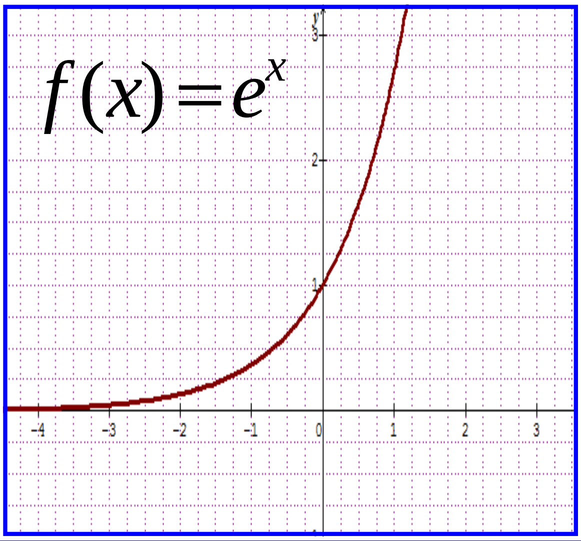
رياضيات
سلسلة 4
2016-2017
المستوى
3 ع ت - 3 ع د
إعداد الأستاذ
مراد لحسن

الدالة الأسية



وقل رب زدني علما

ما يجب على الطالب أن يعرف

1- معنى دالة أسية
2- التحكم في خواص الدالة الأسية
3- استعمال الحاسبة لحساب قيم دوال أسية.
4- حساب النهايات للدوال الأسية
5- توظيف خواص الدالة الأسية
6- دراسة الدوال الأسية .

http://bacsuc.blogspot.com

قال رسول الله صلى الله عليه و سلم

الدالة الأسية

$$f(x)=e^x$$

f: هي الدالة الأسية النيبيرية

$$\mathbb{R} \to]0\ ;+\infty[$$
$$x \to f(x)=e^x$$

العدد e يسمى أساس اللوغريتم النيبيري

$e^0=1$; $e^1=2.71$

قواعد الحساب

$\forall\ (x;y)\in R^2$

$$e^x.e^y=e^{x+y}\ ;\ \frac{e^x}{e^y}=e^{x-y}\ ;\ e^{-x}=\frac{1}{e^x};(e^x)^n=e^{nx}$$

خواص

لحل المعادلات: $x=y \Leftrightarrow e^x=e^y$

لحل المتراجحات: $x\succ y \Leftrightarrow e^x\succ e^y$

$0\prec e^x\prec 1 \quad :x\prec 0$

$e^x\succ 1 \quad :x\succ 0$

$\forall\ x\in R\ ;\ e^x\succ 0$

لحساب النهايات و إزالة عدم التعيين نستعمل النهايات الشهيرة التالية

1	$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$
2	$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$
3	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=0$
4	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n}=+\infty$
5	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}=1$

الدالة المشتقة

$$f(x)=e^{u(x)}$$
$$f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$$

قال رسول الله صلى الله عليه و سلم
خيركم من تعلم القرآن و علمه

هل تعلم ؟
إذا حفظت في اليوم 3 آيات من القرآن الكريم فإنك ستحفظ القرآن كله في مدة 5 سنوات و 10 أشهر و 13 يوما

النجاح شعور والناجح يبدأ رحلته بحب النجاح والتفكير بالنجاح .. فكر وأحب وابدأ رحلتك نحو هدفك .. تذكر دائماً : " يبدأ النجاح من الحالة النفسية للفرد ، فعليك أن تؤمن بأنك ستنجح – بإذن الله – من أجل أن يكتب لك فعلاً النجاح".

الناجحون لا ينجحون وهم جالسون لاهون ينتظرون النجاح، ولا يعتقدون أنه فرصة حظ، وإنما يصنعونه بالعمل والجد والتفكير والحب واستغلال الفرص والاعتماد على ما ينجزونه بأيديهم .

تمارين و مسائل

تمرين 1: تأكد من صحة التالية :

$$1)\ \frac{e^x}{2+e^x}=\frac{1}{2e^{-x}+1},\quad 2)\ \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1},\quad 3)\ \left(e^x+e^{-x}\right)^2=\frac{e^{4x}+1}{e^{2x}}+2$$

تمرين 2: حل المعادلات التالية :

$$1)\ e^{2x-3}=1,\quad 2)\ e^{x+3}=e^{\frac{4}{x}},\quad 3)\ e^x+2e^{-x}-3=0,$$

$$4)\ \left(e^{2x}-e\right)\left(e^{-2x}+2\right)=0,\quad 5)\ e^{2x}+e^{1-2x}-e-1=0$$

تمرين 3: حل المتراجحات التالية :

$$1)\ e^{3x}\leq 1,\quad 2)\ e^{2x^2}\leq e^{5x+3},\quad 3)\ 2e^{2x}-5e^x+2\prec 0$$

$$4)\ \left(2e^x-4\right)\left(e^x-1\right)\leq 0,\quad 5)\ \frac{(x-1)\left(e^x+1\right)}{e^x-1}\leq 0$$

تمرين 4: احسب الدالة المشتقة :

$$1)\ f(x)=(x+1)e^{(2x-1)},\quad 2)\ f(x)=e^{x^2+2x}$$

تمرين 5: احسب النهايات التالية:

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x+1}}{x}\quad 2)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{x^4}\quad 3)\ \lim_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)$$

$$4)\ \lim_{x\to+\infty}xe^{-2x}\quad 5)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{4x}\quad 6)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2+3x}$$

$$7)\ \lim_{x\to-\infty}\left(2x^2-1\right)e^{3x-1},\quad 8)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2+2}$$

$$9)\ \lim_{x\to+\infty}\left(x^2+3x+4\right)e^{\frac{1}{2}x}$$

$$10)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-2e^{2x}+1}{4x^2}$$

تمرين 6:

نعتبر الدالة f المعرفة على R كما يلي :

$$f(x)=-x-2+e^x$$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o\ ;\vec{i}\ ;\vec{j}\ )$

1) احسب النهايات عند أطراف مجموعة التعريف.

2) ادرس تغيرات الدالة f .

3) احسب : $\lim_{x\to\infty}\left(f(x)+x+2\right)$

ماذا تستنتج ؟

4) ادرس الوضع النسبي للمستقيم (Δ) ذو المعادلــة : y=-x-2 و المنحنى (C_f)

5) انشىء (Δ) و (C_f)

تمرين 7:

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0\ ;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o\ ;\vec{i}\ ;\vec{j}\ )$

1) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2) بين أن منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا .

3) ادرس تغيرات الدالة f .

4) عين فاصلة نقطة تقاطع المستقيم المقارب مع المماس (Δ) لمنحنى الدالة f في النقطة ذات الفاصلة 0 .

5) انشىء (Δ) و (C_f)

حكمة

ما تحصل عليه دون جهد تفقده دون ندم

تمرين 8:

1) نعتبر كثير الحدود : $p(x)=x^3-x^2-x+1$

حلل p(x) ثم حل المتراجحة : $p(x)\geq 0$.

2) نعتبر الدالة f المعرفة على R^* كما يلي :

$$f(x)=(x-2-\frac{1}{x})e^x$$

(C_f) منحناها البياني في معلم $(o;\vec{i};\vec{j})$

أ) احسب نهايات الدالة f عند 0 و $+\infty$ و $-\infty$

ب) احسب الدالة المشتقة للدالة f وتحقق أن :

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2(x+1)}{x^2}e^x$$

ج) ادرس تغيرات الدالة f

د) عين نقط تقاطع منحناها البياني مع محور الفواصل

هـ) انشيء (C_f) في المجال $[-3;3]$

تمرين 9:

لتكن الدالة f المعرفة على R كما يلي :

$$f(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$$

حيث c,b,a اعداد حقيقية .

(C_f) تمثيلها البياني في معلم $(o;\vec{i};\vec{j})$

(C_f) يشمل النقطة A(0;1) و يقبل مماسا يوازي حامل محور الفواصل في النقطة فاصلتها 1 . و العدد المشتق للدالة f عند 0 هو 6 - .

1) عين مشتقة الدالة f : c,b,a .

2) عين الأعداد الحقيقية c,b,a .

3) نعتبر الدالة f المعرفة على R كما يلي :

$$f(x)=(x^2-5x+1)e^{-x}$$

أ) احسب f(0) .

ب) احسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$

جـ) ادرس تغيرات الدالة f .

تمرين 10 :

لتكن الدالة f المعرفة على R^* كما يلي :

$$f(x)=\frac{x-4}{x}e^x$$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$

1) احسب نهايات الدالة f عند 0 و $-\infty$

فسر النتيجة هندسيا .

2) احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

3) ادرس تغيرات الدالة f .

4) اكتب معادلة المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة ذات الفاصلة 2 .

5) انشيء المنحنى (C_f)

تمرين 11 :

الجزء الأول: لتكن الدالة g المعرفة على R^* بـ :

$$g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}+1$$

أ) أحسب نهايات الدالة g.

ب) أحسب $g'(x)$ ثم حدد إشارتها

ج) شكل جدول تغيرات الدالة g .

د) حدد إشارة g(x) .

الجزء الثاني: لتكن الدالة f المعرفة على R^* بـ :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, x\in\mathbb{R}^* \\ f(0)=0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

أ) أدرس استمرارية الدالة f عند القيمة: $x_0=0$

ب) أحسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0}\frac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0}\frac{f(x)}{x}$ ماذا تستنتج ؟

أكتب معادلتي المماسين $(\Delta 1)$ و $(\Delta 2)$ للمنحنى (C_f) عند النقطة **o** مبدأ المعلم .

ج) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{x}{2}\right]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\frac{x}{2}\right]$

د) أستنتج أن لـ (C_f) مستقيم مقارب مائل (Δ) يطلب كتابة معادلة له.

هـ) أحسب $f'(x)$ من أجل كل x من R* ثم تحقق أن :

$$f'(x)=\frac{g(x)}{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$$

وأستنتج إشارتها .

و) احسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$

ي) شكل جدول تغيرات الدالة f

ك) أرسم $(\Delta 1)$ و $(\Delta 2)$ و (Δ) و (C_f)

سحر الرياضيات

مشكلة Syracuse

مشكلة محيرة ظهرت في **Syracuse** (مدينة بالولايات المتحدة الأمريكية) و شكلت فرضية لم يوجد لها برهان ليومنا هذا ؟! .

مفادها : **خذ عدد طبيعي كيفي**

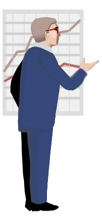
1 - إذا كان زوجيا اقسمه على 2 .

2 - إذا كان فرديا اضربه في 3 و ضف له 1 .

3 - واصل بنفس الطريقة , سوف تصل إلى1 .

مثال : n =5 . (1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 5)

n =32 . (1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32)



تذكر دائما أن المحاولة هي أول طريق للنجاح.

مسائل متنوعة

مسألة 1: (تنتهي بمناقشة بيانية لمستقيم يتحرك أفقيا)

أ) نعتبر الدالة g المعرفة على R كما يأتي : $g(x) = (3-2x)e^{x} + 2$

1 . أحسب نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و $+\infty$.

2 . أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها .

3 . بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث : $\alpha \in]1,68 ; 1,69[$

4 . استنتج إشارة $g(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x .

ب) نعتبر الدالة f المعرفة على R بالعلاقة : $f(x) = \frac{e^{x}+4x-1}{e^{x}+1}$

نسمي (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

1 . أحسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

2 . أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) = \frac{2g(x)}{(e^{x}+1)^2}$

3 . بين أن : $f(\alpha) = 4\alpha - 5$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4 . أدرس إتجاه تغير الدالة f ؛ثم شكل جدول تغيراتها .

5 . بين أن المستقيم $(\Delta): y = 4x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

6 . أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

7 . أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

8 . أرسم كلا من (T) ، (Δ) و (C_f) .

9 . ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد و إشارة حلول المعادلة:

$$me^{x} - 4x + m + 2 = 0$$

مسألة 2: (تنتهي بمناقشة بيانية لمستقيم يتحرك مائلا)

أ) نعتبر الدالة h المعرفة على R بالعلاقة التالية : $h(x) = (x-1)e^{-x} + 2$

1 . أدرس تغيرات الدالة h.

2 . بين أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث: $]-0,38 ; -0,37[$.

3 . استنتج إشارة $h(x)$.

ب) نعتبر الدالة f المعرفة على R بالعلاقة : $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. (وحدة الطول هي $2cm$)

1 . بين أنه من أجل كل x من R : $f'(x) = h(x)$

2 . أدرس تغيرات الدالة f .

3 . بين أن المستقيم (d) ذو المعادلة: $y = 2x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)عند $+\infty$.

4 . أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل .

5 . بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف .

6 . بين أن : $f(\alpha) = \frac{2\alpha^2+\alpha-1}{\alpha-1}$.

7 . أرسم المستقيم المقارب (d) و المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha \approx -0,375$) .

ج) (Δ_β) مستقيم معادلته : $y = 2x + \beta$ بحيث β عدد حقيقي .

1 . عين β حتى يكون (Δ_β) مماسا للمنحنى (C_f) في نقطة يطلب تعيين إحداثياتها .

2 . ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي β عدد حلول المعادلة التالية : $\frac{x}{e^{x}} + 1 - \beta = 0$

قيم مهارتك بواسطة: (Bac Antilles Guyane sept 2008 S)

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}$ (وحدة الطول $2\,cm$) .

نسمي (c) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ- احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$.

ب- بيّن أن المستقيم (D_1) الذي معادلته $y=x+2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (c) عند $-\infty$.

جـ- ادرس الوضعية النسبية للمنحني (c) بالنسبة للمستقيم (D_1) .

2) أ- أثبت أنه ، من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=\left(\dfrac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$.

ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ وشكل جدول تغيّراتها .

3) أ- ما ذا يمكن القول عن المماس (D_2) للمنحني (c) في النقطة I ذات الفاصلة $\ln 3$ ؟

ب- باستعمال تغيرات الدالة f ، ادرس وضعية المنحني (c) بالنسبة إلى (D_2) .

4) أ- بيّن أن معادلة المماس (D_3) للمنحني (c) في النقطة ذات الفاصلة 0 هي : $y=\dfrac{1}{4}x+1$.

ب- ادرس ، على المجال $]-\infty;\ln 3[$ ، وضعية المنحني (c) بالنسبة للمماس (D_3)

(يمكن استعمال المشتقة الثانية f'' للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f''(x)=\dfrac{12e^x(e^x-3)}{(e^x+3)^2}$) .

5) نقبل أن النقطة I هي مركز تناظر للمنحني (c) .

- ارسم (D_1) ، (D_2) ، (D_3) و (c) .

ادخل في صلب الموضوع : باكالوريا الجزائر 2012 علوم تجريبية الموضوع 2

I) لتكن g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=1-xe^x$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ، ثم شكل جدول تغيّراتها.

3) أ– بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيدا α على المجال $[-1;+\infty[$.

ب– تحقق أنّ $0{,}5<\alpha<0{,}6$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;2]$ كما يلي: $f(x)=(x-1)e^x-x-1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) لتكن f' مشتقة الدالة f . بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;2]$ فإن: $f'(x)=-g(x)$.

استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $]-\infty;2]$ ، ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f.

3) بيّن أنّ $f(\alpha)=-\left(\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha}\right)$، ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$. (تُدوّر النتائج إلى 10^{-2}) .

4) أ– بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y=-x-1$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب– ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

5) أ– بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلّين x_1 و x_2 حيث $-1{,}6<x_1<-1{,}5$ و $1{,}5<x_2<1{,}6$.

ب– أنشئ (Δ) و (C_f).