B, C نقط من المستوي

$$\text{لاحقتها على الترتيب } z_A, z_B, z_C \text{ حيث: } z_A = 2 - i, z_B = \bar{z}_A, z_C = -2 - i$$

$$\text{و } L \text{ عدد مركب حيث: } L = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$$

(أ) اكتب العدد L على الشكل المثلثي ثم حدد طبيعة المثلث ABC

(ب) بين أن النقط A, B, C تنتمي إلى نفس الدائرة التي يُطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

(ج) عين z_D, z_E لاحقي النقطتين D, E على الترتيب حتى يكون الرباعي $BCDE$ معيناً مركزه A

$$(3) \quad z_\theta \text{ عند مركب حيث: } z_\theta = 1 - \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$$

$$- \text{ بين أن } z_\theta = 2 \sin \theta (\sin \theta + i \cos \theta) \text{ ثم استنتج حسب قيم } \theta \text{ الطويلة وعمدة للعدد } z_\theta$$

التعريف الثالث: (05 نقاط)

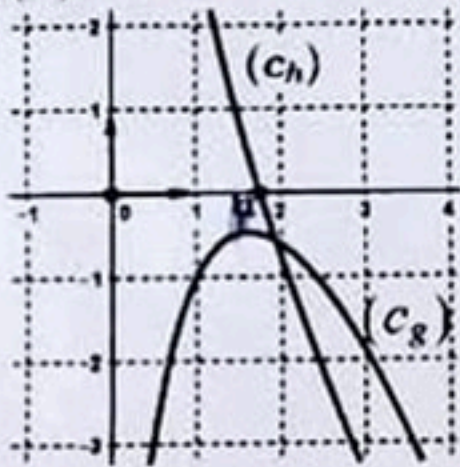
$$(1) \text{ نعتبر المعادلة: } 116x - 81y = 2 \dots (E) \text{ ثلث المجهولين الصحيحين } x \text{ و } y$$

(أ) بين أن العددين 116 و 81 أوليان فيما بينهما.

(ب) حل المعادلة (E) علماً أن الثانية $(7; 10)$ حل لها.

- (2) أ) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n بوالتي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 9
 ب) استنتج حسب قيم العدد الطبيعي n بوالتي القسمة الإقليدية للعدد 7^{2n+1} على 9
 ج) عين الثنائيات الطبيعية $(x; y)$ حلول المعادلة (E) والتي تحقق: $x^y \equiv 4 [9]$
 (3) α, β عدنان طبيعيان أوليان فيما بينهما و a, b عدنان حيث: $a = 7\alpha + 3\beta$ و $b = 5\alpha + 2\beta$
 أ) بين أن العددين a, b أوليان فيما بينهما.
 ب) عين العددين α, β حتى يكون: $a = 116$ و $b = 81$
 التمرين الرابع: (07 نقاط)

- (I) h, g الدالتان المعرفتان على $]0; +\infty[$ ب: $g(x) = -x + (4-x)\ln x$ و $h(x) = 4 - x - 4\ln x$
 $(c_h), (c_g)$ التمثيلان البيانيان للدالتين h, g على الترتيب.
 (c_h) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة α
 كما في الشكل المقابل.



- بقراءة بيانية، حدد إشارة كل من $h(x)$ و $g(x)$
 ثم تحقق أن: $1,7 < \alpha < 1,8$

- (II) f الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ ب: $f(x) = (-x + 2\ln x)\ln x$
 (c_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
 أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

- ب) بين أنه: من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$
 ج) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

- (2) بين أن للمنحنى (c_f) مماسين (T) و (T') معامل توجيه كل منهما -1 ، يُطلب تعيين معادلة لكل منهما.

- (3) أ) بين أنه: من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $f''(x) = \frac{h(x)}{x^2}$

- ب) استنتج أن للمنحنى (c_f) نقطة انعطاف، يطلب تعيين فاصلتها.

- (4) احسب $f(e^2)$ ثم ارسم (T) ، (T') و (c_f) (ناخذ: $f(\alpha) \simeq -0,35$ ، $4 - 8\ln 2 + 8(\ln 2)^2 \simeq 2,3$)

- (5) أ) بين أن الدالة $k: x \mapsto x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x$ أصلية للدالة $x \mapsto (\ln x)^2$ على $]0; +\infty[$
 ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة، بين أن: $\int_1^e x \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{4}$

- ج) استنتج بوحدة المساحة، حساب M مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (c_f) والمستقيمت التي معادلاتها: $x = e$ و $x = 1$ ، $y = 0$

- (6) φ الدالة المعرفة على $]0; +\infty[$ ب: $\varphi(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$

- دون حساب عبارة $\varphi(x)$ ، حدد اتجاه تغير الدالة φ ثم شكل جدول تغيراتها.