تمارين الدعم / السلسلة رقم 2 ـــــ المستوى :3ع ت + 3ر +3ت ر

# الدوال العدديـــــــــة / من تقديم الأستاذ : بك علي

الشمـــولية + الدقـــة + الحداثـــة + التميـــز : تجدونـــه في ←←←← تقديم الأستاذ : بك علي

## التمرين1

لتكن $f$ دالة عددية قابلة للاشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها . لها جدول التغيرات التالي :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $1$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $3$ | ↗ | $+\infty$ |

تكتب عبارة $f(x)$ على الشكل : $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ حيث $a,b,c$ أعداد حقيقية.

1) احسب $f'(x)$

2) اعتمادا على جدول تغيرات الدالة $f$ :

أ) عيّن الأعداد الحقيقية $a,b,c$ .

ب) عين $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f(x)$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f(x)$ و فسّر النتيجة بيانيا .

جـ ) قارن بين صورتي العددين $\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{2}$ بالدالة $f$ معللا إجابتك .

3) نأخذ فيما يلي : $c=\frac{1}{4}$ ; $b=1$ ; $a=1$ وليكن $(C)$ المنحنى البياني الممثل لتغيرات الدالة $f$ في معلم متعامد ومتجانس .

أ) بين أن المنحنى $(C)$ يقبل مستقيما مقاربا $(\Delta)$ معادلته : $y=x+1$ .

ب) ادرس وضعية المنحنى $(C)$ بالنسبة إلى المستقيم $(\Delta)$ .

ج) أثبت أن النقطة $\omega(1;2)$ مركز تناظر للمنحنى $(C)$.

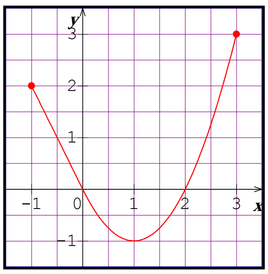
د) عين نقط تقاطع المنحنى $(C)$ مع حامل محور الفواصل ثم ارسم المنحنى $(C)$

4) $\lambda$ عدد حقيقي ، عيّن بيانيا ، حسب قيم $\lambda$ عدد حلول المعادلة $f(x)=|\lambda|$

**5) لتكن الدالة $g$ المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ $g(x)=|f(x)|$**

**بين كيف يستنتج $(C_g)$ إنطلاقا من $(C_f)$ ثم أنشئه في نفس المعلم السابق.**

## التمرين2




التمثيل البياني المقابل هو لدالة $g$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $[-1;3]$

1) **بقراءة بيانية** :عين إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g'(x)$ .

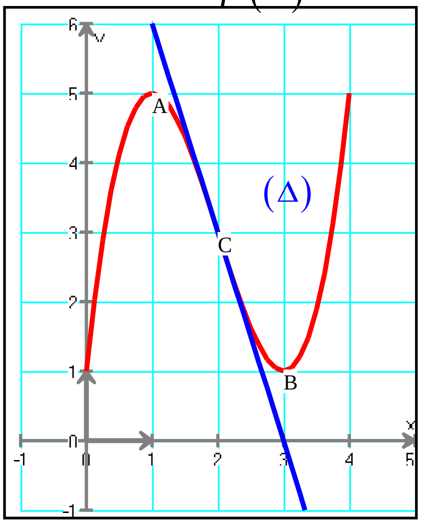
2)نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $[-1;3]$ بـ $f(x)=[g(x)]^2$ .

أحسب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ و $g'(x)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$ .

3) شكل جدول تغيرات الدالة $f$، ثم أنشئ $(C_f)$ في م.م.م.

4) ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x)=2m-3$

## التمرين3




التمثيل البياني $(C_f)$ المقابل و المرسوم في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ هو لدالة $f$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $[0;4]$.

النقط $A$، $B$ و $C$ هي نقط من $(C_f)$ بحيث أن مماسي $(C_f)$ عند كل من $A$ و $B$ يوازيان محور الفواصل بينما مماس $(C_f)$ عند النقط $C$ هو $(\Delta)$.

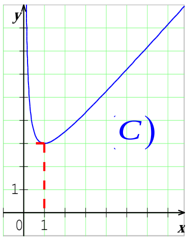
لدينا: $A(1;5)$، $B(3;1)$ و $C(2;3)$.

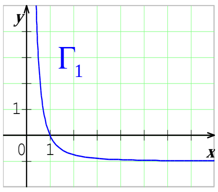
1. بقراءة بيانية : أحسب $f'(1)$، $f'(2)$، $f'(3)$، $f''(2)$. أكتب معادلة للمماس $(\Delta)$.
2. شكل جدول تغيرات الدالة $f$ ثم استنتج جدول تغيرات الدالة $g$ المعرفة على المجال $[0;4]$ بـ $g(x)=\dfrac{5}{f(x)}$، ثم انشئ $(C_g)$ في معلم متعامد و متجانس

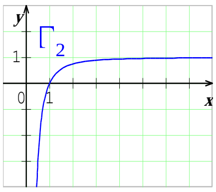
## التمرين 4

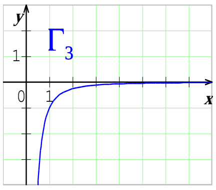
نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $]0;+\infty[$ حيث $(C)$ هو تمثيلها البياني التالي:

أحد المنحنيات التالية هو المنحني $\Gamma$ الممثل للدالة $f'$ ، ما هو؟




## التمرين5

نعتبر الدالة $J$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $J(x)=x^3+3x^2+3x-1$

1 . أدرس تغيرات الدالة $J$.

2. بين أن المعادلة $J(x)=0$ تقبل حلاوحيدا $\alpha$ على المجال $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right]$ ، ثم استنتج اشارة $J(x)$

3. $f$ دالةعددية معرفةعلى $D=IR-\{-1\}$ كمايلي : $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{(x+1)^2}$

- أحسب النهايات للدالة $f$ عند أطراف مجالي تعريفها
- بين أنه من أجل كل $x$ من $D$: $f'(x)=\dfrac{J(x)}{(x+1)^3}$ ، ثم استنتج تغيرات الدالة $f$ وشكل جدول تغيراتها .
- بين أن : $f(\alpha)=\dfrac{3}{(\alpha+1)^2}$ ثم أستنتج حصرا لـ : $f(\alpha)$

- أحسب $f(-2)$ ماذا تستنتج بالنسبة لـ $(c_f)$
- بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل بالنسبة لـ $(c_f)$
- أدرس وضعية $(c_f)$ بالنسبة $(\Delta)$ وأرسمهما في معلم متعامد ومتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$
- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول المعادلة : $f(x)=x+m$

4 . $K$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ $K(x)=\dfrac{|x^3|-3x^2+3|x|-2}{(|x|-1)^2}$

أ) بين أن $K$ زوجية ب) إشرح كيف يستنتج $(C_K)$ إنطلاقا من $(C_f)$، ثم أنشئه في نفس المعلم السابق.

## التمرين6 (بكالوريا2014 ع.ت)

I) – لتكن $g$ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2x^3-4x^2+7x-4$.

1) أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة $g$ على $\mathbb{R}$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

2) أ) بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث $0{,}7<\alpha<0{,}8$.

ب) استنتج حسب قيم العدد الحقيقي $x$ إشارة $g(x)$.

II) – نعتبر الدالة العددية $f$ المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-2x+1}{2x^2-2x+1}$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) أ) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)+\dfrac{1-3x}{2(2x^2-2x+1)}$.

ب) استنتج أنّ المنحنى $(C_f)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا $(\Delta)$ يُطلب تعيين معادلة له.

جـ) ادرس الوضع النسبي للمنحنى $(C_f)$ و $(\Delta)$

3) أ) بيّن أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{x.g(x)}{(2x^2-2x+1)^2}$ حيث $f'$ مشتقة الدالة $f$.

ب) استنتج إشارة $f'(x)$ حسب قيم $x$ ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة $f$. (نأخذ $f(\alpha)\approx-0{,}1$ )

4) احسب $f(1)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.

5) أنشئ المستقيم $(\Delta)$ و المنحنى $(C_f)$.

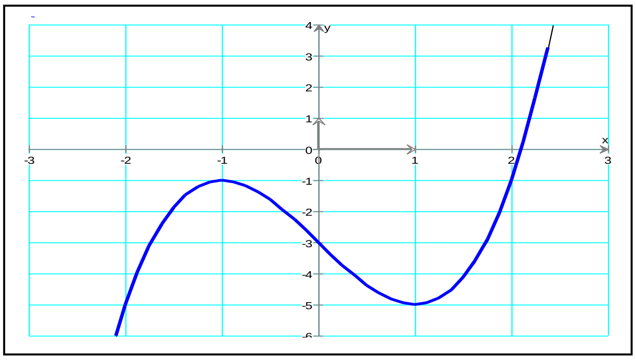
6) لتكن $h$ الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=\dfrac{x^3-4x^2+2x-1}{2x^2-2x+1}$.

و $(C_h)$ تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) تحقق أنّه من أجل كل $x$ من $\mathbb{R}$ : $h(x)=f(x)-2$.

ب) استنتج أنّ $(C_h)$ هو صورة $(C_f)$ بتحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه، ثم أنشئ $(C_h)$.

## التمرين 7 (بكالوريا أجنبية)



I – المنحني $(C)$ المقابل هو التمثيل البياني للدالة العددية $g$ المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يأتي : $g(x)=ax^3+bx+c$

1– أوجد الأعداد : $a\ ,\ b\ ,c$

2– أكتب جدول تغيرات الدالة $g$

3– بيّن ان المعادلة $x^3-3x-3=0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ من المجال $\left]2\ ;\ \frac{5}{2}\right[$

**ـ باستعمال طريقة التنصيف عين حصرا لـ $\alpha$ سعته 0,125**

**ـ باستعمال جدول قيم عين حصرا لـ $\alpha$ سعته $10^{-1}$ أي 0.1**

4– استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II– $f$ دالة معرفة على $D=\mathbb{R}-\{-1\ ;1\}$ بالعبارة : $f(x)=\frac{2x^3+3}{x^2-1}+1$

و ليكن $(\Gamma)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ من $\mathbb{R}-\{-1\ ;1\}$ : $f'(x)=\frac{2x.g(x)}{(x^2-1)^2}$

ب) عيّن دون حساب $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$ وفسّر النتيجة بيانيا.

ج) احسب النهايات عند حدود $D$

د) شكل جدول تغيرات الدالة $f$.

هـ) بيّن أن : $f(\alpha)=3\alpha+1$ ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$

و) بين أن المستقيم $(\Delta)$ ذا المعادلة : $y=2x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني $(\Gamma)$

ثم ادرس وضعية المنحني $(\Gamma)$ بالنسبة للمستقيم $(\Delta)$

ي) ارسم $(\Gamma)$

**ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي $m$ عدد وإشارة حلول كل من المعادلتين $f(x)=m-1$ ، $f(x)=m^2$.**

## التمرين 8 (بكالوريا 2010 ت.ر)

الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$

و $(C_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ– أثبت أن الدالة $f$ فردية.

ب– أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x$ لدينا: $f'(x)=1+\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

جـ– ادرس تغيرات الدالة $f$ .

2) أ– اكتب معادلة للمماس $(T)$ للمنحنى $(C_f)$ في النقطة ذات الفاصلة 0 .

ب– ادرس وضعية $(C_f)$ بالنسبة إلى $(T)$ واستنتج أن $(C_f)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها.

جـ– بيّن أن المستقيم $(d)$ ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب للمنحنى $(C_f)$ في جوار $+\infty$، ثم استنتج معادلة المستقيم المقارب الآخر $(d')$.

د– ارسم $(d)$ و $(d')$ و $(C_f)$ في المعلم السابق.

3) $g$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=|x|\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

أ– بيّن أن الدالة $g$ زوجية.

ب– انطلاقا من $(C_f)$ ارسم $(C_g)$ منحنى الدالة $g$ في نفس المعلم السابق.

## التمرين 9

$f$ الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي : $f(x)=|x-1|+\dfrac{x+3}{x-1}$

وليكن $(C_f)$ منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

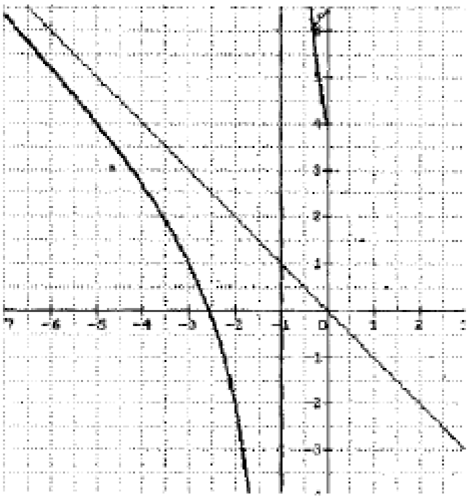
1. اكتب عبارة $f(x)$ دون رمز القيمة المطلقة .
2. ادرس تغيـــــرات الدالــــة $f$ ثم شكل جدول تغيراتها.
3. أثبت أن المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته : $y=x$ مستقيم مقارب للمنحني $(C_f)$ في جوار $(+\infty)$ و المستقيم $(\Delta')$ الذي معادلته : $y=-x+2$ مستقيم مقارب للمنحني $(C_f)$ في جوار $(-\infty)$
4. اكتب معادلة المماس $(T)$ عند نقطة تقاطع المنحني $(C_f)$ مع محور التراتيب .
5. أثبت أن المنحنـــــي $(C_f)$ يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها $\alpha$ حيث : $\dfrac{-3}{5}\prec\alpha\prec\dfrac{-1}{2}$
6. ارسم $(C_f)$ و $(T)$
7. $(\Delta_m)$ مستقيم معادلته : $y=mx-m+1$ حيث $m$ وسيط حقيقي

أ) بين أن جميع المستقيمات $(\Delta_m)$ تشترك في نقطة واحدة .

ب) ناقش حسب قيم $m$ عدد حلول المعادلة : $f(x)=mx-m+1$

## التمرين 10

I) $f$ دالة معرّفة على $I=]-\infty;-1[\cup]-1;0]$ بـ: $f(x)=-x+\dfrac{4}{x+1}$




$(c_f)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس كما هو مبين في الشكل.

1) أ) أحسب نهايات $f$ عند الحدود المفتوحة لـ I

ب) بقراءة بيانية و دون دراسة اتجاه تغيرات $f$ شكّل جدول تغيراتها.

2) $g$ دالة معرفة للمجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $g(x)=x+\dfrac{4}{x+1}$

$(c_g)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد تجانس.

أ) أحسب نهاية $g$ عند $+\infty$ .

ب) تحقق من أن $(c_g)$ يقبل مستقيما مقاربا مائلاً $(\Delta)$ عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ج) أدرس تغيرات $g$ .

II) $k$ دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $k(x)=|x|+\dfrac{4}{x+1}$

1) أ) أحسب $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ >}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ ، $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ <}}\dfrac{k(h)-k(0)}{h}$ ماذا تستنتج ؟

ب) أعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة.

2) أكتب معادلتي المماسين $(\Delta_1)$ و $(\Delta_2)$ عند النقطة التي فاصلتها $x_0=0$.

3) أرسم $(\Delta_1)$، $(\Delta_2)$ و $(C_k)$.